

La educacion matematica al nivel universitario

Citation for published version (APA):

van Lint, J. H. (1979). La educacion matematica al nivel universitario. In *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática / preparado por la Comision Internacional de Educación Matemática* (pp. 71-91). (Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática / preparado por la Comision Internacional de Educación Matemática, 1979). UNESCO.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1979

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

CAPITULO IV

LA EDUCACION MATEMATICA AL NIVEL UNIVERSITARIO

J. H. van Lint

INTRODUCCION

Este capítulo trata fundamentalmente de la educación de los matemáticos, aunque en la Sección 3 se discuten algunas tendencias relativas a disciplinas que necesitan la matemática como herramienta. No se tratan los cursos de matemática accidentales, seguidos por alumnos de distintas áreas como materia optativa. Ciertamente que algunas sugerencias que pueden ser útiles para un país, no necesariamente sirven para todos; sin embargo, esperamos que todos los lectores del capítulo encuentren algo que pueda serles útil. Por otra parte, para cualquier información complementaria no incluida por falta de espacio, ruego a los lectores interesados me escriban directamente y procuraré ayudarles en lo posible. Un informe muy útil puede ser mencionado desde ya: se trata del titulado "Matemática en India: frente al desafío" (1973). Otro informe con título muy parecido, referente a Europa, apareció hace algunos años (Fiala, 1970).

Vamos a hacer algunos comentarios que estimamos necesarios, sobre la marcha seguida para la redacción del capítulo. En noviembre de 1975 enviamos un esquema del Capítulo a 200 universidades de todo el mundo, incluyendo varias preguntas y solicitando información. El autor está muy agradecido a los colegas que tuvieron la amabilidad de enviar sus respuestas, a veces en forma de extensos y excelentes informes, que fueron muy útiles para mí. El capítulo intenta exponer todas las tendencias internacionales y espero que muchos de mis corresponsales reconocerán su contribución, hecha a través de las respuestas a mi cuestionario.

La versión final del capítulo ha sido hecha después del Congreso Internacional de Karlsruhe, habiendo incorporado sugerencias y correcciones debidas a participantes del Congreso y a los miembros del panel de expertos en el tema de que trata el capítulo. Agradezco profundamente la ayuda internacional tenida en este sentido, que me ayudó a tomar la responsabilidad por el contenido del capítulo. Para información de los lectores, incluyo la siguiente lista de países que han contribuido a la redacción del capítulo: Canadá, Estados Unidos de América, Costa Rica, Venezuela, Brasil, Argentina, Irlanda, Reino Unido, Noruega, Suecia, Dinamarca, Países Bajos, Alemania, Francia, Suiza, Italia, Checoslovaquia, Bulgaria, Libia, Egipto, Uganda, Sud Africa, Líbano, Kuwait, Qatar, Bangladesh, India, Japón, Singapur, Australia, Nueva Zelandia. Además, debo mencionar a Ghana, Israel y URSS, por sus contribuciones durante el Congreso de Karlsruhe.

De acuerdo con esta introducción, el presente capítulo contiene cuatro secciones: 1. Tendencias curriculares (contenidos y objetivos); 2. Estructura del programa (métodos educacionales); 3. Matemática como una materia menor; 4. Misión de los profesores universitarios de matemática.

Dentro de cada sección discutiremos primero las tendencias y objetivos existentes, para pasar luego a los logros conseguidos respecto de los mismos y a sus tendencias actuales. Discutiremos también algunos problemas referentes al tema y sus posibles soluciones.

1. Tendencias curriculares

La educación de los matemáticos, al nivel de Bachiller, Master, Licenciado o Doctor (Ph.D), ha sido hecha durante muchos años bajo la idea de que los alumnos iban a ser matemáticos investigadores, futuros profesores universitarios o algo parecido. Incluso los matemáticos que luego fueron profesores de segunda enseñanza o se emplearon en la industria, fueron casi siempre entrenados como matemáticos investigadores. Sin embargo, esto no ha sido así en todos los países y el modelo está ahora cambiando en todas partes, es decir, los objetivos de la educación matemática en las universidades son actualmente mucho más diversificados que antes. Mencionemos, por ejemplo, que los estudios de Bachiller en los Estados Unidos de América han tenido casi siempre por objetivo la preparación de estudiantes aptos para seguir estudios superiores en escuelas de graduados, tendencia que actualmente está cambiando, dándose a los alumnos una educación más balanceada, que conduzca a un título que pueda ser el final de los estudios. Al mismo tiempo se procura, cada vez más, que el título de Bachiller sea preparatorio para estudios a nivel de graduado, en campos distintos de la matemática. Para información sobre los estudios a este nivel en los Estados Unidos de América, durante los últimos cinco años, nos referimos a la obra de Botts y Fey (1976).

En muchos países se han establecido carreras terminales cortas. Por ejemplo, son bastante comunes, cursos de 2 años para programadores y estadísticos. Para un plan de estudios referente a comercio y economía, puede verse MacDonald (1976). El desarrollo de planes balanceados como los mencionados, opuestos a la idea de especialización, es una tendencia que parece obligada por las necesidades de conseguir empleo.

Otros motivos que afectan al curriculum, son los cambios filosóficos. En algunos países, cierta interpretación de la idea de "igualdad" de las personas, ha conducido a una actitud igualitaria en los estudios, resultando un descenso de nivel en los currículos.

Un problema todavía no resuelto, a juzgar por muchas situaciones reales, es la idea de descomponer la educación matemática en etapas sucesivas, cada una de las cuales, no sólo sea el paso necesario para pasar a la siguiente, sino que posea un contenido adecuado para poder considerarse etapa final de un cierto grado o diploma, que sea útil para ciertos empleos. En un sistema de este tipo, el primer nivel cubriría la matemática básica y en los sucesivos niveles irían apareciendo las especializaciones. Cierta experiencia al respecto se encuentra en Bulgaria (Iliev, 1976).

1.1 Los primeros años (conducientes al grado de Bachiller o análogos)

Vamos a considerar a continuación los problemas referentes a la educación de los estudiantes que entran en la Universidad después de haber tenido algún tipo de educación secundaria, con la intención de proseguir estudios de matemática.

1.1.1 Cursos más abstractos

Hace veinte años que el bourbakismo empezó a dejar sentir su influencia en los primeros años de la educación matemática. Los cursos tradicionales de cálculo y geometría fueron reemplazados por cursos más abstractos, por ejemplo, se introdujo topología general y espacios métricos en las etapas iniciales del curriculum universitario. Incluso la integración abstracta y la integral de Lebesgue se dieron en los primeros años. El hecho más significativo fue la desaparición de la geometría, que se transformó en puramente algebraica (álgebra lineal). Probablemente el proceso empezó en Fran-

cia, donde la introducción de la abstracción en los primeros años universitarios fue más fácil, debido al elevado nivel de la enseñanza secundaria en este país. Por mucho tiempo, puede decirse que el incremento de la abstracción fue una tendencia general en todas partes, acompañada de un pretendido y acentuado "rigor". De los informes recibidos, parece deducirse que únicamente unos muy pocos países han escapado a este proceso (nosotros conocemos únicamente el Japón y la URSS), y muchos corresponsales indican que la abstracción sigue en aumento en su país. Sin embargo, de la mayoría de las respuestas parece deducirse que la tendencia más difundida es la de frenar el proceso y en muchos países se nota ya una reacción contra esta excesiva abstracción y rigor. De manera general, se lamenta la falta de motivación en muchas partes de la matemática y el olvido de la intuición en los cursos.

Es difícil medir el efecto causado por esta abstracción. Sin embargo, parece existir la sensación de que ella ha conducido a una comprensión del material, haciendo más difícil para los alumnos la absorción de los contenidos y su relación con problemas concretos, por ejemplo, con problemas de la física. Es significativo que en la mayoría de las universidades de los Estados Unidos de América y del Reino Unido se tiene el sentimiento de haber ido demasiado lejos. El efecto ha sido que muchos alumnos han aprendido las reglas del juego, con pocas ideas dentro, y que los alumnos más flojos se han perdido completamente. Esta es un área en la que sería muy deseable una discusión internacional, para que los países que todavía no han cometido ningún error al respecto, puedan estar prevenidos. Naturalmente que el lenguaje de los espacios métricos y del álgebra lineal han representado una mejora y que ellos quedarán para siempre, junto con algunos aciertos en las notaciones. Sería muy interesante hacer un balance entre los nuevos métodos que han sido considerados exitosos y los tópicos sobre análisis, geometría, aplicaciones físicas, etc. que han desaparecido, y no deberían haberlo hecho.

