

## Gestreckte keerpunten in koppelkrommen

**Citation for published version (APA):**

Dijksman, E. A. (1984). *Gestreckte keerpunten in koppelkrommen: stangenvierzijden met rechtgeleide omkeerpunten*. (EUT report. W, Dept. of Mechanical Engineering; Vol. 84-W-001), (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Vakgroep Produktietechnologie : WPB; Vol. WPB0053). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1984

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

BB 61150

Eindhoven University of Technology Research Reports

EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Department of Mechanical Engineering

Eindhoven

The Netherlands

GESTREKTE KEERPUNTEN IN KOPPELKROMMEN:

Stangenvierzijden met rechtgeleide omkeerpunten

door

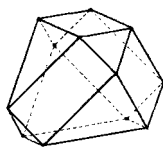
Dr. Evert A. Dijkstra

EUT Report 84-W-001

ISBN 90-6808-001-6

ISSN 0167-9708

Coden: TEUEDE



Eindhoven

Januari 1984

Voordracht gehouden ter gelegenheid van het DET-Colloquium  
"Leer der Mechanismen" aan de Technische Hogeschool Twente  
op 19 oktober 1983.

CIP-gegevens

Dijksman, Evert A.

Gestreckte keerpunten in koppelkrommen: stangenvierzijden met  
rechtgeleide omkeerpunten / door Evert A. Dijksman. -  
Eindhoven: University of Technology. - Fig. -  
(Eindhoven University of Technology research report /  
Department of Mechanical Engineering, ISSN 0167-9708; 84-W-001)  
Met lit. opg., reg.  
ISBN 90-6808-001-6  
SISO 650.3 UDC 531.1:62-231.31 UGI 650  
Trefw.: kinematica / mechanismen.

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord

Engelse en Nederlandse samenvatting

1. Inleiding
2. Kinematische beschouwing
3. Algemene Constructie van de stangenvierzijde, waarvoor  $Bl_1 = F$
4. Bijzondere oplossingen, waarvoor  $x^2 = 4y$
5. Oplossingen, waarbij  $y = 1$
6. Oplossingen, waarvoor  $x = y + 1$
7. De afmetingen van  $\square A_0ABB_0$
8. De Burmester-matrix en de afmetingen van het Burmester-triplet
9. De Roberts'-transformatie
10. De samenhang tussen B- en R-transformaties
11. De volledige Burmester-Roberts Configuratie -  $C_{BR}$  -
12.  $C_{BR}$  en de grafiek  $y$  versus  $x$ .

Appendix : relaties voor strekbare vierzijden

Litteratuurlijst

Dankwoord

## VOORWOORD

In de praktijk wordt een rechtlijnige heen- en weergaande beweging veelvuldig aangetroffen. Men denke bijvoorbeeld aan de beweging van een hamer op een aambeeld, aan die van een naald in een naaimachine of aan die van een zuiger in de cylinder van een verbrandingsmotor. Ook bij overzetmechanismen of verpakkingsmachines komt de beweging veelvuldig voor.

Ruimte om een dergelijke beweging te genereren is niet altijd voorhanden.

Als vanouds gaat het erom een roterende beweging in een rechtlijnige om te zetten, zoals gebeurt bij een krukstangmechanisme, dat hedentendage uit onze maatschappij niet meer weg te denken valt. Oplossingen, waar ook de leibaan niet meer nodig zou zijn, kunnen in de praktijk worden toegepast.

Het is om deze reden, dat gedacht is aan de toepassing van een stangenvierzijde, waarvan het krukstangmechanisme uiteindelijk een bijzondere vorm is. Ook daarbij kunnen punten, zoals blijkt uit dit rapport, een min- of meer naaldvormige kromme beschrijven. Deze bijzondere 'koppelkrommen' zoals ze bij de stangenvierzijde genoemd worden, krijgen hier de aandacht. Om praktische redenen is echter vooral de nadruk gelegd op het ontwerp van de stangenvierzijde, die aan de gestelde eisen moet voldoen. Aangezien bij het bepalen van de hoofdafmetingen een veelvuldig gebruik gemaakt is van de computer, kan hier ook met recht van een computer-gesteund ontwerpen worden gesproken. (computer aided design)

Omdat vanwege het algemene karakter van dit onderzoek, bijzondere toepassingen niet zijn nagestreefd, is het onderzoek vooralsnog beperkt gebleven tot het algemene onderzoek van de meetkundige mogelijkheden.

Aan de constructeur zijn twee zg. ontwerp-vrijheidsgraden overgelaten, die hij verder naar eigen goeddunken kan gebruiken.

Mechanismen met een optimale bewegingsoverdracht, kunnen worden uitgezocht zonder dat daarbij veel aan vrijheid wordt ingeboet.

De veelheid aan aangeboden oplossingen garandeert de mogelijkheid van toepassing in de fijnmechanische sfeer enerzijds als in de sfeer van krachtwerktuigen anderzijds.

De toegepaste wiskunde, die aan dit alles ten grondslag ligt, blijkt zich te bewegen op het terrein van de bewegingsmeetkunde (kinematica), de matrixrekening en de theorie van de graphen. Een bijzondere rol heeft daarbij een ruimtelijke graaf gespeeld, een zg. cubo-bitetraëder, langs wiens ribben de transformaties plaatsvonden om de diverse mogelijkheden in elkaar te doen overgaan. Het is hierom, dat dit bijzondere 'kristal' als symbool gekozen is van dit onderzoek.

Eindhoven, december 1983

Summary Coupler curves having an undulation point (Ball's point) that coincides with a cusp, may be used for gripping mechanisms, approaching products in a straight way. Because of this, a specific design has been suggested in which the coupler point of a 4-bar linkage passes through a so-called ball-nodal point.

Solutions, based on the Burmester-theory appear to be interrelated through Roberts' Law. This somewhat intermixed relationship, may be represented by a 3D-graph, in this case a cubo-bitetrahedron where each of the 12 vertices is to be occupied by a 4-bar. Transformation-formulae, necessary to go from the one apex to the other, are presented. Longer edges, thereby represent Burmester-transformations, whereas the shorter ones, transform a 4-bar into an appointed curve cognate, according to Roberts' Law.

In order to appease the designer, the main dimensions of the 4-bar are given as a function of 2 independent variables,  $x$  and  $y$ . This is done by the extensive use of three basic numbers ( $t_3, t_2, t_1$ ) that are interrelated through the necessary condition that Ball's point is also a Burmester point.

At the end of this booklet, 4 graphs are presented giving information about the transmission angles that are to be expected. The designer may use them as an indication to find out which 4-bars are stretchable and which ones have equal transmission angles in the extreme positions of the rocker.

Dijksman, E.A.

STRETCHED CUSPS IN COUPLER CURVES: Four-bar linkages having Ball-modal coupler points (in Dutch).

Department of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology (Netherlands), 1984.

EUT Report 84-W-001

Address of the author:

Dr. Evert A. Dijksman,  
Theory of Machines and Mechanisms,  
Production Technology and Automation,  
Department of Mechanical Engineering,  
Eindhoven University of Technology,  
P.O. Box 513,  
5600 MB EINDHOVEN,  
The Netherlands

SAMENVATTING Koppelkrommen, waarbij keerpunten met undulatiepunten samenvallen, kunnen worden gebruikt voor grijpermechanismen, waarbij producten rechtlijnig moeten worden benaderd. Om deze reden is een specifieke constructie voor de stangenvierzijde ontworpen, waarbij het koppelpunt een ballnodaalpunt is. Oplossingen, die op de Burmester-theorie berusten, zijn tevens in verband gebracht met de stelling van Roberts. Dit verband kan zowel in een grafiek als in een ruimtelijke graaf worden weergegeven, waarbij 12 stangenvierzijden zich op de hoekpunten van een cubo-bitetraëder bevinden. Transformatie-formules, die dit verband weergeven zijn opgevoerd. Ten behoeve van de ingenieur-constructeur zijn de afmetingen van het hoofdmechanisme ook in het algemene geval weergegeven als functie van een drietal kengetallen  $(t_3, t_2, t_1)$ , terwijl aan het slot een grafiek informatie geeft over de te verwachten overbrengingshoeken, die een maat zijn voor de bewegingsoverdracht.

Dijksman, E.A.

GESTREKTE KEERPUNTEN IN KOPPELKROMMEN: Stangenvierzijden met rechtgeleide omkeerpunten.

Department of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology (Netherlands), 1984.

EUT Report 84-W-001

Adres van de auteur:

Dr. Evert A. Dijksman,  
Groep Mechanismen,  
Vakgroep Produktietechnologie en Bedrijfsmechanisatie,  
Afdeling der Werktuigbouwkunde,  
Technische Hogeschool Eindhoven,  
Postbus 513,  
5600 MB EINDHOVEN



Inleiding Voor het neerzetten of opnemen van producten op of van een stilstaande of bewegende tafel door een grijpermechanisme, is een aankomende en daarna weer teruggaande beweging van de grijper ten opzichte van deze tafel essentiëel. Bij het einde van de aankomende en bij het begin van de teruggaande beweging, is er een moment van stilstand tussen grijper en tafel nodig. Anders, kan beschadiging van de neergezette producten worden verwacht. Het ligt daarom voor de hand om, bij de constructie van het overbrengings- of geleidingsmechanisme voor de grijper, gebruik te maken van keerpunten in banen.

Zoals bekend uit de grondbeginselen van de bewegingsmeetkunde, bevindt, van alle punten van een bewegend vlak, alleéén de (snelheids-)pool P zich in een keerpunt van zijn baan. Constructies van mechanismen, waarbij dus de pool P is betrokken, zijn daarom van belang. Zeer fundamenteel is het gedrag van de baan van de pool bij een stangenvierzijde.

Bedoeld is daarbij de baan beschreven door een koppelpunt K dat zich in de ontwerppositie van de stangenvierzijde, waarbij dus de grijper even stil moet staan, in de pool bevindt. Zo'n koppelpunt wordt dan star verbonden gedacht met de bewegende koppelstang van de stangenvierzijde. In de praktijk blijkt recht neerzetten of -opnemen het meeste voor te komen, zodat het voor de hand ligt om ons te beperken tot omkeerpunten met een 'rechte' keerpuntsbaan, waarvan het heen- en teruggaande gedeelte niet noodzakelijkerwijs even lang hoeft te zijn.

Om tot de constructie van dergelijke stangenvierzijden te komen, zal, net als bij de benaderde rechtgeleidingsmechanismen (Zie litt. (1) en (2)), het undulatiepunt U (ook wel bekend als het 'punt van Ball') als

koppelpunt worden genomen. In totaal willen we dus, dat  $K = U = P$ , hetgeen in ons geval echter betekent, dat het keerpunt, dat weliswaar geen zelfcontactpunt, maar wel een dubbelpunt is met een enkelvoudige dubbelpuntsraaklijn, daar nu ook een echt buigpunt<sup>\*)</sup> krijgt. Dit komt, omdat we in het punt P van de koppelkromme niet van een gewoon buigpunt, bestaande uit 3 infinitesimaal dicht bij elkaar gelegen punten, kunnen uitgaan, maar van een dubbelpunt met slechts één infinitesimaal daar dichtbij gelegen punt, waardoor de conditie  $U = P$  voor een verhoogde aanraking inderdaad neerkomt op een samenvallen van keerpunt en buigpunt. (Dit geeft dan  $(1+2+1 = 4)$  samenvallende snijpunten met de keerpuntsraaklijn.)

Voor een betere 'rechtgeleiding' in de pool, kan men, in aanvulling op de eis voor een buigpunt ( $U = P$ ) in het aankomende- of in het teruglopende deel van de koppelkromme, buitendien nog een 5e snijpunt van de keerpuntsraaklijn met de koppelkromme in P leggen. Gebeurt dit, door te eisen, dat het punt van Ball een punt van Burmester is ( $U = Bl_1$ ), dan betekent dit voor de pool, dat het daar reeds aanwezige buigpunt over zal gaan in een echt undulatiepunt met een 4-puntsaanraking met de keerpuntsraaklijn. In de pool valt dan het keerpunt samen met een echt undulatiepunt. In totaal dus  $(1+2+1+1) = 5$  samenvallende punten van de koppelkromme met de keerpuntsraaklijn. Een keerpunt, dat samenvalt met een echt undulatiepunt, zal 'ball-nodaalpunt' worden genoemd. Voor een ball-nodaalpunt is dus  $Bl_1 = U = P$ . In de praktijk betekent dit, dat stangenvierzijden met 'scherp gespitste' koppelkrommen kunnen worden ontworpen door middel van de condities  $K = P = U = Bl_1$ .

---

\*) Een buigpunt, dat zoals hier met een keerpunt samenvalt, wordt ook wel flecnodeaalpunt genoemd. (Zie ook Litt. (3))

\*\*) In het algemeen is in een dubbelpunt van de koppelkromme, die immers van de 6e graad is, op z'n hoogst een 5-puntsaanraking met een der dubbelpuntsraaklijnen mogelijk.

\*\*\*)) Voor 6 samenvallende punten in P, dus als  $Bl_2 = P$ , ontardt de koppelstangbeweging in een elliptische beweging met exacte rechtgeleiding.

2. Kinematische beschouwing. De eis, dat het undulatiepunt U moet samenvallen met de pool P, betekent, dat de brandas PU van de momentane middelpuntskromme ( $\tilde{c}p$ ) de buigcirkel bc in P moet raken. De brandas valt dan dus samen met de poolraaklijn p. Als gevolg hiervan valt de middelpuntskromme ( $\tilde{c}p$ ) uiteen in deze poolraaklijn en in een cirkel ( $c-\tilde{c}p$ ), die de poolnormaal in P raakt. De poolraaklijn wordt zodoende een diameter van deze cirkel. (Zie figuur 1)

Middelpunten, die gestelpunten zijn van een stangenvierzijde, kunnen alleen op het cirkeldeel van  $\tilde{c}p$  worden aangetroffen, omdat anders het koppelpunt in P om een center-punt van p gaat roteren, hetgeen niet de bedoeling was.

De bijbehorende cirkelloopkromme (cp), waarop de bewegende draaipunten van de koppelstang komen te liggen, valt weliswaar niet uiteen, maar haar beide krommingen in de pool zijn juist die van  $c-\tilde{c}p$  en van de buigcirkel. Een nadere beschouwing van de vergelijking van cp leidt inderdaad tot deze conclusie. Het een en ander blijkt trouwens ook, wanneer cp punt voor punt wordt geconstrueerd. In figuur 1 is dit uitgevoerd met behulp van de zg. 'brandpuntsconstructie', waarbij het brandpunt F en de brandas  $M_O P$  een fundamentele rol spelen: Iedere lijn  $L_O$  door F snijdt <sup>nl.</sup> de brandas in een middelpunt  $M_O$  van een cirkel, die door P en door 2 punten van cp op  $L_O$  gaat. (Daarbij zijn PF, de halve hoogtelijn in  $\Delta PWM$ , en de brandas elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de poolraaklijn p.)

Met betrekking tot het ontwerp van de stangenvierzijde, kan verder de buigcirkel steeds in het bovenhalfvlak worden geplaatst. Deze keuze doet geen afbraak aan de algemeenheid van de constructie. Ook kan, om redenen van symmetrie, de cirkel  $c-\tilde{c}p$  steeds in het rechterhalfvlak worden genomen. Het een en ander betekent, dat de

lus van de cirkelloopkromme in ieder geval in het eerste kwadrant en ook steeds binnen de buigcirkel komt te liggen.

De tweede eis, dat het undulatiepunt U tevens een punt van Burmester moet zijn, m.a.w., dat het een punt van Ball is met excess 1, ( $U = Bl_1$ ), betekent in de praktijk, dat de koppelstang van de stangenvierzijde in ons geval door het midden  $M_{bc}$  van de buigcirkel moet gaan. Deze eenvoudige regel, die praktisch van veel nut is, kan als volgt worden afgeleid:

Bekend is reeds <sup>(1)</sup>, dat in die gevallen waarbij  $U = Bl_1$ , de koppelstang de poolnormaal hoort te snijden in een punt T, vastgelegd door de betrekking:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_0} = \frac{1}{\overline{PT}} \quad (1),$$

waarbij tussen de langs de poolnormaal gemeten lengten  $l = \overline{PL}$ ,  $l_0 = \overline{PL_0}$  en de buigcirkeldiameter  $\delta = \overline{PW}$  nog een betrekking bestaat zoals

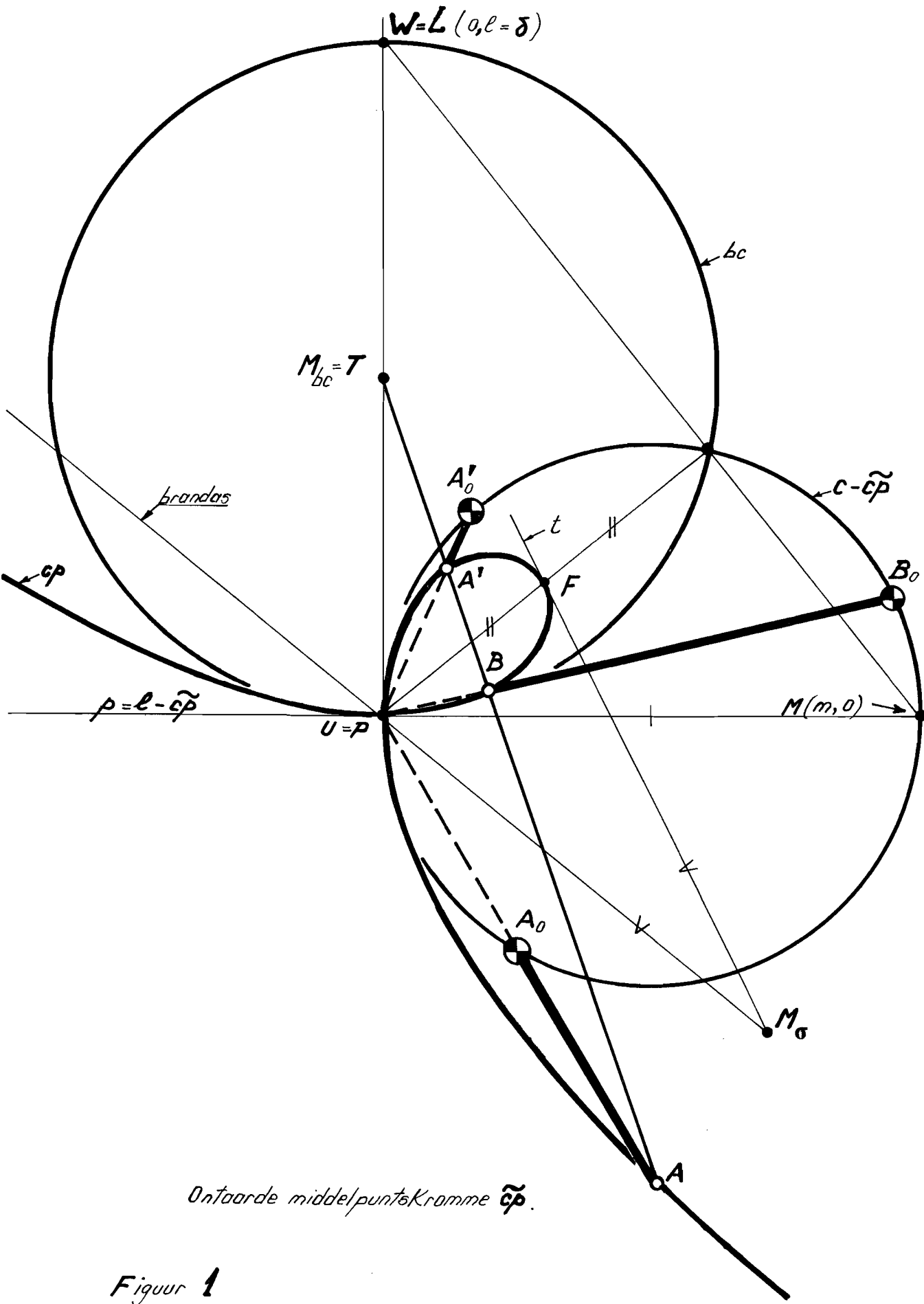
$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0} = \frac{1}{\delta} \quad (2)$$

$l/2$  en  $l_0/2$  zijn daarbij de kromtestralen in de pool, gemeten langs de poolnormaal, van resp. de cirkelloopkromme en de middelpuntskromme. Afgezien hiervan, kunnen de grootheden  $l$  en  $l_0$  ook worden uitgedrukt in de kromtestralen  $R$  en  $R_0$  van resp. de bewegende - en de vaste polode. Deze betrekkingen zijn respectievelijk:

$$\frac{3}{l} = \frac{2}{R} - \frac{1}{R_0} \quad (3)$$

en

$$\frac{3}{l_0} = \frac{2}{R_0} - \frac{1}{R} \quad (4)$$



Zijn  $(r, \theta)$  <sup>voortd</sup> de poolcoördinaten van een cirkellooppunt c.q. van een bewegend draaipunt, dan kan de cirkelloopkromme in het algemeen als volgt worden beschreven:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l \cdot \sin \theta} + \frac{1}{m \cos \theta} \quad (5)$$

Hierin is

$$\overline{PM} = m = - \delta / \left( \frac{d\delta}{ds} \right) \quad , \quad (6)$$

waarin  $s$  de booglengte voorstelt, gemeten langs de vaste of langs de bewegende polode.

