Omschrijven van de stijfheidsmatrix Qn op de externe vrijheden

Omschrijven van de stijfheids-matrix $\bar{Q}_n$ op de externe vrijheden

juli - 1971

WE 71-19

L.G.J. Janssen

L.G.J. Janssen

Inhoudsopgave.

Afleiding van de te berekenen matrixvermenigvuldigingen.

In de topologische beschrijving is ingelezen welke verplaatsingen behoren tot:

interne vrijheden	u_i
externe vrijheden	u_e
voorgeschr. verpl.	u_o
onderdr. verpl	u_n

In de geometrische beschrijving is, bij het opstellen van de totale stijfheidsmatrix $\bar{Q}_n$, rekening gehouden met de bovenstaande verdeling. Hierdoor kreeg $\bar{Q}_n$ de volgende vorm:

$$\bar{Q}_n = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ii} & \bar{Q}_{ie} & \bar{Q}_{io} & \bar{Q}_{in} \\ \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie} & \bar{Q}_{ee} & \bar{Q}_{eo} & \bar{Q}_{en} \\ \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{io} & \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{eo} & \bar{Q}_{oo} & \bar{Q}_{on} \\ \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{in} & \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{en} & \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{on} & \bar{Q}_{nn} \end{bmatrix}$$

Ook de belastingsvectoren worden op deze manier gerangschikt.

Dus: $\overset{\blacktriangledown}{\bar{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_i & \bar{f}_e & \bar{f}_o & \bar{f}_n \end{bmatrix}$

De vergelijking $\bar{f} = \bar{Q}_n \, \bar{u}$ is dus:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_e \\ \bar{f}_o \\ \bar{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ii} & \bar{Q}_{ie} & \bar{Q}_{io} & \bar{Q}_{in} \\ \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie} & \bar{Q}_{ee} & \bar{Q}_{eo} & \bar{Q}_{en} \\ \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{io} & \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{eo} & \bar{Q}_{oo} & \bar{Q}_{on} \\ \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{in} & \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{en} & \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{on} & \bar{Q}_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_e \\ \bar{u}_o \\ \bar{u}_n \end{bmatrix}$$

met als onbekenden $\bar{f}_n$, $\bar{f}_o$, $\bar{u}_i$ en $\bar{u}_e$ en bekenden $\bar{f}_e$, $\bar{f}_i$, $\bar{u}_o$ en $\bar{u}_n$.

De vergelijking wordt zo omgeschreven, dat in het rechterlid alleen nog $\bar{u}_e$ als onbekende voorkomt.

Voor de eerste term van $\bar{f}$ kunnen we schrijven:

$$\bar{f}_i = \bar{Q}_{ii}\,\bar{u}_i + \bar{Q}_{ie}\,\bar{u}_e + \bar{Q}_{io}\,u_o$$

waaruit volgt:

$$\bar{u}_i = \bar{Q}_{ii}^{-1}\left\{\bar{f}_i - \bar{Q}_{ie}\,\bar{u}_e - \bar{Q}_{io}\,\bar{u}_o\right\}$$

Voor de tweede term van $\bar{f}$ kunnen we schrijven:

$$\bar{f}_e = \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\,\bar{u}_i + \bar{Q}_{ee}\,\bar{u}_e + \bar{Q}_{eo}\,\bar{u}_o. \qquad \text{invullen van } \bar{u}_i \text{ geeft:}$$

$$\bar{f}_e = \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\left\{\bar{Q}_{ii}^{-1}\left(\bar{f}_i - \bar{Q}_{ie}\,\bar{u}_e - \bar{Q}_{io}\,\bar{u}_o\right)\right\} + \bar{Q}_{ee}\,\bar{u}_e + \bar{Q}_{eo}\,\bar{u}_o$$

Stellen we nu $\bar{Q}_{io}\,\bar{u}_o = \bar{f}_{io}$ en

$\bar{Q}_{eo}\,\bar{u}_o = \bar{f}_{eo}$.