1.1.2 Nuevos temas

Aparte del cambio de estilo a que nos hemos referido, otra tendencia significativa ha sido la introducción de nuevos temas en el curriculum de los primeros años universitarios. En primer lugar debemos mencionar la estadística, que ha sido introducida prácticamente en todas partes. En algunos países el cambio ha sido más fácil, debido a que la teoría de la probabilidad había ya sido introducida en la escuela secundaria (aunque hay ciertas dudas de que los alumnos, a ese nivel, aprendan realmente algo acerca de la probabilidad). Un programa recomendable se encuentra en *A Compendium of CUPM Recommendations*, Vol. II, (1973)". En algunos lugares se han introducido también algunos temas de investigación operativa.

Continuando con la lista de los nuevos temas introducidos, encontramos las ciencias de la computación (llamadas en algunas partes informática). Estos temas, lo mismo que la teoría de probabilidad y la estadística ya mencionados, suelen ser temas obligatorios. De las ciencias de la computación, lo mínimo requerido es, en general, un curso de programación. Otros temas son algoritmos, lenguajes, análisis numérico elemental. Nuevamente nos referimos al *A Compendium of CUPM Recommendations*, Vol. II, p. 571-627, donde el tema principal es la introducción de aspectos computacionales en diferentes partes del curriculum.

Una tendencia más reciente es la introducción de una selección de temas de "matemática discreta" en los primeros años, por ejemplo, en los Estados Unidos de América, Europa Oriental, Países Bajos, Dinamarca. Hay muchas razones para ello, como ser sus estrechas vinculaciones con las aplicaciones, estadística y computación. Otra importante posibilidad es la de ofrecer mayor atracción para ciertos cursos, que de otro modo podrían asustar o alejar a ciertos estudiantes. Tal vez lo más importante de la matemática discreta es la posibilidad que ella ofrece de encontrar problemas que el estudiante puede redescubrir, lo que es más difícil en las materias más abstractas del currículum.

Naturalmente que la introducción de nuevas materias significó la desaparición de otras. Una de ellas fue la geometría. Por otra parte, en casi todas partes, la cantidad de física obligatoria para todos los alumnos de matemática ha disminuido significativamente y en algunos países ha desaparecido del todo. Es seguro que, a la larga, esto será perjudicial. En algunas universidades, los cursos sobre los nuevos temas antes mencionados son optativos, y reemplazan muchas veces cursos de análisis "duro" y otras materias más difíciles, con lo cual hay el peligro de un descenso de nivel y de una especialización prematura.

Como desarrollo en el próximo futuro, es de esperar el crecimiento de los cursos orientados hacia la computación (comparar las CUMP recomendaciones, vol. II), más énfasis en el tratamiento algorítmico de la matemática (comp. Cap. XIII) y una creciente influencia de las calculadoras de mano sobre el currículum, probablemente ya desde la escuela secundaria (comp. el NSF Report, 1976). Al considerar estas tendencias y otras innovaciones, hay que tener en cuenta, sin embargo, que el análisis básico, álgebra lineal y la teoría elemental de probabilidades, siguen siendo las materias más importantes y posiblemente las suficientes para la mayoría de los estudiantes.

1.1.3 Nivel de los alumnos al ingresar

En esta sección vamos a considerar las tendencias acerca de los niveles de los alumnos que ingresan a la universidad. La educación matemática en los niveles elemental y medio ha cambiado en los últimos años aún más que en la universidad, y empiezan a sentirse los efectos de ello. Algunas fuentes informan de una habilidad creciente en los alumnos para hacer abstracciones (lo que puede o no ser útil; comp. Cap. III, 3.4). En algunos países, la introducción de la teoría de probabilidades en las escuelas secundarias ha tenido efectos favorables. Por otra parte, es cierto que el uso temprano del álgebra lineal se considera ventajoso, pero el precio que hay que pagar por ello es muy alto. De todas las partes del mundo se oye la queja de que debido a la eliminación de la geometría euclidiana, la mayoría de los alumnos carecen prácticamente de conocimiento geométrico e intuición, y, por tanto, hay que dedicar mucho tiempo a ayudar a los estudiantes a adquirir estas bases.

Algunos corresponsales han observado que, en su país, el objetivo de la educación secundaria, no es preparar a los alumnos para la educación terciaria, sino prepararlos para la vida como ciudadanos. Esto es, a menudo, una reacción contra el dominio de las universidades sobre el último ciclo de la enseñanza secundaria. En los países en que lo dicho es verdadero, la preparación para la educación terciaria ha pasado a ser una ocupación preliminar de las universidades. En opinión de algunos participantes en la Tercera Conferencia Internacional del ICME sobre Educación Matemática (Karlsruhe, 1976), aún cuando actualmente la educación secundaria en matemáticas es menos conveniente que antes para la educación universitaria, proporciona, en cambio, una mejor educación para la mayoría de los alumnos, que no van a seguir estudios matemáticos superiores.

Es prácticamente universal la queja de que las habilidades calculatorias de los estudiantes al entrar a la universidad, han decrecido fuertemente. Lo mismo parece cierto para otras habilidades, como lectura y redacción. (Algunas personas de más edad afirman que esta queja ha existido siempre).

No siempre, pero con bastante frecuencia, se dice que la "nueva matemática" ha sido un fracaso, en parte porque se quisieron hacer muchos cambios rápidamente, después de muchos años de inmovilidad, y en parte porque los profesores no estaban preparados para el cambio, ni tuvieron suficiente material a su disposición (ver el capítulo VIII, 2.1). Son bien conocidas opiniones en pro y en contra (ver, por ejemplo, el proyecto del Dr. J. Hunter de la Universidad de Glasgow, para medir el estado de preparación de los alumnos al entrar a la universidad). Sin embargo, en los Estados Unidos de América la nueva matemática se ha aplicado durante casi 20 años, de manera que el repentino descenso en la preparación de los alumnos de los primeros años de la universidad, no puede ser debido únicamente a la matemática moderna. Probablemente las causas son de naturaleza social y sería muy importante encontrarlas.

Junto con el cambio de los temas matemáticos, en las escuelas secundarias se han introducido muchos temas nuevos, con lo cual el número de horas de clase de matemáticas ha disminuido en muchos países. De la misma manera que los alumnos han disminuido sus habilidades calculatorias, parece que también son menos capaces para tratar problemas de varios pasos. En algunas universidades ha sido necesario introducir cursos auxiliares para los nuevos alumnos. En otras, se sospecha que habrá que disminuir los estándares de exigencias. Es posible que la disminución de nivel sea también debido al enorme crecimiento del número de alumnos que ingresan a las universidades. En primer lugar, esto significa que la base cultural y social de los estudiantes actuales es diferente de lo que era anteriormente. Ello implica, además, un aumento de las tareas educativas de las universidades. Además, muchos estudiantes están menos motivados de lo que debieran para seguir estudios universitarios, y muchos de ellos son incapaces de terminar los cursos tradicionales, lo cual hace que haya que intensificar la labor de consejo y dirección de los alumnos, lo que supone desgaste de energía por parte del cuerpo docente en tareas que no son propiamente de enseñanza. Es probable que haya que poner un examen al final del primer año de universidad y estructurar el curriculum de manera que el resultado del examen sirva para indicar la probabilidad de que el alumno termine sus estudios en un tiempo razonable. Parece que esto es mejor que un examen de ingreso, pues posibilita los estudios de alumnos capaces pero insuficientemente preparados en la escuela secundaria. Naturalmente que si se sigue el criterio de un examen al final del primer año, no deberá extrañar una gran disminución en el número de alumnos en este momento.

Aparte de las observaciones hechas, el autor tiene la impresión personal de que cada año los alumnos son menos capaces de expresarse razonablemente en su propio idioma, lo cual naturalmente tiene un efecto perjudicial para el estudio de la matemática.

Es difícil esperar una solución fácil a los problemas mencionados en esta sección. El tópico de la "nueva matemática" por sí solo, ya sería tema suficiente para largas discusiones. Sin embargo, de los hechos mencionados, observados por muchas autoridades, parece deducirse la necesidad futura de que se establezca un contacto mucho mayor entre los programas y métodos de las enseñanzas secundaria y terciaria. Puede citarse respecto de este punto un informe de la Sociedad Alemana de Matemática referente a la insuficiente preparación de los estudiantes universitarios (Deutsche Mathematiker Vereinigung, Denkschrift, 1976). El hecho de que muchos corresponsales mencionaran la necesidad de una enseñanza universitaria preliminar para remediar deficiencias prueba que no hay suficiente coordinación entre las tareas correspondientes a las enseñanzas secundaria y universitaria (ver también el capítulo III, 3.6).