De bij de cirkelloopkromme horende middelpuntskromme wordt bepaald door de vergelijking:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{l_0 \sin \theta} + \frac{1}{m \cos \theta} \quad (7)$$

Omdat in ons geval  $U = P$ , is het bijbehorende oneigenlijke krommingsmiddelpunt  $U_0^{\infty}$  van  $p$ , het asymptotisch punt van  $\tilde{c}_p$ . Hierdoor is

$$l_0^{-1} = 0 \quad (8)$$

en valt  $\tilde{c}_p$  uiteen in een cirkel  $c-\tilde{c}_p$  en haar middellijn  $p$ .

Zodoende volgt uit (4) en (8), dat

$$R_0 = 2R \quad , \quad (9)$$

waardoor we hier in eerste instantie te doen hebben met een zogenaamde 'elliptische positie' van de stangenvierzijde. Dit, omdat de krommingen van vaste en bewegende polode zich net zo verhouden als bij de elliptische beweging.

Substitutie van (8) in (1) en (2) heeft tot resultaat, dat

$$\overline{PT} = l/2 = \delta/2 \quad , \quad (10)$$

hetgeen inderdaad betekent, dat  $T = M_{bc}$ , het midden van de buigcirkel. Indien dus  $Bl_1 = U = P$ , gaat de koppelstang (AB) door het

midden T van de buigcirkel.

Wanneer het undulatiepunt tevens punt van Burmester is ( $Bl_1 = U$ ), liggen, op grond van de stelling van R. Müller (4), de overige drie Burmesterpunten (A, B en A') op een rechte lijn, in dit geval dus een rechte lijn door  $T = M_{bc}$ . (Zie ook Litt. (5))

Bij het ontwerpen van de stangenvierzijde, waarvoor  $Bl_1 = U = P$ , zijn we nog vrij om de richting van deze rechte door T te kiezen. Voor een eenmaal verkozen richting vindt men dan 3 snijpunten A, B en A' van deze rechte met de 3e graadskromme cp., die dan de 3 Burmesterpunten zijn uit de stelling van R. Müller. De bijbehorende Burmestercentra ( $A_0, B_0$  en  $A'_0$ ) vindt men dan op de overeenkomstige poolstralen door P en op het cirkeldeel  $c-\tilde{c}p$  van de middelpuntskromme. Al met al zijn er dus slechts 2 wezenlijke ontwerp-vrijheidsgraden. Deze zijn  $m/6$  en de hellingshoek van de koppelstang. Omdat er telkens 3 Burmesterparen zijn, kunnen ook telkens 3 stangenvierzijden worden geformeerd, waarin het koppelpunt, gelegen in het snijpunt van de opstaande staven een 'rechtgeleid' keerpunt\* zal doorlopen.

3. Algemene constructie van de stangenvierzijde, waarvoor  $Bl_1 = P$ .

In figuur 2 is gedemonstreerd hoe het mogelijk is de constructie uit te voeren zonder het gebruik van een puntsgewijze constructie van de cirkelloopkromme. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de eigenschap, dat bij deze ontaarding van de middelpuntskromme, althans voor het uitsluitend hier voorkomende geval, dat de gestelpunten op  $c-\tilde{c}p$  liggen, de collineatieas PQ loodrecht op de gestellijn staat. ( $PQ \perp A_0 B_0$ )

De constructie zelf is als volgt:

- a. Ga uit van een orthogonaal assenstelsel (p, P, n)
- b. Teken een buigcirkel bc door de oorsprong P met een middelpunt

$M_{bc} = T$  op de poolnormaal n ,

\* ) Zoals hiervoor beschreven, valt in dit punt het keerpunt samen met het punt van Ball. We hebben hier dus te doen met een hoger flecnodaalpunt, en wel een flecnodaalpunt met excess 1, ook wel ballnodaalpunt genoemd.

- c. Teken voorts een cirkel  $c-\tilde{c}p$  door P en door een willekeurig punt M van de poolraaklijn p. Het midden van  $\overline{PM}$  is daarbij tevens middelpunt van  $c-\tilde{c}p$ .
- d. Kies een willekeurig gestelpunt  $A_0$  op  $c-\tilde{c}p$  in het 4e kwadrant.
- e. Bepaal het snijpunt  $A_w$  van  $PA_0$  met de buigcirkel.
- f. Bereken de bijbehorende ligging van het (Burmester-)cirkelliggingspunt A met behulp van de Euler-Savarysche betrekking:

$$\frac{1}{PA} - \frac{1}{PA_0} = \frac{1}{PA_w}$$

- g. Teken een cirkel met middellijn  $PA_0$  en snijdt deze met de rechte TA in de respectieve punten  $Q_{AB}$  en  $Q_{AA'}$ .
- h. Leg het gestelpunt  $B_0$  in het snijpunt van  $A_0Q_{AB}$  en  $c-\tilde{c}p$ .
- i. Net zo, het gestelpunt  $A'$  in het snijpunt van  $A_0Q_{AA'}$  en  $c-\tilde{c}p$ .
- j. De draaipunten  $A'$  en B, tenslotte, vindt men in de respectieve snijpunten van de poolstralen  $PA'$  en  $PB_0$  met de rechte TA.

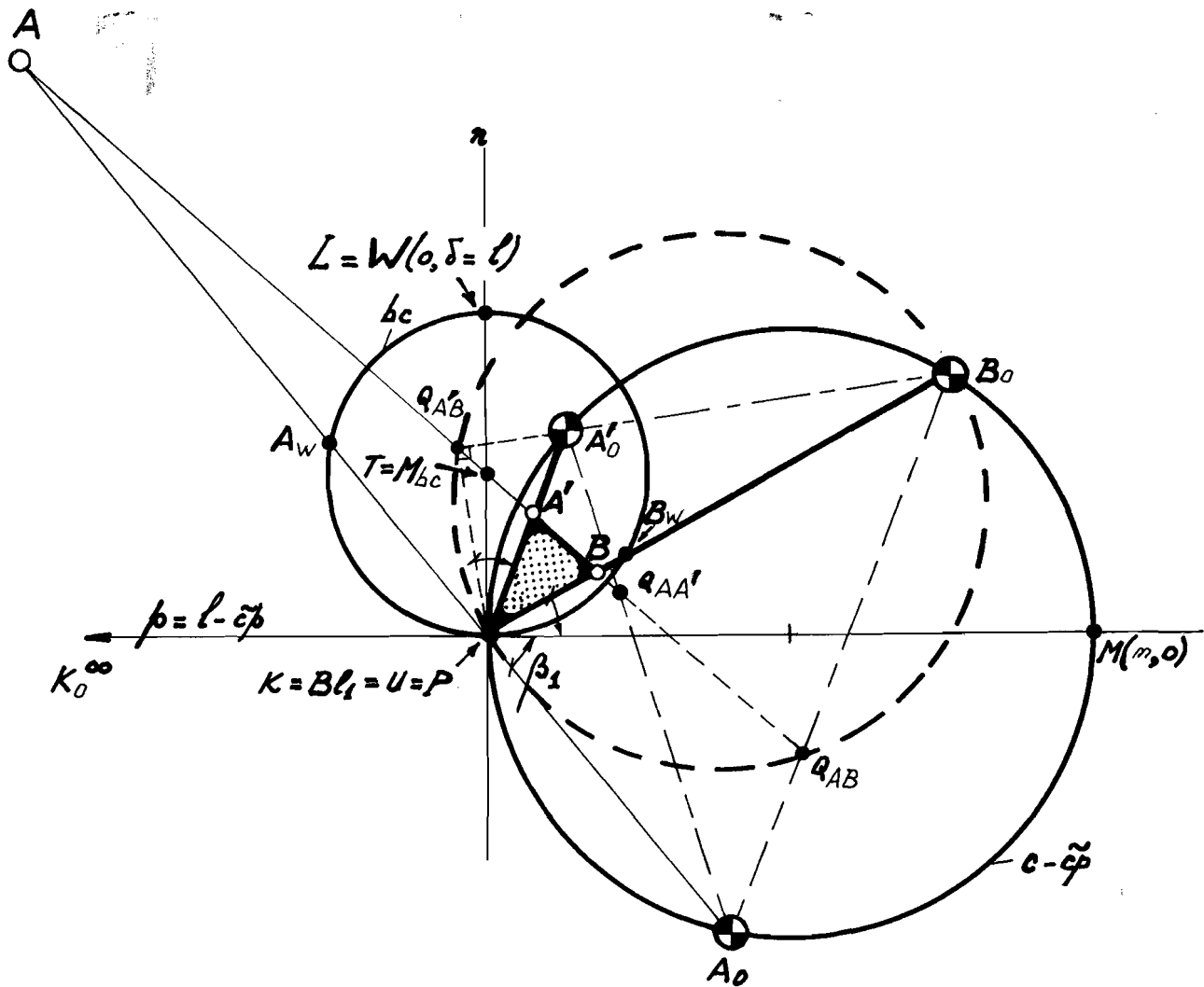
Voor ieder van de 3 stangenvierzijden  $A_0A'BB_0$ ,  $A_0A'AA_0$  en  $B_0BAA_0$  geldt dan, dat de pool, als koppelpunt beschouwd, een 'rechtgeleid' keerpunt zal doorlopen. Dit is ook gedemonstreerd in de figuren 4 - 10.

N.B. In plaats van de keuze van  $A_0$  in het 4e kwadrant, kan ook in het 1e kwadrant worden aangevangen. Ook kan zonder bezwaar een willekeurige permutatie van de letters A, B en A' worden doorgevoerd.

In de zojuist aangegeven constructie, is de Bl<sub>1</sub>-conditie ( $Bl_1 = U$ ) verwerkt door de (koppelstang-)rechte door het midden  $M_{bc} = T$  van de buigcirkel te laten gaan. De rekenkundige voorwaarde, opdat voor een stangenvierzijde ( $A_0ABB_0$ ) het undulatiepunt een punt van Burmester is, luidt in het algemeen (1) :

$$2t_0 = (t_1 + t_3) - (1 + t_1 t_3) t_2 \quad (Bl_1)$$





Algemene Constructie van telkens 3 stangen vierzijden met

Rechtgeleide Omkeerpunten in P.

(Drie Burmesterpunten A, A' en B op één rechte door T = M<sub>bc</sub>)

(Het 4<sup>e</sup> Bu-punt ligt in de pool P)

Twee ontwerpvrijheidsgraden. ( $\frac{m}{\delta}$  en de helling van ABA' door T).

**Figuur 2**

Hierin is  $t_i = \cotg \beta_i$ , waarbij in ons geval (Zie figuur 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \sphericalangle PQ_{AB}B_0 = \pi/2 \\ \beta_1 = \sphericalangle B_0PQ_{AB} = \sphericalangle MPA_0 \quad (\text{op grond van de stelling van Bobillier}) \\ \beta_2 = \sphericalangle PQ_{AB}A = \sphericalangle PB_0Q_{A'B} = (\pi/2) - \sphericalangle Q_{A'B}PB_0 = \pi/2 - \sphericalangle A_0'PM = \\ \quad = \pi/2 - \beta_A \\ \beta_3 = \sphericalangle APQ_{AB} = \pi - \sphericalangle Q_{AB}PA_0 = \pi - \sphericalangle B_0PM = \pi - \beta_B \end{array} \right.$$

Aangezien verder

$$\frac{m}{\delta} = \frac{m}{1} = - \frac{t_2}{t_1 t_3} \quad (11)$$

kan de  $Bl_1$ -conditie geschreven worden als:

$$\tau_{A'} + \tau_B = t_2 - \frac{1}{t_3} = \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1}, \quad (12)$$

waarin  $\tau_{A'} = \tan \beta_{A'}$ , en  $\tau_B = \tan \beta_B$ .

Op grond van vgl.(11) hebben we ook, dat

$$\tau_{A'} \tau_B = - \frac{t_2}{t_3} = \frac{m}{\delta} \cdot t_1, \quad (13)$$

zodat de wortels  $\tau_{A'}$  en  $\tau_B$  van de vierkantsvergelijking

$$\left[ (\tau - \tau_{A'}) (\tau - \tau_B) = \tau^2 - \left( \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \right) \tau + \frac{m}{\delta} t_1 = 0 \right] \quad (14)$$

de Burmestercentra  $A_0'$  en  $B_0$  op de cirkel  $c-\tilde{c}p$  determineren, die dan dus door een gegeven centrum  $A_0$  van die cirkel zijn bepaald.

Het is overigens wel de vraag, of er bij ieder gegeven punt  $A_0$  in het 4e kwadrant<sup>\*\*</sup>), wel reële oplossingen  $A_0'$  en  $B_0$  gevonden kunnen worden. Reële oplossingen voor  $A_0'$  en  $B_0$  treden namelijk alléén op, wanneer de discriminant

$$D = \left( \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \right)^2 - 4 \frac{m}{\delta} t_1 \geq 0 \quad (15)$$

<sup>\*\*</sup>) Eén reëel gestelpunt ( $A_0$ ) wordt altijd in het 4e kwadrant aangetroffen

Het grensgeval treedt op, wanneer  $D = 0$ . Dan is dus, op grond van (15)

$$\left(\frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1}\right)^2 = 4 \cdot \frac{m}{\delta} t_1 \tag{16}$$

Met

$$x = \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \tag{17}$$

en

$$y = \frac{m}{\delta} \cdot t_1 \tag{18}$$

betekent dit, dat

$$x^2 = 4y \tag{19}$$

Dit is de vergelijking van een parabool, die getekend is in een grafiek voor stangenvierzijden met rechtgeleide keerpunten. ( $P = U = Bl_1$ )

In het gebied omsloten door de  $y$ -as en de parabool, kunnen géén stangenvierzijden worden geconstruëerd. In dat gebied snijdt de (koppelstang-)rechte door  $T$ , de cirkelloopkromme in slechts één reëel punt ( $A$ ) buiten de buigcirkel. Dit reële snijpunt correspondeert altijd met een reëel punt  $A_0$  in het 4e kwadrant. Bestaanbare, d.w.z. reële punten  $A'_0$  en  $B_0$ , komen steeds in het 1e kwadrant.  $A_0$  komt echter, of de punten  $A'_0$  en  $B_0$  nu reëel zijn of niet, steeds in het 4e kwadrant terecht. Vandaar, dat de richting, vastgelegd door de betrekking  $t_1 = \cotg \beta_1$ , de voorkeur verdient boven de 2 andere krukrichtingen. Zodoende is  $t_1$ , die immers  $A_0$  op  $c-\tilde{c}p$  bepaalt, een geschikte keuze als tweede ontwerpvrijheidsgraad. (De eerste is de verhouding  $m/\delta$ .) In plaats van de directe ontwerpvrijheidsgraden,  $m/\delta$  en  $t_1$ , kan ook worden uitgegaan van de twee indirecte ontwerpvrijheidsgraden,  $x$  en  $y$ , die de coördinaten zijn, waarmee de grafiek is samengesteld. Het verband tussen directe en indirecte ontwerpvrijheidsgraden wordt vastgelegd door de betrekkingen

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{y + 1}{x} \end{array} \right. \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{\delta} = \frac{xy}{y + 1} \end{array} \right. \tag{21}$$

Ieder punt  $(x,y)$ , dat gekozen is in het gebied, omsloten door de rechterhelft van de parabool en de positieve x-as, leidt dus tot een stel directe ontwerp-vrijheidsgraden, waarmee telkens een 3-tal stangenvierzijden kan worden geconstrueerd, zoals in het voorgaande is aangegeven.\*)

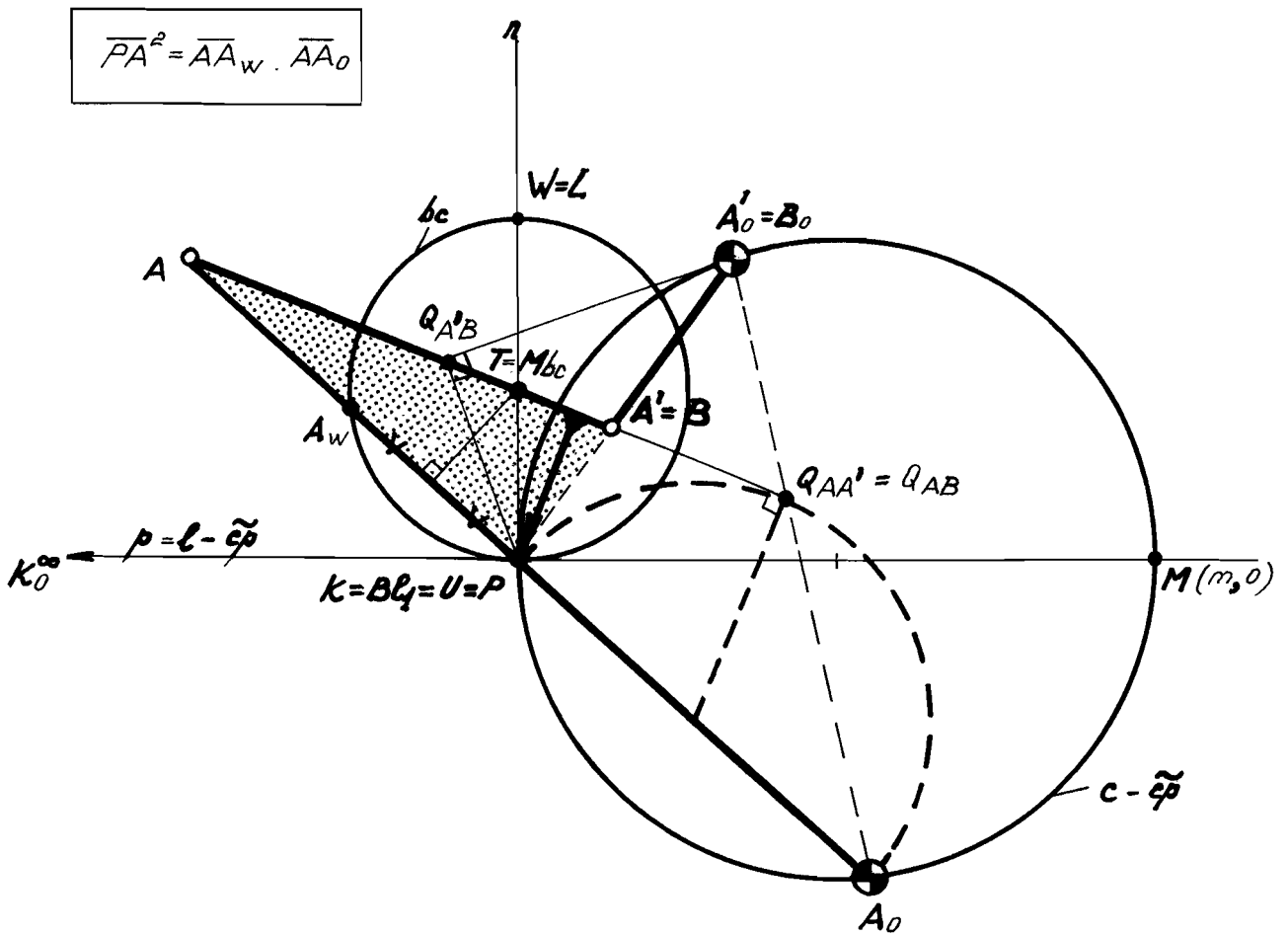
4. Bijzondere oplossingen, waarvoor  $x^2 = 4y$

Oplossingen, die behoren bij punten op de grenskromme, waarvoor dus  $A^{\vee} = B$ , zijn gedemonstreerd in de figuren 3, 4, 5 en 10. In dit geval vinden we, voor iedere verhouding van  $m/\delta$ , slechts één oplossing.