En schrijven we de vergelijking nu zo, dat alleen $\bar{u}_e$ in het linkerlid als onbekende overblijft, dan krijgen we:

$$\left(\bar{Q}_{ee} - \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\,\bar{Q}_{ii}^{-1}\,\bar{Q}_{ie}\right)\bar{u}_e = \left(\bar{f}_e - \bar{f}_{eo}\right) - \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\,\bar{Q}_{ii}^{-1}\left(\bar{f}_i - \bar{f}_{io}\right)$$

Als uit de bovenstaande vergelijking $\bar{u}_e$ is opgelost dan wordt $\bar{u}_i$ bepaald uit:

$$\bar{u}_i = \bar{Q}_{ii}^{-1}\left(\bar{f}_i - \bar{f}_{io}\right) - \bar{Q}_{ii}^{-1}\,\bar{Q}_{ie}\,\bar{u}_e$$

Te bepalen is dus $\bar{Q}_{ee} - \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\,\bar{Q}_{ii}^{-1}\,\bar{Q}_{ie}$

en $\overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\,\bar{Q}_{ii}^{-1}$ welke de getransponeerde is van $\bar{Q}_{ii}^{-1}\,\bar{Q}_{ie}$.

In de twee te berekenen matrix-vermenigvuldigingen komt de term $\bar{Q}_{ii}^{-1}$ voor.

De matrix $\bar{Q}_{ii}$ heeft de afmetingen [1:AV[1], 1:AV[1]], met AV[1] is het aantal inwendige graden van vrijheid. Over het algemeen is $\bar{Q}_{ii}$ dus een grote matrix, waardoor het inverteren een bewerkelijke zaak wordt.

Dit inverteren zullen we voor de berekening van $\overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\bar{Q}_{ii}^{-1}\bar{Q}_{ie}$ op de volgende manier ontwijken.

Eerst wordt de matrix $\bar{Q}_{ii}$ gedecomponeerd met behulp van een CHOLESKI-subroutine. $\bar{Q}_{ii} = \overset{\blacktriangledown}{R}R$ of $\bar{Q}_{ii}^{-1} = R^{-1}\{\overset{\blacktriangledown}{R}\}^{-1}$

Dus de vermenigvuldiging wordt nu:

$$\overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}R^{-1}(\overset{\blacktriangledown}{R})^{-1}\bar{Q}_{ie}$$

Stel $\overset{\blacktriangledown}{B} = \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}R^{-1}$ en dus $B = (\overset{\blacktriangledown}{R})^{-1}\bar{Q}_{ie}$

of $\bar{Q}_{ie} = \overset{\blacktriangledown}{R}B$

Uit deze laatste vergelijking is B te bepalen met CHOLESKI-SOLUTION. Deze procedure lost de matrix B kolom voor kolom op. De procedure CHOLESKI-SOLUTION is enigszins aan de hier voorkomende omstandigheid aangepast en de naam is gewijzigd, om vergissingen te voorkomen, in CHOLMAT1

Als B berekend is wordt $Q_{sh} = \bar{Q}_{ee} - \overset{\blacktriangledown}{\bar{Q}}_{ie}\bar{Q}_{ii}^{-1}Q_{ie}$

gelijk aan $Q_{sh} = \bar{Q}_{ee} - \overset{\blacktriangledown}{B}B$.

De berekening $\bar{Q}_{ii}^{-1}\bar{Q}_{ie}$ kunnen we splitsen in:

$$R^{-1}(\overset{\blacktriangledown}{R})^{-1}\bar{Q}_{ie} = R^{-1}B$$

Stel $C = \bar{Q}_{ii}^{-1}\bar{Q}_{ie} = R^{-1}B$ dus $B = RC$ en hieruit is C op te lossen met de procedure CHOLMAT2

De procedure CHOLBAND(n, m, a, fail)

n = aantal rijen van de matrix a.

m = aantal kolommen van de matrix a.

a = pos. definiete bandmatrix.

fail = label waar naartoe gegaan wordt als a niet pos. def. is.