Una reunión sobre la enseñanza de la matemática al nivel universitario, que tuvo lugar en Estrasburgo en 1969, señaló como una de sus conclusiones que la preparación preuniversitaria de los que quieren seguir estudios universitarios en matemática, debe contener álgebra lineal, funciones elementales y algo de cálculo, la terminología y notación de la teoría de conjuntos, la noción de grupo y de isomorfismo de grupos mediante ejemplos y algo de combinatoria (Fiala, 1970). A mi parecer, a esta lista debería incluirse visión geométrica (aunque debería especificarse lo que se desea a este respecto), habilidades manipulativas y tal vez algo de la teoría de probabilidades. Pero, incluso sin estos añadidos, es dudoso que las recomendaciones de la reunión de Estrasburgo puedan llevarse a cabo en la educación secundaria actual.

Con referencia al nivel de los estudiantes que ingresan a los departamentos de matemática de países en desarrollo, puede observarse que por no ser la matemática suficientemente valorizada por las autoridades, las posibilidades de los matemáticos no son tantas como las que tienen en otras carreras (el sueldo de los matemáticos suele ser menor), lo cual se refleja en el nivel de los ingresantes. Esta tendencia debería corregirse.

1.1.4 El contenido no matemático de los planes de estudio

Es muy difícil señalar tendencias generales para los contenidos no matemáticos de los planes de estudio universitarios (para matemáticos). Al respecto, hay enormes diferencias de un país a otro. En muchos países fueron necesarias algunas exigencias de idiomas (como preparación de estudios futuros) y ello sigue siendo cierto, si bien en muchas partes el conocimiento necesario de idiomas se adquiere en la segunda enseñanza.

Los objetivos de la educación terciaria pueden variar, desde una preparación para futuros estudios matemáticos, hasta una amplia educación general con acento hacia la matemática. En general, los países de habla inglesa, todavía conservan programas amplios y generales, mientras que en los países europeos hay currícula que contienen únicamente matemática, física y mecánica. Sin embargo, se nota una fuerte tendencia a la disminución de los cursos de física obligatorios para los alumnos de ciencias matemáticas, y va disminuyendo también el número de alumnos que eligen física en los casos en que ésta es una materia optativa.

En algunas universidades, la gran cantidad de alumnos, ha dado lugar al establecimiento de cursos paralelos, por ejemplo, cursos de física para matemáticos (en vez de conjuntamente para físicos y matemáticos). Aunque parezca extraño, ha habido muchas quejas de que este sistema ha motivado un descenso de nivel de la física enseñada a los matemáticos. Estos hechos y la existencia de muchas otras áreas en que la matemática puede ser aplicada a un razonable nivel (como la economía), ha motivado una disminución, tanto por parte de los alumnos como de la universidad, en el interés de la física en la educación matemática. Incluso en algunas universidades, la física ha desaparecido completamente de los planes de estudio de las carreras matemáticas. Actualmente, como una reacción a la excesiva abstracción de los últimos años, se vuelven a poner, como materias obligatorias para matemáticos, mecánica y física.

Otra tendencia general es que ha crecido en todas partes el número de materias optativas no matemáticas para los estudiantes de matemática. Aunque esto varía mucho de un lugar a otro, se pueden mencionar cursos de economía, computación, ciencias naturales, etc. e incluso, de manera más general, se han introducido materias como geografía o geología. A menudo, por ejemplo en los Estados Unidos de América y en el Reino Unido prácticamente cualquier materia puede considerarse optativa para la carrera de matemática, en cuyo caso se disminuye el número de materias obligatorias.

Considerando los países en que el grado de Bachiller es solamente la preparación para estudios superiores, y no un grado con el cual se pueden terminar los estudios, se nota la tendencia de que los cursos no matemáticos sean menos, en general reducidos a estadística y computación, los cuales suplen algunos cursos de matemática que se han suprimido.

1.1.5 Modelos matemáticos

Un tema interesante, todavía no muy extendido, pero que se está poniendo en marcha en varios países (por ejemplo Estados Unidos de América, Reino Unido, Francia, Países Bajos, Escandinavia) es la construcción de *modelos matemáticos* (ver el capítulo XII y también Maki y Thompson, 1973). Hay muchos motivos para la introducción de este tema, por ejemplo la disminución de los cursos de física, el aumento de las disciplinas en que aparecen problemas matemáticos interesantes, el hecho de que solamente una parte de los alumnos serán matemáticos de tipo académico, etc. Generalmente se trata de enfatizar los principios que están detrás de la construcción de los modelos matemáticos y mostrar la manera como los modelos sirven para la comprensión de la situación que se trata de describir. Se recomienda que los problemas sean elegidos dentro de una gran variedad de temas. No hay mucha experiencia sobre estos cursos, que por otra parte son difíciles de enseñar, pues dependen mucho de cuestiones no matemáticas, como la habilidad para plantear y entender situaciones prácticas. Por otra parte, si estos cursos se quieren enseñar demasiado temprano, aparece la dificultad de no poder contar con los conocimientos matemáticos necesarios. Se espera que el número de estos cursos aumentará en el futuro. El diseño y estructuración de los mismos da mucho trabajo, así que, para evitar duplicación, sería deseable que los contenidos, resultados, experiencias de clase, etc. de estos cursos se publicaran en revistas matemáticas apropiadas, como la *Educational Studies in Mathematics* o el *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Sobre este tema, el lector puede ver el capítulo 3.3.2 de *Adapting University Mathematics to Current and Future Educational Needs* (London Math. Soc., 1975) y también las CUPM Recommendations y Noble (1967), Gross (1972).

1.1.6 Ingeniería matemática

Hace más de diez años que en algunos países existen instituciones que ofrecen la carrera de *ingeniería matemática*, por ejemplo, las universidades tecnológicas de los Países Bajos, de Darmstadt, Viena, Graz, algunas escuelas de ingeniería de Francia y algunas instituciones del Reino Unido y Suecia. Puesto que el nombre "ingeniería matemática" puede no ser familiar, vamos a pasar a definirlo. En primer lugar, no es lo mismo que matemática aplicada (comparar Seidel, 1973 y SIAM Review, 1975, 541-557). Tampoco estamos pensando en cursos breves sobre matemática industrial, con períodos de trabajo en la industria (cursos "sandwich"). En relación con esto, en el cuestionario que enviamos a muchas instituciones para preparar el presente informe, preguntábamos si los currícula de las universidades y de los institutos tecnológicos se desarrollaban por separado (en los Países Bajos, Dinamarca y Argentina la respuesta fue que sí, en Francia no). La cuestión se presta a confusión, puesto que hay una gran variedad de institutos técnicos o tecnológicos. En este capítulo nos referimos únicamente a instituciones que ofrecen una educación tecnológica al nivel universitario. Muchos países tienen institutos tecnológicos de un nivel considerablemente inferior al universitario, pero éstos los dejamos aparte, aunque a veces han intentado imitar los currícula universitarios para mejorar su imagen. En otros países existen universidades tecnológicas, pero cuyo departamento de matemática ofrece la misma educación que las universidades.

Lo más cercano a lo que entendemos por ingeniería matemática, es la posibilidad de especializarse en matemática ofrecida por algunos departamentos de ingeniería o de física (por ejemplo en Suecia). Estoy convencido de que para el futuro es muy importante que en cada país exista la posibilidad de obtener una educación en ingeniería matemática. Para los países en desarrollo esto es esencial, pero lo es igualmente para los países que han estado produciendo demasiados matemáticos académicos en potencia. Por otra parte, los futuros profesores de matemática cumplirán mejor con su trabajo si han sido educados con una buena base de aplicaciones.

El principio fundamental, detrás del nombre "ingeniero matemático" es que se trata de una persona capaz de entender los problemas de los matemáticos no profesionales, encontrarles la solución y luego explicarla a los usuarios (comp. McLone, 1973). Una larga y muy útil discusión sobre lo que se desea a este respecto, puede verse en "Education and Applied Mathematics" (SIAM Review, 1967), donde todavía se le da el nombre de matemática aplicada. Una descripción muy cuidada, incluyendo un programa posible, se encuentra en "Mathematical engineering, a five-year program" p. 649-683 de las CUPM Recommendations.

Un importante problema al respecto, es que los profesores de matemática y los consejeros de estudios de alumnos universitarios, sepan bien lo que deben ser los programas de ingeniería matemática. Todavía hoy no es raro que un profesor de enseñanza media de los Países Bajos advierta a un alumno interesado en matemática que no vaya a una universidad tecnológica, porque en ella no se enseña la "verdadera matemática", y esto es también común en otros países.

