

Rotatieparameterbepaling bij vervormbare lichamen

Citation for published version (APA):

van Doorn, A. (1992). *Rotatieparameterbepaling bij vervormbare lichamen*. (DCT rapporten; Vol. 1992.063). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Rotatieparameterbepaling Bij Vervormbare Lichamen

André van Doorn

rapport : WFW 92.063

Rapport van de eerste stage

André van Doorn
id. nr.: 254493
studierichting:
Werktuigkundige Medische Technologie
faculteit:
Werktuigbouwkunde
Technische Universiteit Eindhoven

mei 1992
Eindhoven
Nederland

SAMENVATTING

Bij veel kinematische analyses is het nodig om een invers dynamisch probleem op te lossen. Hierbij moet men de beweging van een lichaam kennen. Vaak is het moeilijk om de hoeksnelheidsvector en de hoekversnellingsvector direct te bepalen uit een experiment. Door Verstraete en Soutas-Little (1990) wordt een techniek gebruikt, gebaseerd op de kleinste-kwadraatmethode, waarmee de componenten van de hoeksnelheidsvector en de hoekversnellingsvector van een bovenbeensegment kunnen worden bepaald. Dit gebeurt rechtstreeks uit experimenteel bepaalde positiecoördinaten van een aantal markeringspunten op het bovenbeen. De techniek mag gebruikt worden bij starre lichamen. Gekeken wordt of met deze techniek ook gebruikt kan worden bij vervormbare lichamen, bijvoorbeeld een bovenbeen.

Na het uitwerken van enkele onduidelijke punten uit het artikel van Verstraete en Soutas-Little en het simuleren van een probleem kunnen een aantal opmerkelijke dingen geconstateerd worden.

Omdat de techniek ontwikkeld is voor starre lichamen, wordt er gekeken wat de invloed is van het deformeren van het lichaam op de berekening van de hoeksnelheid en hoekversnelling. In de berekening van de rotatieparameters wordt gebruik gemaakt van de relatieve snelheidsvectoren. Naast de snelheidsvectoren ten gevolge van de hoekverdraaiing kunnen er ook snelheidsvectoren voorkomen ten gevolge van de deformatie van het lichaam. Deze zijn op te splitsen in twee componenten: één evenwijdig aan en één loodrecht op de relatieve positievector. De eerste blijkt geen invloed te hebben op de berekening van de hoeksnelheid en de hoekversnelling. De tweede kan redelijk worden 'weg gemiddeld' met behulp van de kleinste-kwadraatmethode.

Via uitwerking van de theorie blijkt de nauwkeurigheid af te hangen van de fouten in de absolute vectoren, de positionering van de markers en het aantal gebruikte markers. Omdat in het artikel weinig vermeld staat over de gebruikte apparatuur en methoden is het moeilijk iets te zeggen over de meetfouten en dus over de nauwkeurigheid van het resultaat, de hoeksnelheid en hoekversnelling. Uit de resultaten van experimenten blijkt dat men de hoeksnelheid en hoekversnelling kan berekenen met een aanzienlijke nauwkeurigheid. Het probleem bij het uitgevoerde experiment blijkt de differentiatie en de filtering van de absolute positie van de markers. Hierdoor ontstaan grote datafouten. Het probleem is het nauwkeurig verkrijgen van de absolute snelheid en versnelling uit de gemeten absolute positie. Bij het gesimuleerde experiment blijkt dat het onvolgende is om alleen de absolute positie te filteren.

VOORWOORD

Dit onderzoek is uitgevoerd in het kader van een stageopdracht binnen de vakgroep WFW van de faculteit Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven, onder begeleiding van dr.ir. A.A.H.J. Sauren. Het theoretisch gedeelte is voornamelijk thuis uitgevoerd terwijl voor het experimentele gedeelte gebruik is gemaakt van de computerzalen van de faculteit Werktuigbouwkunde. Naast het biomechanische probleem zijn er een aantal theorieën gebruikt uit de continuümmechanica, de experimentele algebra en de statistiek. Een aantal computerprogramma's zijn gebruikt om verdere analyses te doen: Matlab en Maple.

Informatie is verkregen uit verschillende bronnen, namelijk literatuur, mondelinge informatie en het experiment. Ik wil in het bijzonder de volgende personen bedanken voor het verlenen van hun medewerking:

drs. A.J. Geurts,
drs. A.L. Tal,
dr.ir. P.J.G. Schreurs.

SAMENVATTING	2
VOORWOORD	3
1 INLEIDING	5
2 BESCHRIJVING VAN DE METHODE	6
2.1 Theorie voor een star lichaam	6
2.1.1 Afhankelijk stelsel vergelijkingen	6
2.1.2 Overbepaald stelsel vergelijkingen	7
2.1.3 Kleinste-kwadratenmethode	8
2.1.4 Hoekversnellingsvector	9
2.2 Een toepassing bij zachte weefsels	10
2.2.1 Vervormbare lichamen	10
2.3 Resultaten	11
2.4 Kritiek op en opmerkingen bij Verstraete en Soutas-Little 1990	12
3 NADERE BESCHOUWING VAN ONDUIDELIJKHEDEN	14
3.1 Rigid body vergelijking	14
3.1.1 Rotatieparameters van een vervormbaar lichaam	14
3.1.2 Hoeksnelheid onafhankelijk van	15
3.2 Nauwkeurigheid	16
3.2.1 Datafouten	16
3.2.2 Doorgeleiding van datafouten door de KKM	17
4 NABOOTSIJNG VAN HET EXPERIMENT	20
4.1 Beschrijving van het experiment	20
4.2 Het testprogramma	21
4.2.1 Beschrijving van het testprobleem	21
4.2.2 Resultaten van het testprogramma	22
4.3 Het totale experiment	23
4.3.1 Resultaten van het totale experiment	23
5 CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN	25
LITERATUUR	26
BIJLAGEN	27

1 INLEIDING

Dit verslag behandelt een onderzoek dat is uitgevoerd binnen de vakgroep WFW (Fundamentele Werktuigbouwkunde) van de Technische Universiteit Eindhoven. Het onderzoek is uitgevoerd in de vorm van een stage.

Bij veel kinematische analyses is het nodig om een invers dynamisch probleem op te lossen. Hierbij moet men de beweging van een lichaam kennen. Vaak is het moeilijk om de hoeksnelheidsvector en de hoekversnellingsvector direct te bepalen uit een experiment. Door Verstraete en Soutas-Little (1990) wordt een techniek gebruikt, gebaseerd op de kleinste-kwadraatmethode, waarmee de componenten van de hoeksnelheidsvector en de hoekversnellingsvector van een bovenbeensegment kunnen bepaald. Dit gebeurt rechtstreeks uit experimenteel bepaalde positiecoördinaten van een aantal markeringspunten op het bovenbeen. De techniek mag gebruikt worden bij starre lichamen. Gekeken wordt of met deze techniek ook gebruikt kan worden bij vervormbare lichamen, bijvoorbeeld een bovenbeen.

De doelstelling van de stage is het beschrijven, analyseren en het nabootsen van de gebruikte methode.

De stage is opgedeeld in een aantal onderdelen:

- het bestuderen van het artikel en analyseren van de gebruikte methode,
- het geven van een foutenanalyse,
- het implementeren van de methode in een Matlab-routine,
- het uitvoeren van een numeriek experiment waarbij de beweging van een lichaam exact bekend zijn,
- het uitvoeren van een fysisch experiment in het WFW-lab waarbij de coördinaten van een aantal markeringspunten gemeten worden met het Henschel-systeem.

Tijdens de stage bleek dat het Henschel-systeem dat in het WFW-lab gebruikt wordt nog niet zo ver ontwikkeld is dat het in staat is om de drie-dimensionale coördinaten van een bewegend lichaam te leveren. Ook bleek dat via het numeriek experiment ook een vervormbaar lichaam goed gesimuleerd kon worden. Hierdoor is het laatste onderdeel dan ook komen te vervallen.

2 BESCHRIJVING VAN DE METHODE

Door Verstraete en Soutas-Little (1990) wordt een methode beschreven waarmee de

componenten van de hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$ en de hoekversnellingsvector $\vec{\dot{\omega}}$ van een bovenbeen-segment kunnen worden bepaald. Dit gebeurt rechtstreeks uit experimenteel bepaalde positiecoördinaten van een aantal markeringspunten op het bovenbeen. Opvallend hierbij is dat een bovenbeen niet star is, zodat in principe de hoeksnelheid en de hoekversnelling niet gedefinieerd zijn! In dit hoofdstuk wordt het artikel samengevat en de methode wordt van opmerkingen voorzien.

In paragraaf 2.1 wordt de methode voor een star lichaam behandeld. Daarna volgt een toepassing op een vervormbaar lichaam. In paragraaf 2.3 staan de resultaten van Verstraete en Soutas-Little (1990). Een aantal onduidelijkheden en vragen die overblijven worden in de laatste paragraaf op een rij gezet.

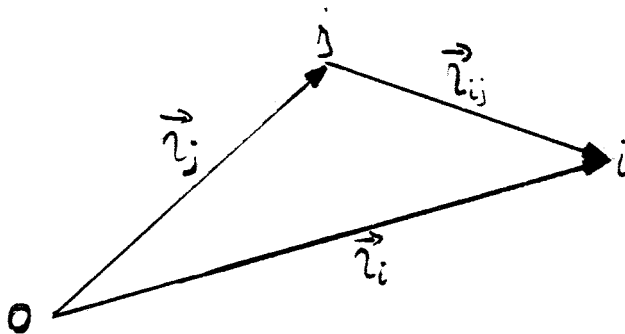
De notatie is zoveel mogelijk aangepast aan de notatie die gebruikt wordt in het vak Multi Body Dynamica [5]. Dit houdt in dat de meeste formules in matrixnotatie geschreven zijn.

2.1 Theorie voor een star lichaam

2.1.1 Afhankelijk stelsel vergelijkingen

We bekijken een star lichaam met daarop n markers. De plaats van marker i ($i=1, \dots, n$) wordt vastgelegd door de absolute positievector \vec{r}_i (zie fig 1). Omdat het lichaam star is, is de grootte van de relatieve positievector \vec{r}_{ij} van marker i ten opzichte van marker j ($j=1, \dots, n; j \neq i$) constant in de tijd.

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (1)$$



Figuur 1) Relatieve positievector \vec{r}_{ij}

De relatieve snelheidsvector \vec{v}_{ij} van marker i ten opzichte van marker j wordt gedefinieerd als:

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_{ij} \quad (2)$$

met $\vec{\omega}$ de hoeksnelheidsvector van het starre lichaam en \vec{v}_i de absolute snelheidsvector van punt i. Dit levert drie scalaire vergelijkingen in de componenten van $\vec{\omega}$ op waarbij we er van uitgaan dat \vec{v}_i en \vec{v}_j . In cartesische coördinaten ten opzichte van een orthonormale rechts-draaiende vectorbasis kan worden geschreven:

$$\begin{aligned} v_x &= 0\omega_x + r_z\omega_y - r_y\omega_z \\ v_y &= -r_z\omega_x + 0\omega_y + r_x\omega_z \\ v_z &= r_y\omega_x - r_x\omega_y + 0\omega_z \end{aligned} \quad (3)$$

In matrixrepresentatie geeft dit:

$$\underline{v} = \underline{R} \underline{\omega} \quad ; \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & r_z & -r_y \\ -r_z & 0 & r_x \\ r_y & -r_x & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dit stelsel is afhankelijk omdat $\det(\underline{R}) = 0$. De relatieve versnellingsvector \vec{a}_{ij} van marker i ten opzichte van marker j wordt gedefinieerd als:

$$\vec{a}_{ij} = \vec{a}_i - \vec{a}_j \quad (5)$$

met $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i$ de absolute versnellingsvector van punt i.

Voortaan worden alle relatieve vectoren zonder indices geschreven.

2.1.2 Overbepaald stelsel vergelijkingen

Om de drie-dimensionale beweging van een star lichaam op eenduidige wijze vast te leggen is het nodig dat het aantal markers n groter of gelijk moet zijn aan 3. Het maximaal mogelijke aantal relatieve positievectoren k wordt dan gegeven door de uitdrukking voor het aantal combinaties van 2 punten uit een verzameling van n punten [4].

$$k = n! / (2(n-2)!)$$

Met elke relatieve snelheidsvector kan een stelsel van drie scalaire vergelijkingen van de vorm (4)

worden gemaakt. In totaal leveren k relatieve positievectoren $m = 3k$ vergelijkingen in de componenten van $\underline{\omega}$. Uitgeschreven in matrixnotatie levert dit:

$$\underline{d} = \underline{A} \underline{\omega} \quad (6)$$

met:

$$\underline{d}_{3mx1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{v}_m \end{bmatrix}; \quad \underline{A}_{3mx3} = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{R}_m \end{bmatrix}$$

Het stelsel is overbepaald.