De procedure bepaalt de matrix R uit a = R'R.
R wordt in a geschreven.

```
procedure CHOLBAND(n, m, a, fail);
value n,m; integer n, m; array a; label fail;
begin integer i, j, k, l, m1; real d;
      m1 := m-1;
      for k := 1 step 1 until n do
      begin d := a[k,1]; if d≤0 then goto fail;
            a[k,1] := d := sqrt(d);
            if m>n-k+1 then m1 := n-k;
            for j := 1 step 1 until m1 do a[k,j+1] := a[k,j+1]/d;
            for j := 1 step 1 until m1 do
            begin l := j+k;
                  for i := 0 step 1 until m1-j do
                  a[l,i+1] := a[l,i+1] - a[k,j+1]*a[k,j+i+1]
            end
      end
end decompositie van a in R(t)*R;
```

De procedure CHOLMAT1(n, m, r, a, b);

n = aantal rijen van de matrix a en b

m = aantal kolommen van de matrix a

r = aantal kolommen van de matrix b

a en b zijn matrices.

De procedure berekent $b = a^{-1} * B$, waarbij rekening wordt gehouden met het feit dat a een gedecomponeerde stijfheidsmatrix is. De matrix B wordt kolom voor kolom berekend.

B wordt in b geschreven.

```
procedure CHOLMAT1(n, m, r, a, b);
value m, n, r; integer m, n, r; array a, b;
begin integer i, j, k, m1; real d; array e[1:m];
      m1 := m-1;
      for k:= 1 step 1 until n do
      begin if k>n-m+1 then m1 := n-k;
            for i:= 1 step 1 until m1 do e[i] := a[k, i+1]; d:= a[k, 1];
            for i := 1 step 1 until r do
            begin b[k, i]:= b[k, i]/d;
                  for j:= 1 step 1 until m1 do
                  b[k+j, i]:= b[k+j, i] - e[j] * b[k, i]
            end
      end
end CHOLMAT1;
```

De procedure SUBMAT(n, r, b, c)

b en c zijn matrices met de grenzen b[1:n, 1:r] en c[1:r, 1:r]

De procedure berekent $c = c - b'b$:

```
procedure SUBMAT(n, r, b, c);
value n, r; integer n, r; array b, c;
begin integer i, j, k; real d;
      for i := 1 step 1 until r do for j := 1 step 1 until r do
      begin d := c[i, j];
            for k := 1 step 1 until n do d := d - b[i, k] * b[k, j];
            c[i, j] := c[j, i] := d
      end
end SUBMAT;
```

De procedure CHOLMAT2 (n, m, r, a, b)

n = aantal rijen van de matrices a en b.

m = aantal kolommen van de matrix a

r = aantal kolommen van de matrix b

De procedure berekent b := a * B, waarbij rekening wordt gehouden met het feit dat a een gedecomponeerde stijfheids-matrix is.
De matrix B wordt kolom voor kolom berekend.
B wordt in b geschreven.

```
procedure CHOLMAT2 (n, m, r, a, b);
value m, n, r; integer m, n, r; array a, b;
begin integer i, j, k, m1; real d; array e[1:m];
      m1 := m-1;
      for k := n step -1 until 1 do
      begin if k < m then m1 := k-1;
            for j := 1 step 1 until m1 do e[j] := a[k-j, j+1]; d := a[k, 1];
            for i := 1 step 1 until r do
            begin b[k, i] := b[k, i]/d;
                  for j := 1 step 1 until m1 do
                  b[k-j, i] := b[k-j, i] - e[j] * b[k, i]
            end
      end
end CHOLMAT2;
```

Overzicht van het „Omschrijven van de stijfheidsmatrix $\bar{Q}n$ op de externe vrijheden"

In de geometrische beschrijving zijn de matrices $\bar{Q}ee$, $\bar{Q}ii$ en $\bar{Q}ie$ gevormd. De bewerkingen, die op deze matrices in dit gedeelte, worden uitgevoerd zijn achtereenvolgens:

- CHOLBAND[AV[1], bb, Qii, fail];

- CHOLMAT1[AV[1], bb, AV[2], Qii, Qie];

- SUBMAT[AV[1], AV[2], Qie, Qee];

- CHOLMAT2[AV[1], bb, AV[2], Qii, Qie];

- Wegschrijven naar de magneetband van
  Qee, Qii, Qie en het array Npe[1:Np, 1:3], welk in het eerste deel van dit blok gevormd is.