1.1.7 Oportunidades de elección para los alumnos

¿Cuáles son las tendencias referentes a las materias optativas que pueden elegir los alumnos en su carrera? Al preparar este informe mi opinión era que el número de opciones iba en aumento, opinión basada en el conocimiento de programas en los que hace algunos años no había ninguna opción y que posteriormente las hubo.

Por los informes recogidos de distintos países, parece ser que en los primeros años hay en general muy poca elección posible. En los institutos en que los primeros años son preparatorios, existe en general la posibilidad de elección entre algunas pocas materias, que en general son prácticamente fijas. En muchas universidades de los Estados Unidos de América y en el Reino Unido (más generalmente, en todos los países en que se puede terminar con un grado de bachiller) existe actualmente más posibilidad de elección que antes. Existe la impresión de que tal vez se haya ido en este sentido demasiado lejos, y el exceso de materias electivas haya dado lugar a programas poco balanceados y de desarrollo superficial. Tiene poco objeto estudiar para ser un principiante en tres diferentes ramas simultáneamente. En general, el sistema de obtener algún grado mediante un cierto número de créditos de materias a elección del estudiante, no ha tenido mucho éxito.

En los próximos años es probable que haya que considerar el problema de la presión de los alumnos para conseguir mayor número de opciones, presión apoyada muchas veces por miembros del cuerpo docente, deseosos de enseñar su propia especialidad. Con respecto a este problema podemos señalar dos tendencias recientes. En primer lugar es evidente que en los últimos años han existido una enorme cantidad de ideas y palabras sobre los currícula y las necesidades de la sociedad y de los estudiantes. Al mismo tiempo, se observa que cada día hay más estudiantes (incluso entre los que todavía no conocen nada de matemática) que creen saber más que sus profesores lo que deben aprender. Creo que sería irresponsable acceder a estas demandas, aunque seguro que sería lo más fácil y ahorraría mucho tiempo.

1.2 Los últimos años (hasta conseguir un grado de "master" o algo parecido)

En este capítulo, el tratamiento de la educación de los matemáticos después de su graduación como bachiller, se ha dividido en una sección referente al grado de master o análogo y otra sección referente al doctorado. En algunos casos esto no se adapta bien a la situación actual, pues hay casos en que el grado de doctor sigue inmediatamente después del de bachiller. Sin embargo esto es cada vez menos común, por lo menos en los Estados Unidos de América, como puede verse en una nota de las *Notices of the American Mathematical Society* (1976). Si el doctorado (Ph.D) sigue después del grado de bachiller, supondremos que los cursos requeridos para el Ph.D. son comparables con los que en otras partes se exigen para el "master". En la sección dedicada al doctorado, el interés estará concentrado en la tesis.

Con respecto a los estudios de master, consideraremos tres cuestiones. Primero el grado de especialización y las correspondientes tendencias. Después, la interacción de la matemática con otros campos. A este nivel, no se trata de las aplicaciones para motivar los estudios matemáticos, sino la efectiva aplicación de las técnicas de la matemática avanzada a otras disciplinas. Finalmente planteamos la cuestión de si a este nivel de la educación, el estudiante está realmente preparado para alguna función específica, como matemático, dentro de la sociedad.

1.2.1 Especialización

La cuestión de la especialización no motivó respuestas de interés al cuestionario enviado para este informe. Muchas universidades contestaron que la especialización a este nivel era cosa común, principalmente en algunas direcciones aplicadas como la estadística o computación. Es común que la especialización dependa de si existe o no un posible doctorado; en el primer caso se procura posponer la especialización, en el segundo la misma es inevitable. No es posible señalar tendencias generales. En algunos países, donde la facilidad de encontrar empleo causa preocupación, se ha pensado si una educación más general (menos especializada) podría ayudar a que los graduados encontraran más fácilmente empleo. Sin embargo, no se ha hecho nada al respecto.

1.2.2 Interacción entre la matemática y otras ciencias

Tradicionalmente, ha sido la física la materia a través de la cual los estudiantes de matemática pudieron estudiar la interacción de la matemática con otra ciencia. En este caso, se utiliza matemática superior, y no es difícil encontrar ejemplos en que la matemática se ha desarrollado para tratar situaciones de la física. Los departamentos que poseen un fuerte grupo de matemáticos aplicados, acentúan las aplicaciones. Sin embargo, esto se va haciendo más difícil debido a que los estudiantes saben cada vez menos física. Algunos departamentos tienen a la biología y a la economía como materias que juegan papel importante para el curriculum a este nivel y algunos incluso tienen grupos de investigadores en estas áreas. Con bastante frecuencia, el último año de estudios se ocupa en un proyecto desarrollado en común con el departamento de biología o de economía. Futuros desarrollos en este sentido parecen recomendables. No está claro si la teoría de catástrofes debe incluirse en este apartado, pero ha sido mencionada por algunos encuestados.

Hay algunos departamentos de matemática que han establecido contactos con la industria, buscando problemas industriales en que los matemáticos puedan ayudar o encontrar motivos de investigación. Es una posición que debe recomendarse, pero que seguramente tardará algún tiempo en desarrollarse. Para los estudiantes, seguramente sería de mucho valor participar en actividades de este tipo.

Con respecto a la teoría del control, que se mencionó algunas veces, posiblemente sea demasiado matemática para que quepa en el presente apartado. Las ciencias sociales, excepto la economía, no fueron mencionadas, posiblemente debido a que la matemática usada en ellas no tiene el suficiente nivel para que pueda formar parte del curriculum de matemática a nivel de graduado.

Si esta parte del curriculum (intersección de la matemática con otras ciencias) se considera importante, como lo considera el autor, queda un problema grave para resolver. Las universidades pequeñas y las universidades de los países en desarrollo, con frecuencia no tienen personal en el departamento de matemática con conocimientos de temas como biología o economía. En las universidades grandes se han ensayado con tratos en común de varios departamentos, lo que parece dar buen resultado. Por otra parte, hay muy pocas publicaciones que permitan organizar seminarios sobre temas interdisciplinarios. ¿Cómo pueden, por tanto, llevarse a cabo tales seminarios? Incluso para la física, actualmente existen departamentos de matemática con muy pocos o ningún componente que conozca suficientemente esta materia.

1.2.3 Preparación para funciones específicas en la sociedad

¿Existen currícula, organizados de tal manera que en la parte final de su carrera el alumno tenga que prepararse para alguna función específica, como matemático miembro de la sociedad? Empecemos por los países en desarrollo, donde la cuestión es muy importante, y existe el peligro de que las universidades intensifiquen inadecuadamente la importancia de ciertas materias. Enviar a los estudiantes al exterior, en la fase final de su educación, puede ser discutible, pues es esencial darles motivo y oportunidad de hacer algo en su propio país después de su graduación, por lo cual deben permanecer en él. El proyecto conocido como *Centre Pédagogique Supérieure de Bamako* en Mali, está aparentemente teniendo éxito en este sentido. Remitimos al respecto al artículo de D'Ambrosio (1975). También hay que observar, que para los matemáticos de los países en desarrollo, tampoco es muy estimulante que quienes se han terminado de formar en el extranjero y vuelven al país después de varios años, sean designados para los puestos importantes, en desmedro de quienes quedaron en el país trabajando en las obras necesarias y continuadas de todos los días.

Con excepción de Europa Oriental, parece que hay poca preocupación acerca de la facultad de los estudiantes para organizar su propio curriculum, excepto con respecto a ciertas direcciones técnicas, como estadística o computación. La carrera de ingeniería matemática de la que hablamos anteriormente, estaría dedicada específicamente a formar matemáticos que trabajasen en la industria; de otra manera, como ocurre en muchos países, no hay matemáticos preparados para ello. A veces se contesta a este problema diciendo que, puesto que hay tanta variedad de carreras en que la matemática puede aplicarse, lo mejor es estudiar matemática por sí sola y después, todo buen matemático puede aprender el resto en un período de entrenamiento en la especialidad elegida. En este sentido se justificaría la necesidad de aprender como desarrollar proyectos de trabajo, lo que puede ser útil para muchas carreras futuras.