(De twee andere, middels de stelling van Roberts daarmee samenhangende oplossingen met dezelfde koppelkromme, hebben een andere verhouding voor  $m/\delta$ .) Zij ontstaat, wanneer de rechte  $TA$  de cirkel met diameter  $\overline{PA}_O$  in één punt  $Q_{AA^{\vee}} = Q_{AB}$  raakt. Dit gebeurt voor ieder punt  $(x,y)$  op de parabool.

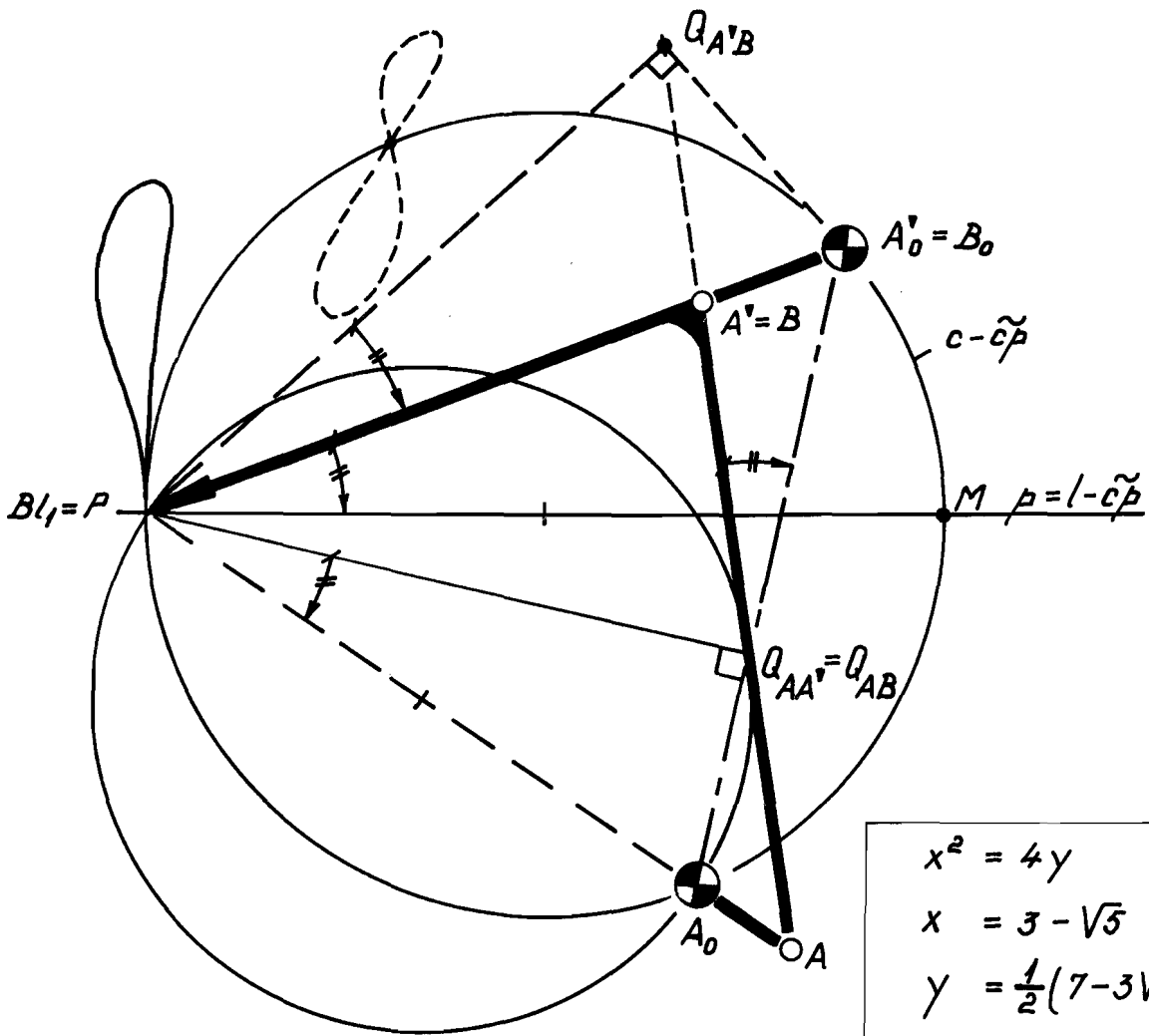
Een krukslingermechanisme met goede overbrengingshoeken,  $\mu_1$  en  $\mu_2$ , dat de genoemde eigenschap vertoont, is gedemonstreerd in figuur 4. Daarbij is  $x = 0,6$  en  $y = x^2/4 = 0,09$ . Constructies kunnen in dit geval ook worden gebaseerd op het feit, dat  $BB_O$  dan bissectrice is in de driehoek  $Q_{AA^{\vee}} B^{\vee} P_M$ . Wanneer de kleinste en de grootste staaf samen langer worden dan de som van de twee andere staven, is geen volle omwenteling van een kruk of staaf meer mogelijk. Dit gebeurt, wanneer de twee takken van de koppelkromme één worden. De overgang van het ene in het andere type vindt plaats wanneer  $\mu_{\min} = 0$ . We hebben dan te doen met een grensgeval van Grashof, waarbij de stangenvierzijde opvouwbaar is. Figuur 5 demonstreert dit grensgeval voor een punt op onze parabool, waarbij dus  $A^{\vee} = B$ . In dit geval krijgt de koppelkromme, behalve in  $P$  en in het toppunt  $O_B$  van de, door de stelling van Roberts bepaalde, gesteldriehoek  $A_O B_O O_B$ , er nog een extra dubbelpunt bij, dat het

\* ) In een later stadium zal, ter wille van de overzichtelijkheid in grafische afbeeldingen, met de coördinaten  $(x,y)$  slechts een enkele stangenvierzijde worden aangeduid.



Drie stangenvierzijden tot één enkele teruggebracht.  
 Twee samenvallende Burmester-paren  $A'A'_0$  en  $BB_0$ .  
 Rechtgeleijd Omkeerpunt (in  $P$ ) van hogere orde.  
 (Het 4<sup>e</sup> Bu-paar is  $k k_0^\infty$ )  
 Eén ontwerprijheidsgraad ( $m/8$ ).

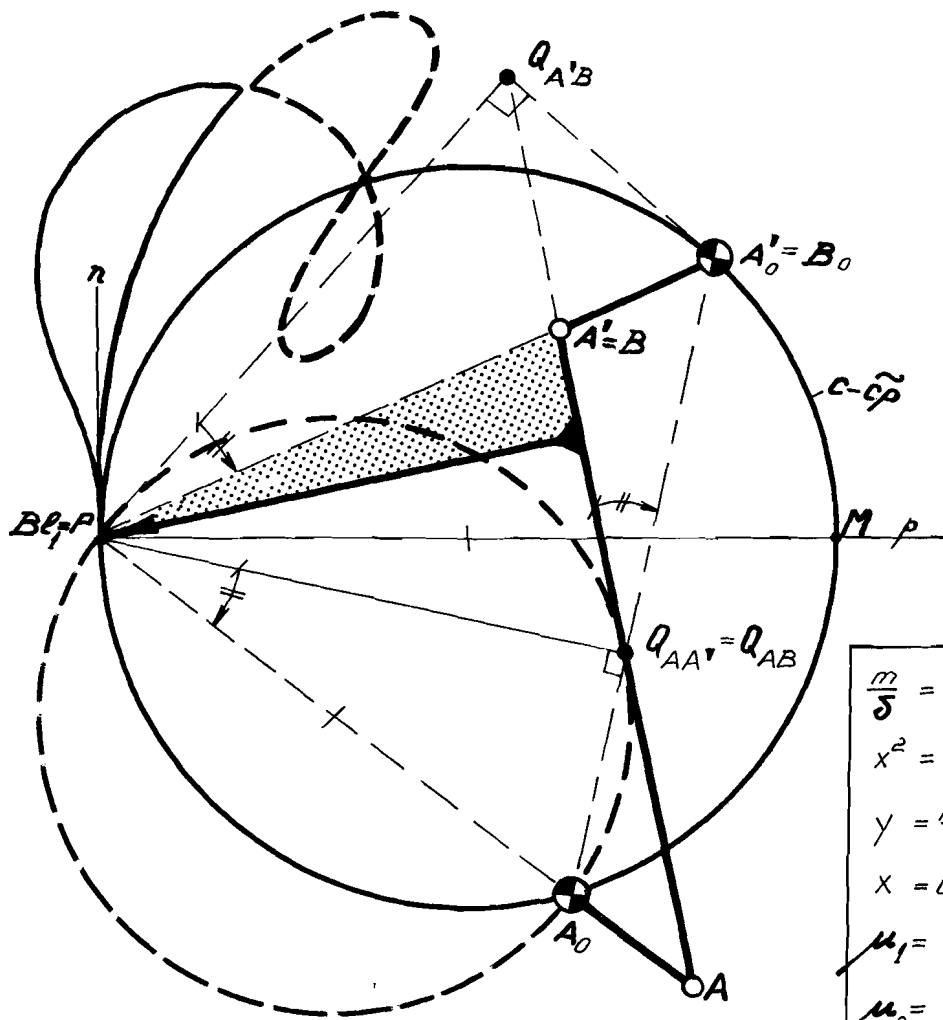
Figuur 3



*Twee samenvallende Burmesterparen  
 Rechtgeleid Keerpunt in  $BL_1 = P$   
 Dezelfde Koppelkromme als in figuur 6.*

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 4y \\
 x &= 3 - \sqrt{5} \\
 y &= \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \\
 \frac{m}{\sigma} &= \frac{xy}{y+1} = \frac{7}{3} - \sqrt{5} \\
 \begin{cases}
 t_3 &= -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \\
 t_2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 t_1 &= \cot \theta MPA_0 = \\
 &= (y+1)/x = 1,5
 \end{cases} \\
 \mu_1 &= 45,26^\circ \\
 \mu_2 &= 37,16^\circ
 \end{aligned}$$

*Figuur 4*



|  |
|--|
| $\frac{m}{\delta} = \frac{x \cdot y}{y+1}$ $x^2 = 4y$ $y = \frac{m \cdot \cot \mu}{\delta}$ $x = 0,90283$ $\mu_1 = 43,5^\circ$ $\mu_2 = 0^\circ$ |
| $t_1 = 4/3$ $t_2 = \frac{2}{3} \left( 2 - \frac{1}{2} \sqrt{7} \right)$ $t_2 t_3 = -1$   |

Twee samenvollende Bu-paren.  
 Rechtgeleid Keerpunt in  $P = B_0$   
 Grensgeval van Grashof.

Figuur 5

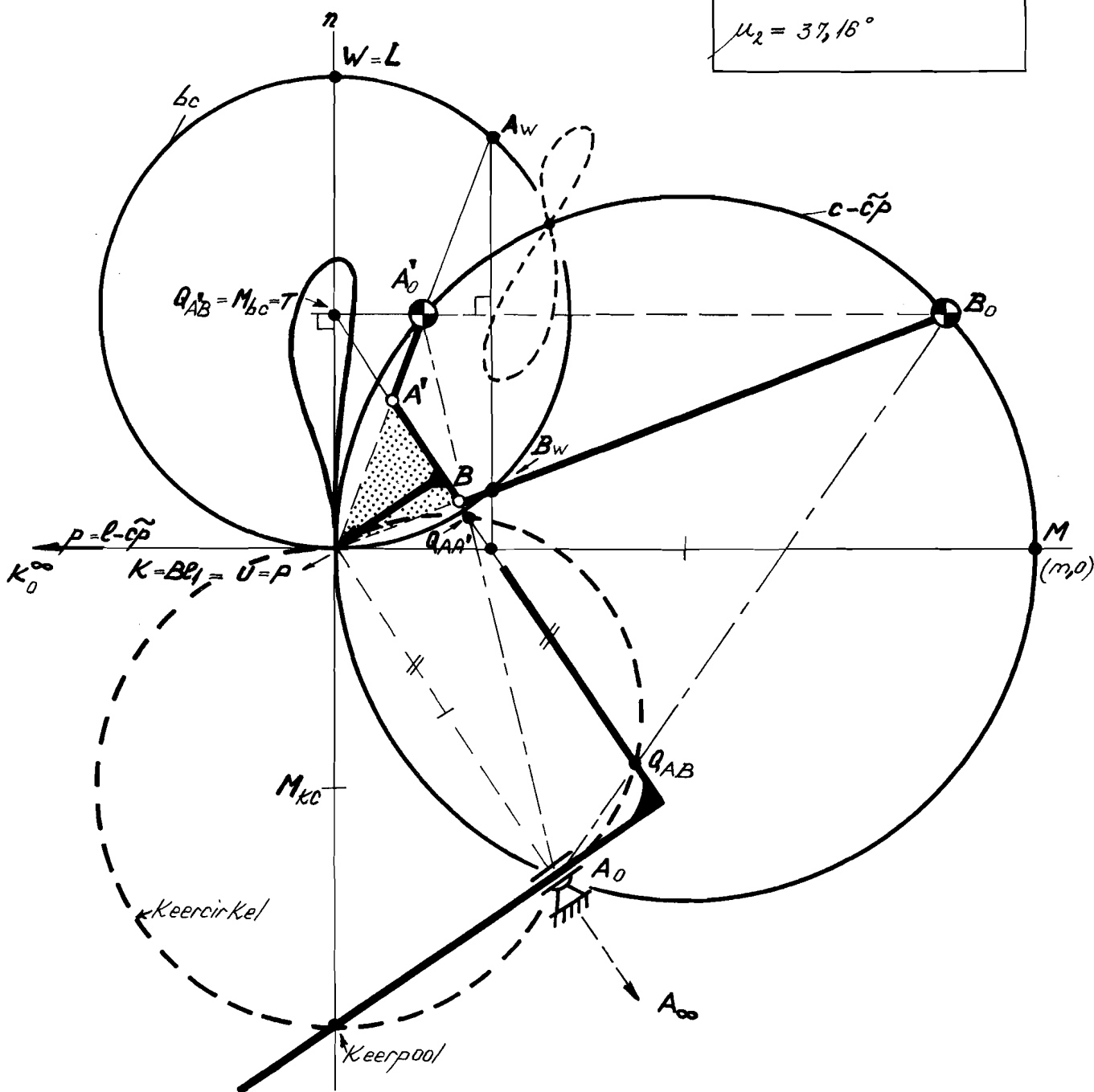
Punt  $K$  van  $\Delta A'BP$  genereert dezelfde Koppelkromme als in figuur 4.

$$z = X = \frac{m}{\delta} + \tan MPA_0$$

$$1 = \gamma = \frac{m}{\delta} \cdot \cotg MPA_0$$

$$\mu_1 = 45,26^\circ$$

$$\mu_2 = 37,18^\circ$$



Eén stangenvierzijdige en twee Kruksleufmechanismen met een rechtgeleid Keerpunt in de pool  $P = Bl_1$ .

(Het Bu-punt  $A_\infty$  is het oneigenlijke punt van  $A'B$ ).

Eén ontwerpvrijheidsgraad ( $m/\delta$ ).

**Figuur 6**



overgangspunt is van de ene naar de tweede tak van de koppelkromme. In de overlappende stand van de stangenvierzijde, waarbij het koppel-punt zich in dit dubbelpunt bevindt, zijn er twee bewegingsmogelijkhe-den, ieder bepaald door een van beide raaklijnen aan de koppelkromme in dat punt. Men kan aantonen, dat in dit grensgeval

$$x = \frac{4}{3} \left( 2 + \frac{1}{2} \sqrt{7} \right) \approx 0,90283^* \text{ en dat } t_1 = 4/3 .$$

(Voor de duidelijkheid is in figuur 5 nog het geval getekend, waarbij de koppelkromme nog juist uit 2 takken bestaat.)

5. Oplossingen, waarbij  $y = 1$

Een ander bijzonder geval doet zich voor, wanneer de door T gaande, gemeenschappelijke koppelstangrechte de cirkelloopkromme in het on-eindige snijdt. In zo'n geval is dus  $A = A_{\infty}$ . De bijbehorende krom-mingsmiddelpunten komen dan terecht op de keercirkel, die het spiegel-beeld is van de buigcirkel in de poolraaklijn. Hieruit volgt, dat  $A_0$  het snijpunt is van deze keercirkel en  $c-\tilde{c}p$ . De consekwentie is dat

$$t_1 = \cotg \beta_1 = \delta/m \tag{22}$$

zodat inderdaad  $y = 1$ .

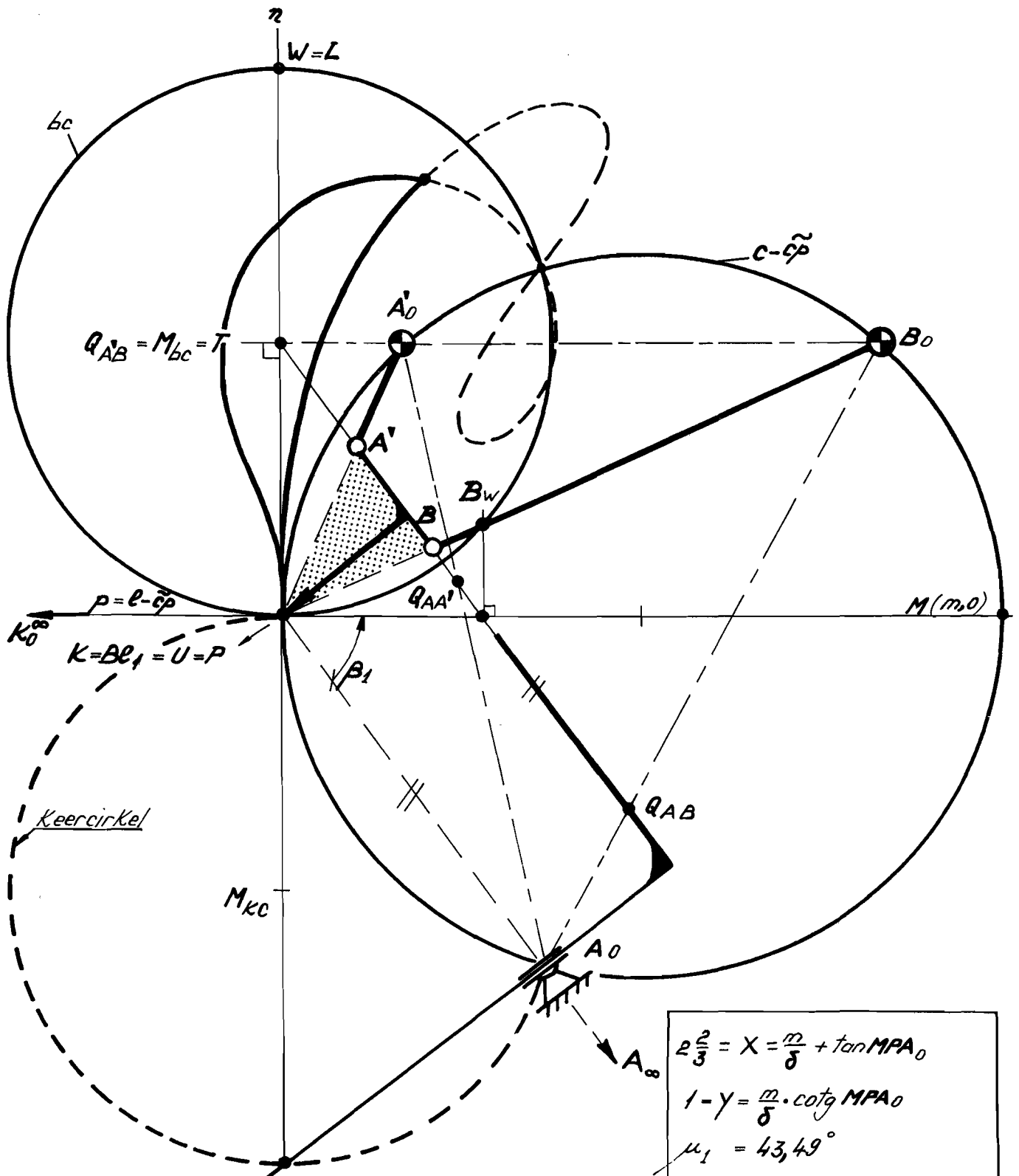
Omdat  $A^{\vee}B$  en  $PA_0$  evenwijdig lopen, is  $\square PQ_{AA^{\vee}}Q_{AB}A_0$  een gelijkbenig trapezium. Hieruit volgt, dat  $\sphericalangle PA_0Q_{AA^{\vee}} + \sphericalangle PA_0Q_{AB} = \pi/2$ . Aangezien verder  $\sphericalangle PB_0A_0^{\vee} = \sphericalangle PA_0A_0^{\vee}$  en  $\sphericalangle TPB_0 = \sphericalangle PA_0B_0$  komt dus  $A_0^{\vee}B_0$  loodrecht op PT, waardoor de gestellijn  $A_0^{\vee}B_0$  evenwijdig loopt met de poolraaklijn.