2.1.3 Kleinste-kwadratenmethode

Met de kleinste kwadraten methode, in het vervolg aangeduid met KKM, zoeken we een oplossing voor $\underline{\omega}$. Voor deze $\hat{\underline{\omega}}$ moet gelden dat:

$$\| \underline{d} - \underline{A} \hat{\underline{\omega}} \|_2 \leq \| \underline{d} - \underline{A} \underline{\omega} \|_2 \quad \text{voor } \forall \underline{\omega} \in \mathbb{R}^p \quad (7)$$

met

$$\| \underline{x} \|_2 = (\underline{x}^T \underline{x})^{\frac{1}{2}} = \text{euclidische norm}$$

Verstraete en Soutas-Little (1990) gebruiken de oplossingsmethode volgens de normaalvergelijkingen van Gauss. Zij minimaliseren de fout \underline{e} in de oplossing.

$$\underline{e} = \underline{A} \underline{\omega} - \underline{d} \quad (8)$$

Dit gebeurt op de volgende manier:
eerst kwadrateren ze de fouten en tellen deze bij elkaar op,

$$\phi(\underline{\omega}) = \underline{e}^T \underline{e} = (\underline{A} \underline{\omega} - \underline{d})^T (\underline{A} \underline{\omega} - \underline{d}) \quad (9)$$

daarna wordt er naar ω gedifferentieerd.

$$\phi(\underline{\omega})_{,\omega} = 2\underline{A}^T (\underline{A}\underline{\omega} - \underline{d}) \quad (10)$$

De fout \underline{e} in de oplossing is minimaal als $\phi(\underline{\omega})_{,\omega} = 0$. Hiervoor moet gelden:

$$\underline{A}^T \underline{A} \hat{\underline{\omega}} = \underline{A}^T \underline{d} \quad (11)$$

Er zijn ook andere methoden om de kleinste kwadraten oplossing voor $\hat{\underline{\omega}}$ uit te rekenen zoals de oplossingsmethode gebaseerd op de QR decompositie van \underline{A} [5].

2.1.4 Hoekversnellingsvector

De hoekversnellingsvector $\dot{\underline{\omega}}$ van het lichaam kan op dezelfde manier berekend worden als de hoeksnelheidsvector $\underline{\omega}$. Voor een star lichaam is de relatieve versnelling te schrijven als:

$$\underline{\vec{a}} = \dot{\underline{\omega}} \times \underline{\vec{r}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\vec{r}}) \quad (12)$$

met $\dot{\underline{\omega}}$ de afgeleide van $\underline{\omega}$ naar de tijd. Hierbij is $\underline{\omega}$ al benaderd via de KKM. Door alle bekende termen naar links te halen, is (12) te schrijven als:

$$\underline{\vec{a}} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\vec{r}}) = \dot{\underline{\omega}} \times \underline{\vec{r}} \quad (13)$$

oftewel;

$$\underline{\vec{t}} = \dot{\underline{\omega}} \times \underline{\vec{r}} \quad (14)$$

Formule (14) heeft dezelfde vorm als (2). De oplossingsmethode voor $\dot{\underline{\omega}}$ verloopt verder precies hetzelfde als voor de hoeksnelheidsvector $\underline{\omega}$.

2.2 Een toepassing bij zachte weefsels

Verstraete en Soutas-Little (1990) hebben deze KKM voor het bepalen van $\underline{\omega}$ en $\dot{\underline{\omega}}$ toegepast op een rechter onderbeen. Hierop zijn 4 markers aangebracht. De gekozen locaties

voor de markers worden ook gekozen bij andere loop-analyses. Twee high-speed camera's leggen de absolute posities van de punten vast. Welk systeem er is gebruikt is niet vermeld. Via de beelden van de twee camera's worden door middel van lineaire transformatie, de absolute positievectoren berekend. Er wordt een rechtsdraaiend x,y,z -coördinatenstelsel gebruikt waarbij de x-as in de looprichting wijst en de z-as verticaal omhoog gericht is. Van elke marker worden de snelheidsvector en de versnellingsvector berekend via differentiatie. Welke methode er is gebruikt voor de differentiatie is niet vermeld.

De 4 markers leveren 6 relatieve positievectoren en dus ook 6 vectorvergelijkingen van het type:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (15)$$

Voor starre lichamen staat \vec{v} loodrecht op de \vec{r}

$\vec{\omega}$ wordt uitgerekend voor verschillende combinaties van relatieve vectoren. Aan de hand hiervan wordt er geprobeerd om iets meer te weten te komen over een eventuele beste lokatie van de markers voor de KKM. Voor alle combinaties van 2 relatieve vectoren wordt $\vec{\omega}$ uitgerekend met behulp van de KKM. Er zijn in totaal 15 verschillende combinaties van twee vectoren. In totaal geeft dit 15 oplossingen voor $\vec{\omega}$. Ook voor alle combinaties van 3, 4, 5 en 6 vectoren wordt

$\vec{\omega}$ uitgerekend. Dit levert achtereenvolgens 20, 15, 6 en 1 oplossingen. Op deze manier worden

57 oplossingen gecreëerd voor $\vec{\omega}$ en $\dot{\vec{\omega}}$.

2.2.1 Vervormbare lichamen

Het been is geen star lichaam. Om het gebruik van de starre lichaam vergelijking (2) te rechtvaardigen wordt gekeken wat de invloed is van de relatieve snelheidscomponent parallel aan de relatieve positievector. De berekening wordt nogmaals uitgevoerd maar nu met alleen de

component \vec{v}_1 van de relatieve snelheidsvector die loodrecht staat op de relatieve positievec-

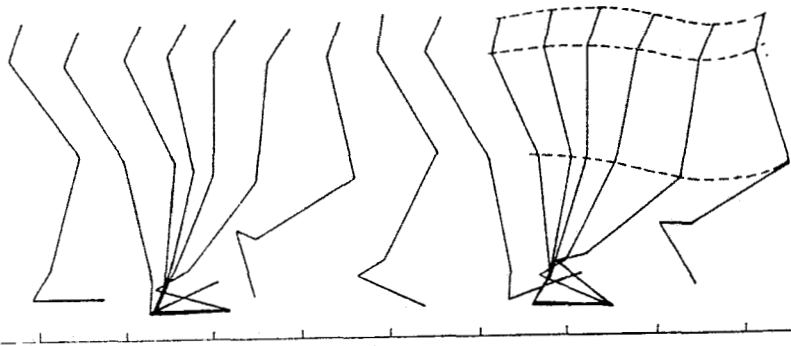
tor \vec{r} . Hiervoor geldt:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{\vec{r} \cdot \vec{r}} \right) \vec{r} \quad (16)$$

2.3 Resultaten

Op twee verschillende tijdstippen van een loopcyclus zijn $\bar{\omega}$ en $\dot{\bar{\omega}}$ uitgerekend. In een loopcyclus zijn er voor een been een aantal fasen te onderscheiden [3], bijvoorbeeld een standfase, waarbij de voet contact heeft met de grond, en een zweeffase, waarbij de voet los is van de grond.

De loopcyclus begint op $t = 0$. $\bar{\omega}$ en $\dot{\bar{\omega}}$ worden berekend op $t_1 = 0.07$ s (het been heeft dan 29% van de standfase van het been doorlopen) en op $t_2 = 0.35$ s (na 83% van de standfase van het been). (De voorgaande waarden zijn overgenomen uit het artikel. De waarden zijn onduidelijk en waarschijnlijk fout ($0.07/29 \neq 0.35/83$).)

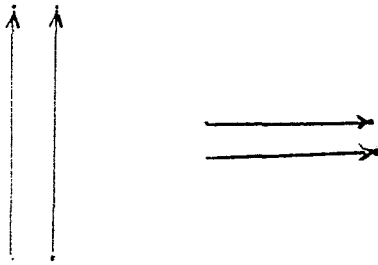


Figuur 2 Loopcyclus

De oplossingen zijn uitgezet voor de verschillende aantallen relatieve positievectoren die gebruikt

zijn om $\bar{\omega}$ en $\dot{\bar{\omega}}$ uit te rekenen, zie bijlage A. Bij gebruik van twee relatieve positievectoren is er een tendens dat oplossingen voor $\bar{\omega}$ de grootste spreiding vertonen voor sets parallelle vectoren, waarbij de sets parallelle vectoren loodrecht op elkaar staan (zie fig 3). Ook de oplossingen

voor $\dot{\bar{\omega}}$ blijken voor sets evenwijdige vectoren, waarbij de sets loodrecht op elkaar staan, de grootste spreiding op te leveren.



Figuur 3 Set parallelle relatieve positievectoren

Verder blijken de resultaten voor $\vec{\omega}$ bij het gebruik van \vec{v}_1 zeer weinig te verschillen met de resultaten verkregen bij gebruik van \vec{v} . De verschillen zijn zo klein dat ze niet zichtbaar zijn in de figuren in bijlage A. Hiermee wordt de suggestie gewekt dat het effect van deformatie van het weefsel op de berekening van de hoeksnelheid en hoekversnelling geminimaliseerd wordt bij het gebruik van de KKM.

Uit de resultaten blijkt ook dat de drie componenten van $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$ niet te verwaarlozen zijn. ω_x en ω_z blijken wel kleiner te zijn dan ω_y . Het weglaten van ω_x en ω_z leidt tot een verandering in absolute waarde van $\vec{\omega}$ in de orde van 11 a 20%. Hieruit volgt dat de loopbeweging dus niet voorgesteld mag worden als een rotatie in het x,z vlak.

2.4 Kritiek op en opmerkingen bij Verstraete en Soutas-Little 1990

In het artikel van Verstraete en Soutas-Little wordt veel aandacht besteed aan de rigid body vergelijkingen (4) en (14). De KKM wordt uitvoerig behandeld. Voor de KKM volgens de normaalvergelijkingen van Gauss zijn de vergelijkingen zelf volledig uitgewerkt. De beschrijving van het experimentele gedeelte is echter niet volledig. Er wordt niet vermeld welke apparatuur er gebruikt is. Ook niet vermeld is welke numerieke differentiatiemethode er gebruikt is om de snelheids- en versnellingsvectoren te creëren. Hierdoor is het moeilijk de resultaten naar waarde te schatten. Ook zullen er, bij het nabootsen van het experiment, eigen aannamen gemaakt moeten worden.

De hoeksnelheid en de hoekversnelling van een vervormbaar lichaam zijn niet gedefinieerd. Om het gebruik van de rigid body vergelijkingen (2) te rechtvaardigen wordt er in het artikel gekeken of er verschil in oplossing is bij het gebruik van \vec{v}_1 in plaats van \vec{v} . Mij is niet duidelijk of men hiermee bewijst of men deze vergelijkingen wel of niet mag gebruiken bij een vervormbaar lichaam. In het volgende hoofdstuk zal hier aandacht aan geschonken worden.

In het artikel wordt geen aandacht besteed aan de nauwkeurigheid van het resultaat. Door de gebruikte methode, om de invloed van de verschillende combinaties van de verschillende relatieve positievectoren te bepalen, lijkt de oplossing te convergeren naar één absolute waarde. De vraag is: hoe nauwkeurig is de gebruikte methode en waar hangt deze nauwkeurigheid van af.

Uit de resultaten van het experiment concluderen Verstraete en Soutas-Little dat men de markers zo moet plaatsen dat er geen relatieve positievectoren ontstaan die parallel lopen aan andere relatieve positievectoren. In het volgende hoofdstuk wordt een poging gedaan om iets meer te zeggen over de plaats van de markers.

De laatste conclusie in het artikel is: een minimum van vier markers moet gebruikt worden om de beste resultaten te krijgen voor zowel de hoeksnelheid als de hoekversnelling. Dit wordt totaal niet in het artikel besproken. Waarschijnlijk had er moeten staan: indien alle zes de relatieve positievectoren (verkregen uit vier markers) gebruikt worden in de KKM, wordt de beste schatting voor zowel de hoeksnelheid als de hoekversnelling verkregen.