Aunque la enseñanza para los futuros profesores de matemática, no corresponde a este capítulo, no se puede ignorar completamente. Mi opinión es que la formación de profesores para el ciclo secundario superior, debe ser considerada en este capítulo, puesto que en mi opinión ellos deben recibir gran parte de su educación junto con futuros investigadores de matemática y con matemáticos que irán a ejercer en la industria. El estudiante que desee ser profesor debe prepararse para ello desde la universidad. En algunos países, la matemática secundaria superior no es enseñada por graduados de la universidad (lo cual es lamentable) y en tal caso la formación de los docentes no debe ser considerada aquí. Mi opinión respecto a la formación universitaria de los futuros profesores de enseñanza secundaria, que refleja la situación en los Países Bajos es compartida en el Reino Unido, cuya opinión es que los futuros profesores deben estudiar matemática de manera profunda y extensa, al mismo tiempo que deben familiarizarse con su misión ante la sociedad. En ciertas universidades británicas existen planes de estudio especiales (A.G. Howson, 1975). Es opinión del autor que los futuros profesores deben seguir un curso sobre lenguaje y estructura de la matemática, el cual debería ser dictado por un matemático de primera línea. Preguntas esenciales como ¿qué es una variable? o ¿qué es un axioma? deberían ser tratadas en este curso. Además, la historia reciente de la matemática debería ser tratada en algún curso especial. En todo caso es necesaria en cualquier nivel, una cierta experiencia en investigación. Un plan interesante para preparar alumnos para una función específica es el de Doctor en Artes (comp. 1.3.1), el cual incluye temas sobre la enseñanza de la matemática secundaria.

1.3 Estudios de post-grado (doctorados y estudios posteriores)

1.3.1 El doctorado

Con respecto a los doctorados (Ph.D), hay muchas cosas para informar, incluyendo algunos proyectos muy interesantes. Vamos a considerar primero la situación en los lugares en que no existen programas para el grado de Ph.D. Hay varios motivos para ello. En Noruega y Dinamarca, por ejemplo, existe un doctorado de nivel superior al que designamos por Ph.D. y el trabajo se hace sin supervisión. En Suecia y Dinamarca, existe actualmente un doctorado al nivel de Ph.D. para facilitar la entrada de los graduados en el mercado de empleos. En Italia no existen planes de estudio de Ph.D. Muchas universidades pequeñas de los países en desarrollo, tampoco ofrecen tales estudios, por lo cual muchos estudiantes van a obtener el grado de doctor en universidades extranjeras. Este hecho ocurre en otros lugares, por ejemplo en Europa, pero por razones diferentes. Este traslado de una universidad a otra motiva algunos inconvenientes de idioma, pre-requisitos, nivel de ingreso, los cuales sería bueno que fueran reducidos. Una posibilidad para ello, sería por ejemplo que las universidades de un país en desarrollo establecieran una especie de cooperación con universidades extranjeras (por ejemplo de Europa), de manera que estas últimas aceptaran fácilmente a los alumnos de aquellas universidades, les permitieran seguir algunos cursos y luego, cuando la preparación se estimara suficiente, las universidades del país de origen les expidiera el título de doctor. Desde luego no hay razón, por el momento, para que el título de doctor tenga el mismo nivel en todas partes.

La producción de doctores en los Estados Unidos de América y en Europa ha seguido caminos diferentes, pero en ambos casos se ha llegado a nuevas ideas al respecto. En los Estados Unidos de América ha habido en los últimos años una superproducción de doctores, motivada esencialmente por el hecho de que el número de alumnos en las universidades aumentó rápidamente y no había suficientes Ph.D. para los puestos de profe

sor. Actualmente la situación ha cambiado y, en consecuencia, existe la tendencia de ampliar el programa de estudios para que los doctorandos tengan más facilidades de empleo. De aquí que el porcentaje de doctores en matemática aplicada esté creciendo.

En muchos países de Europa la obtención del grado de Ph.D. en matemáticas ha sido más difícil de obtener que en otras materias (por ejemplo, en Alemania menos del 3% de los "masters" recibían el título de Ph.D). En Francia el nivel sigue alto y más bien en aumento. En otros países, el nivel ha sido reconsiderado y en general hay la tendencia a disminuirlo ligeramente.

El requisito fundamental para el grado de doctor sigue siendo un trabajo de investigación original (tesis), pero en algunos países (por ejemplo Francia y los Países Bajos), se permite la presentación de una colección de trabajos publicados durante los últimos cinco años, con una introducción explicativa de los mismos. En otros países existe un sistema análogo, incluso sin la condición de los últimos cinco años, y a veces se exige también seguir ciertos cursos obligatorios.

Otra observación, es que parecería que el valor asignado por la sociedad a los títulos de Ph.D. está decreciendo, excepto en ciertos círculos académicos. Se dice que es más difícil conseguir ciertos empleos (por ejemplo una posición de profesor en escuelas elementales de los Estados Unidos de América, o un puesto en la industria) si se tiene el grado de doctor que si no se tiene. Sería lamentable que se generalizara la actitud de que el Ph.D. no tiene otro propósito que aumentar las posibilidades de conseguir puesto en la enseñanza superior.

Una importante novedad, de la que no se puede decir mucho por falta de espacio, es el establecimiento del grado de Doctor of Arts americano. Este grado fue propuesto en los primeros años de la década del 60 (comp. E. Moise, 1961), en la época en que la producción de Ph.D. era pequeña y las exigencias creativas para el mismo eran demasiado elevadas para muchos estudiantes. La idea era que fueran cursos difíciles, pero que estuvieran al alcance de alumnos razonablemente calificados (lo que no es el caso del Ph.D. debido a la obra de investigación original requerida). Se trataba, por tanto, de que los poseedores del título acreditaran una buena competencia escolar, pero no necesariamente talento creador. La idea se refería en particular a obtener una buena preparación para profesores de matemática (incluso de nivel universitario) y por tanto puede ser tenida en consideración en aquellos países que tengan necesidad de tales profesores (ver Bushaw, 1973). El plan contempla también la necesidad de una tesis final, sin mayores pretensiones de originalidad, pero que sea una buena puesta al día o informe sobre algún tema de historia reciente de la matemática, problemas didácticos, etc. Naturalmente que un programa de este tipo necesita ser tomado con cuidado. Corre el peligro de que el título de Doctor of Arts (D.A.) sea tomado por quienes fracasaron en el Ph.D., lo cual debe ser evitado. El programa para el D.A. puede tener éxito si el de Ph.D. se toma con mucha seriedad, si hay suficientes personas con real talento matemático para llenar las posiciones disponibles y, finalmente, si hay personas que se puedan encargar de la difícil tarea de supervisar las tesis para el D.A.

1.3.2 Educación continua

¿Se observa algún incremento en las tareas de los departamentos de matemática con relación a la "educación continua"? (ver el Capítulo V). La necesidad de ello se deja sentir y ha sido reconocida por varios gobiernos (aunque generalmente después no han dado los fondos para ello). En Checoslovaquia se esperan ciertas medidas oficiales en esta dirección y en Suecia también se esperan más medidas sobre la educación continua

en las universidades. En muchos países las universidades han ofrecido cursos de actualización para profesores y a menudo hay institutos (como los IREM en Francia, el IOWO en los Países Bajos, la Universidad Abierta en el Reino Unido) que organizan lo mismo en gran escala. A veces se ha dicho que el efecto de estos cursos ha sido desastroso, debido a que los universitarios encargados de ellos no tienen idea de lo mucho que los profesores han olvidado, de la velocidad con que pueden aprender, de lo que realmente necesitan y cómo ello debe serles enseñado. En Francia esos inconvenientes han sido superados, lo que prueba que es posible aprender la manera de dar estos cursos de manera provechosa. Se trata de una cuestión que debe ser pensada más. La introducción de la computación en las escuelas secundarias es un problema aparte (Informe del IFIP, 1972).

Los cursos de actualización para científicos e ingenieros están siendo discutidos en varios lugares, pero la experiencia universitaria en ellos es limitada. Algunas industrias, como los Bell Laboratories, tienen establecida la educación continua para sus empleados, a menudo incluyendo cursos universitarios de todos los niveles. Varias universidades en los Estados Unidos de América, como la UCLA, ha ofrecido estos cursos durante varios años (ver el Capítulo V).

2. Estructura del programa

Al considerar los objetivos relacionados con la estructura de los programas, no se trata de qué matemática hay que enseñar ni porqué hay que enseñarla, sino de a qué resultados se quiere llegar a través de una forma especial de los programas. Por ejemplo, un ciclo de clases puede tener por objeto la enseñanza completa de cierto tema o, simplemente, la preparación para que los estudiantes puedan leer la literatura adecuada (y a través de ello aprender el tema), o algún objetivo intermedio. Los objetivos relacionados con los métodos educativos del programa son motivación, entusiasmo, desarrollo de técnicas en oposición a comprensión, etc. Vamos a intentar señalar las tendencias en esta área.