Omdat  $A_0^{\vee}B_0$  ook loodrecht staat op  $PQ_{A^{\vee}B}$  is dus  $Q_{A^{\vee}B} = T$  (23)

In figuur 6 heeft de stangenvierzijde een minimum overbrengingshoek van circa  $37^{\circ}$ . De twee andere oplossingen zijn, technisch gezien, niets anders dan twee excentrische kruksleufmechanismen.

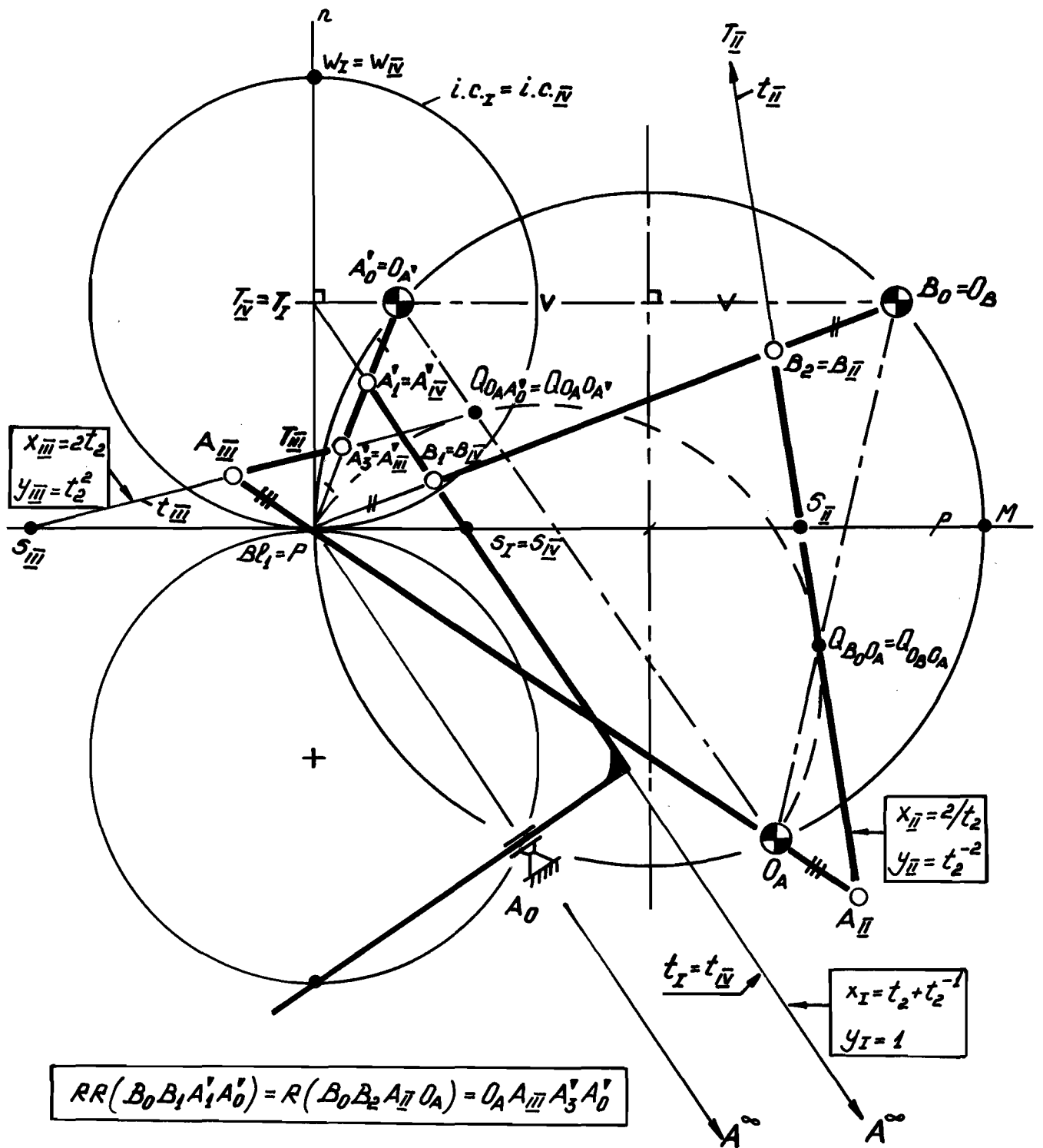
Het grensgeval van Grashof, dat in figuur 7 gedemonstreerd is, treedt blijkbaar op, wanneer, voor de in de figuur getekende stangenvierzijde,

\* ) De 2 waarden voor x horen bij 2 verschillende punten van de parabool, waar de stangenvierzijde strekbaar is. De stelling van Roberts wijst uit, dat de 2 strekbare stangenvierzijden ook dezelfde koppelkromme hebben.



Streckbare vierzijde met dezelfde  
 Koppelkromme als in figuur 5. Kruksleufmechanisme ( $A_0'A'A_0$ ) met  
 vertakkingspositie en ongelijke Koppelkromme.

Figuur 7



Het Roberts-verband tussen de stangenvierzijden van de rechte  $y=1$  en die van de parabool  $x^2=4y$ .

Figuur 8

de twee paren overstaande zijden dezelfde somlengte bezitten; Dus als  $\overline{A_0^V A^V} + \overline{BB_0} = \overline{A^V B} + \overline{A_0^V B_0}$ . (Zie daarnaast ook figuur A6 uit de Appendix.)

Dat gebeurt, wanneer  $x = 8/3$ ,  $y = 1$ ,  $t_1 = 3/4$  en  $m/\delta = 4/3$ .

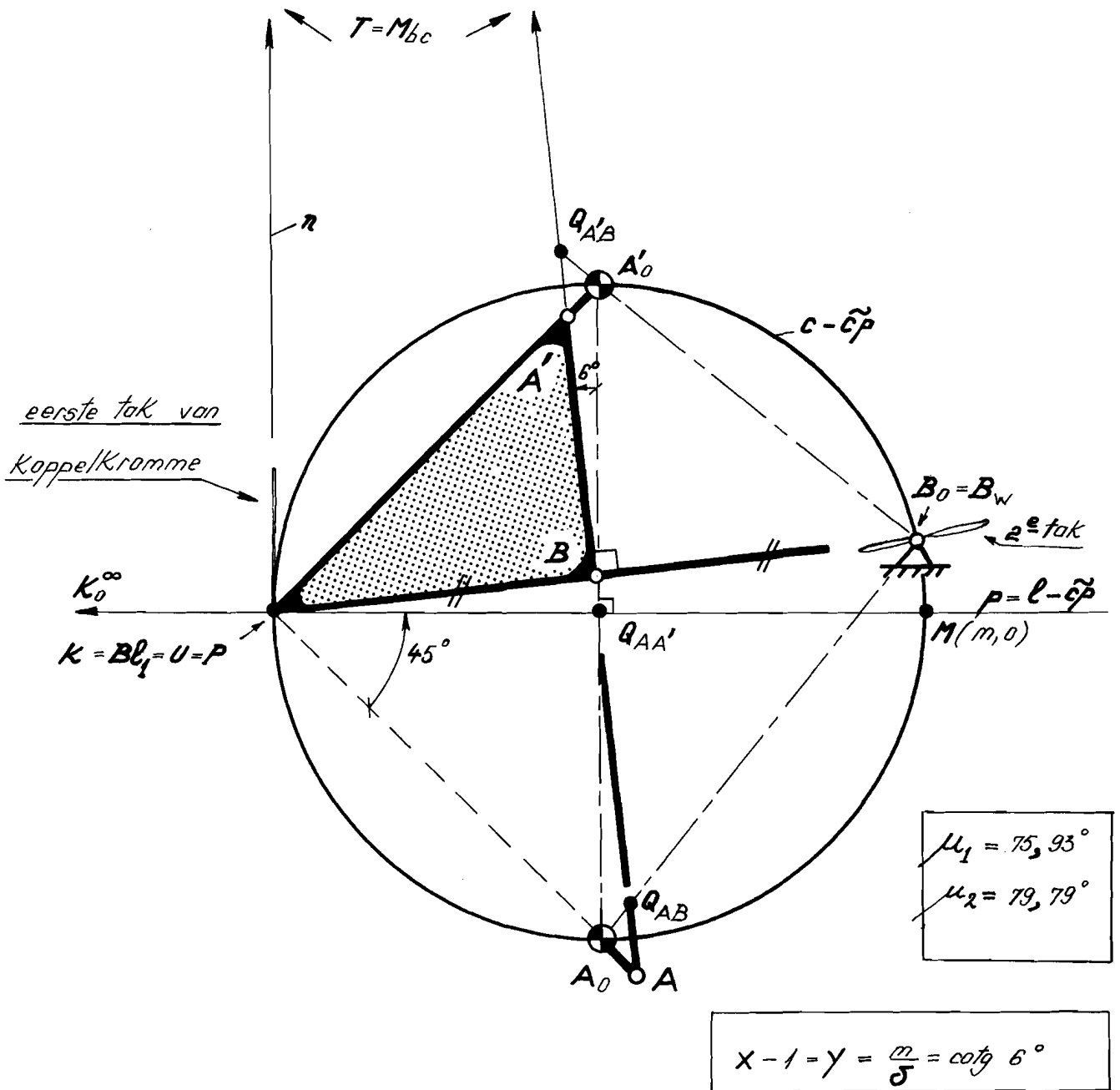
Evenals de stangenvierzijde heeft ook het excentrische kruksleufmechanisme  $A_0^V A A_0$ , dat overigens een andere naaldkromme produceert, een vertakkingspositie, en wel in de stand, waarbij  $A_0^V A^V$  het gestel  $A_0^V A_0$  overlapt.

In de grafiek  $y = y(x)$  is ieder punt van de lijn  $y = 1$  middels de stelling van Roberts, toegevoegd aan 2 snijpunten van de parabool,  $x^2 = 4y$ , met een rechte door het zg. inversiecentrum  $(0, -1)$ . De richtingscoëfficiënt van die rechte is juist de helft van de x-coördinaat van het corresponderende punt op de rechte  $y = 1$ . De y-waarden van de 2 punten op de betrokken rechte door het inversiecentrum zijn tevens elkaars omgekeerde. (Voor het bewijs hiervan, wordt o.m. verwezen naar een in een later stadium te tonen graaf, die laat zien op welke wijze de diverse stangenvierzijden in elkaar kunnen worden overgevoerd.)

De bijzondere samenhang tussen de stangenvierzijden, weergegeven door punten van de lijn  $y = 1$  en die van de parabool, is ter verduidelijking ook nog gedemonstreerd in figuur 8.

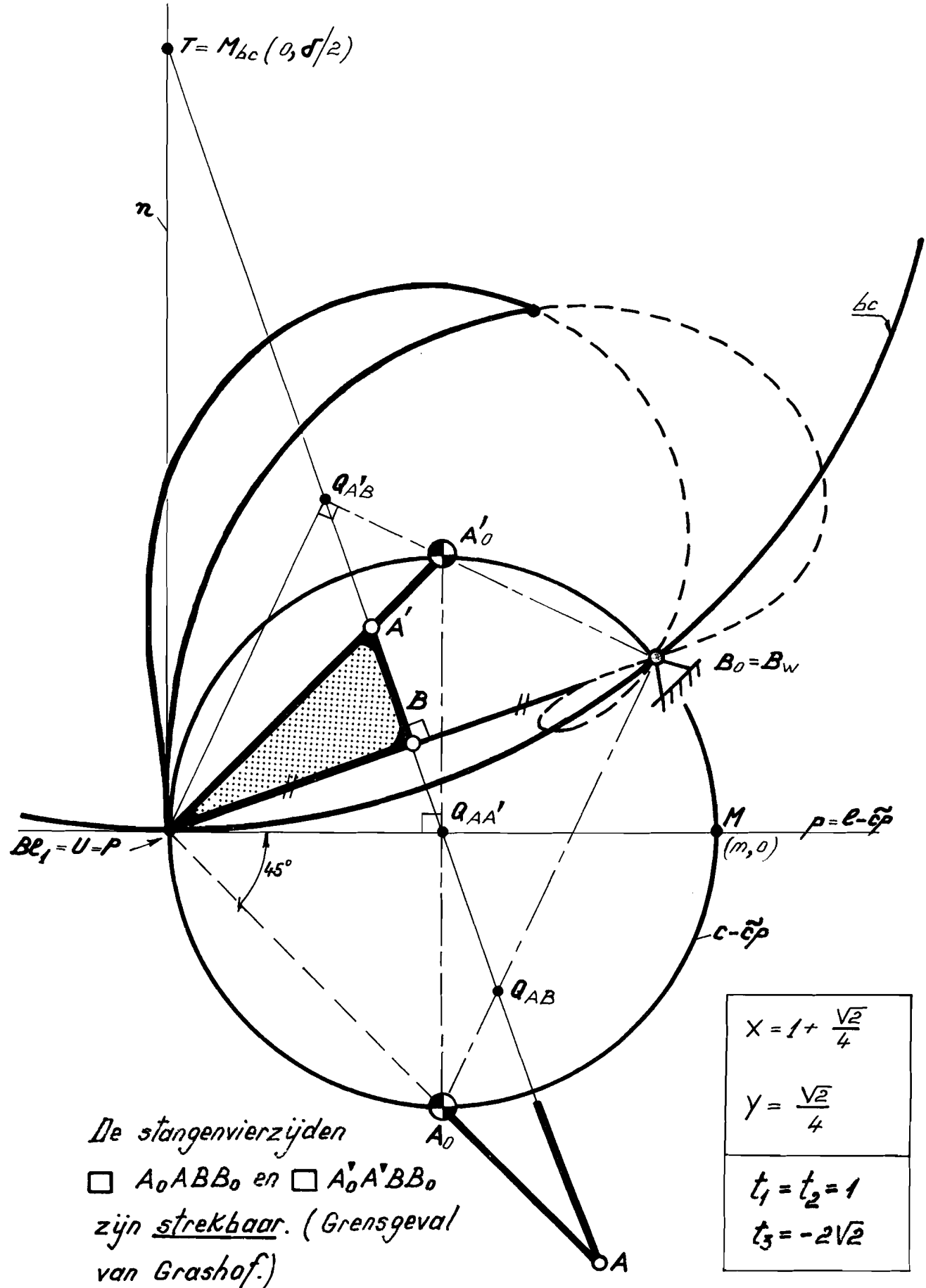
#### 6. Oplossingen, waarvoor $x = y + 1$

Een andere verbijzondering treedt op, wanneer de koppelstangrechte, dat is dus de Müller-rechte, die 3 Burmesterpunten met elkaar verbindt in het bijzondere geval, dat  $U = Bl_1$ , tevens verbindingsrechte is van de middens van de buigcirkel en van  $c-\tilde{c}_p$ . (Zie de figuren 9, 10 en 11.) Zoals uit figuur 9 blijkt, is er in dit geval steeds sprake van een rechthoekige koppeldriehoek. (In 2 gevallen wordt de rechte hoek bij het draaipunt B, in één geval bij het koppelpunt P aangetroffen.)

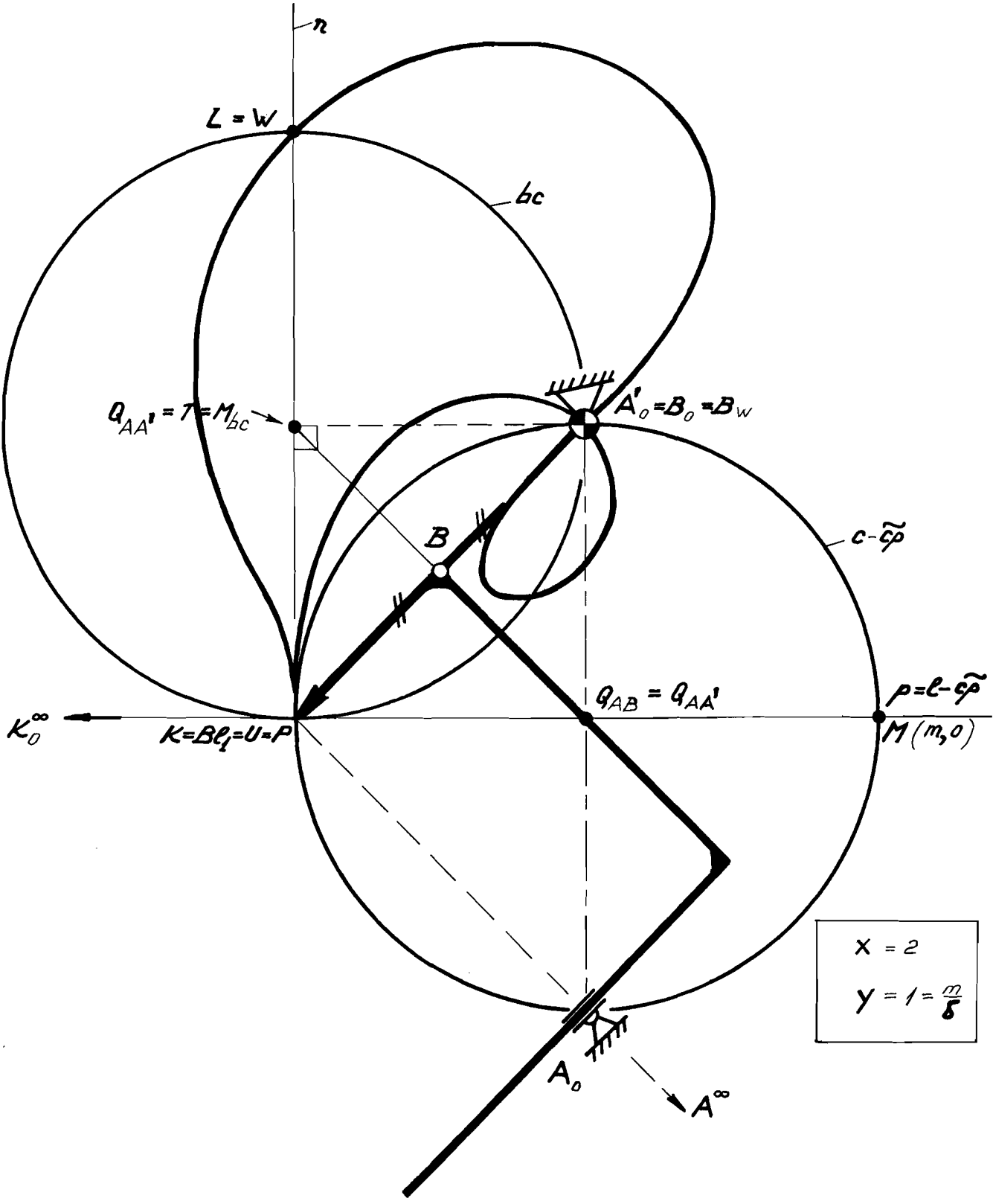


Ontwerp van stangenvierzijde met naaldkromme

*Figuur 9*



Figuur 10



*Excentrisch Kruksleufmechanisme met NaaldKromme.*

**Figuur 11**

Omdat  $\beta_1 = 45^\circ$ , wordt  $t_1 = 1$ , zodat met (20) inderdaad  $x = y+1$ .