3 NADERE BESCHOUWING VAN ONDUIDELIJKHEDEN

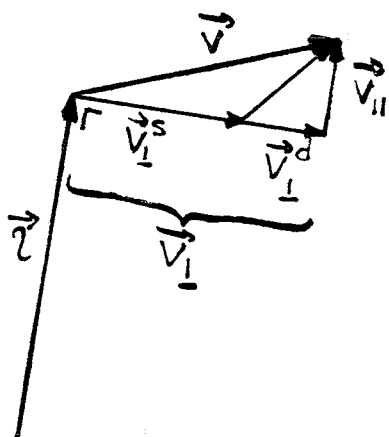
3.1 Rigid body vergelijking

Vergelijking (2) is een rigid body vergelijking. Deze mag theoretisch alleen gebruikt worden bij starre lichamen. Verstraete en Soutas-Little (1990) gebruiken vergelijking (2) ook voor een loopanalyse. Een been is niet star. Om het gebruik van vergelijking (2) te rechtvaardigen wordt gekeken wat de invloed is van de component van de relatieve snelheidsvector evenwijdig aan de relatieve positievector. De verschillen in resultaat blijken klein te zijn. Deze uitkomst wekt de suggestie dat het effect van deformatie van het weefsel en meetfouten geminimaliseerd worden bij

deze methode. Is dit wel correct? Beïnvloed \vec{v}_I de berekening van $\vec{\omega}$? Om deze vraag te beantwoorden bekijken wordt eerst gekeken wat de gevolgen zijn van het deformerende van het lichaam voor de relatieve snelheidsvector.

3.1.1 Rotatieparameters van een vervormbaar lichaam

Om een duidelijk beeld te krijgen wat de hoekverdraaiing van een vervormbaar lichaam inhoudt, wordt het probleem formuleerd vanuit de continuümmechanica [7] voor een vervormbaar lichaam.



$$\vec{v} = (D + \Omega) \cdot \vec{r}$$

$$\text{met } D = D^c \text{ en } \Omega = -\Omega^c$$

$$\Omega \cdot \vec{r} = \vec{\omega} * \vec{r} = \vec{v}^{3(tan)}$$

$$D \cdot \vec{r} = \vec{v}_I^{d(eformeerbaar)} + \vec{v}_I^d$$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_I^s + \vec{v}_I^d$$

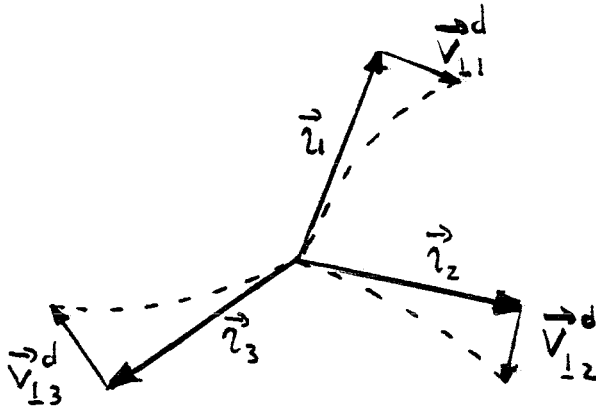
Figuur 4 Hoeksnelheid voor een vervormbaar lichaam

In het verdere verloop van dit verslag wordt er met de hoeksnelheid van een vervormbaar lichaam bedoeld: een $\vec{\omega}$ waarvoor geldt:

$$\Omega \cdot \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_I^s \tag{17}$$

Met de hoekversnelling van een vervormbaar lichaam wordt in het vervolg bedoeld de afgeleide van de hoeksnelheid van een vervormbaar lichaam naar de tijd.

Omdat \underline{d} noch \vec{v}_1^* bekend zijn moet $\vec{\omega}$ via een KKM worden uitgerekend. Via een KKM wordt geprobeerd \vec{v}_1^* weg te 'middelen'. Opgemerkt moet worden dat een systematische deformatie, bijvoorbeeld door een homogeen verdeelde torsie, niet weg te 'middelen' valt.



Figuur 5 Homogeen verdeelde torsie

3.1.2 Hoeksnelheid onafhankelijk van \vec{v}_1^*

Beïnvloed \vec{v}_1^* de berekening van $\vec{\omega}$? In deze subparagraaf zal worden bewezen

dat $\vec{\omega}$ uitgerekend via \vec{v}_1^* of uitgerekend via \vec{v} altijd hetzelfde resultaat geeft.

In vergelijking (11) ontbinden we \underline{d} in componenten loodrecht op en evenwijdig aan de relatieve positievectoren:

$$\underline{A}^T \underline{A} \hat{\underline{\omega}} = \underline{A}^T \underline{d} = \underline{A}^T (\underline{d}_\perp + \underline{d}_\parallel) = \underline{A}^T \underline{d}_\perp + \underline{A}^T \underline{d}_\parallel$$

met

$$\underline{d}_i = \begin{bmatrix} \underline{v}_i^1 \\ \underline{v}_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{v}_i^m \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{d}_i = \begin{bmatrix} \underline{v}_i^1 \\ \underline{v}_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{v}_i^m \end{bmatrix}$$

bewezen moet worden dat er geldt:

$$\underline{A}^T \underline{d}_i = \underline{0}$$

Omdat \underline{v}_i evenwijdig loopt aan \underline{r} moet er gelden: $\underline{v}_i = a \underline{r}$. Voor elke $\underline{R} \underline{v}_i$ geldt:

$$\begin{bmatrix} 0 & r_z & -r_y \\ -r_z & 0 & r_x \\ r_y & -r_x & 0 \end{bmatrix} a \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} r_z r_y - r_z r_y \\ -r_z r_x + r_z r_x \\ r_x r_y - r_x r_y \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \underline{R}^T \underline{v}_i = -\underline{R} \underline{v}_i = \underline{0}$$

En dus: $\underline{A}^T \underline{d}_i = \underline{0}$.

Hiermee is bewezen dat de grootte van \underline{v}_i geen invloed heeft op de berekening van $\underline{\omega}$. Dat

Verstraete en Soutas-Little desondanks toch kleine verschillen hebben gevonden is waarschijnlijk te wijten aan afrondingsfouten.

Een uitgewerkt voorbeeld is opgenomen in bijlage B.

3.2 Nauwkeurigheid

In deze paragraaf wordt een inventarisatie gemaakt van de meest belangrijke fouten. Deze fouten leiden er toe dat de oplossing van de hoeksnelheid en de hoekversnelling afwijkt van de gezochte oplossing, gedefinieerd vergelijking (17).

3.2.1 Datafouten

Voor de berekening van $\underline{\omega}$ en van $\underline{\dot{\omega}}$ zijn voor de KKM als invoer gegevens nodig:

\underline{r} , \underline{v} en \underline{a} . Met twee high-speed camera's worden de absolute posities van de markers vastgelegd. Met behulp van deze posities worden de onderlinge relatieve posities vastgelegd in de

relatieve positievectoren. Schrijven we de werkelijke relatieve positievector \underline{r}^* als: $\underline{r}^* = \underline{r} + \Delta \underline{r}$

, met $\Delta \underline{r}$ als fout in de berekende relatieve positievector ten opzichte van de werkelijke relatieve

positievector, en voor de werkelijke relatieve snelheidsvector $\vec{v}^* = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ en de werkelijke

relatieve versnellingsvector $\vec{a}^* = \vec{a} + \Delta\vec{a}$. Er zijn volgens Simons en Yang (1991) een aantal verschillende foutenbronnen bij het gebruik van optische meetmethoden. Om iets te kunnen zeggen over de grootte van deze fouten is meer informatie nodig over de gebruikte systemen.

\vec{v} en \vec{a} worden bepaald door één respectievelijk twee keer differentiëren van \vec{r} naar de tijd. Simons en Yang (1991) geven aan dat er behoorlijke verschillen in nauwkeurigheid bestaan tussen diverse numerieke differentiatie methoden. Omdat in het artikel van Verstaete en Soutas-Little niets vermeld staat over de gebruikte methode en apparatuur kan ook over de grootte van de fouten

weinig gezegd worden. In het vervolg worden

$$\Delta\vec{r}, \Delta\vec{v} \text{ en } \Delta\vec{a}$$

beschouwd als datafouten. In de volgende subparagraaf zal gekeken worden hoe deze datafouten de berekening van $\hat{\omega}$ beïnvloeden.

3.2.2 Doorgeleiding van datafouten door de KKM

Bij de doorgeleiding van de fouten door de KKM wordt er vanuit gegaan dat de componenten van \underline{A} en \underline{d} bepaald zijn met een bepaalde onnauwkeurigheid:

$$\underline{A} = \underline{A}' + \underline{\Delta A} \text{ met:}$$

\underline{A} matrix met de gemeten componenten van de relatieve positievectoren,

\underline{A}' matrix met de componenten van de feitelijke relatieve positievectoren,

$\underline{\Delta A}$ matrix met de afwijkingen van de gemeten componenten ten opzichte van de feitelijke componenten van de relatieve positievector.

$$\underline{d} = \underline{d}' + \underline{\Delta d} \text{ met:}$$

\underline{d} kolom met de gemeten componenten van de relatieve snelheidsvectoren,

\underline{d}' kolom met de componenten van de feitelijke relatieve snelheidsvectoren,

$\underline{\Delta d}$ kolom met de afwijkingen van de gemeten componenten ten opzichte van de componenten van de feitelijke relatieve snelheidsvectoren.

Verder wordt gesteld dat: $\hat{\omega}$ de kleinste kwadraten oplossing is voor $\underline{d}' = \underline{A}' \hat{\omega}$ en $\hat{\omega} + \underline{\Delta\omega}$ de

kleinste kwadraten oplossing is voor $\underline{\tilde{d}}' + \Delta d = (\underline{A}' + \Delta A) (\underline{\tilde{\omega}} + \Delta\omega)$.

Voor $\underline{\tilde{\omega}} + \Delta\omega$ kan worden afgeleid [4] dat er geldt:

$$\frac{\|\Delta\omega\|}{\|\underline{\tilde{\omega}}\|} \leq 2 c(A) \varepsilon$$

waarin: $c(A)$ het conditiegetal is van \underline{A} ,

ε de maximale relatieve datafout. Deze is minimaal de machinenauwkeurigheid η van de computer

$$\varepsilon = \max \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|\underline{A}\|}, \frac{\|\Delta d\|}{\|\underline{d}\|}, \eta \right)$$

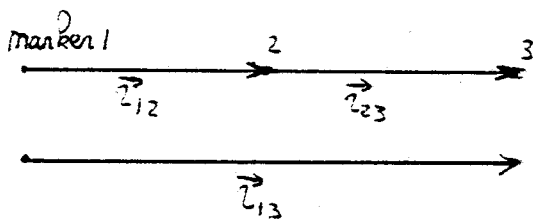
en $\|\underline{x}\| = \max_{i=1 \dots m} x_i$ de maximum norm.

Hieruit volgt dat de nauwkeurigheid van $\underline{\tilde{\omega}}$ onder andere afhangt van $c(A)$. Hoe kleiner het conditiegetal is hoe kleiner de doorleiding van de relatieve fout ε is. Als een probleem slecht geconditioneerd is, is het conditiegetal groot.

Experimenteel is gebleken [4] dat $c(A) \sim \frac{\|A\| \|d\|}{\|\underline{\tilde{\omega}}\|}$ bij random gekozen \underline{d}

Met de volgende stellingen wordt er iets meer gezegd hoe het conditiegetal van \underline{A} afhangt van het aantal markers:

Stelling 1: Een probleem is slecht geconditioneerd als de relatieve positievectoren afhankelijk zijn.



Figuur 6 Afhankelijke positievectoren

Stel een probleem met 4 markers. Als je 1 marker weglaat zal het probleem niet beter geconditioneerd zijn.

De zes relatieve positievectoren van vier markers kunnen een drie-dimensionale ruimte opspannen (de vier markers moeten dan niet in een plat vlak worden gelegd). Hierdoor zullen de vier nieuwe relatieve positievectoren ten gevolge van een vijfde marker afhankelijk zijn van de eerste zes

relatieve positievectoren. Een vijfde marker draagt dus niets bij aan het beter geconditioneerd zijn van het probleem.

Stelling 2: Bij het toevoegen van 1 marker wordt de ruimte, opgespannen door de relatieve positievectoren, nooit kleiner.

Als men kan bewijzen dat er een monotoon dalende relatie bestaat tussen het aantal markers en het conditiegetal van \underline{A} , dan betekent dit dat hoe meer relatieve positievectoren er gebruikt worden, hoe kleiner de doorleiding van de datafouten zal zijn.

Om te onderzoeken hoe het conditiegetal afhangt van de plaats van de markers, wordt er een relatie gezocht tussen het conditiegetal en de positievectoren. Dit is te doen via de eigenwaarden van de matrix \underline{M} ; $\underline{M} = \underline{A}^T \underline{A}$.