2.1 Forma y estilo de los cursos

No se puede decir que haya habido muchos cambios en el dictado de los cursos. La explicación completa es más común que un tratamiento global y usualmente se dan clases de problemas conectadas con los cursos. A veces se usan libros de texto, otras veces no. Hay la tendencia a usar notas o apuntes, con el resultado de que los alumnos leen menos que antes acerca de los tópicos del curso. Algunos cursos contienen más material que antes, con el objeto de motivar a los alumnos. En algunas universidades se desarrollan cursos integrados, para mostrar las conexiones entre temas diferentes y en otras, al contrario, se hacen esfuerzos para subdividir las materias en pequeñas partes, para hacerlas más fáciles a los alumnos. En mi opinión, esto último es perjudicial para los alumnos, que a menudo tienen tendencia a hacer la subdivisión por su propia cuenta y a considerar las diferentes partes como independientes y sin relación entre sí.

Se han hecho ciertas experiencias sobre cursos auto-regulados, en que cada alumno regula su velocidad de aprendizaje. Uno de los propósitos de estos cursos es hacer frente a la diversidad de preparación de los alumnos de primer año y parece que dan resultado para los cursos en que el contenido manipulativo es importante. También hay informes sobre el éxito de este método para introducir temas como el álgebra lineal elemental, siguiendo el modelo de las clases tradicionales. Particularmente, no he visto mucho del método, pero tengo mis dudas acerca del mismo. Una explicación de la na-

turalidad de estas dudas y un apoyo a las mismas se puede ver en Moise (1973). Alguna información sobre un experimento llevado a cabo en Southampton puede verse en 2.3 del informe de la Conferencia de Nottingham (London Mathematical Society, 1975).

También queremos mencionar otra idea, usada en varios países, aunque no siempre con éxito. Se trata de la "clínica de problemas", llevada a cabo por estudiantes de los últimos años que dedican varias horas diarias a recibir consultas sobre problemas de otros estudiantes. Actualmente se usan también algunos métodos audiovisuales. Por ejemplo la reproducción en videotape de algunas clases, lo que hace posible que algunas partes difíciles del curso sean vistas por los alumnos varias veces y también permiten la repetición de algunas conferencias especiales dadas por expertos visitantes.

2.2 Educación-aprendizaje

Una tendencia no muy extendida todavía es la del tipo educación-aprendizaje, de la cual hay muchas variantes. Una de ellas es hacer que el estudiante trabaje por un corto período de tiempo en algún equipo de investigación de un instituto y de acuerdo con lo que están haciendo, vaya adquiriendo los conocimientos necesarios que los investigadores ya poseen, sea directamente, sea buscándolos en la literatura. También pueden colaborar directamente en la investigación, lo que ayuda al aprendizaje.

Una segunda idea es el método de los proyectos, en el cual un grupo emprende, más o menos desde el principio, algún trabajo o investigación, con el objeto de resolver algún problema o cuestión abierta. La idea es que los miembros del grupo se sentirán motivados por el problema para adquirir las habilidades y los conocimientos necesarios. Sin embargo, a pesar de los muchos "slogans" usados por los defensores del método, la opinión del autor es que se trata de otro ejemplo de erróneo igualitarismo, y que el método es inefectivo y gran consumidor de tiempo. Los informes sobre los fracasos obtenidos no son de extrañar. Una tentativa más estructurada, que usa la idea de los proyectos como parte de un curso, es un experimento educativo llevado a cabo en Roskilde (Dinamarca), sobre el cual se puede tener información en Niss (1976).

Extremadamente útil, sobre todo para los matemáticos aplicados, puede ser una internación industrial como parte del plan de estudios (comp. The Statistician, 1976). Para ello hacen falta buenos contactos con laboratorios industriales. El método está siendo usado con éxito en muchos países. En cuanto al uso de una internación industrial como parte de la formación de profesores, ver el Capítulo XII. La idea del internado en un grupo de investigación de un instituto, no se ha usado tanto como debería ser. Muchos proyectos de investigación, basados en subsidios, emplean a estudiantes como ayudantes (por ejemplo, durante sus vacaciones), pero no es a esto que me refiero. El internado debería ser una parte reconocida del curriculum, como ocurre en mi propia universidad. La idea de un internado en otra institución (en general de enseñanza) es parte del programa para el D.A. en la Universidad Estadual de Washington, y se considera una parte esencial. Tanto un internado para enseñanza, como uno para trabajar en la industria, son ayudas útiles para el conocimiento mutuo entre el futuro empleado y el futuro empleador.

Muchas universidades de los Estados Unidos de América tienen un "Undergraduate Research Opportunity Program", según el cual los alumnos que lo deseen pueden trabajar junto con algún miembro de la facultad o algún científico no perteneciente a ella, como ayudantes en su trabajo. El Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) informa que su departamento de matemática no tiene todavía mucha experiencia a este respecto.

2.3 El papel de la solución de problemas

La solución de problemas es una de las actividades esenciales de todo matemático, aunque el período de abstracción parecería haber dado menos importancia a este hecho fundamental. En el cuestionario que se envió para escribir el presente informe, se preguntaba, entre otras cosas, si la solución de problemas se consideraba una parte del curriculum. No me refiero a las sesiones de problemas que son complementarias de las clases teóricas, sino más bien a seminarios especiales dedicados a la solución de problemas (al estilo de Polya-Szegö) o a grupos de estudiantes formados con el mismo fin, es decir, que se reúnen periódicamente para resolver toda clase de problemas (por ejemplo, los propuestos en revistas). Por mi parte, no tengo ninguna duda de que esto sería una gran contribución a la formación matemática de la mayoría de los alumnos. Muchas de las respuestas recibidas eran del tono siguiente: "Una idea excelente, lástima que en mi universidad no se practica". Una respuesta positiva fue recibida de Checoslovaquia. Parece que no hay mucho ambiente para ello, tal vez porque muchos alumnos lo encuentran demasiado difícil y prefieren deducir consecuencias triviales de un conjunto de axiomas y definiciones. Algunas universidades de los Estados Unidos de América tienen la tradición de preparar a sus mejores alumnos para la competencia Putnam, pero esto es más bien una actividad extracurricular. De las respuestas recibidas, se deduce que muchas universidades creen que la solución de problemas debería revivir se y alentarse, lo cual ya es una tendencia positiva.

2.4 El papel de la investigación

Otra cuestión que debemos considerar es si alguna forma de investigación interviene en el programa educativo antes de la graduación de master o equivalente (para el Ph.D. es obvio que sí). Para el grado de master (o sus análogos "magister", licenciado, ...) es costumbre en muchos países (Australia, Brasil, Alemania, Reino Unido, Países Bajos, Checoslovaquia) exigir una especie de ensayo o monografía, llamada también a veces "tesis", aunque no debe confundirse con la tesis para el doctorado, que exige contribución original del alumno. La tesis para el master, suele ocupar entre medio o un año de trabajo, casi siempre guiado por un profesor; el trabajo debe ser hecho por el alumno, pero no se pretenden nuevos resultados. Es importante señalar, que en las universidades donde existe esta exigencia, la misma es considerada como una parte muy importante de la carrera. La idea de exigir algún proyecto de investigación para graduarse, fue considerada nueva para la mayoría de los encuestados. Yo puedo atestiguar haber obtenido buenos resultados en mis cursos en Eindhoven. Se trata de un área que permite desarrollar la iniciativa individual y, efectivamente, algunos estudiantes han logrado resultados que luego fueron publicados en revistas. Aún si los resultados no son tan buenos, es una experiencia buena para los estudiantes, después de tantos años de estudiar resultados conocidos. El mismo método ha sido usado en Southampton (ver Sección 3 de A.G. Howson (1975) y también Hirst y Biggs (1969)), con también muy buenos resultados. Sería interesante, por tanto, que otros experimentaran también con estas ideas (ver las p. 97 y 117 de *The Statistician* 25 (1976) y Bajpai (1976)).

Una dificultad de estos proyectos, observada en Southampton y por mi mismo, es que muchos estudiantes se entusiasman tanto, que olvidan las materias regulares. Es importante que el supervisor vaya controlando objetivos y exigencias del proyecto y va ya dando el crédito correspondiente. Puesto que algunos de los proyectos fracasan, debe existir también la posibilidad de que en cierto momento el supervisor de el proyecto por terminado (asignando un determinado crédito a la obra realizada hasta el momento).