De  $BL_1$ -conditie kan nu met het feit, dat  $t_1 = 1$ , worden gereduceerd tot  $(1+t_3)(1-t_2) = 0$  (21)

waarbij in het geval van figuur 9:  $t_2 = 1$ , zodat  $x = 1-t_3^{-1}$  en  $y = -t_3^{-1}$ .

Voorts is op grond van onder meer de stelling van Robillier, de koordevierhoek  $PQ_{AB} B_0 Q_{A'B}$  een vierkant, zodat  $PB = BB_0$ , waardoor met Euler-Savary:  $B_w = B_0$ .

In het voorbeeld van figuur 9 benadert de tak beschreven door het toppunt van de koppel driehoek  $A'BP$  zeer nauw de vorm van een naald. De bij de stangenvierzijde horende minimum overbrengingshoek  $\mu_{\min} = 76^\circ$ . Figuur 10 laat zien, dat de twee Roberts-verwante stangenvierzijden, te weten  $A_0 A B_0$  en  $A_0' A' B_0'$ , uit het Burmester-triplet gelijktijdig strekbaar zijn.

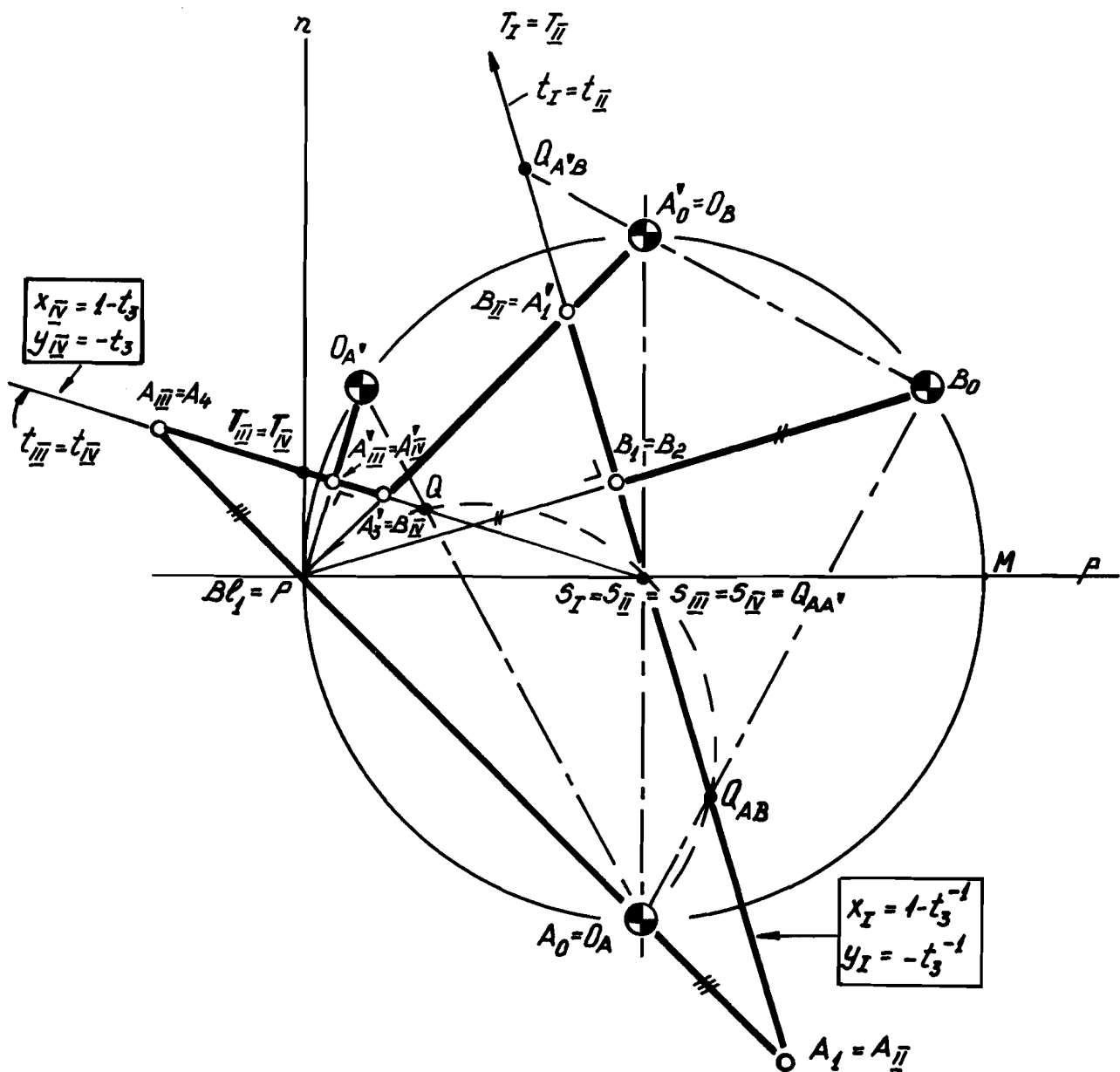
Dit blijkt op te treden, wanneer voor  $\square A_0 A B_0$ :  $\frac{m}{s} = \frac{1}{4} \sqrt{2} = y$ , zodat  $x = 1 + \frac{1}{4} \sqrt{2}$ . (Zie daarnaast ook figuur A4 uit de Appendix.)

De in figuur 10 getekende koppelkromme wordt voortgebracht door de stangenvierzijde  $A_0' A' B_0'$ . (Zie daarnaast ook figuur A5.) Behalve een dubbelpunt in  $B_0$ , heeft de kromme nog een extra dubbelpunt, dat niet op  $c-\tilde{c}p$  ligt en dat de overgang tussen de twee afzonderlijke takken mogelijk maakt.

In figuur 11 is het uitzonderlijke grensgeval getekend, waarbij zowel  $x = y+1$  als ook  $x^2 = 4y$ . Dit mechanisme, dat een excentrisch kruksleuf-mechanisme is, is in de grafiek van  $y$  versus  $x$  vertegenwoordigd door het raakpunt  $(2,1)$  van de rechte  $x = y+1$  aan de parabool  $x^2 = 4y$ .

Uit figuur 9 blijkt, dat de vierzijden  $A_0 A B_0$  en  $A_0' A' B_0'$  uit het Burmester-triplet buitendien elkaars krommeverwante zijn volgens de Stelling van Roberts. Alléén  $A_0 A A' A_0'$  leidt tot 2 andere Roberts-verwante vierzijden, die ook in figuur 12 zijn gedemonstreerd. Deze laatste





*Twee spiegelcongruente gesteldriehoeken  $A_0B_0A_0'$  en  $A_0D_A'A_0'$ , die bases zijn voor zowel 3 Bu- als voor 3 Roberts verwanten.*

*De stangenvierzijden worden door 2 afzonderlijke punten van de rechte  $x = y + 1$  weergegeven. De  $y$ -waarden zijn daarbij elkaars omgekeerde.*

*Figuur 12*

figuur laat het complete verband zien, dat ontstaat, wanneer Burmester-en/of Roberts-transformaties zijn toegepast. De complete configuratie ( $C_{BR}$ ) bezit in dit geval slechts twee Müller-rechten ( $t_I = t_{II}$  en  $t_{III} = t_{IV}$ ), die beide door het brandpunt  $F_0$  (= het middelpunt  $S_I = S_{II} = S_{III} = S_{IV}$  van  $c-\tilde{c}p$ ) van  $\tilde{c}p$  gaan en daardoor middellijn zijn van  $c-\tilde{c}p$ . De bissectricen van de 2 Müller-rechten sluiten hoeken van  $45^\circ$  in met de assen p en n.

In de grafiek, y versus x, is ieder punt van de rechte  $x = y+1$  behalve aan zichzelf, ook aan een ander punt op die rechte toegevoegd, waarvan de y-waarde de reciproke waarde heeft. (Voor het toegevoegde punt op de rechte geldt, dat  $x = 1-t_3$  en  $y = -t_3$ .) Het een en ander volgt uit het feit, dat de buigcirkel voor  $t_I$  door  $B_0$  en voor  $t_{IV}$  door het spiegelbeeldpunt  $O_A$  gaat. Hiermee bewijst men namelijk, dat  $\left(\frac{m}{\delta}\right)_I \cdot \left(\frac{m}{\delta}\right)_{IV} = 1$ , waarmee dan is aangetoond, dat  $y_I \cdot y_{IV} = 1$ .

7. De afmetingen van  $\square A_{\circ} ABB_{\circ}$

Uitgaande van de directe ontwerprijheidsgraden  $m/\delta$  en  $t_1$ , zoals gedemonstreerd in figuur 2, geeft de vierkantsvergelijking (14) de volgende wortels:

$$t_2 = \tau_A = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \right)^2 - 4 \frac{m}{\delta} t_1} \quad (25)$$

en

$$-\frac{1}{t_3} = \tau_B = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \right)^2 - 4 \frac{m}{\delta} t_1} \quad (26)$$

Dit geeft voor de indirecte ontwerprijheidsgraden

$$x_I = \frac{m}{\delta} + \frac{1}{t_1} \quad \text{en} \quad y_I = \frac{m}{\delta} t_1 \quad (27)$$

de vereenvoudigde betrekkingen

$$2t_2 = x_I + \sqrt{x_I^2 - 4y_I} \quad (28)$$

$$t_3 = -t_2/y_I \quad (29)$$

Hierbij duidt de index I op de stangenvierzijde  $A_{\circ} ABB_{\circ}$ .

Op grond van de formule van Euler-Savary, vindt men voor de opstaande zijden van de koppeldriehoek de volgende uitdrukkingen

$$\frac{PA}{m} = \frac{1}{\left( \frac{m}{\delta} t_1 - 1 \right)} \frac{t_1}{\sqrt{(1+t_1^2)}} \quad (30)$$

$$\frac{BP}{m} = \frac{1}{\left( \frac{m}{\delta} t_3 - 1 \right)} \frac{-t_3}{\sqrt{1+t_3^2}} \quad (31)$$

Hiervan gebruikmakend, vindt men voor de beide krukken uitdrukkingen zoals

$$\frac{A_{\circ} A}{m} = \frac{\frac{m}{\delta} t_1}{\left( \frac{m}{\delta} t_1 - 1 \right)} \frac{t_1}{\sqrt{1+t_1^2}} \quad (32)$$

en

$$\frac{B_{\circ} B}{m} = \frac{\frac{m}{\delta} t_3}{\left( \frac{m}{\delta} t_3 - 1 \right)} \frac{t_3}{\sqrt{1+t_3^2}} \quad (33)$$

De sinusregel, achtereenvolgens toegepast in  $\triangle PQ_{AB} B$  en in  $\triangle PQ_{AB} A$  geeft voor de koppelstanglengte het volgende resultaat

$$\frac{AB}{m} = \sqrt{\frac{1+t_2^2}{(1+t_1^2)(1+t_3^2)}} \left\{ \frac{t_3}{\left( \frac{m}{\delta} t_3 - 1 \right)} - \frac{t_1}{\left( \frac{m}{\delta} t_1 - 1 \right)} \right\} \quad (34)$$

Er verder van uitgaand, dat  $\overline{A_0 B_0} = \overline{A_0 Q_{AB}} + \overline{Q_{AB} B_0}$ , vindt men voor de gestellengte de uitdrukking

$$\frac{A_0 B_0}{m} = \frac{t_1 - t_3}{\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_3^2)}} \quad (35)$$

Voorts is

$$\varphi_A = \sphericalangle AA_0 B_0 = \arctan(-t_3) \quad (36)$$

Daarmee zijn de afmetingen van  $\square A_0 A B B_0$  vastgelegd. (De tekens voor de diverse stanglengten zijn bij dit alles zó gekozen, dat er zowel voor de koppeldriehoek ABP als voor de  $\square A_0 A B B_0$  sprake is van een gesloten vectorpolygoon. Bovendien is daarbij de draai-zin van zowel driehoek als vierhoek met elkaar in overeenstemming gebracht; hetgeen betekent, dat de som van de vectorpolygoonen van koppeldriehoek en vierhoek het vectorpolygoon van  $\triangle A_0 P B_0$  geeft.)

### 8. De Burmester-matrix en de afmetingen van het Burmester-triplet

De afmetingen van de twee andere stangenvierzijden, te weten die van  $\square B_0 B A' A_0$  en van  $\square A_0 A' A A_0$ , uit het Burmester-triplet kunnen uit die van  $\square A_0 A B B_0$  worden afgeleid door zg. 'Burmester-transformaties'. Bij deze transformaties worden de gestelpunten  $A_0$ ,  $B_0$  en  $A_0'$  cyclisch verwisseld, hetgeen betekent, dat de 3 hoeken

$(-\beta_1, \beta_B, \beta_A)$  achtereenvolgens overgaan in  $(\beta_B, \beta_A, -\beta_1)$  en in  $(\beta_A, -\beta_1, \beta_B)$ .

Voor de cotangens van deze hoeken heeft dit tot gevolg, dat

$$(-t_1, -t_3, \frac{1}{t_2}) \implies (-t_3, \frac{1}{t_2}, -t_1) \implies (\frac{1}{t_2}, -t_1, -t_3)$$

Gaan we voor  $\square A_0 A B B_0$  uit van het basisdrietal  $(t_3, t_2, t_1)$ , dan kan dus  $\square B_0 B A' A_0$  door  $(-t_2^{-1}, -t_1^{-1}, t_3)$  en  $\square A_0 A' A A_0$  door het drietal waarden  $(t_1, -t_3^{-1}, -t_2^{-1})$  worden vastgelegd. De Burmester-transformatie voor een 3e maal toegepast, geeft natuurlijk vanzelf weer de oorspronkelijke stangenvierzijde terug. Samengevat, hebben we dus, dat

$$\mathbb{B}\mathbb{B}(t_3, t_2, t_1) = \mathbb{B}\mathbb{B}(-t_2^{-1}, -t_1^{-1}, t_3) = \mathbb{B}(t_1, -t_3^{-1}, -t_2^{-1}) = (t_3, t_2, t_1) \dots (37)$$

B is hierin de representant van een  $3 \times 3$ -matrix, welke uitgeoefend op een rij-vector, een Burmester-transformatie tot gevolg heeft. Aangezien de 3 stangenvierzijden dezelfde pool P, poolraaklijn p, poolnormaal n, buigcirkel(ic), middelpuntskromme ( $\tilde{c}_p$ ) en Müller-rechte(ST) bezitten, zijn  $m/\delta$  en  $\frac{PS}{\delta}$  invarianten voor deze transformatie. (S is daarbij het snijpunt van de Müller-rechte met de poolraaklijn.) Inderdaad blijkt de uitdrukking  $-t_2 t_1^{-1} t_3^{-1}$  ( $= \frac{m}{\delta}$ ) door de B-transformatie niet te veranderen. Ook de  $E_{l_1}$ -conditie verandert niet. Men vindt zo, dat

$$\boxed{\frac{m}{\delta} = t_2 - (\tau_1 + \tau_3)} \quad (38)$$

$$\text{indien } \tau_i t_i = 1 \quad \text{met } (i = 1, \dots, 3) \quad (39)$$

De koppelstang van een stangenvierzijde snijdt de poolraaklijn p overigens in een punt S, waarvoor ook in het algemeen de betrekking geldt, dat

$$l \cdot \left( \frac{1}{PS} - \frac{1}{m} \right) = \tau_2 - (t_1 + t_3) \quad (40)$$

Dit staat in direct verband met de ligging van het snijpunt T van de koppelstang met de poolnormaal, waarvoor in het algemeen

$$m \left( \frac{1}{PT} - \frac{1}{l} \right) = t_2 - (\tau_1 + \tau_3) \quad (41)$$

Aangezien in ons geval  $l = \delta$  en voorts  $PT = \delta/2$ , krijgt vgl.(41) de gedaante van vgl.(38), terwijl vgl. (40) zich eenvoudig wijzigt in

$$\boxed{\frac{\delta}{PS} - \frac{\delta}{m} = \tau_2 - (t_1 + t_3)} \quad (42)$$

$m/\delta$  en  $\left( \frac{\delta}{PS} - \frac{\delta}{m} \right)$  zijn dus twee invarianten t.o.v. de Burmester-transformatie.