Volgens [7] geldt er :

$$c(\underline{M}) = c^2(\underline{A}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \quad \text{met } \lambda_1 \text{ de grootste eigenwaarde en } \lambda_n \text{ de kleinste.}$$

Omdat de matrix \underline{M} een reguliere, symmetrische matrix is waarvan de componenten bekend zijn, kunnen de eigenwaarden van \underline{M} bepaald worden. De matrix \underline{M} is opgebouwd uit de negen verschillende componenten van drie relatieve positievectoren. In bijlage C is de matrix \underline{M} uitgeschreven. Het oplossen van de eigenwaarden is gelijk aan het oplossen van een derde graads polynoom. Met behulp van Maple is geprobeerd om dit probleem op te lossen. Maple is een programma dat berekeningen kan uitvoeren met symbolen (formule manipulatie). Met Maple kunnen dus de eigenwaarden van matrix \underline{M} bepaald worden uitgedrukt in termen van de componenten van de relatieve positievector.

Het bleek dat elke eigenwaarde uit een honderdtal termen bestaat. Dit maakt een zinnige analyse zeer moeilijk. Zelfs na het vastleggen van één relatieve positievector, (hierdoor zijn in de matrix \underline{M} 'slechts' zes componenten onbekend) was het onmogelijk iets zinnigs te zeggen over de beste plaatsen van de markers. Een verdere analyse is uitgevoerd, maar doordat er oncontroleerbare, tegenstrijdige antwoorden uitkwamen zijn deze weggelaten.

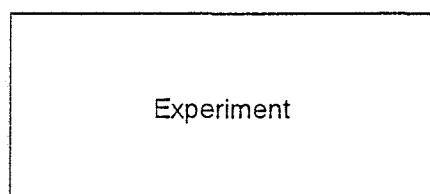
Uit voorgaande blijkt dat het doorgeleiden van de relatieve fout in de data door de KKM afhangt van het aantal gebruikte markers en de plaats van de markers. Met een grotere kennis van de mogelijkheden van Maple is waarschijnlijk de optimale plaatsing van de markers te bepalen. Met de gevolgde strategie kunnen de eigenwaarden van \underline{M} bepaalde worden als functie van de relatieve positievectoren.

4 NABOOTSIING VAN HET EXPERIMENT

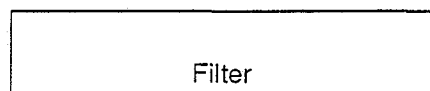
Om een beter idee te krijgen van de methode die Verstraete en Soutas-Little hebben gebruikt, wordt het experiment nagebootst. In een loopenalyse worden normaal gesproken de absolute positievectoren van de markers op een been opgenomen in de tijd. In dit nagebootste experiment wordt er vanuit gegaan dat de absolute positievectoren van de markers al bekend zijn. Bij deze nabootsing wordt alleen gebruik gemaakt van de computer. Gebruik is gemaakt van het rekenprogramma Matlab. Om een gedeelte van de programmatuur te testen is een testprogramma geschreven. Het testprogramma is zo opgesteld dat er ook nog enkele openstaande vragen mee beantwoord kunnen worden.

4.1 Beschrijving van het experiment

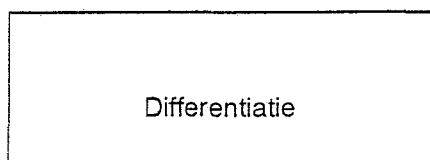
Op een wiel worden vier markers geplaatst. Het wiel draait rond zijn symmetrie-as met een constante hoeksnelheid van π rad/s. Met het experiment worden de hoeksnelheid en de hoekversnelling bepaald rechtstreeks uit de absolute positievectoren. De absolute positievectoren worden gegenereerd met behulp van een simulatieprogramma. Geprobeerd is om verder dezelfde werkwijze te hanteren als Verstraete en Soutas-Little. In het volgende schema wordt schematisch weergegeven hoe het experiment is opgebouwd. De listing van het bij behorende Matlab-programma is opgenomen in de bijlage E.



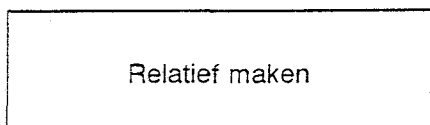
In het experiment worden vier markers gevolgd in de tijd. De absolute positievectoren worden voor elke marker opgeslagen. Om dit te simuleren worden er absolute positievectoren gegenereerd met daarop ruis (gemiddelde 0; variantie eentiende van de absolute waarde van de positievector) (Matlab programma 'markpositie' en 'stoomnormal', bijlage E)



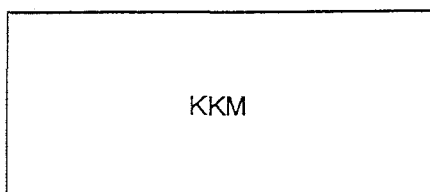
Zoals Verstraete en Soutas-Little worden de absolute positievectoren met behulp van een laagdoorlaatfilter (Butterworth) gefilterd. De ruis en de meetfouten worden hierdoor zoveel mogelijk geëlimineerd. (Matlab programma 'laagdoorlaatfilter', bijlage E)



Om de absolute snelheids- en versnellingsvectoren van de markers op een bepaald tijdstip te bepalen wordt het gefilterde signaal gedifferentieerd naar de tijd (voor de versnelling 2 keer). (Gebruik wordt gemaakt van de Matlab operator gradient.) (Matlab programma 'afgeleiden' bijlage E)



Alle vectoren zijn bepaald ten opzichte van een bepaald punt. Nu worden alle vectoren relatief gemaakt. Dat wil zeggen de vector van marker i wordt beschouwd ten opzichte van alle andere punten. (Matlab programma 'relatief', bijlage E)



Met behulp van de KKM worden $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$ bepaald met de formules 6 en 14. Natuurlijk worden eerst de kolommen \underline{d} en \underline{t} en de matrix \underline{A} bepaald uit de relatieve vectoren. (Matlab programma 'KKM' bijlage E)

4.2 Het testprogramma

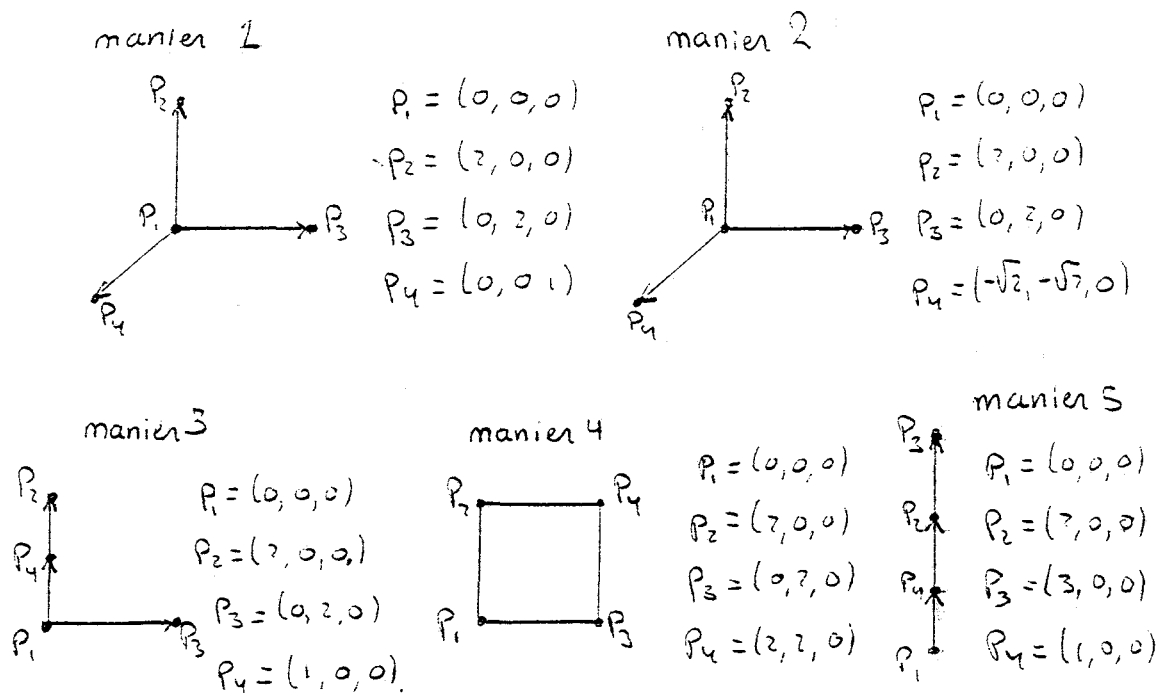
In het testprogramma wordt er onderzocht of de programmatuur voor het relatief maken van de positievectoren en de KKM werkt. Met behulp van het testprogramma worden gelijk een aantal zaken onderzocht:

- 1) de conditie van het probleem via conditiegetallen van \underline{A} ,
- 2) de doorgeleiding van de fout in de data bij het gebruik van de KKM,
- 3) de beste plaatsen van de markers ten opzichte van elkaar.

Met het testprogramma wordt telkens gezocht naar de oplossing van $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$. Omdat de

werkelijke waarden voor $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$ bekend zijn, kunnen de resultaten gecontroleerd worden.

Oplossingen worden gezocht voor het ronddraaien van het wiel dat rond zijn symmetrie-as (z-as) draait met een constante hoeksnelheid van π rad/s. Voor het bekende probleem worden vier markers op vijf verschillende manieren ten opzichte van elkaar gezet.



Figuur 7 Verschillende markerpositioneringen

Verwacht wordt dat de conditie van het probleem steeds slechter zal worden, omdat de relatieve positievectoren steeds meer afhankelijk van elkaar worden.

4.2.1 Beschrijving van het testprobleem

In het testprogramma worden de werkelijke waarden voor* alle absolute vectoren ingegeven (ook de snelheids- en versnellingsvectoren). Op al deze absolute vectoren worden ruissignalen gezet met gemiddelde 0 en een variantie van eentiende van de maximale waarde van de absolute vector. Hierna worden de relatieve positievectoren uitgerekend. Zoals in 2.2 beschreven is,

worden $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$ berekend met alle mogelijke combinaties van 2 of meer relatieve vectoren.

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de KKM. Voor elke combinatie worden $\vec{\omega}$, $\vec{\dot{\omega}}$ en het conditiegetal van A uitgerekend. Voor alle combinaties van 2 vectoren wordt gekeken welke combinaties de grootste afwijkingen geven, zowel naar boven als naar beneden.

Ook wordt telkens de theoretische $\|\underline{\Delta\omega}\| : \|\underline{\Delta\dot{\omega}}\| = 2 c(M) \varepsilon \|\underline{\omega}\|$ berekend. Abusievelijk werd ingezien dat er gewerkt werd met conditiegetal van M in plaats van A. Hierdoor zijn de waarden voor $\|\underline{\Delta\omega}\|$ te groot geworden. Resultaten zijn weergegeven in bijlage D.

4.2.2 Resultaten van het testprogramma

De markerpositionering, fig 7, blijkt de conditiegetal van M te beïnvloeden. In tabel 4.1 is te zien dat de conditie van het probleem steeds slechter wordt indien de relatieve positievectoren meer afhankelijk worden. Een uitzondering is de plaatsing van de markers volgens manier 4. De conditie blijkt systematisch beter te zijn. (Het conditiegetal is een aantal keren uitgerekend, maar bleek telkens lager dan 1.5 te zijn.)

Manier	1	2	3	4	5
$c(M)$	1.51	1.62	1.95	1.49	9.21

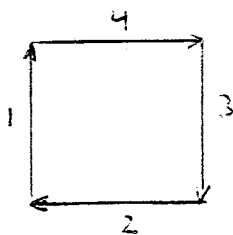
Tabel 4.1 Conditiegetallen bij verschillende markerpositioneringen

Een verklaring hiervoor is misschien dat het vierkant dat opgespannen wordt door de vectoren, loodrecht op de draaiings-as staat. Hierdoor is manier 4 waarschijnlijk de beste markerpositionering voor een draaiing rondom de z-as. Blijkbaar is het niet afhankelijk zijn van de positievectoren niet de enige relevante criterium.

Uit de resultaten van manier 4, blijken de grootste afwijkingen in $\vec{\omega}$ te ontstaan bij combinaties van 2 vectoren die loodrecht op elkaar staan. Dit wijkt af van wat Verstraete en Soutas-Little hebben gevonden.