Algunas universidades tienen "seminarios elementales" para estudiantes no graduados. No creo que ello tenga mucho éxito, pues si bien los estudiantes aprenden algo al preparar su exposición, el hecho de tener que oír a todos los demás puede anular esta parte positiva. Tal vez la idea sea buena en la preparación de profesores. Otra idea que parece mejor, es practicada en Checoslovaquia: se trata de formar grupos de estudiantes para hacer investigaciones que luego se presentan en las reuniones anuales de la Asociación de Jóvenes Socialistas. Las mejores contribuciones son premiadas, lo que estimula a los estudiantes.

2.5 Métodos de examen

En cuanto a los métodos de examen (ver el Capítulo VIII), parece que hay pocas novedades que informar. Una de ellas, es la de introducir durante el curso pequeños tests, cuyos resultados son tenidos en cuenta en la evaluación final. Más generalmente, parece que está ganando terreno la idea de la evaluación continua. A pesar del aumento del número de alumnos, parece que se controla más que antes la evolución de ellos durante los cursos. Otra tendencia, probablemente debida también al gran número de alumnos y a las presiones para terminar pronto sus estudios, es la de examinarse inmediatamente después de terminado el curso, con lo cual no queda tiempo para sedimentar el conocimiento y practicar debidamente la manipulación.

Existen muchos métodos de evaluación (por ejemplo, los tratados en la sección 2.4), pero afortunadamente, en mi opinión los tests de elección múltiple van disminuyendo en muchos países. La experiencia con tests de elección múltiple y análogos, parece conducir a tests cuyas respuestas no sean demasiado largas, para conservar algunas de las ventajas de la elección múltiple y no hacerlos tan difícil de construir bien.

3. Matemática como una materia menor

No podemos tratar este tema como se debiera, en pocas páginas. Nos vamos a limitar a algunas observaciones y señalar algunas tendencias en cuanto a sus objetivos y estructura curricular. Mirando primero a las tradicionales tareas de servicio de la temática para ingenieros y físicos, ya los cambios producidos son notables. El problema de la motivación toma gran parte del tiempo disponible. En un interesante artículo de H. Halberstam (1972), se encuentran las siguientes frases, respecto a la idea de dedicar menos tiempo a la motivación: "... esto sería aceptable sin la inflexible y sería racionalización de la falta de voluntad para aprender que es característica de muchos estudiantes de hoy ... que preguntan siempre la misma cuestión ¿de qué me va a servir la matemática a mí? El problema de la motivación va siendo más difícil cada día por una segunda razón, pues como ya hemos observado antes, cada vez hay más miembros de los departamentos de matemática que conocen muy poca física ellos mismos.

Hay que tener cuidado con la frase: "Yo enseño matemática; los alumnos deben encontrar por sí solos cuándo y dónde la necesitan". Puesto que hay muy poco tiempo para enseñar a los alumnos las habilidades manipulativas que necesitan, esta afirmación es fácil de defender, pero como señalaba Halberstam es difícil de llevar a la práctica. Para un resumen interesante de muchos problemas en esta área y sugerencias para su tratamiento, nos referimos a Bajpai y otros (1975). Parece que muchos problemas de los discutidos en esta sección no existen en la URSS.

Una tendencia evidente es que cada día hay más ramas de la ciencia que necesitan matemática y, en consecuencia, están apareciendo en todas partes del mundo cursos de matemática para ciencias sociales, economistas, psicólogos y biólogos. Aquí también es importante la motivación, pero ella presenta otra forma. Es frecuente que estos departamentos que necesitan matemática como disciplina auxiliar, tengan muchos alumnos mediocres, cuya principal dificultad en sus primeros años son los cursos de matemática, con lo cual estos cursos no son demasiado populares. El contenido de estos cursos de servicio está muy dirigido a las habilidades manipulativas y a la motivación. Sin embargo, en muchas universidades, los cursos de matemática para ingenieros y físicos han subido de nivel en los últimos tiempos. Otras características importantes de estos cursos son: a) un incremento de álgebra lineal, principalmente de la teoría de matrices; b) reducción de la cantidad de geometría; c) aumento de probabilidad y estadística. Con respecto a los cursos para ciencias sociales, remitimos a la CUPM Recommendations (1973) y a Selby (1973).

Los cursos para biólogos parece que han tenido mucho éxito y que no son impopulares. Es importante en estos cursos no tratar de convertir a los estudiantes en matemáticos activos, sino mostrarles los problemas de la biología que pueden tratarse matemáticamente y la matemática necesaria para ello. Es suficiente para su carrera futura saber reconocer estas situaciones y preguntar sobre ellas a especialistas. Un curso típico (Van der Blij, 1974) contiene elementos de cálculo y ecuaciones diferenciales, aplicadas a problemas de crecimiento, elementos de la teoría de probabilidades, distribución normal, el concepto de linealidad (aplicaciones lineales, ...), algo de programación lineal, aproximación de funciones, difusión. Los ejemplos y las figuras se toman de la biología. Sería una buena idea reunir el material de estos cursos, que aparentemente han tenido lugar en diferentes universidades en los últimos años, para que otros pudieran aprovechar del trabajo realizado y de la experiencia obtenida.

Queremos señalar otra tendencia. Cada vez es menos común que tópicos necesarios para ingenieros, físicos y matemáticos sean explicados en clases comunes para estos estudiantes. Por ejemplo, en la Universidad Tecnológica de Trondheim, un tópico como análisis funcional se explica separadamente en cada caso. Esto me parece una equivocación. Una tendencia peligrosa que debería ser discutida seriamente por la comunidad matemática es el número creciente de cursos de matemática (para no matemáticos) que son dictados por otros departamentos. Un buen ejemplo son los cursos, en general pobres, de estadística que son dados por ingenieros o especialistas en ciencias sociales. La mayoría de los matemáticos profesionales dudarían acerca de la posibilidad de dictar tales tópicos sin ser ellos mismos especialistas. Si los matemáticos creen, como yo lo creo, que debe corregirse esta tendencia, deben en primer lugar analizar los errores cometidos en el pasado. Es necesario que el expositor comprenda las necesidades de los alumnos y trate de ayudarles en sus dificultades. Una buena sugerencia, puesta de manifiesto por E.M. Patterson (Aberdeen) en su respuesta al cuestionario, es que un miembro del departamento al cual pertenecen los alumnos asista a las clases y haga comentarios sobre la conveniencia y calidad del material enseñado.

Que el problema es importante fue señalado por muchas personas preguntadas acerca del mismo. Los estrictos reglamentos acerca de los presupuestos de los departamentos, que tienen carácter internacional, y el énfasis sobre el costo por alumno, presionan a los departamentos de ciencias naturales y de ingeniería a enseñar a sus propios alumnos, de manera de reducir el costo por alumno. El hecho, aparte del nivel de la matemática enseñada, repercute sobre las posibilidades de empleo de los matemáticos. Nuevamente, debo decir que el espacio que puedo dedicar a este problema de los cursos de matemática auxiliares en este informe, es inversamente proporcional a la importancia del mismo.

4. La situación de los profesores universitarios de matemática

El papel de los profesores universitarios de matemática ha cambiado considerablemente en los años recientes. Hay mucho más contacto personal con los estudiantes, y se dedica mucho más tiempo que antes a ellos, no sólo en sus problemas académicos, sino en cuestiones personales y otras dificultades que pueden tener. Los alumnos esperan mucho más, incluso muchas veces, pretenden entender las cosas sin esfuerzo de su parte y sin leer los libros de estudio. A pesar de que en muchas universidades el cuerpo docente ha crecido más rápidamente que el número de alumnos (proporcionalmente), se dedica más tiempo que antes a la corrección de pruebas, aclarar dudas y otras tareas complementarias de la docente propiamente dicha. Al crecer el número de doctorandos, aspirantes a un Ph.D., o al ponerse en práctica ciertos proyectos educativos, el tiempo dedicado a los alumnos ha crecido notoriamente. En consecuencia, hay un clamor universal por la falta de tiempo para la investigación. En lugares en que escasean los profesores, las tareas docentes devienen extraordinariamente grandes. Afortunadamente, esto es a veces compensado (por ejemplo en Sud Africa) por licencias regulares (año sabático) que aseguran que el nivel del cuerpo docente no disminuya.

Otro sistema que se usa en muchos países para mantener el nivel, consiste en distinguir dos clases de profesores, unos regulares y otros "solamente docentes". Esto tiene la ventaja de que los matemáticos no creativos, pero buenos docentes, tienen oportunidad de desempeñarse y ser útiles. Sin embargo, el peligro de ser considerado un matemático de segunda fila, o de pasar a serlo realmente, es importante. Otro problema que se presenta es la disminución del número de alumnos, ya iniciada; de seguir así, algunos miembros docentes de los departamentos pueden quedar sin trabajo.