Voor de elementen van de Burmester-matrix gelden de volgende betrekkingen:

$$b_{31} = 1 \quad ; \quad b_{32} = b_{33} = 0 \quad (43)$$

en voorts:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_2 = b_{11}t_3 + b_{12}t_2 + b_{13}t_1 \end{array} \right. \quad (44.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_1 = b_{21}t_3 + b_{22}t_2 + b_{23}t_1 \end{array} \right. \quad (44.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = -b_{11}\tau_2 - b_{12}\tau_1 + b_{13}t_3 \end{array} \right. \quad (44.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_3 = -b_{21}\tau_2 - b_{22}\tau_1 + b_{23}t_3 \end{array} \right. \quad (44.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_3 = b_{11}t_1 - b_{12}\tau_3 - b_{13}\tau_2 \end{array} \right. \quad (44.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 = b_{21}t_1 - b_{22}\tau_3 - b_{23}\tau_2 \end{array} \right. \quad (44.6)$$

Het feit, dat  $B^3 = I$ , de eenheidsmatrix, leidt na enige berekening tot de betrekkingen:

$$b_{21} = \frac{-b_{11}^2 - b_{13}}{b_{12}} \quad ; \quad b_{22} = -b_{11} \quad ; \quad b_{23} = \frac{1 - b_{11} b_{13}}{b_{12}} \quad (45)$$

Optelling van de betrekkingen 44.1, 44.3 en 44.5 leidt verder na substitutie van de uitdrukkingen voor  $m/\delta$  en  $(\frac{\delta}{PS} - \frac{\delta}{m})$  tot:

$$(\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS})(1 - b_{11} - b_{13}) = b_{12} \frac{m}{\delta} \quad (46)$$

Ook geven de betrekkingen 44.1, 44.3 en 44.5 aanleiding tot de volgende uitdrukkingen voor  $b_{11}$ ,  $b_{12}$  en  $b_{13}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} H \cdot b_{11} + (\tau_2 - t_1 - t_3) = -\tau_1 \tau_2^2 + t_2 t_3^2 - \tau_3 t_1^2 \end{array} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H \cdot b_{12} - 3 \cdot \frac{\delta}{m} = \tau_2^3 - t_1^3 - t_3^3 \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H \cdot b_{13} + (\tau_2 - t_1 - t_3) = -\tau_2^2 \tau_3 - t_3^2 \tau_1 + t_1^2 t_2 \end{array} \right. \quad (49)$$

waarin voor de hoofddeterminant H de uitdrukking:

$$\begin{aligned} H &= (-\tau_2 + t_1 + t_3) + (t_1 t_2 t_3 + \tau_1 \tau_2 t_3 + t_1 \tau_2 \tau_3) = \\ &= (\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS}) + (t_1 - t_2 + t_3) + (t_3 + \tau_1 - \tau_2) + (t_1 + \tau_3 - \tau_2) = 3(\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS}) - \frac{m}{\delta} \end{aligned} \quad (50)$$

gevonden kan worden. Aangezien verder:

$$(\tau_2 - t_1 - t_3)^3 = (\tau_2^3 - t_1^3 - t_3^3) + 3 \frac{t_1 t_3}{t_2} \left\{ (-\tau_2 + t_1 + t_3)(-\tau_2 + \tau_1 + \tau_3) - 3 \right\} + 6 \tau_2 t_1 t_3 \quad (51)$$

kan vgl.(48) nog worden vereenvoudigd tot:

$$\left\{ 3(\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS}) - \frac{m}{\delta} \right\} b_{12} = (\frac{\delta}{PS} - \frac{\delta}{m})^3 - 3 \cdot (\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS}) \quad (52)$$

De berekening van de elementen  $b_{11}$  en  $b_{13}$  kan gebeuren met behulp van die voor  $b_{23}$ :

$$H \cdot b_{23} + (-t_2 + \tau_1 + \tau_3) = -t_2 \tau_1 \tau_3 \left\{ (\tau_2 - t_1 - t_3)^2 + 2 \right\} \quad (53)$$

Stellen we eenvoudig

$$-t_2 + \tau_1 + \tau_3 = t_2 \tau_1 \tau_3 = -\frac{m}{\delta} = \alpha \quad (54)$$

en

$$-\tau_2 + t_1 + t_3 = (\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS}) = \beta \quad (55)$$

dan gaat vgl.(53) over in:

$$H \cdot b_{23} = -\alpha(\beta^2 + 3) \quad (56)$$

,waarin op grond van vgl.(50):

$$H = \alpha + 3\beta \quad (57)$$

Vergelijking (52) gaat nu over in:

$$H \cdot b_{12} = -\beta(\beta^2 + 3) \quad (58)$$

,zodat de 3e vergelijking van het stelsel (45) met (56) en (58) geschreven kan worden als:

$$b_{11}b_{13} = 1 - \frac{\alpha\beta(\beta^2 + 3)^2}{H^2} \quad (59)$$

Vergelijking (46), tenslotte, krijgt met (58) de gedaante:

$$b_{11} + b_{13} = 1 - \frac{\alpha(\beta^2 + 3)}{H} \quad (60)$$

De waarden voor  $b_{11}$  en  $b_{13}$  komen overeen met de twee wortels van een vierkantsvergelijking. Dus:

$$2b_{11} \text{ resp. } 2b_{13} = 1 - \frac{\alpha(\beta^2 + 3)}{\alpha + 3\beta} \pm \sqrt{\left\{1 - \frac{\alpha(\beta^2 + 3)}{\alpha + 3\beta}\right\}^2 - 4 \left\{1 - \frac{\alpha\beta(\beta^2 + 3)^2}{(\alpha + 3\beta)^2}\right\}} \quad (61)$$

$$= 1 - \frac{\alpha(\beta^2 + 3)}{\alpha + 3\beta} \pm \frac{\beta}{\alpha + 3\beta} \sqrt{-27 + 4\alpha^2 + \alpha\beta(18 + \alpha\beta + 4\beta^2)} \quad (61a)$$

Welke wortel toebedeeld dient te worden aan  $b_{11}$  en welke aan  $b_{13}$  maakt een rekenvoorbeeld duidelijk. Het blijkt dan, dat het min-teken voor de wortel bij  $b_{11}$  hoort, en het plus-teken bij  $b_{13}$ . Verder is duidelijk, dat niet iedere helling voor de Müller-rechte ST wordt toegelaten. De grens ligt bij de situatie, waarbij ST aan de cirkelloopkromme raakt en wel aan dat stuk van de kromme, dat binnen de buigcirkel ligt. Dit treedt op, wanneer de waarde onder het wortel-teken van vgl. (61.a) nul wordt. Natuurlijk komt dit ook overeen met startwaarden,  $x$  en  $y$ , op de parabool uit onze grafiek  $y$  versus  $x$ . (Bijvoorbeeld komt het geval  $\alpha = \beta = -1$  overeen met de bijzondere situatie zoals geschetst in figuur 11.)

Bijelkaar genomen is dus nu ieder element  $b_{ij}$  van de Burmester-matrix  $B$  volledig bepaald als functie van de Burmester-invarianten  $\alpha$  en  $\beta$ . Een geschikt rekenvoorbeeld kunnen de punten van de rechte  $x = y + 1$  zijn. Daarbij vinden we achtereenvolgens:

$$t_1 = t_2 = 1, \quad x = 1 - t_3^{-1}, \quad y = -t_3^{-1}, \quad \alpha = -\frac{m}{\delta} = t_3^{-1} \text{ en}$$

$$\beta = \frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS} = -\tau_2 + t_1 + t_3 = t_3, \text{ zodat } \alpha\beta = 1 \text{ en verder:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11} = \frac{-(\alpha+1)(\alpha-\alpha^{-1})}{\alpha^2+3} = -b_{22} \quad ; \\ b_{13} = \frac{-(\alpha-1)(\alpha-\alpha^{-1})}{\alpha^2+3} \quad ; \\ b_{12} = -\frac{3+\alpha^{-2}}{3+\alpha^2} \quad ; \quad b_{23} = -\frac{3\alpha^2+1}{\alpha^2+3} \quad ; \\ b_{21} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}{\alpha^2+3} \quad ; \\ b_{31} = 1 \quad ; \quad b_{32} = b_{33} = 0. \end{array} \right.$$

Substitutie van deze waarden in de vergelijkingen (44) geeft dan, zoals inderdaad te verwachten was, eenvoudig een stelsel identiteiten.

Als tweede rekenvoorbeeld kunnen de punten van de parabool  $x^2 = 4y$  worden gebruikt. Voor zulke punten geldt, dat  $t_2 t_3 = -1$  en verder:

$$t_1 = -\frac{1}{2}(t_3 + t_3^{-1}) \quad ; \quad \alpha^{-1} = \frac{t_3(t_3^2 + 1)}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2}(3t_3 - t_3^{-1}),$$

zodat voor de elementen van de **B**-matrix:

$$\begin{aligned} -2b_{22} = 2b_{11} &= 1 - t_3^{-2} \quad ; \\ b_{12} &= -\frac{(t_3^2 + 1)(3t_3^2 - 1)}{4t_3^2} \quad \text{enz.} \end{aligned}$$

De afmetingen van de "Burmester-verwanten"  $B_0, BA'A_0$  en  $A_0'A'AA_0$  kunnen overigens ook zonder gebruik te maken van de elementen  $b_{ij}$  worden berekend. Zij kunnen namelijk direct worden afgeleid uit de afmetingen voor  $\square A_0 A B B_0$  door het basisdrietal  $(t_3, t_2, t_1)$  resp. te vervangen door  $(-t_2^{-1}, -t_1^{-1}, t_3)$  en door  $(t_1, -t_3^{-1}, -t_2^{-1})$ .

Rekening houdende met het feit, dat oorspronkelijk

$\frac{m}{\delta} = -t_2 \tau_1 \tau_3$ , geeft substitutie van een vervangend basisdrietal in de betrekkingen (25) t/m (36) dan onmiddellijk de afmetingen van één der Burmester-verwanten. Vanzelfsprekend horen ook de afmetingen van de bijbehorende koppeldriehoek daarbij.



9. De Roberts'-transformatie

Reeds in 1875 is door S. Roberts <sup>[7]</sup> aangetoond, dat een koppelkromme door 3 verschillende stangenvierzijden kan worden voortgebracht. Ieder van de 3 Burmester-verwanten heeft dus -in ieder geval- nog 2 Roberts-(kromme)verwanten naast zich. In de grond van de zaak, berust het bestaan van een Robertsverwant op het kunnen verwisselen van de volgorde van de 3 bewegende staven in een stangenvierzijde. Effectief kan dit maar op twee manieren.

Bij iedere stangenvierzijde hoort ook een collineatie-as  $PQ$ , die de verbindingsrechte is van de twee polen, die ieder betrekking hebben op de relatieve beweging van twee overstaaende zijden. Het is nu eenvoudig te bewijzen, dat de richting van de collineatie-as niet verandert, ook al verandert de volgorde der staven van de stangenvierzijde. Als gevolg hiervan, laten de hoeken  $\beta_i$ , zoals deze gedefiniëerd zijn in par. 3, zich op eenvoudige wijze transformeren:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0^S &= \beta_0 \\ \beta_1^S &= \beta_1 \\ \beta_2^S &= -\beta_3 \\ \beta_3^S &= -\beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Bij deze transformatie is bij de oorspronkelijke stangenvierzijde  $A_0 A_1 B_1 B_0$  de volgorde van de twee staven van de dyade  $A_0 A_1 B$  door middel van een stangenparallelogram verwisseld. Voor de cotangens van deze hoeken betekent dit, dat

$$t_0^S = t_0, \quad t_1^S = t_1, \quad t_2^S = -t_3 \quad \text{en} \quad t_3^S = -t_2 \quad (63)$$

Omdat echter na 3 van zulke verwisselingen, de oorspronkelijke stangenvierzijde herwonnen moet zijn, is het noodzakelijk een dergelijke verwisseling onmiddellijk te laten volgen door een omkering in de draaizin van het vectorpolygoon, dat de stangenvierzijde voorstelt. (Gebeurt dit niet, dan wordt slechts één verwisseling bestreken in plaats van twee.) De combinatie van volgordeverwisseling en omkering van de draaizin betekent, dat

$$t_0^R = t_0, \quad t_1^R = -t_2, \quad t_2^R = -t_3, \quad \text{en} \quad t_3^R = t_1 \quad (64)$$

Een Roberts-transformatie kan dus formeel worden genoteerd als

$$R(t_0, t_3, t_2, t_1) = (t_0, t_1, -t_3, -t_2) \quad (65)$$

Zodoende krijgen we bij voortgezette transformatie:

$$RRR(t_0, t_3, t_2, t_1) = RR(t_0, t_1, -t_3, -t_2) = R(t_0, -t_2, -t_1, t_3) = (t_0, t_3, t_2, t_1) \quad (66)$$

waaruit blijkt, dat na 3 zulke transformaties de oorspronkelijke stangenvierzijde inderdaad weer terugkomt. (Opm. Om een Roberts-variant te krijgen, vindt behalve de volgordeverwisseling, ook nog een strekrotatie<sup>[8]</sup> plaats; deze laatste bewerking heeft echter, voor wat de stangenvierzijde betreft, geen invloed meer op de waarden  $t_i$ , die door verwisseling en omkering van de draaizin zijn verkregen.)

In Matrix-vorm kan een Roberts-transformatie dus als volgt worden genoteerd:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ -t_3 \\ -t_2 \end{pmatrix} \quad (65.a)$$

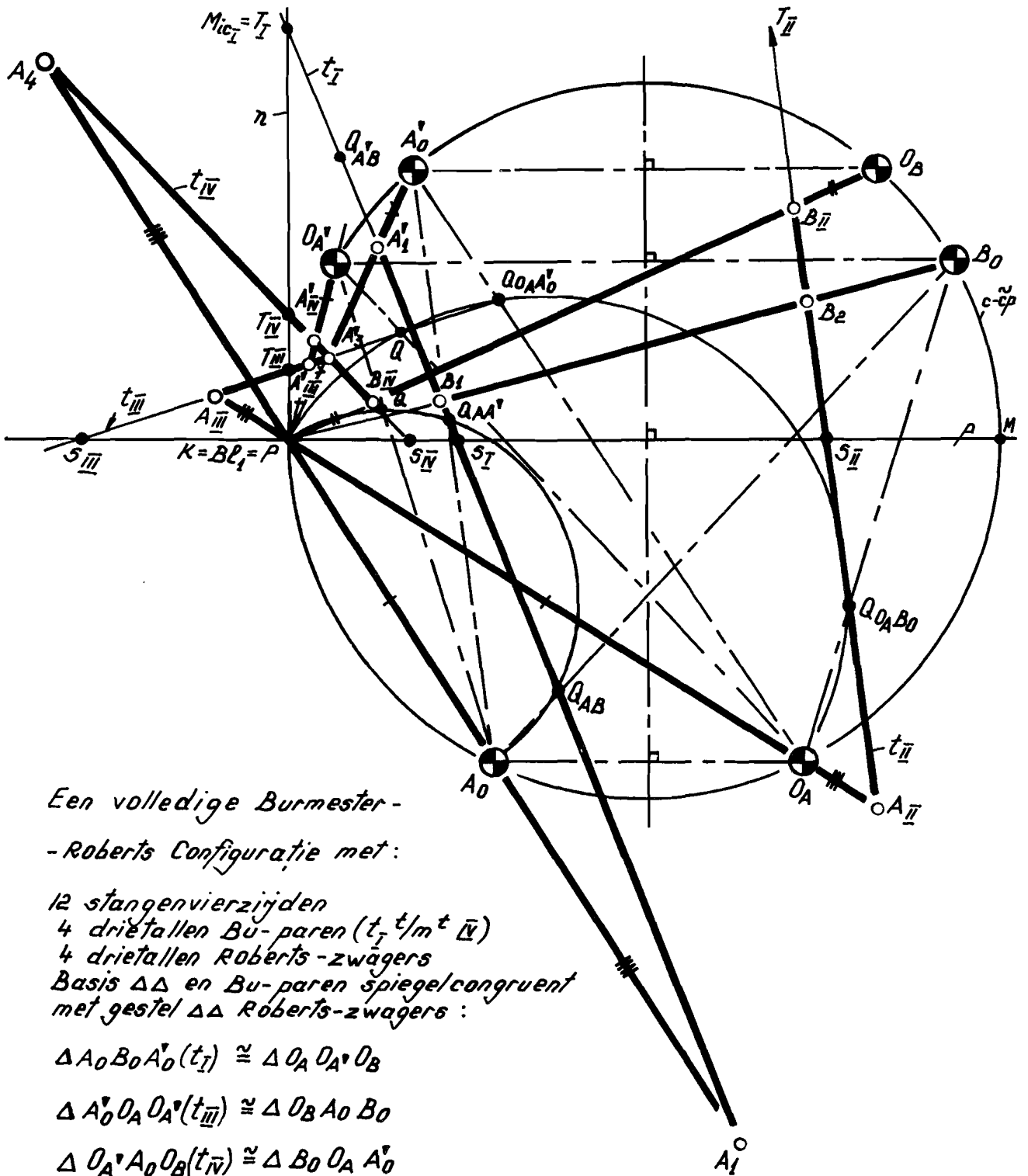
Toepassing van vgl. (65) op de  $B_1$ -conditie,  $2t_0 = (t_1 + t_3) - (1 + t_1 t_3)t_2$ , laat duidelijk zien, dat zij invariant is voor een Robertstransformatie. Zodra dus een punt van Ball, in het koppelvlak van een stangenvierzijde, een punt van Burmester wordt, is dat ook het geval voor de twee andere stangenvierzijden uit de Robertsconfiguratie.\* Overigens kan deze stelling ook met behulp van Sylvester's Plagiograaf worden aangetoond. Verder gaat de stelling min of meer in een vanzelfsprekendheid over in het bijzondere geval, waarbij het koppelpunt in het punt van Ball wordt gekozen. En juist in ons geval, waarbij  $K = B_1 = P$ , wordt dit speciale geval onder de loupe genomen.

Omdat bij een Roberts-transformatie  $t_0$  niet verandert, kan voor R ook eenvoudig een  $3 \times 3$ -matrix worden genomen. We krijgen dan, dat

$$RRR(t_3, t_2, t_1) = RR(t_1, -t_3, -t_2) = R(-t_2, -t_1, t_3) = (t_3, t_2, t_1) \quad (67)$$

Aangezien in dit artikel behalve de stangenvierzijde ook de koppel-

\* Merk op, dat gezien het voorgaande, de  $B_1$ -conditie, ook in het algemeen, dus invariant is gebleken voor beide transformaties, de B- en de R-transformatie.



Een volledige Burmester-  
-Roberts Configuratie met:

12 stangenvierzijden  
4 drietallen Bu-paren ( $t_I$  /  $t_{III}$  /  $t_{IV}$ )  
4 drietallen Roberts-zwagers  
Basis  $\Delta\Delta$  en Bu-paren spiegelcongruent  
met gestel  $\Delta\Delta$  Roberts-zwagers:

$$\Delta A_0 B_0 A_0' (t_I) \cong \Delta O_A O_A' O_B$$

$$\Delta A_0' O_A O_A' (t_{III}) \cong \Delta O_B A_0 B_0$$

$$\Delta O_A' A_0 O_B (t_{IV}) \cong \Delta B_0 O_A A_0'$$

$$\Delta O_B B_0 O_A (t_{II}) \cong \Delta A_0' O_A' A_0$$

Figuur 13

driehoek - op een vergrotings- of verkleiningsfactor na - volledig bepaald is door de 3 waarden ( $t_3, t_2, t_1$ ), zijn, door de in vgl.(67) weergegeven transformaties, de afmetingen van de twee Robertsverwanten direct te berekenen. Men kan daarbij volstaan met het substitueren van de vervangingswaarden voor  $t_i$  in vgl.(11) en in de vergelijkingen (30) t/m (36).

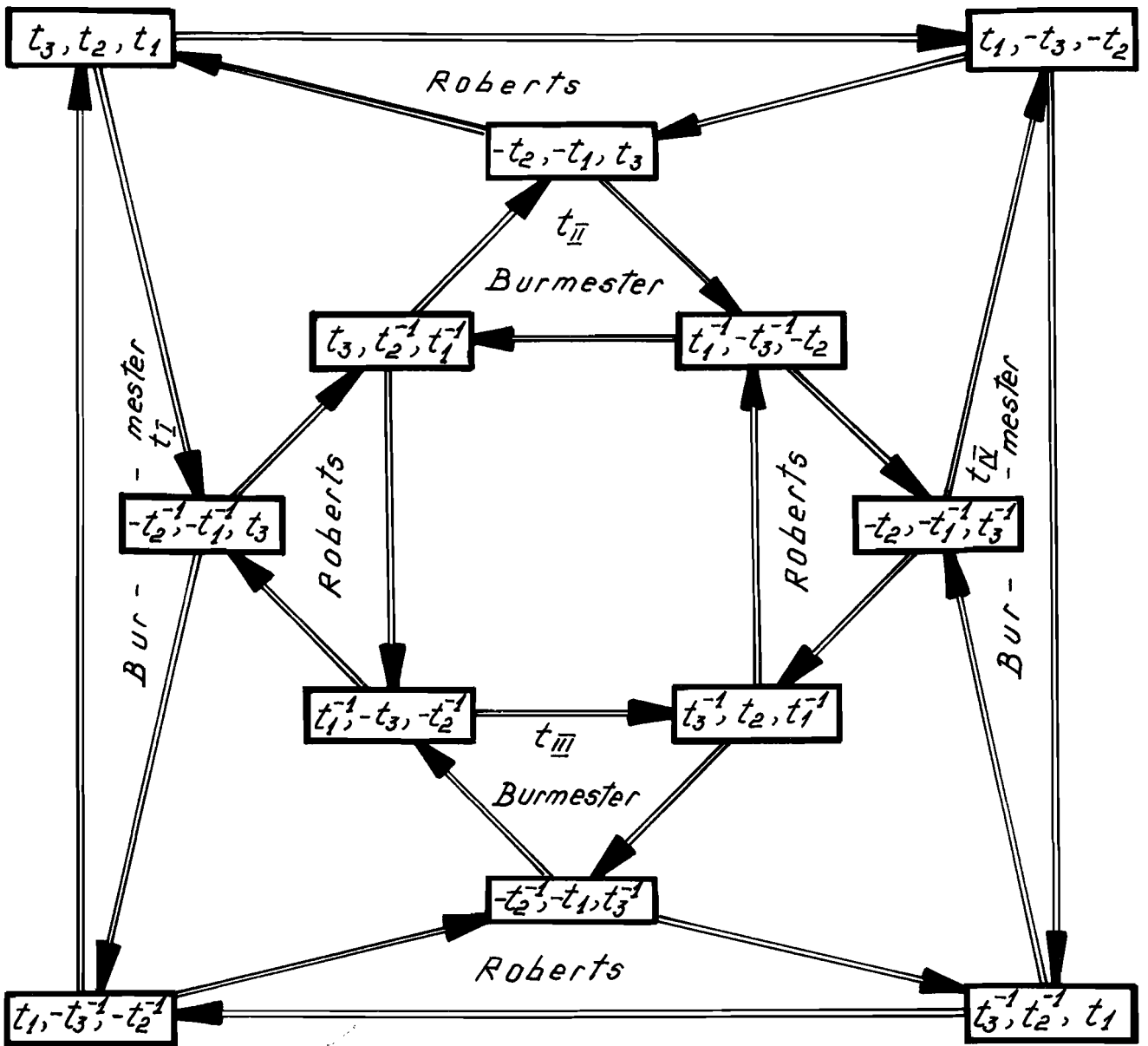
#### 10. De samenhang tussen B- en R-transformaties

Men kan zich de vraag stellen, welke verbanden er zijn tussen de Roberts-verwanten die van ieder van de 3 Burmester-verwanten gemaakt zijn. Het blijkt minder eenvoudig te zijn, dan men op het eerste gezicht zou verwachten. Er blijken kruisverbanden te bestaan, die men alleen kan begrijpen, wanneer men een graaf opstelt, waarin punten stangenvierzijden en lijnen B- of R-transformaties uitbeelden. De graaf blijkt in zichzelf besloten en volledig te zijn, wanneer 12 stangenvierzijden in dit beeld worden betrokken. (zie figuur 14, waarin het topologische verband tussen de 12 stangenvierzijden van figuur 13 is gegeven.) Het resultaat blijkt een vlakke, 2-voudig symmetrische graaf<sup>\*\*</sup> te zijn, die twee-kleurig is, omdat B- en R-transformaties verschillend zijn. (We spreken hier van een vlakke graaf, omdat nergens kruisingen tussen de transformatielijnen nodig blijken.)