Combinaties	1 en 2	1 en 3	1 en 4	2 en 3	2 en 4	3 en 4
z-component hoeksnelheid	2.71	3.22	3.12	3.09	3.18	3.51

Tabel 4.2 Hoeksnelheden voor verschillende combinaties van relatieve positievectoren



Figuur 8 Manier 4

4.3 Het totale experiment

Na het testexperiment wordt het totale experiment uitgevoerd. Geprobeerd is om dezelfde handelswijze te gebruiken zoals Verstraete en Soutas-Little. Doordat Verstraete en Soutas-Little niet precies vermeld hoe zij enkele methoden hebben toegepast, zijn er een aantal aannamen gedaan. Bij het filteren van de absolute positievectoren is gebruikt gemaakt van een Butterworth-filter. Het is belangrijk te weten welke orde lowpass digital butterworth-filter er gebruikt wordt (bijlage F). Ook het cut-off frequency is van belang (bijlage F). In de bijlage E is te zien dat de zogenaamde filter coëfficiënten worden uitgerekend met behulp van de Matlab-operator 'butter'. Hiervoor is alleen de orde van het filter en de cut-off frequency nodig. Bij het differentiëren van absolute positievectoren is gebruik gemaakt van de in Matlab aanwezige operator 'gradient'. De absolute positievectoren worden gegenereerd, maar, in tegen stelling tot het testexperiment, worden de absolute snelheids- en versnellingsvectoren afgeleid van de absolute positievectoren. Het schema, zoals staat aangegeven in 4.1, wordt gevolgd.

4.3.1 Resultaten van het totale experiment

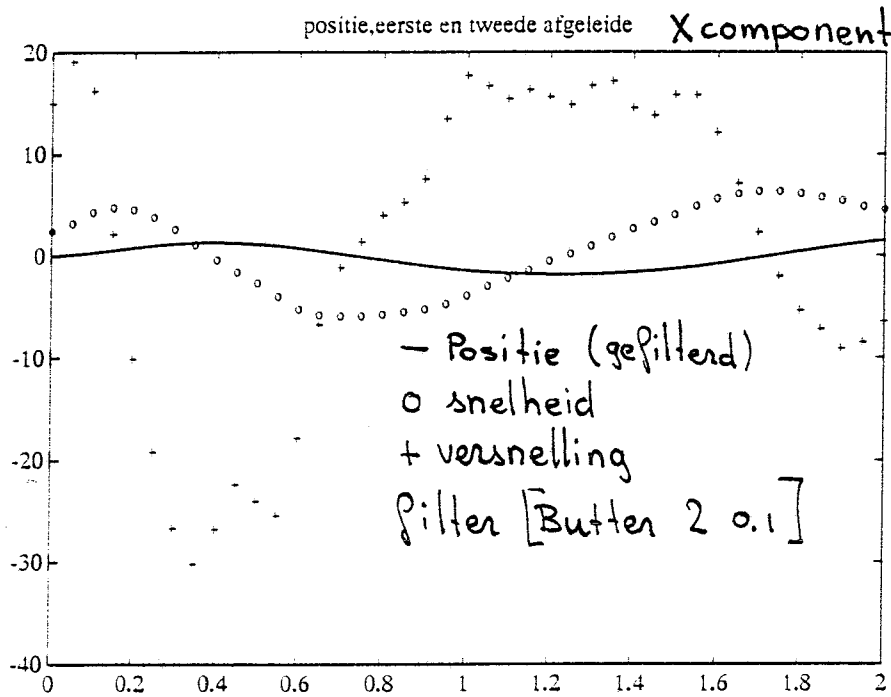
Het gebruikte laagdoorlaatfilter is een Butterworth filter. Door dit filter blijkt er fase achterstand ten opzichte van het gestoorde ingangssignaal op te treden. In fig 10 is grafisch duidelijk te zien dat de fase achterstand een kwart is. Het stoorsignaal dat een variantie heeft van een kwart van de grootte van de absolute positievectoren wordt hierdoor sterk vervormd. Met wat trucs kan het gefilterde signaal verbeterd worden. Zo kan eenvoudig de fase achterstand worden gecorrigeerd. (fase achterstand kan van te voren uitgerekend worden [2].) Ook kan de amplitude van het signaal wat opgerekt worden. Dit is echter niet gedaan in dit experiment. Bij het differentiëren van de gefilterde absolute positie worden de componenten van de vectoren afzonderlijk gedifferentieerd (zie bijlage E). De resultaten van het testprogramma zijn redelijk goed. De resultaten van dit experiment (tabel 4.3), waar de snelheidsvectoren en de versnellingsvectoren uitgerekend worden door middel van differentiatie van het gefilterde signaal, blijken veel minder goed te zijn. In fig 9 is te zien dat na differentiatie de signalen voor de snelheid en de versnelling niet mooi 'glad' zijn. De signalen zouden eerst nog een keer gefilterd moeten worden.

	Werkelijke waarde	Uitgerekende waarde via Butter(2 0.1) t=9/10 s	Uitgerekende waarde via Butter(5 0.1) t=9/10 s
ω_z	π	3.446	3.25
$\ \dot{\vec{\omega}}\ $	0	3.12	1.11

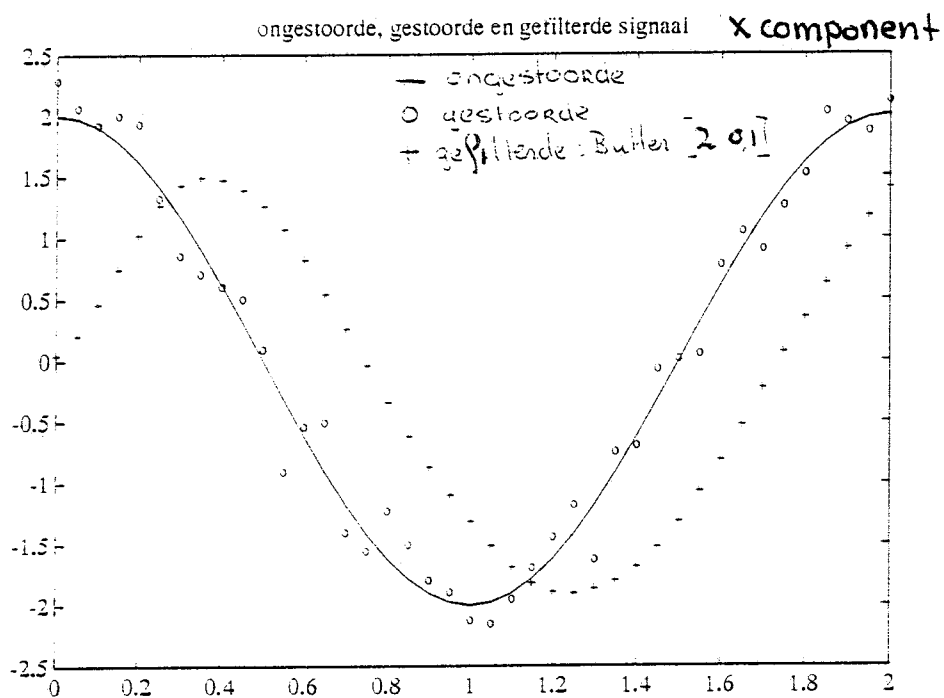
Tabel 4.3 Resultaten uit het nagebootste experiment

Uit de resultaten van het testexperiment blijkt dat de rotatieparameters redelijk goed kunnen worden uitgerekend als de invoer gegevens, de relatieve positie-, snelheids en versnellingsvectoren, niet al te zeer afwijken van de werkelijke vectoren. In het experiment waar de absolute snelheids- en versnellingsvectoren worden verkregen uit de absolute positievectoren worden bepaald blijken te grote afwijkingen te ontstaan ten opzichte van de werkelijke waarden. Dit heeft tot gevolg dat ook de uiteindelijke waarden van de rotatieparameters niet echt goed zijn. Verwacht wordt dat met verder databewerkingen (fase achterstand correctie, filteren van de componenten van de absolute

snelheids- en versnellingsvectoren) betere resultaten te verkrijgen zijn.



Figuur 9 X-component van de relatieve positie, eerste en tweede afgeleide



Figuur 10 Werkelijke, gestoorde en gefilterde x-component van de absolute positievector

5 CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN

Na het uitwerken van enkele onduidelijke punten uit het artikel van Verstraete en Soutas-Little en het simuleren van een probleem kunnen de volgende conclusies en aanbevelingen gegeven worden.

- De hoeksnelheid van een vervormbaar lichaam is onafhankelijk van de component van de relatieve snelheidsvector evenwijdig aan de relatieve positievector.

- De nauwkeurigheid van de resultaten, $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$, hangen af van de fouten in de data (de absolute vectoren) en de doorleiding van deze fouten in de KKM.
 - Uit de resultaten van het testprogramma blijkt dat $\vec{\omega}$ en $\vec{\dot{\omega}}$ berekend kunnen worden met een aanzienlijke nauwkeurigheid.

 - De grote datafouten in het experiment zorgen voor grote fouten in $\vec{\omega}$ en vooral $\vec{\dot{\omega}}$. Het blijkt dat alleen filteren van de absolute positievector niet voldoende is. Na differentiatie zouden de absolute snelheids en versnellingsvectoren ook gefilterd moeten worden.
 - Een Butterworth filter geeft een fase achterstand aan het signaal.
 - Met behulp van verdere databehandelingen zijn relatieve snelheids- en versnellingsvectoren te verkrijgen die minder verschillen met de werkelijke vectoren.
 - De doorleiding van de datafouten in de KKM is afhankelijk van de positionering van de markers en het aantal gebruikte markers.

- De markers (minimaal 3; 4 is zeer aan te bevelen) moeten zo geplaatst worden dat de relatieve positievectoren niet afhankelijk van elkaar worden. Dit houdt in dat ze niet in één plat vlak gelegd moeten worden.

- De conclusie van Verstraete en Soutas-Little dat men de markers zo moet plaatsen dat er geen relatieve positievectoren ontstaan die parallel lopen aan elkaar kan niet worden bevestigd door mijn experiment.
 - Met een uitgebreider onderzoek en met behulp van het programma Maple is dit waarschijnlijk wel te onderzoeken. De gevolgde weg, via het conditiegetal van M het uitrekenen van de beste plaats voor de markers ten opzichte van elkaar lijkt resultaat te kunnen opleveren.

LITERATUUR

- [1] CHATFIELD, C., Statistics for Technology, a course in applied statistics. Chapman and Hall, New York, 1983, third edition.
- [2] Kraker, A. de, Numeriek-Experimentele Analyse van Dynamische Systemen. Dictaat bij het college Numeriek-Experimentele Analyse van Dynamische Systemen, dictaatnr:4004668 W.F.W. Technische Universiteit Eindhoven, 1990
- [3] Moll, H.C., Leerboek der biomechanica. Bunge, Utrecht, 1983.
- [4] "Syllabus bij college Numerieke Algebra, Methoden en Programmatuur 2N310" Technische Universiteit Eindhoven, 1988.
- [5] Sauren, A., Multibody dynamica. Dictaat bij het college MULTIBODY DYNAMICA 4J550. Dictaatnr: 4004659 W.F.W. Technische Universiteit Eindhoven, 1988.
- [6] Simons, W., Yang, K.H., Differentiation of Human Motion Data Using Combined Spline and least Squares Concepts. Journal of Biomechanical Engineering, 113 (aug 1991), Pp. 348-351.
- [7] Veldpaus, F.E., Inleiding Continuümsmechanica. Dictaat bij het college Inleiding Continuümsmechanica Dictaatnr: 4004612 W.F.W. Technische Universiteit Eindhoven.
- [8] Veldpaus, F.E., Woltring, H.J., Dortmans, L.J.M.G., A Least-Squares Algorithm for the Equiform Transformation from Spatial Marker Co-ordinates. Journal of Biomechanics, Vol. 21, no 1, (1988), Pp. 45-54.
- [9] Verstraete, M.C., Soutas-Little, R.W., A Method for Computing the Three-Dimensional Angular Velocity and Acceleration of a Body Segment From Three Dimensional Position Data. Journal of Biomechanical Engineering, 112 (1990), Pp. 114-118.