Afortunadamente, la tendencia a disminuir el tiempo para dedicar a la investigación, se compensa por un énfasis creciente de las habilidades docentes al nivel universitario. Esto se nota, por ejemplo, en el programa del D.A. discutido en la sección 3.1.1. Otra tendencia universal es el aumento, para los profesores, del trabajo administrativo, comisiones, etc. Algunos países están sufriendo los inconvenientes de un sistema parlamentario en la universidad, lo cual ha hecho que el proceso administrativo y la toma de decisiones devinieran extraordinariamente lentos. Es extraño que todo el mundo se lamenta de esta pérdida de tiempo y que, sin embargo, nadie haga realmente mucho para remediarla.

REFERENCIAS

Informes

C.U.P.M. *Recommendations, A Compendium of*, Vol. I, Math. Assn. of America, 1973. Este volumen contiene informes del CUPM sobre los siguientes temas: 1. Lista de libros básicos: una lista de unos 300 libros, con más o menos la mitad de los cuales se puede formar una biblioteca básica para estudiantes de matemática de nivel universitario; 2. Comentario sobre el informe "Un curriculum general de matemáticas para escuelas secundarias"; 3. Formación de profesores de matemática; 4. Escuelas de dos años y matemática básica; 5. Preparación universitaria de matemáticos investigadores.

- C.U.P.M. *Recommendations, A Compendium of*, Vol. II, Math, Assn. of America, 1973. Tres capítulos: 1. Estadística, preparación de trabajos para graduados y estadística introductoria, sin cálculo; 2. Computación: un programa para estudiantes universitarios y recomendaciones para los cursos que contienen computación; 3. Matemática aplicada, programas de servicio, ingeniería matemática.
- Deutsche-Mathematiker-Vereinigung, *Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien*, 1976. Math. Forschungsinstitut, Geschäftsstelle: Albertstr. 24, 7800 Freiburg, República Federal de Alemania.
- Educación Matemática en las Américas, IV*, Informe de la Cuarta Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, Caracas, 1-6 de diciembre de 1975. Unesco, Oficina Regional de Ciencia y Tecnología para América Latina y el Caribe. Montevideo, 1976.
- Fiala, F. *The teaching of mathematics at university level*, G.G. Harrap and Co. London, 1970. Un informe basado en las respuestas recibidas al cuestionario que fue enviado a 150 universidades europeas (de las que contestaron 50). Objetivos: tendencias en la enseñanza, currícula y exigencias a los estudiantes.
- IFIP Report, *Computer education for teachers in secondary schools; Aims and objectives in teacher training*, IFIP, 1972 (3, rue du Marché, CH-1204, Ginebra, Suiza).
- London Math. Soc. et al. *Adapting university mathematics to current and future educational needs*, Proceedings of the conference held at Nottingham, 1975.
- Mathematics in India, Meeting the Challenge*, Proceedings of the Conference on Mathematics Education and Research, Bangalore, 1973, University Grants Commission, Nueva Delhi, 1974. Recomendaciones referentes a la enseñanza, evaluación, formación de profesores, currícula, centros superiores de entrenamiento, aplicaciones, etc.
- National Science Foundation (NSF), *Electronic hand Calculators: The implications for pre-college education*, final report, febrero 1976. Informe preparado por la NSF (EPP-75-16157).
- SIAM Review, Education in Applied Mathematics, *SIAM Review*, vol. 9 (1967), 289-415. In forma de una conferencia en la que se trataron los siguientes temas: objetivos de la educación en matemática aplicada, el curriculum de matemáticas, el curriculum de ciencias, formación de investigadores en matemática aplicada, programas de investigación en matemática aplicada, experiencia post-doctoral.
- SIAM Review, The mathematical training of the non-academic mathematician, *SIAM Review*, vol. 17 (1975), 541-557. Informe de un simposio de un día con panelistas invitados.
- Otras referencias
- D'Ambrosio, U. *An option in post-graduate training for developing countries*, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil, 1975.
- American Mathematical Society (AMS), The changing role of the master's degree, *Notices AMS*, vol. 23 (1976), 206-209.

- Bajpai, A.C., Mustoe, L.R., y Walker, D. Mathematical education of engineers I-II, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* vol. 6 (1975), 361-380; vol. 7 (1976), 349-364.
- Blij, F., van der, *Wiskunde voor Biologen*, Math, Inst. Univ. of Utrecht, 1974. Curso de matemáticas para biólogos.
- Botts, T. y Fey, J. *CBMS Undergraduate Survey* (1976), 832 Joseph-Henry Building, 2100 Pennsylvania Ave, N.W. Washington, D.C. 20037.
- Bushaw, D. *The Doctor of Arts in Mathematics at Washington State University*, 1973. Dept. of Pure and Applied Mathematics, Washington State University, Pullman, Washington 99163.
- Gross, M., *Mathematical models in linguistics*, Prentice Hall, 1972.
- Halberstam, H., Should mathematics be taught to non-mathematicians for other than vocational reasons? *Bull. Inst. Math. Appl.*, vol. 8 (1972), 141-145.
- Halberstam, H., The teaching of pure mathematics, *Bull. Inst. Math. Appl.*, vol. 7. (1971), 124-129.
- Hirst, K.E. y Biggs, N., Undergraduate projects in mathematics, *Educ. Studies in Math.*, vol. 1 (1969), 252-261.
- Howson, A.G., University courses for future teachers, *Educ. Studies in Math.* vol. 6, (1975), 273-292.
- Iliev, L., On the development of mathematics in the people's republic of Bulgaria, *Bulg. Acad. Sci.* (1975). Se refiere principalmente al Centro para Investigación y Entrenamiento en Matemática y Mecánica.
- Iliev, L., *On university mathematics education* (preprint). Informe sobre la estructura de la educación universitaria por niveles, 1976.
- Koenker, R.H. Status of the Doctor of Arts Degree (no publicado, 1975).
- MacDonald, T.H., An innovation degree (and diploma) programme in applied mathematics, *Int. J. Educ. Sci. Technol.*, vol. 7 (1976), 91-96.
- McLone, R.R., The training of mathematicians, *Social Science Research Council Report*, 1973. La investigación prueba que los empleadores de graduados en matemática encuentran que éstos tienen deficiencias en aplicar la matemática que conocen como creación y también en la comunicación de sus resultados.
- Maki, D.P. y Thompson, M., *Mathematical models and applications*, Prentice Hall, 1973.
- Moise, E., The proposed Doctor of Arts Degree, *Notices AMS*, vol. 8 (1961), 112-115.
- Moise, E., Jobs, Training and Educations for Mathematicians, *Notices AMS*, vol. 20 (1973), 217-221.

Niss, M. *The "crisis" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school levels*, 1976. Roskilde University Centre, OB I, 121, P.O. Box 260, 4000 Roskilde, Dinamarca.

Noble, B., *Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering*, Math. Assn. of America (1967). El libro está basado en ejemplos de aplicaciones. Los tópicos de matemáticas tratados son: matemática elemental, ecuaciones diferenciales, campos de vectores, álgebra lineal, teoría de las probabilidades.

Rada Aranda, S., *Aspectos de educación matemática a nivel superior en Venezuela*, Instituto Universitario Pedagógico de Caracas, 1976. El informe discute varios aspectos de la educación superior, incluyendo estudios de post-grado y contiene una útil bibliografía de 25 títulos.

Seidel, J.J., The mathematical education of engineers and the education of mathematical engineers in the Netherlands, *Bull. Inst. Math. Appl.*, vol. 9 (1973), 305-307.

Selby, H.A., *Notes of Lectures on Mathematics in the Behavioral Sciences*, Math. Assn. of America, 1973. Los tópicos tratados son: equilibrio en general (economía), juegos de votos y negocios (ciencia política), parentescos y agrupamientos (antropología), álgebra de las dicotomías (sociología), medidas y psicofísica (psicología), graduación multidimensional (psicología).

The Statistician, Vol. 25 (1976), 79-166. Número especial dedicado a la enseñanza de la estadística a nivel superior.

PANEL

M.W. Al Dhahir (Kuwait), A.C. Bajpai (Reino Unido), H.C. Halberstam (Reino Unido), T. Hedberg (Suecia), J.M. Howie (Reino Unido), L. Iliev (Bulgaria), K. Kirchgassner (República Federal de Alemania), A. Lichnerowicz (Francia), M.F. Newman (Australia), S.M. Sharfuddin (Bangladesh), G.S. Young (Estados Unidos de América).

Además de los miembros del panel, contribuyó a este capítulo D. Bushaw (Estados Unidos de América).