Tóch blijkt een ruimtelijke graaf<sup>\*\*\*)</sup>, waarin wel kruisingen optreden, het inzicht nog verder te vergroten. (Zie figuur 15.) In deze laatste graaf worden de stangenvierzijden op de 12 hoekpunten geplaatst van een cubo-bitetraëder, waarin de korte ribben de Roberts'- en de lange ribben de Burmester-transformaties uitbeelden. Deze cubo-bitetraëder, waarvan de hoekpunten op een bol liggen, bestaat uit 4 gelijkzijdige Roberts-driehoeken, 4 (grotere) gelijkzijdige Burmester-driehoeken en 6 rechthoeken, die op de zijvlakken van een kubus liggen. Beide graven, de vlakke en de ruimtelijke, zijn geörienteerde graven, waarbij alle gelijkzijdige driehoeken rechtsom zijn genomen, vooropgesteld, dat men bij de ruimtelijke graaf van buiten tegen het kristal aankijkt.

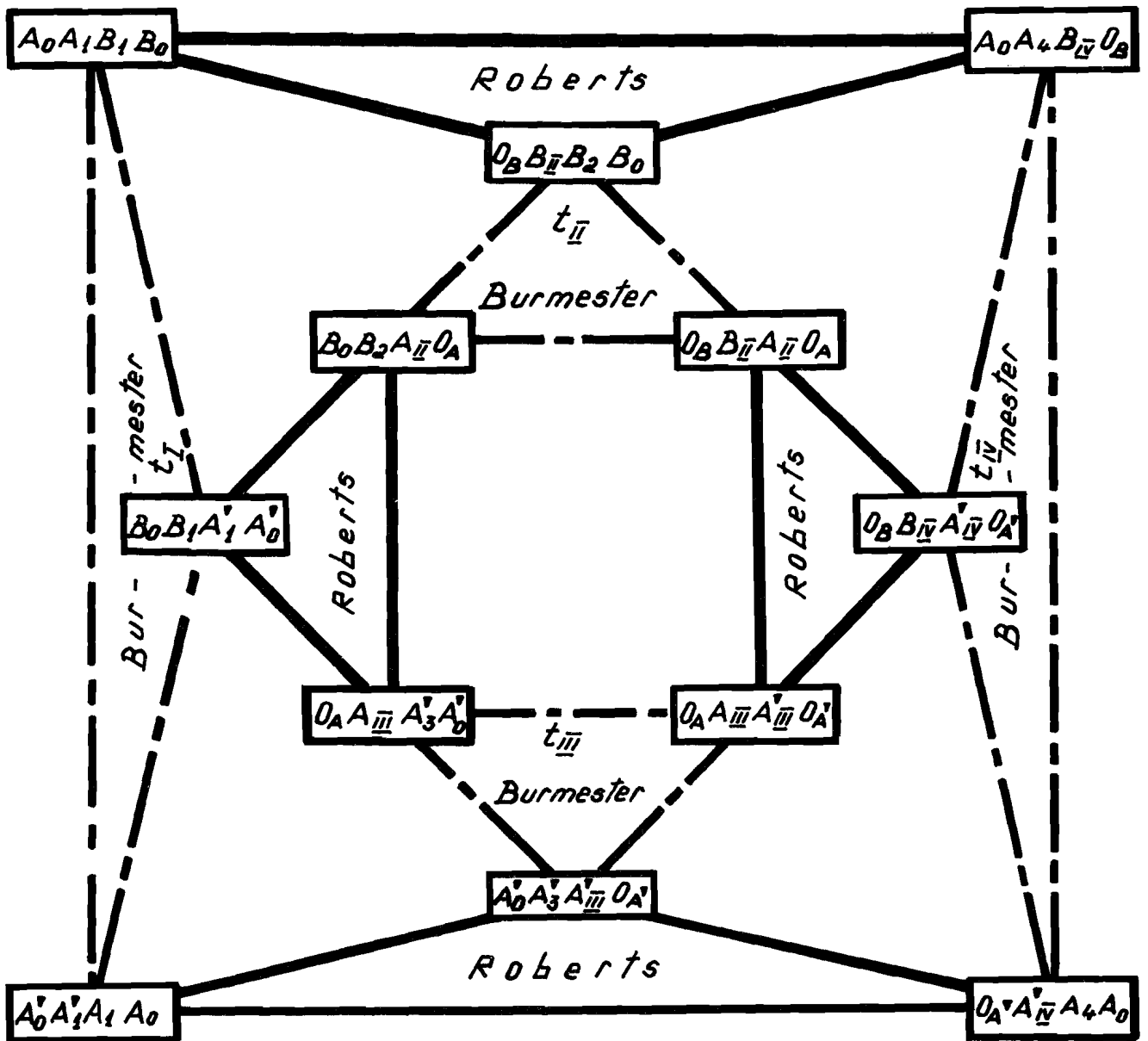
<sup>\*\*</sup>) Deze graaf is tot stand gekomen in wisselwerking met een soft-ware programma, dat is opgesteld door Ir. A. T. J. M. Smals, docent bij de groep bedrijfsmechanisatie en mechanismen van de afdeling der werktuigbouwkunde van de Technische Hogeschool Eindhoven.

<sup>\*\*\*</sup>) Deze ruimtelijke graaf is tot stand gekomen naar een idee van de kristallograaf drs. N. A. L. Touwen, verbonden aan de vakgroep produktietechnologie en bedrijfsmechanisatie.



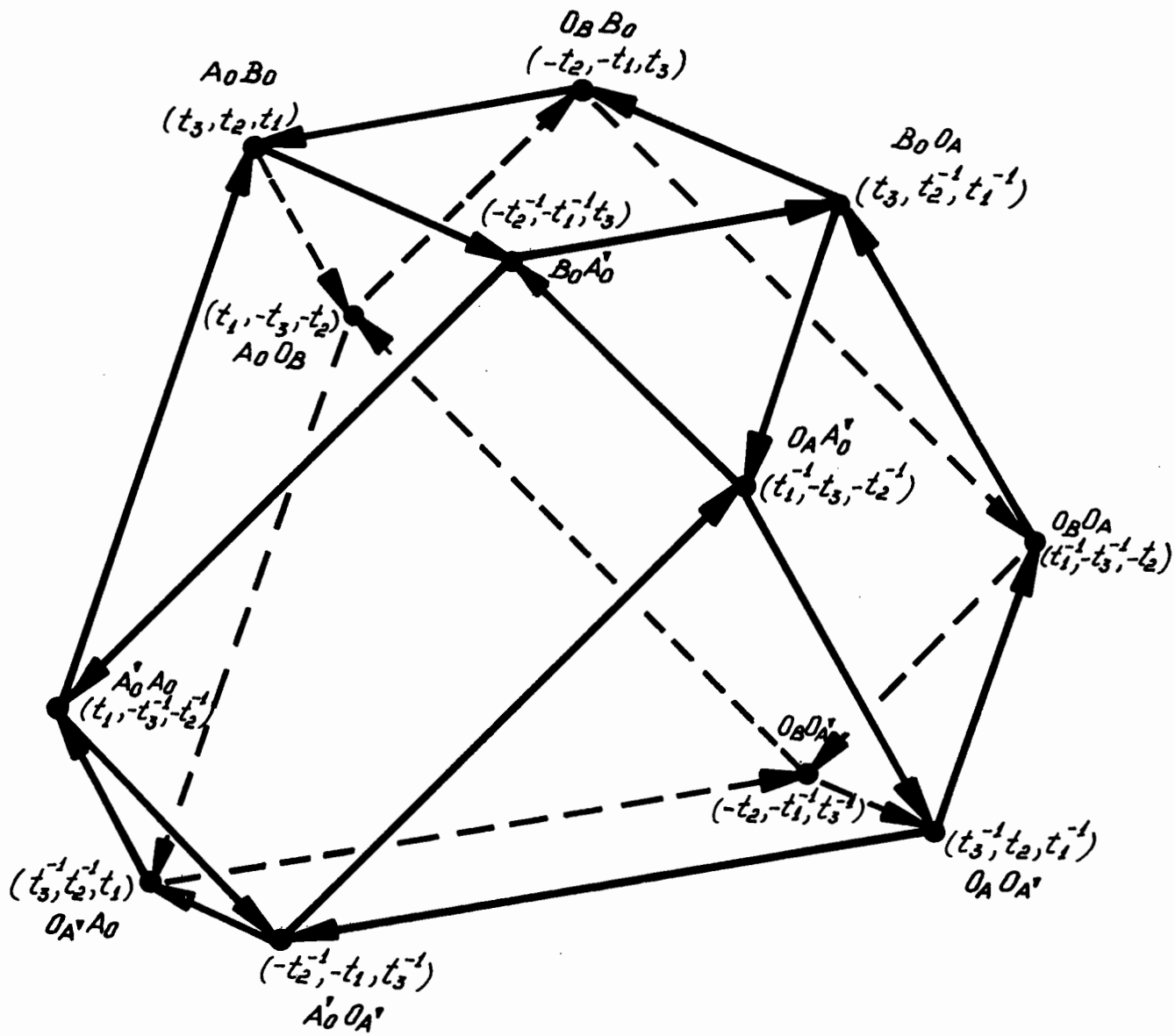
Het topologisch verband tussen de 12 stangenvierzijden van één volledige, geometrische Configuratie.

Figuur 14 A



*Het topologisch verband tussen de 12 stangen-  
-vierzijden van één volledige, geometrische Configuratie.*

*Figuur 14B*



$$RRR(t_3, t_2, t_1) = RR(t_1, -t_3, -t_2) = R(-t_2, -t_1, t_3) = (t_3, t_2, t_1)$$

$$BBB(t_3, t_2, t_1) = BB(-t_2^{-1}, -t_1^{-1}, t_3) = B(t_1, -t_3^{-1}, -t_2^{-1}) = (t_3, t_2, t_1)$$

12 stangen vierzijden op de hoekpunten van een cubo-bitetraëder, die door Burmester-transformaties (lange-ribben) en/of door Roberts-transformaties (Korte-ribben) in elkaar zijn over te voeren.

Figuur 15

Beide graven weerspiegelen een volledig gemaakte Burmester-Roberts Configuratie -in het kort aan te duiden met  $C_{BR}$  - zoals deze bijvoorbeeld is weergegeven in figuur 13.

Het bewijs van de genoemde samenhang vindt men eenvoudig door aan te tonen, dat er door enige B- of R-transformatie, van welk hoekpunt men ook uitgaat, geen andere vierzijden meer kunnen worden afgeleid. De 6 rechthoeken van het kristal, die alle linksom zijn geöriënteerd, geven ieder een matrix-verband tussen de B- en de R-transformaties, dat in matrix-notatie verkort weergegeven kan worden als:

$$RB = B^{-1}R^{-1} \quad (68.a)$$

of als

$$BR = R^{-1}B^{-1} \quad (68.b)$$

Dit verband, dat in feite een stelling inhoudt, zal in het vervolg de "vierhoeksstelling" worden genoemd.

Aangezien  $t_i$  voorgesteld kan worden als een vector in een orthogonaal en 3-dimensionaal assenstelsel, geldt verder, dat

$R^{-1} = R^T$  en  $B^{-1} = B^T$  waarin  $R^T$  en  $B^T$  de getransponeerde matrices van R en B zijn.

Verder levert iedere 6-hoek van het kristal nog de relatie:

$$R B^T R = B R^T B \quad (69)$$

En verder is natuurlijk

$$B^3 = R^3 = I, \text{ de eenheidsmatrix} \quad (70)$$

Met behulp van de betrekkingen (68) t/m (70) kan tenslotte worden aangetoond, dat

$$(RB)(BR)(RB)(BR) = I$$

waarbij de transformaties  $I$ ,  $(BR)$ ,  $(RB)(BR)$  en  $(BR)(RB)(BR)$ , uitgeoefend op een basisvierzijde, die aan onze eisen voldoet, leiden tot een 4-tal te onderscheiden stangenvierzijden, dat als 4-tal representatief is voor de gehele  $C_{BR}$ -configuratie.

In par. 12 zullen deze 4 stangenvierzijden achtereenvolgens worden aangeduid met de romeinse cijfers I, IV, III en II.



11. De volledige Burmester-Roberts Configuratie- $C_{BR}$   
(Zie figuur 13)

De figuur, waarin alle 12 bij elkaar horende stangenvierzijden zijn getekend, wordt de volledige  $C_{BR}$ -configuratie genoemd. In deze figuur worden 6 gestelpunten aangetroffen, die alle op de middelpuntencirkel  $c-\tilde{c}p$  (met diameter  $m = PM$ ) worden aangetroffen. Voor de Burmester-centra van het oorspronkelijke  $B_u$ -triplet was dit reeds het geval. Aangezien bij de Configuratie van Roberts -  $C_R$  - de gesteldriehoek direct gelijkvormig is met ieder van de 3 koppeldriehoeken, en in ons geval het koppelpunt,  $K = P$ , zowel de koppelstang als het corresponderende gestel onder dezelfde hoek ziet, wordt de hoek, waaronder het 3e, bij  $C_R$  horende, gestelpunt het oorspronkelijke gestel ziet, dezelfde als de hoek, waaronder  $P$  dat gestel ziet. Een Roberts-transformatie houdt dus haar gestelpunten op de cirkel  $c-\tilde{c}p$ , waarop ook  $P$  te vinden was. De middelpuntencirkel  $c-\tilde{c}p$  met diameter  $m$ , blijkt dus niet alleen t.o.v. een  $B$ -transformatie, maar ook t.o.v. een Roberts-transformatie invariant te zijn. Dit is evenwel niet het geval met de buigcirkel. Aangezien  $C_{BR}$  vier Müllerrechten ( $t_I$  t/m  $t_{IV}$ ) bezit, die ieder met een der 4 (grote) gelijkzijdige driehoeken van ons kristal corresponderen, zijn er ook 4 doorsnijdingspunten  $T_I$  t/m  $T_{IV}$  van deze rechten met de invariante poolnormaal  $n$ , die tevens middelpunten zijn van de 4 corresponderende buigcirkels. Verder blijkt, dat alle gestelpunten spiegelbeeldig gegroepeerd zijn t.o.v. de middellijn van  $c-\tilde{c}p$ , die evenwijdig aan de poolnormaal loopt. Zo liggen de respectieve paren  $(A'_O, O_B)$ ,  $(O_A, B_O)$  en  $(A_O, O_A)$  ieder symmetrisch ten opzichte van deze middellijn. Bijvoorbeeld geldt voor de stangenvierzijden  $(A_O A_1 B_1 B_O)$  en  $(B_O B_2 A_{II} O_A)$ , die respectievelijk bepaald zijn door de kengetallen  $(t_3, t_2, t_1)$  en  $(t_3, t_2^{-1}, t_1^{-1})$ , dat de corresponderende richtingen  $PA_O$  en  $PO_A$  vastgelegd zijn door resp.  $t_1$  en  $t_1^{-1}$ . Als, zoals gebleken is, het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan 1, dienen  $PA_O$  en  $PO_A$  elkaars spiegelbeeld te zijn t.o.v. de door  $P$  gaande bissectricen van het  $(p, n)$ -assenstelsel. Duidelijk is, dat hetgeen bewezen is voor het puntenpaar  $(A_O, O_A)$  op gelijke wijze kan worden bewezen voor de beide andere aangewezen puntenparen van  $c-\tilde{c}p$ .

De 4 Müllerrechten ( $t_I t/m t_{IV}$ ) snijden de invariante poolraaklijn in 4 punten  $S_I t/m S_{IV}$ , waarvan de liggingen achtereenvolgens berekend kunnen worden met behulp van de betrekking:

$$\frac{MS}{PS} = \left( \frac{m}{PS} - 1 \right) = \alpha\beta = (-t_2 + \tau_1 + \tau_3)(-\tau_2 + t_1 + t_3) \quad (71)$$

De liggingen van de punten  $T_I t/m T_{IV}$  op n zijn volledig vastgelegd door de betrekking:

$$\frac{1}{2} \frac{PM}{PT} = -\alpha = t_2 - \tau_1 - \tau_3 = -\frac{t_2}{t_2} - \frac{\tau_1}{t_2} - \frac{\tau_3}{t_2} \quad (72)$$

, waarvan het rechterlid voor ieder van de vier Burmesterdriehoeken uit onze cubo-bitetraëder een andere waarde oplevert.

$C_R$ , de configuratie van Roberts, die in  $C_{BR}$  viermaal optreedt, bevat 3 stangenparallellogrammen. Daaruit volgt, dat

$$A_0 A_1 = A_4 P \ ; \ O_A A_{II} = A_{III} P \ ; \ B_0 B_2 = B_1 P \ ; \ O_A A_{IV} = A_{III} P \ ;$$

$$O_B B_{II} = B_{IV} P \ ; \ A_0 A_1 = A_3 P.$$

Ook  $C_B$ , de Burmester-configuratie van figuur 2, treedt vanzelfsprekend viermaal op in  $C_{BR}$ .

Tenslotte kan men nog opmerken, dat iedere Müller-rechte telkens 3 collineatiepunten Q bevat, waarvan de ligging de constructie van  $C_{BR}$  kan vereenvoudigen.