BIJLAGEN

BIJLAGE A	RESULTATEN VERSTRAETE & SOUTAS-LITTLE	28
BIJLAGE B	CONTROLE VOORBEELD	29
BIJLAGE C	UITWERKING <u>M</u>	31
BIJLAGE D	RESULTATEN TESTEXPERIMENT	32
BIJLAGE E	MATLAB PROGRAMMA	37
BIJLAGE F	BUTTERWORTH FILTER	40

BIJLAGE A RESULTATEN VERSTRAETE & SOUTAS-LITTLE

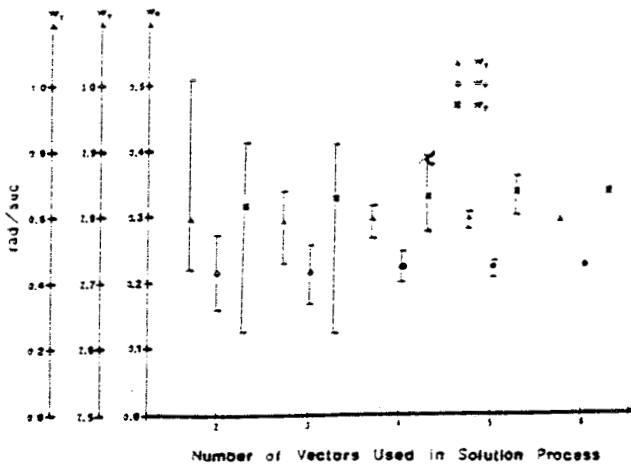


Fig. 2 Angular velocity components (rad/s) — 29 percent stance

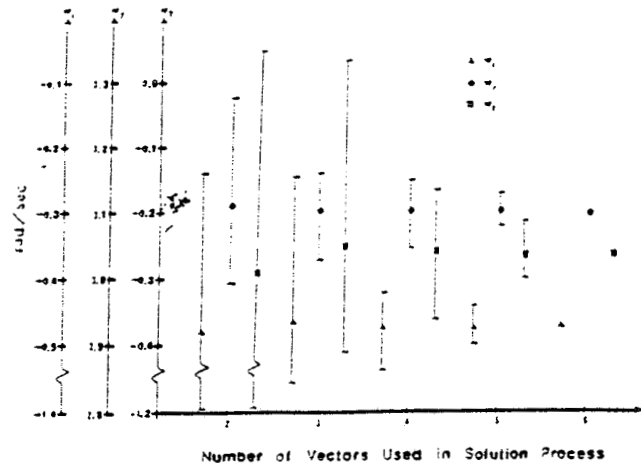


Fig. 4 Angular velocity components (rad/s) — 83 percent stance

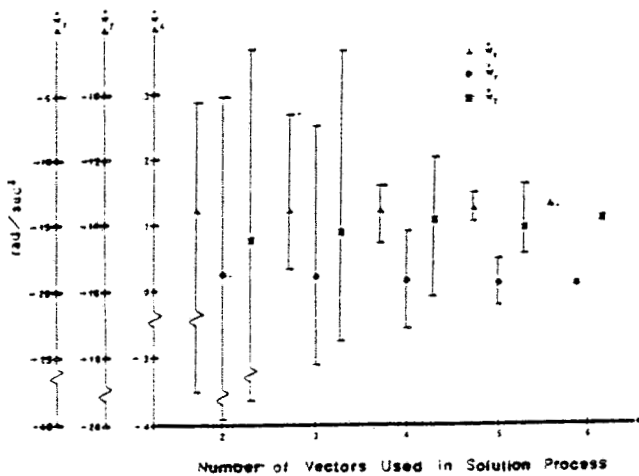


Fig. 3 Angular acceleration components (rad/s²) — 29 percent stance

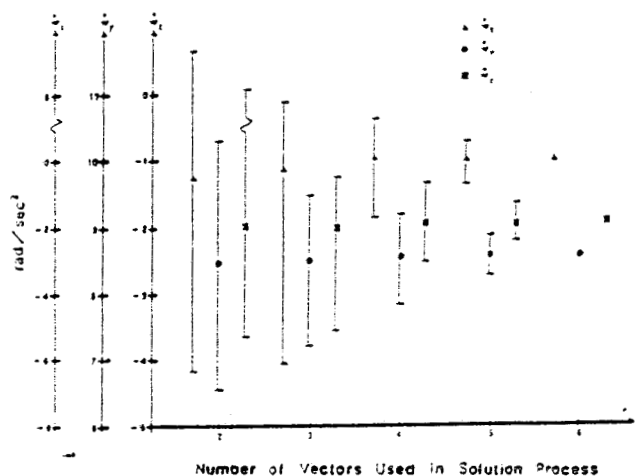


Fig. 5 Angular acceleration components (rad/s²) — 83 percent stance

Table 1 Mean values computed for the angular velocity

	29% Stance			83% Stance		
	w_x	w_y	w_z	w_x	w_y	w_z
2($n=15$)	0.2913	2.7135	0.6229	-0.3783	3.1082	-0.3889
3($n=20$)	0.2889	2.7180	0.6446	-0.3618	3.1012	-0.3566
4($n=15$)	0.2905	2.7200	0.6565	-0.3692	3.0998	-0.3621
5($n=6$)	0.2909	2.7207	0.6603	-0.3702	3.0991	-0.3624
6($n=1$)	0.2910	2.7208	0.6618	-0.3702	3.0987	-0.3621

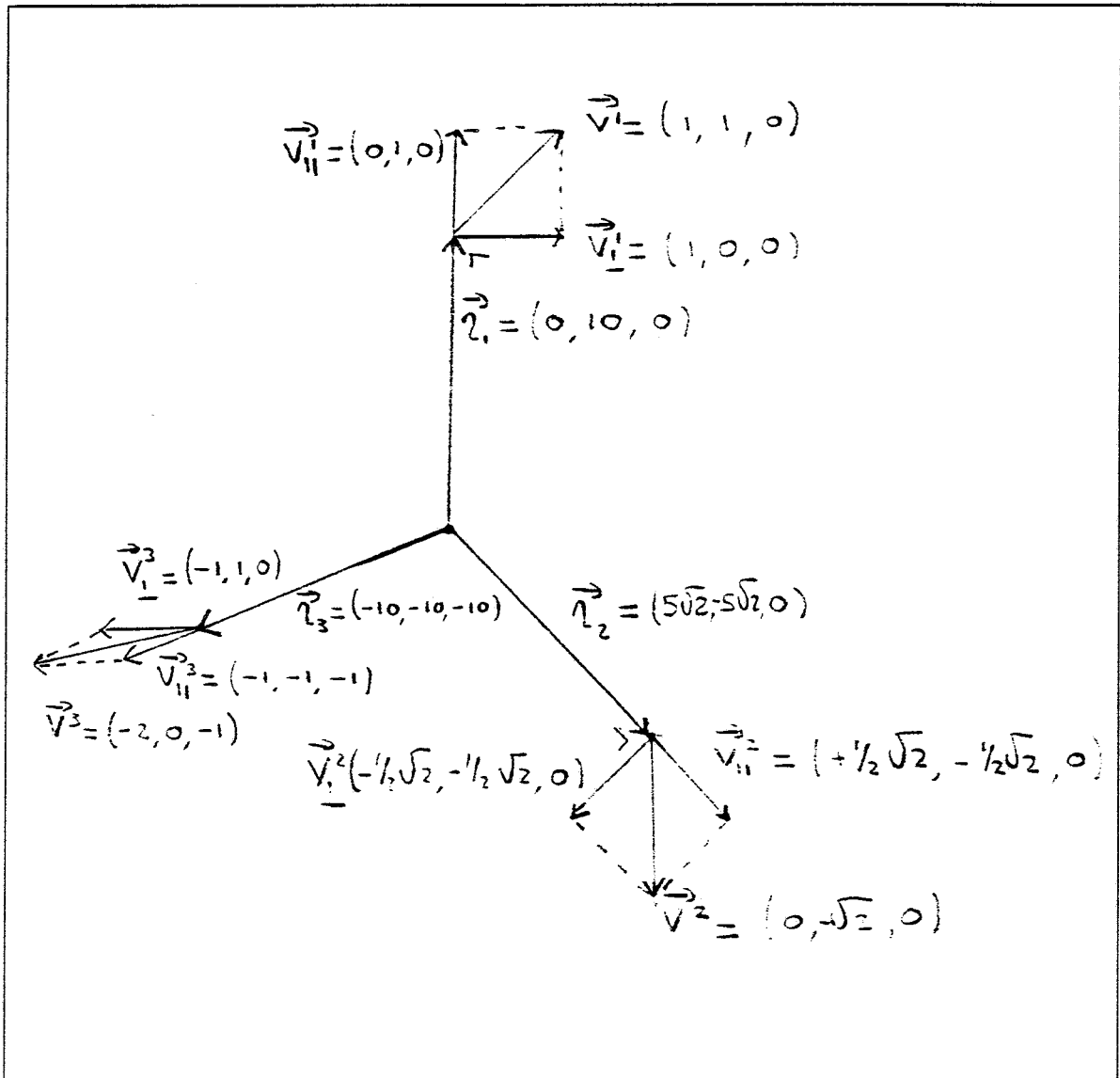
Table 2 Mean values computed for the angular acceleration

	29% Stance			83% Stance		
	w_x	w_y	w_z	w_x	w_y	w_z
2($n=15$)	1.1744	-15.5089	-16.2489	-1.2449	8.5052	-2.0574
3($n=20$)	1.2549	-15.6333	-14.6418	-1.1489	8.5195	-2.1083
4($n=15$)	1.2414	-15.7115	-14.8123	-1.0645	8.5354	-1.9774
5($n=6$)	1.2469	-15.7464	-15.3034	-1.0458	8.5451	-1.9469
6($n=1$)	1.2585	-15.7612	-14.8115	-1.0390	8.5500	-1.9356

BIJLAGE B CONTROLE VOORBEELD

Controle voorbeeld

Om inzicht te krijgen of en hoe $\vec{\omega}$ afhangt van \vec{v}_1 vullen we een simpel voorbeeld in. In figuur 1 zijn drie relatieve positievectoren \vec{r} getekend met hun relatieve snelheidsvectoren \vec{v} . De laatste zijn ontbonden in een component evenwijdig \vec{v}_1 aan en een component loodrecht \vec{v}_\perp op hun \vec{r} .



Op de volgende bladzijde is dit voorbeeld in gevuld. Er blijkt dat : $\underline{A}^T \underline{\tilde{d}} = \underline{A}^T \underline{d}_\perp$. Het blijkt

dus dat de vergelijkingen verkregen uit \vec{v}_\perp en \vec{v} niet verschillen. \vec{v}_1 levert niets bij aan de vergelijkingen. Als de vergelijkingen hetzelfde zijn zullen ook de uitkomsten hetzelfde zijn. Dit is overeenkomstig de theorie beschreven in subparagraaf 3.1.2.

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 5\sqrt{2} & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\sqrt{2} & 10 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 0 & -5\sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 0 & -10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T \underline{A} = \begin{bmatrix} 350 & -50 & -100 \\ -50 & 250 & -100 \\ -100 & -100 & 400 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T \underline{A} \underline{w} = \underline{A}^T \underline{d}$$

$$\begin{bmatrix} 350 & -50 & -100 \\ -50 & 250 & -100 \\ -100 & -100 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 40 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 40 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

met:

$$\underline{d}^T = [1 \ 1 \ 0 \ ; \ 0 \ -\sqrt{2} \ 0 \ ; \ -2 \ 0 \ 0]$$

$$\underline{d}_I^T = [1 \ 0 \ 0 \ ; \ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ 0 \ ; \ -1 \ 1 \ 0]$$

$$\underline{d}_{II}^T = [0 \ 1 \ 0 \ ; \ \frac{1}{2}\sqrt{2} \ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ 0 \ ; \ -1 \ -1 \ -1]$$

BIJLAGE C UITWERKING M

$$\underline{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & r_z^i & -r_y^i \\ -r_z^i & 0 & r_x^i \\ r_y^i & -r_x^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} \underline{R}_1^T & \underline{R}_2^T & \dots & \underline{R}_i^T & \dots & \underline{R}_n^T \end{bmatrix}$$

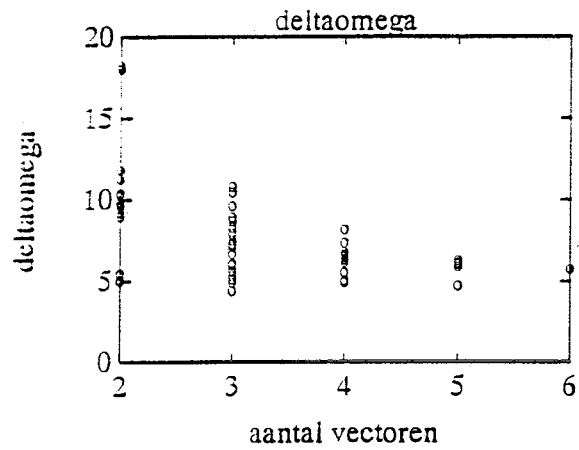
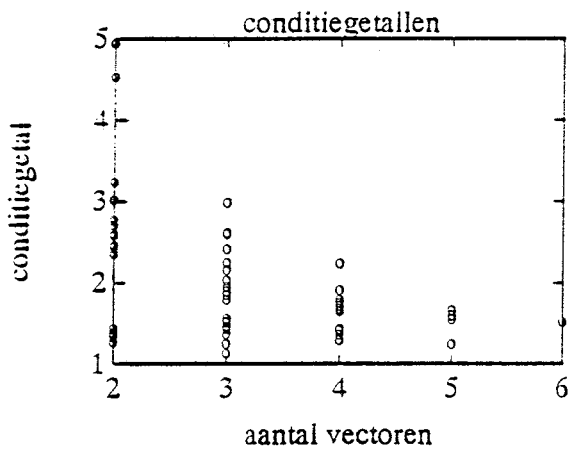
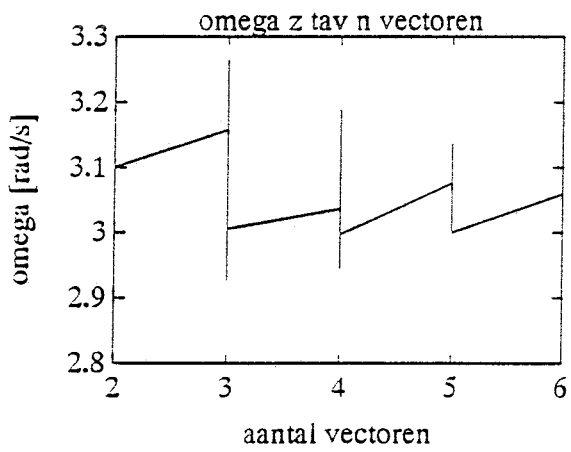
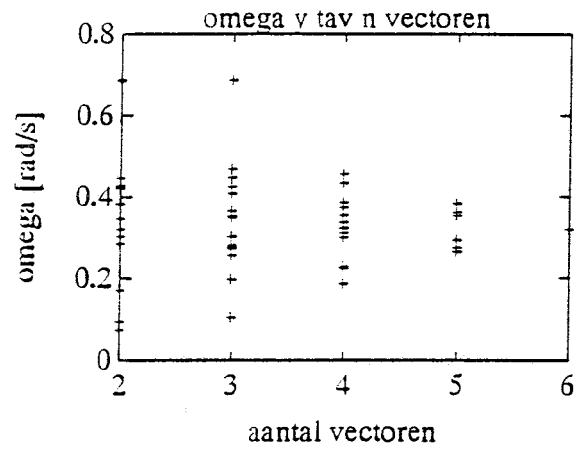
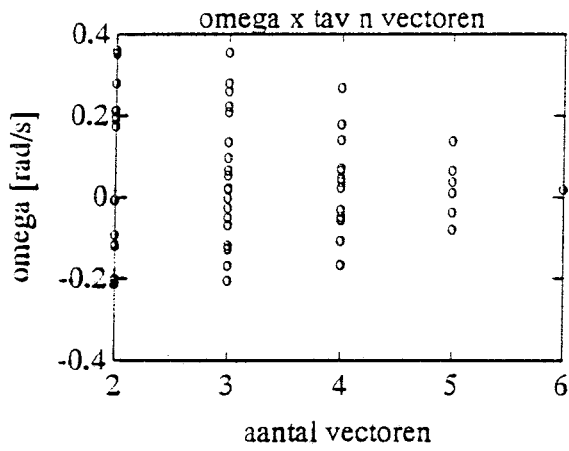
$$\underline{M} = \underline{A}^T \underline{A} = \sum_{i=1}^n \underline{R}_i^T \underline{R}_i$$

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} r_z^{i2} + r_y^{i2} & -r_x^i r_y^i & -r_x^i r_z^i \\ -r_x^i r_z^i & r_z^{i2} + r_x^{i2} & -r_y^i r_z^i \\ -r_x^i r_z^i & -r_y^i r_z^i & r_x^{i2} + r_z^{i2} \end{bmatrix}$$

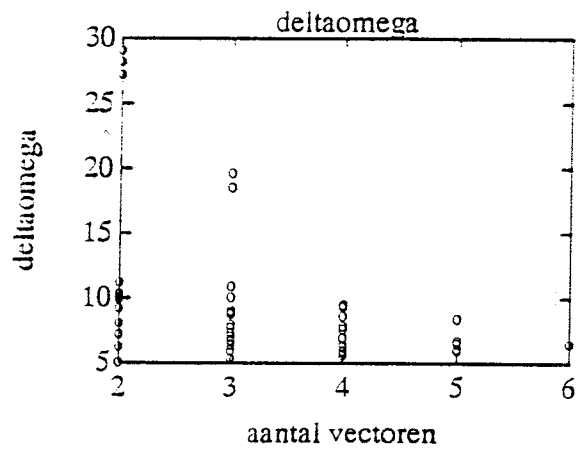
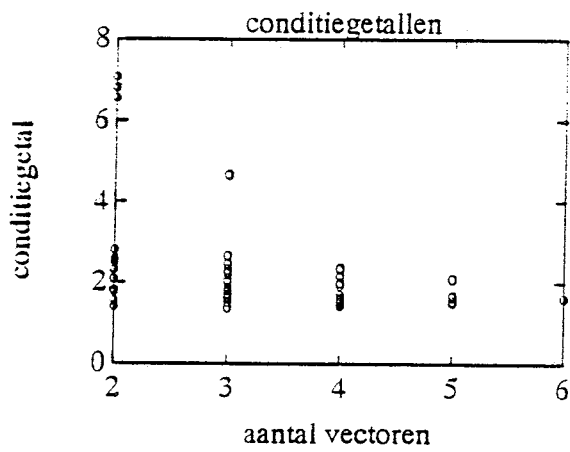
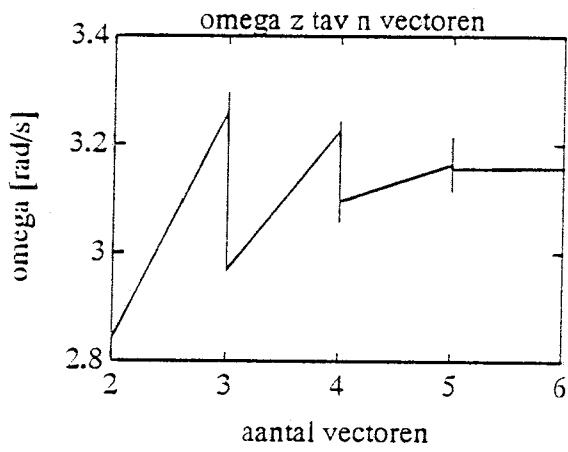
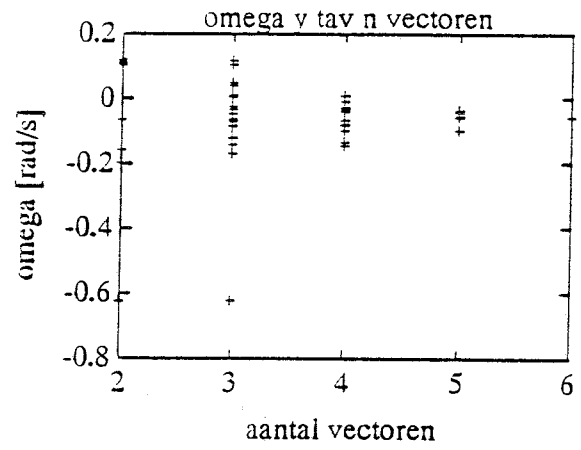
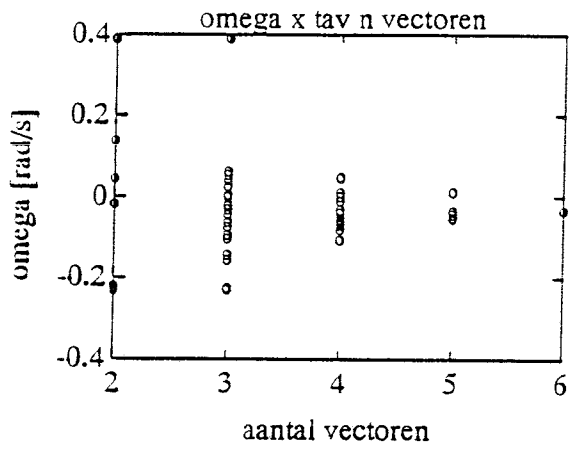
BIJLAGE D

RESULTATEN TESTEXPERIMENT

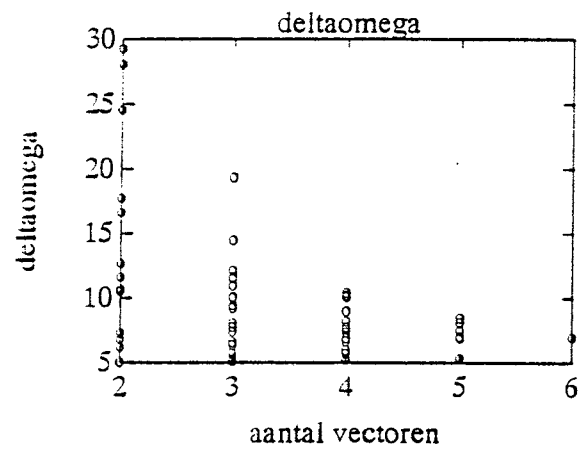
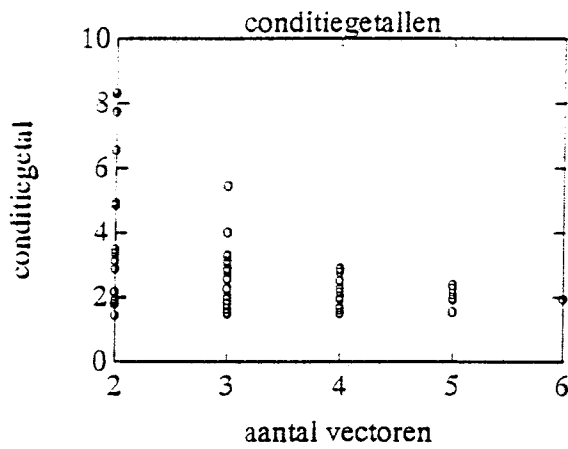
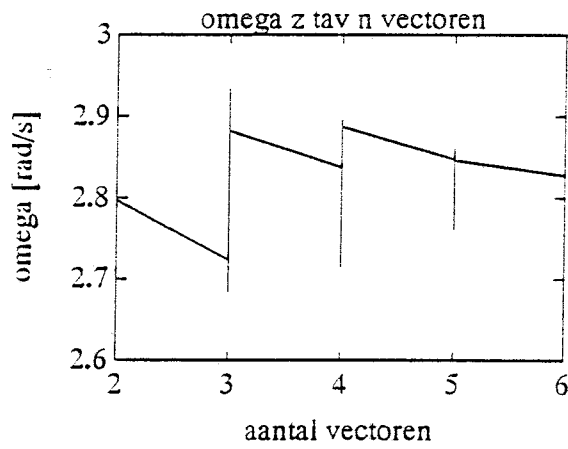
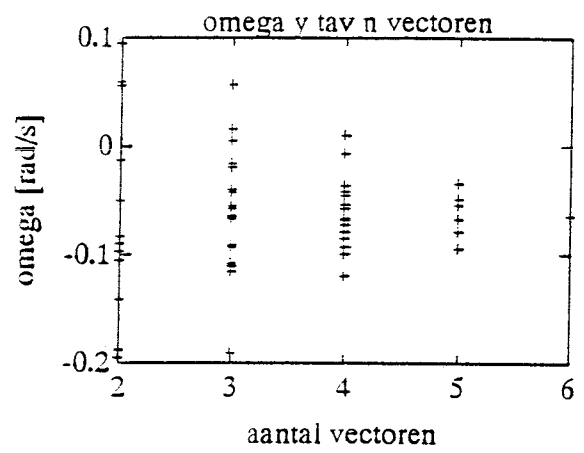
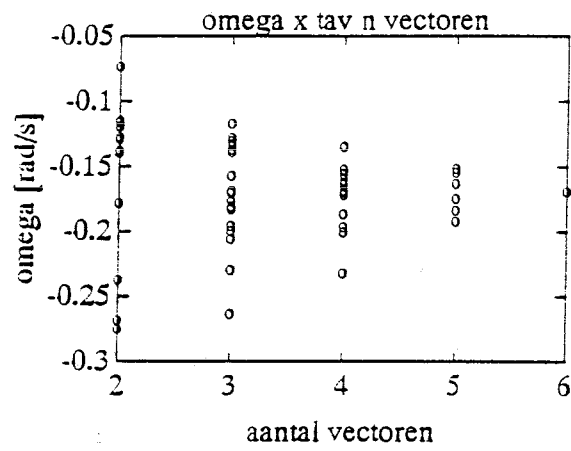
Manier 1



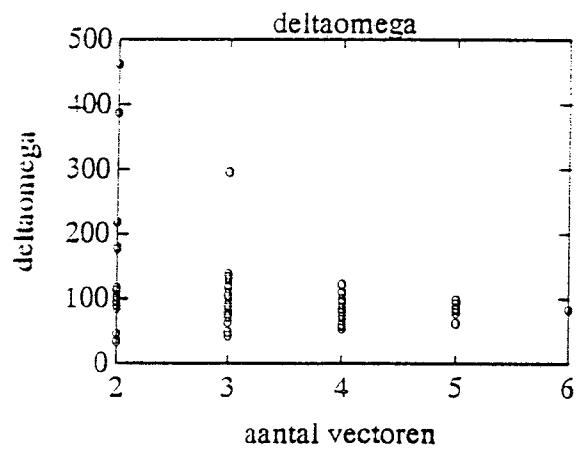
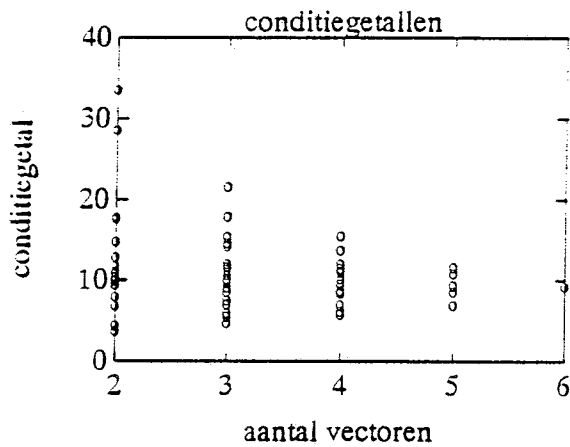
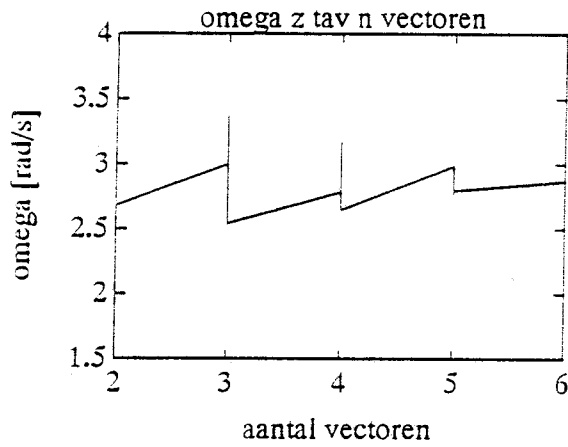
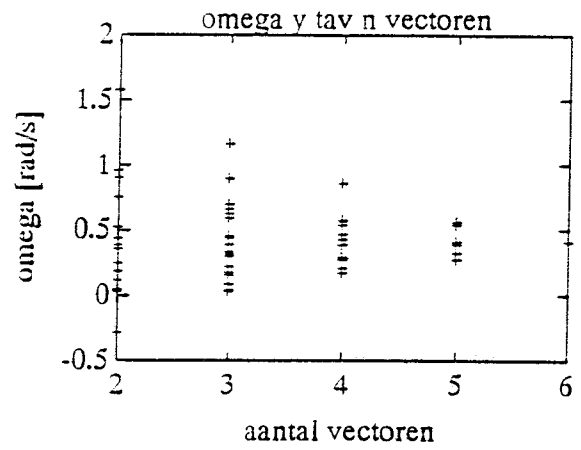
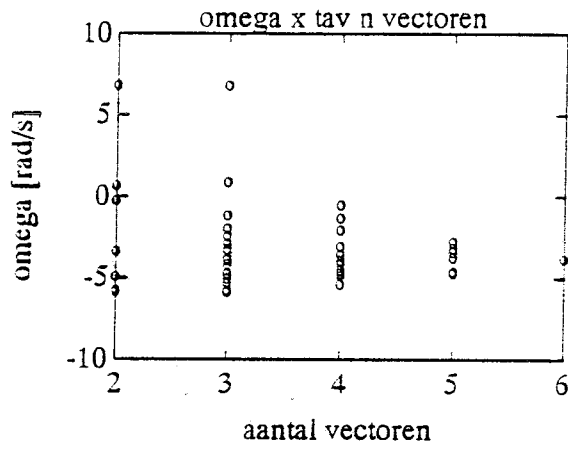
Manier 2



Manier 3



Manier 5



BIJLAGE E MATLAB PROGRAMMA

PROG2 :

```
% programma met de subonderdelen.
% experiment voor het berekenen
% van de hoekverdraaiingsparameters
```

```
% André van Doorn
% stage 1: (1991)
%
```

```
markpositie
stoornormal
laagdoorlaatfilter
afgeleiden
tijdselecteren
relatief
kkm
```

MARKERPOSITIE

```
% markpositie: bepaling van de positie
% van de vier markers in de tijd.
% het eerste punt is het snijpunt van de as-
% sen.
% André van Doorn
% stage 1991
```

```
t = 0:1/20:2;
% absolute positievectoren van marker 1
markrx = 2 * cos(t*pi);
markry = -2 * sin(t*pi);
markrz = 0 * t;
x1 = [markrx;markry;markrz];
```

```
% absolute positievectoren van de marker 2
markrx = sin(t*pi);
markry = cos(t*pi);
markrz = 0 * t;
x2 = [markrx;markry;markrz];
```

```
% absolute positievectoren van de marker 3
x3=[0*t;0*t;0*t];
x4=[0*t;0*t;ones(1,41)];
```

STOORNORMAL

```
% Stoornormal: Deze subroutine zet op de
% positievectoren een random verstoring.
% De verstoring is 'normal'
% Dit houdt in een gemiddelde van nul en
% een variantie van 0.5
% André van Doorn
% stage 1991
```

```
rand('normal')
```

```
ruis1 = rand(3,41)/2;
ruis2 = rand(3,41)/2;
ruis3 = rand(3,41)/2;
ruis4 = rand(3,41)/2;
```

```
g1 = x1 ;
g2 = x2 ;
g3 = x3 ;
g4 = x4 ;
clg
plot (t,x1(1,:),'-',t,g1(1:,:),'o'),title('ongestoorde
en gestoorde signaal')
pause
```

LAAGDOORLAATFILTER

```
% laagdoorlaatfilter: creer een butterw filter.
% Dit filter moet een laagdoorlaatfilter zijn
% creer de vectoren B en A die het filter
% specificieren.
% Deze vectoren worden ingegeven in 'filter'
% André van Doorn
% stage 1991
```

```
[B,A] = Butter(2,0.1);
```

```
% filter de signalen x1, x2, x3 en x4
% filter kan alleen vectoren filteren, daarom
% worden de componenten
% x, y, z, afzonderlijk gefilterd.
f11 = filter(B,A,g1(1,:));
f12 = filter(B,A,g1(2,:));
f13 = filter(B,A,g1(3,:));
f1=[f11';f12';f13'];
plot(t,x1(1,:),'-',t,g1(1:,:),'o',t,f1(1:,:),'+'),title-
('ongesoorde, gestoorde en gefilterde sig-
naal')
```

```
pause
f21 = filter(B,A,g2(1,:));
f22 = filter(B,A,g2(2,:));
f23 = filter(B,A,g2(3,:));
f2=[f21';f22';f23'];
f31 = filter(B,A,g3(1,:));
f32 = filter(B,A,g3(2,:));
f33 = filter(B,A,g3(3,:));
f3=[f31';f32';f33'];
f41 = filter(B,A,g4(1,:));
f42 = filter(B,A,g4(2,:));
f43 = filter(B,A,g4(3,:));
f4=[f41';f42';f43'];
```

AFGELEIDEN

```
% afgeleiden: Deze subroutine bepaald de
% afgeleiden van de vectoren f
% André van Doorn
% stage 1991

deltat=1/20*[ones(1,41)]
v11 = gradient(f11',t)
v12 = gradient(f12',t);
v13 = gradient(f13',t);
pause
plot( t,f11,'-',t,v11,'o'),title('gefilterde
positie en eerste afgeleide')
v21 = gradient(f21',t);
v22 = gradient(f22',t);
v23 = gradient(f23',t);

v31 = gradient(f31',t);
v32 = gradient(f32',t);
v33 = gradient(f33',t);

v41 = gradient(f41',t);
v42 = gradient(f42',t);
v43 = gradient(f43',t);

a11 = gradient(v11,t);
a12 = gradient(v12,t);
a13 = gradient(v13,t);
pause
plot( t, f11, '- ', t, v11, 'o', t, a11, ' + ' ), -
title('positie, eerste en tweede afgeleide')
a21 = gradient(v21,t);
a22 = gradient(v22,t);
a23 = gradient(v23,t);

a31 = gradient(v31,t);
a32 = gradient(v32,t);
a33 = gradient(v33,t);

a41 = gradient(v41,t);
a42 = gradient(v42,t);
a43 = gradient(v43,t);

v1=[v11;v12;v13];
v2=[v21;v22;v23];
v3=[v31;v32;v33];
v4=[v41;v42;v43];
a1=[a11;a12;a13];
a2=[a21;a22;a23];
a3=[a31;a32;a33];
a4=[a41;a42;a43];
```

TIJDSELECTEREN

```
% tijdselecteren
% André van Doorn
% stage 1991

% Deze subroutine bepaald voor welk tijdstip
% de hoeksnelheid
% en hoekversnelling wordt uitgere-
% kend.

% invoer zijn de vier positievectoren(t) f1,
% f2,f3,f4,
% de vier snelheidsvectoren(t) v1,v2,v3,v4
% de vier versnellingsvectoren(t) a1,a2,a3,a4

% uitvoer is de matrix abspos,abssnel,abs-
% vers waarin de posities, snelheden
% en versnellingen staan van de vier markers
% op een bepaald tijdstip t1.
% Deze abspos,abssnel en absvers worden
% gebruikt in de subroutine relatief.

clear o
clear op

for t1=1:1/20:1.5

abspos = [f1(:,20*t1),f2(:,20*t1),f3(:,20*t1),
f4(:,20*t1)] ;
abssnel = [v1(:,20*t1),v2(:,20*t1),v3(:,20*t1),
v4(:,20*t1)] ;
absvers = [a1(:,20*t1),a2(:,20*t1),a3(:,20*t1),
a4(:,20*t1)] ;

relatief
kkm
o=[o,omega]
op=[op,omepunt]

end
```

RELATIEF

```
% relatief: relatief maken van de absolute
% vectoren
% André van Doorn
% stage 1-11-1991

% invoer abspos, abssnel, absvers (3x4)
% uitvoer de relatieve vectoren r, v, a (3x6)
```

Bijlage E Matlab programma

```
% schoon maken van de variabelen r,v,a
clear r
clear v
clear a

% maak relatieve vectoren
for i = 1:3
    for j = i+1:4
        r=[r,abspos(:,j)-abspos(:,i)];
        v=[v,abssnel(:,j)-abssnel(:,i)];
        a=[a,absvers(:,j)-absvers(:,i)];
    end
end

                    KKM
% KKM
% Andre van Doorn
% stage 91

% invoer matrix r v en a
% schoon maken van de variabele A,d,s

clear A
clear d
clear s

% Het maken van matrix A en kolom d
m = length(r(1,:))

for i = m : -1:1
    R = [0,r(3,i),-r(2,i);-r(3,i),0,r(1,i);-
r(2,i),-r(1,i),0];
    A = [A;R];
    d = [d;v(:,i)];
end
d

% Kleinste kwadraten benadering voor de
% hoeksnelheid omega

omega = A\d

% Het maken van de s kolom

% g1 t/m g2 zijn rijen van (1xm)
% g is een matrix van (3xm) en bevat in elke
% kolom het uitproduct omega x v

g1 = omega(2,1)*v(3,:)-omega(3,1)*v(2,:);
g2 = omega(3,1)*v(1,:)-omega(1,1)*v(3,:);
g3 = omega(1,1)*v(2,:)-omega(2,1)*v(1,:);

g = [g1;g2;g3];

% Het maken van matrix t (3xm)
% met in elke kolom de kolom t

t = a - g;

% Het maken van de kolom s
for i = 1 : m
    s = [s;t(:,i)];
end

%
%
% Kleinste kwadraten benadering voor de
% hoeksnelheid omepunt

omepunt = A\s
```


BIJLAGE F BUTTERWORTH FILTER

In de volgende figuren blijkt dat de fase achterstand van het gefilterde signaal ten opzichte van het ongestoorde signaal afhangt van de orde van het filter. Er bestaat een relatie tussen de fase achterstand en de orde van het signaal [2]. Ook is te zien dat de inschakelverschijnselen langer aanhouden naar mate de orde van het signaal groter is.

Als de cut-off frequenty te laag neemt (dit is afhankelijk van de frequenty van het ongestoorde signaal) kan het totale signaal worden weggefilterd.

Voor het ongestoorde signaal is de x-component van de absolute positievector genomen. Het gestoorde signaal is het ongestoorde signaal waarop ruis is aangebracht.

In de laatste drie figuren is te zien dat de kwaliteit van het gefilterde signaal aanzienlijk beter wordt naar mate de orde van het filter hoger is. In deze figuren is het gefilterde signaal respectievelijk één en twee keer gedifferentieerd. De figuren worden steeds gladder.