## 12. $C_{BR}$ en de grafiek y versus x

Van ieder der 4 Roberts-driehoeken uit onze graaf, kan een vertegenwoordiger worden gekozen, die in de y versus x-grafiek kan worden uitgezet. Het ligt voor de hand, om dit, in verband met de altijd reële centra  $A_0$  en  $O_A$ , zó te doen, dat steeds één van deze gestelpunten tot één der uitverkoren stangenvierzijden behoort. We beperken ons dan dus tot de stangenvierzijden

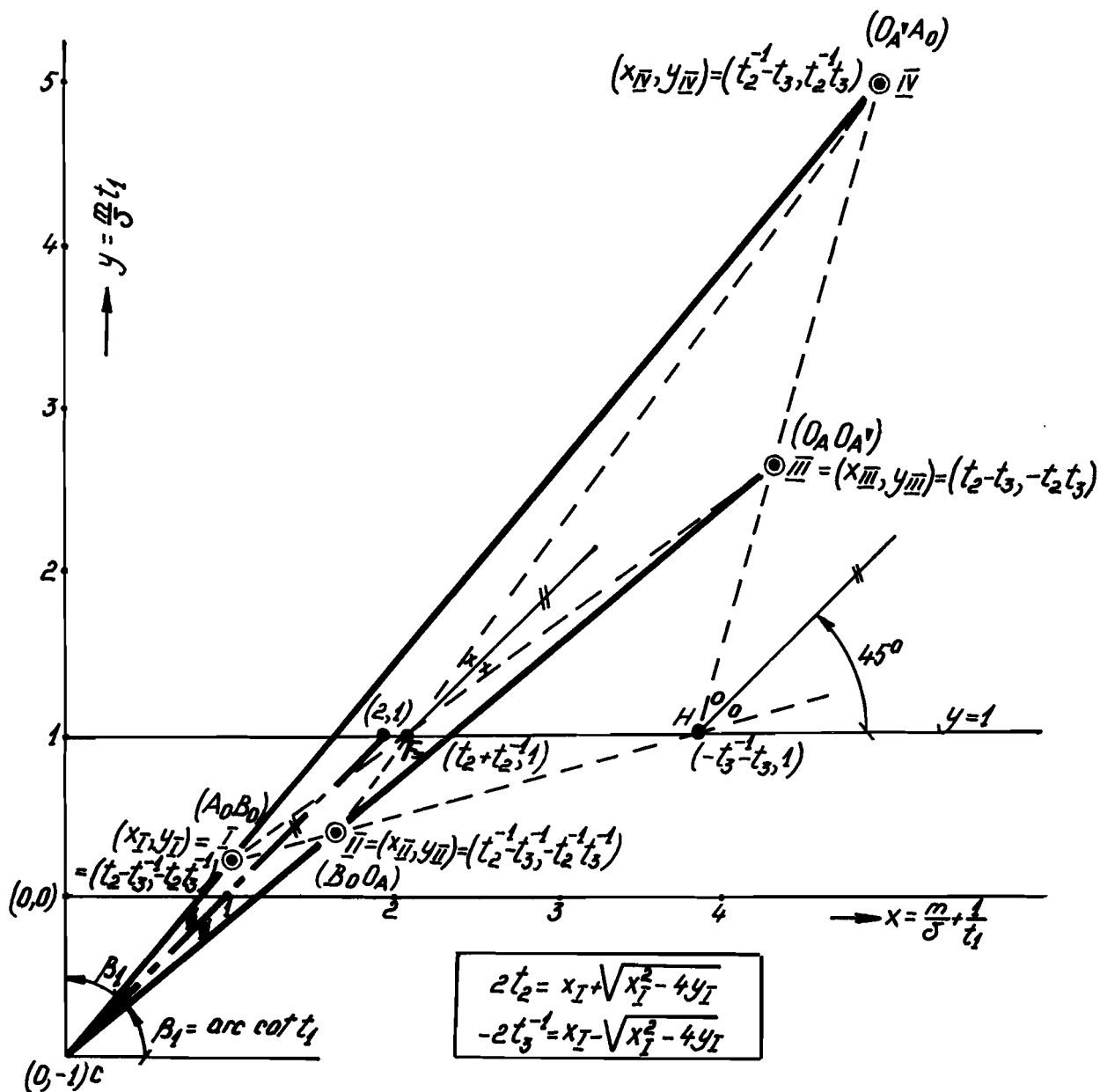
$$A_0 A_1 B_1 B_0 \ , \ O_A A_{IV} A_4 A_0 \ , \ O_A A_{III} A_{III} O_A \ , \ \text{en} \ B_0 B_2 A_{II} O_A$$

respectievelijk vertegenwoordigd door de kengetallen:

$$(t_3, t_2, t_1) \ , \ (t_3^{-1}, t_2^{-1}, t_1) \ , \ (t_3^{-1}, t_2, t_1^{-1}) \ \text{en} \ (t_3, t_2^{-1}, t_1^{-1}).$$

De corresponderende Müllerrechten zijn achtereenvolgens:

$t_I$ ,  $t_{IV}$ ,  $t_{III}$  en  $t_{II}$ . Met andere woorden, de verkozen stangenvierzijden



De samenhang tussen de punten van de grafiek door de transformaties van Burmester en Roberts.

Figuur 16

horen niet alleen tot verschillende Roberts driehoeken, maar ook tot de verschillende Burmester driehoeken uit ons kristal. Verder bezitten ieder van de vier zijden een bijbehorende koppelkromme, die -in het algemeen - verschillend is, ook al hebben ze alle een samenvallende 'speerpunt' in de kromme.

Uitgezet in de grafiek  $y$  versus  $x$ , ontstaan zo 4 punten I t/m IV, die, op grond van  $C_{BR}$ , in direct verband met elkaar staan. Dit verband is in figuur 16 in detail gedemonstreerd.

Uitgaande van de betrekkingen (11) en (27) kan nu eenvoudig worden aangetoond, dat:

$$y_I y_{IV} = 1 = y_{II} y_{III} \tag{73}$$

en verder, dat

$$\frac{y_{IV}^{+1}}{x_{IV}} = \frac{y_I^{+1}}{x_I} = t_1 \tag{74}$$

als ook

$$\frac{y_{III}^{+1}}{x_{III}} = \frac{y_{II}^{+1}}{x_{II}} = t_1^{-1} \tag{75}$$

Hieruit volgt, dat de punten C(0,-1), I en IV op één rechte liggen, als ook de punten C, II en III. En voorts, dat beide rechten elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. een rechte door C, die hoeken van  $45^\circ$  maakt met de  $x$ - en met de  $y$ -as.

Men vindt verder, dat

$$\frac{y_{III} - y_I}{x_{III} - x_I} = t_2 = \frac{x_{IV} - x_{II}}{y_{IV} - y_{II}} \tag{76}$$

en analoog

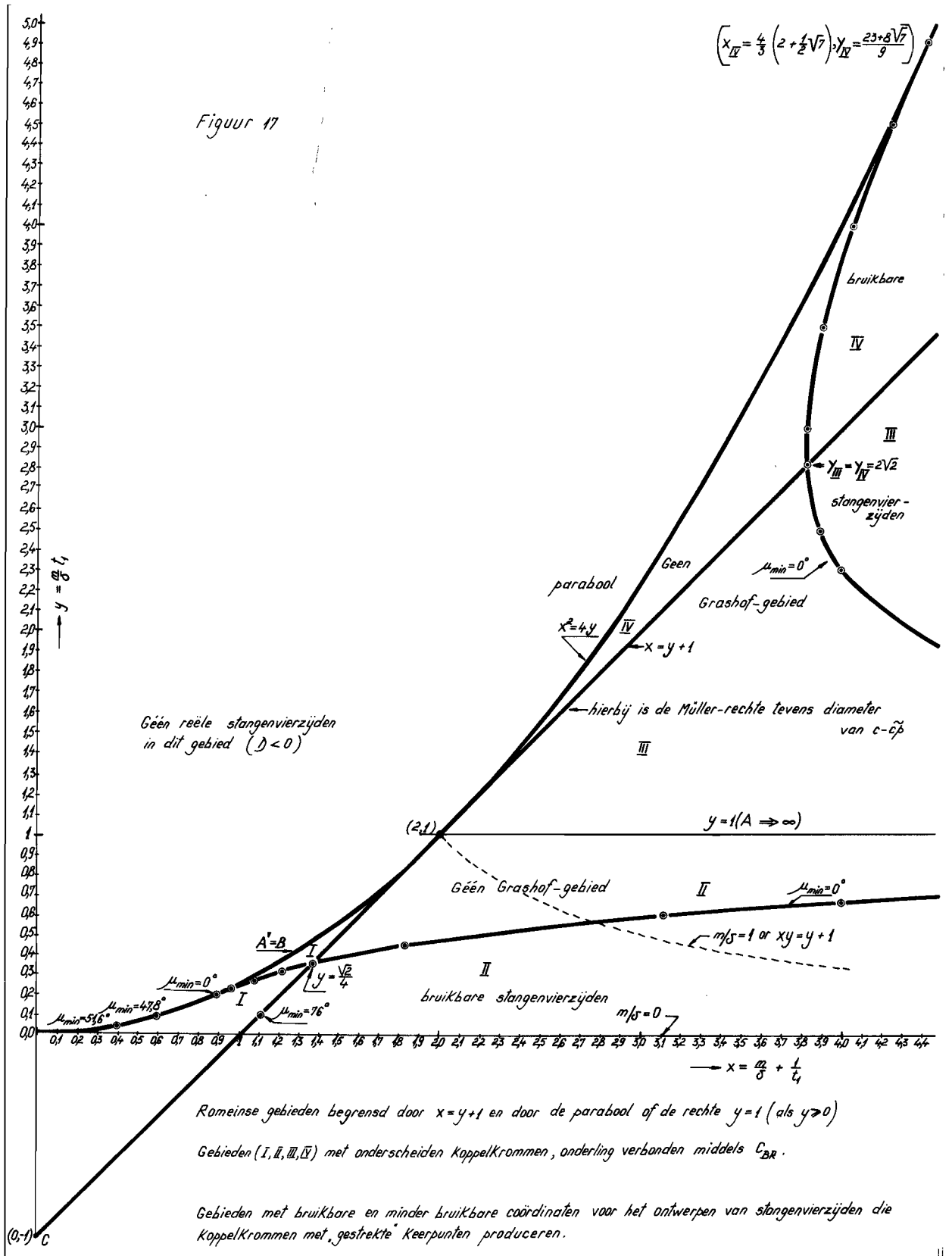
$$\frac{y_{IV} - y_{III}}{x_{IV} - x_{III}} = -t_3 = \frac{x_{II} - x_I}{y_{II} - y_I} \tag{77}$$

Voor het snijpunt F van de rechten IV-II en III-I vindt men bovendien, dat

$$x_F = t_2 + t_2^{-1} \quad \text{en} \quad y_F = 1 \tag{78}$$

Analoog vindt men voor het snijpunt H van de rechten IV-III en II-I de coördinaten:

$$x_H = -(t_3 + t_3^{-1}) \quad \text{en} \quad y_H = 1 \tag{79}$$



De vergelijkingen (76) en (77) leiden tot het feit, dat de bissectricen van de rechten IV-II en III-I, alsmede die van de rechten IV-III en II-I evenwijdig zijn aan de bissectrice  $((0,-1) - (2,1))$  van de rechten I-IV en II-III.

Uitgaande van één der 4 punten, bijv. het punt I, kan men de overige drie direct construeren of bepalen d.m.v. de hulppunten F en H op de rechte  $y = 1$ . De juiste ligging van de punten F en H op deze rechte vindt men in de wortels van de vierkantsvergelijking:

$$x_{F,H}^2 - x_I(1-y_I^{-1})x_{F,H} + (y_I+y_I^{-1} + x_I^2y_I^{-1}-2) = 0 \quad (80)$$

In deze betrekking kan men de index I, op grond van symmetrieoverwegingen ook door de indices IV, III en II vervangen. Verder kan worden opgemerkt, dat de bissectrice  $((0,-1)-(2,1))$  overgangsrechte is, waarin de punten uit het gebied I in die van II overgaan en omgekeerd. Datzelfde geldt voor de punten uit de gebieden IV en III. Ook deze punten kunnen dus door deze bissectrice gescheiden blijven. Tenslotte dient de rechte  $y = 1$  als scheidslijn voor de punten uit de gebieden I en IV resp. voor de punten uit de gebieden II en III.

Daarmee kunnen dus in het eerste kwadrant 4 gebieden worden aangewezen, die begrensd worden door de rechte  $x = y+1$  en door de parabool of door de rechte  $y = 1$ .

Corresponderende punten uit ieder van de gebieden I, IV, III en II zijn punten, die tot eenzelfde  $C_{BR}$ -configuratie behoren, daarentegen onderscheiden speerpuntige koppelkrommen opleveren.

Het is raadzaam in ieder van die gebieden krommen met constante  $\mu_{\min}$  te tekenen. Dit geeft dan voor de constructeur-gebruiker een overzicht van de mogelijkheden. In figuur 17 is dit vooralsnog alléén uitgevoerd voor het grensgeval, waarbij  $\mu_{\min} = 0^\circ$ . In ieder geval scheidt deze kromme de stangenvierzijden die wél en die niet aan de voorwaarde van Grashof voldoen. Op deze kromme, die ook bij de overgangen van het ene naar het andere gebied, continue differentiëerbaar blijft, hebben we, zoals duidelijk zal zijn, enkel te doen met streekbare vierzijden.

Behalve in de grafiek  $y$  versus  $x$ , kunnen de relaties tussen het 4-tal representatieve stangenvierzijden uit  $C_{BR}$  ook op een andere wijze worden weergegeven. Daartoe wordt uitgegaan van de twee onafhankelijke Burmester-invarianten  $\alpha$  en  $\beta$ .

Voor de 4 betrokken stangenvierzijden (I, IV, III en II) heeft men dan de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_I &= -t_2 + \tau_1 + \tau_3 = \tau_1 t_2 \tau_3 \\ \alpha_{IV} &= -\tau_2 + \tau_1 + t_3 = \tau_1 \tau_2 t_3 \\ \alpha_{III} &= -t_2 + t_1 + t_3 = t_1 t_2 t_3 \\ \alpha_{II} &= -\tau_2 + t_1 + \tau_3 = t_1 \tau_2 \tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_I &= -\tau_2 + t_1 + t_3 \\ \beta_{IV} &= -t_2 + t_1 + \tau_3 \\ \beta_{III} &= -\tau_2 + \tau_1 + \tau_3 \\ \beta_{II} &= -t_2 + \tau_1 + t_3 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Hieruit vindt men de symmetrische betrekkingen

$$\alpha_I + \beta_I = \alpha_{IV} + \beta_{IV} = \alpha_{III} + \beta_{III} = \alpha_{II} + \beta_{II} = \frac{1}{3} \sum \alpha \quad (83)$$

,waaruit volgt, dat de uitdrukking

$$\left( -\frac{m}{\delta} + \frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{PS} \right)$$

blijkbaar voor alle 12 stangenvierzijden uit  $C_{BR}$  dezelfde waarde heeft, en zodoende invariant is voor zowel een Burmester- als ook voor een Roberts-transformatie. (Stelling)

Men vindt verder, dat

$$\alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_{III} + \alpha_{IV} = \beta_I + \beta_{II} + \beta_{III} + \beta_{IV} \quad (84)$$

(kortweg:  $\sum \alpha = \sum \beta$ )

En voorts

$$\alpha_I \cdot \alpha_{II} \cdot \alpha_{III} \cdot \alpha_{IV} = 1 \quad (85)$$

(kortweg  $\prod \alpha = 1$ )

Tenslotte vindt men, door hanttering van de beide uitdrukkingen voor resp.  $\alpha_I$ ,  $\alpha_{IV}$ ,  $\alpha_{III}$  en  $\alpha_{II}$ , dat

$$\alpha_I \beta_I + \alpha_{II} \beta_{II} + \alpha_{III} \beta_{III} + \alpha_{IV} \beta_{IV} = 4 \quad (86)$$

(kortweg  $\sum \alpha \beta = 4$ )

Met het stelsel vergelijkingen (83) t/m (86) kan men in principe voor ieder gegeven stel waarden  $(\alpha_I, \beta_I)$  de daaraan toegevoegde waarden  $(\alpha_{IV}, \beta_{IV})$ ,  $(\alpha_{III}, \beta_{III})$  en  $(\alpha_{II}, \beta_{II})$  berekenen. Is bijv., zoals in figuur 11,  $\alpha_I = \beta_I = -1$ , dan blijkt, zoals ook te verwachten was, het bovengenoemde stelsel vergelijkingen weer te leiden tot de uitkomst

$$\alpha_I = \alpha_{II} = \alpha_{III} = \alpha_{IV} = -1$$

$$\beta_I = \beta_{II} = \beta_{III} = \beta_{IV} = -1$$

Als, tenslotte, in het wat algemenere geval, zoals gedemonstreerd in figuur 12,  $\alpha_I \beta_I = 1$ , voldoen bijvoorbeeld oplossingen, waarvoor  $\alpha_I \beta_I = \alpha_{II} \beta_{II} = \alpha_{III} \beta_{III} = \alpha_{IV} \beta_{IV} = 1$ , terwijl verder  $\alpha_{IV} = \alpha_{III} = 1/\alpha_I$  en  $\alpha_{II} = \alpha_I$ .

Met behulp van de cubo-bitetraëder is gemakkelijk in te zien, dat ook de uitdrukking

$$U = (\tau_2 - t_2)(\tau_3 - t_3)(\tau_1 - t_1) \quad (87)$$

een invariant is voor zowel Burmester- als ook voor Robertstransformaties. Aangezien dat ook zo is voor de uitdrukking

$$V = (\tau_2 + t_2)(\tau_3 + t_3)(\tau_1 + t_1) \quad (88)$$

heeft dit tot gevolg, dat de uitdrukking voor het quotiënt

$$U/V = \cos 2\beta_1 \cdot \cos 2\beta_2 \cdot \cos 2\beta_3 \quad (89)$$

eveneens BR-bestendig is en wel evenals de uitdrukking

$$8/V = \sin 2\beta_1 \cdot \sin 2\beta_2 \cdot \sin 2\beta_3 \quad (90)$$

De invariant U kan, met behulp van de vergelijkingen (81), (83) en (84), nog worden omgevormd tot

$$U = (\alpha_I - \beta_{III})(\alpha_I - \beta_{II})(\alpha_I - \beta_{IV}) = -(\beta_I - \alpha_{III})(\beta_I - \alpha_{II})(\beta_I - \alpha_{IV}) \quad (91)$$

zodat tenslotte met behulp van de betrekkingen (83), (84) en (85)

$$U = (\alpha_I + \beta_I)(\beta_I^2 + \alpha_I^{-2}) - \beta_I \alpha_I^{-1} \cdot \sum \frac{1}{\alpha} \quad (92)$$

(Merk op, dat in deze vergelijking niet alleen U en  $(\alpha_I + \beta_I)$ , maar ook de uitdrukking  $\sum \frac{1}{\alpha}$  een invariant is ten aanzien van zowel Burmester- als Robertstransformaties.)



Voor  $\sum \frac{1}{\alpha}$  vindt men hierbij, met behulp van de betrekkingen (81), de volgende uitdrukking

$$\sum \frac{1}{\alpha} = t_1 \tau_2 t_3 + t_1 t_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_2 \tau_3 + \tau_1 t_2 t_3 \quad (93)$$

die met behulp van (39) en (54) kan worden omgezet in

$$\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_I} (1 + t_2^2 \tau_3^2) + \alpha_I (\tau_2^2 + t_3^2) \quad (94)$$

Daarna geeft dit, met behulp van de betrekkingen (28) en (29)

$$\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_I} (1 + y_I^2) + \alpha_I \left( \frac{x_I^2 - 2y_I}{y_I} \right) \quad (95)$$

We weten voorts, dat met (27) en (54)

$$\left\{ \begin{aligned} x_I &= \frac{m}{\delta_I} + \frac{1}{t_1} = -\alpha_I + \frac{1}{t_1} \end{aligned} \right. \quad (96)$$

$$\left\{ \begin{aligned} y_I &= \frac{m}{\delta_I} \cdot t_1 = -\alpha_I t_1 \end{aligned} \right. \quad (97)$$

en ook, dat op grond van de vergelijkingen (82), (28) en (29)

$$\beta_I = t_1 + (t_3 - \tau_2) = t_1 - \frac{x_I}{y_I} \quad (98)$$

Substitutie van de uitdrukkingen voor  $y_I$  en  $x_I/y_I$  geeft dan met (97) en (98)

$$\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_I} + \alpha_I (t_1^2 + (t_1 - \beta_I)^2) + \frac{2}{\alpha_I t_1} \quad (99)$$

Daarnaast geeft vergelijking (74), samen met (97) en (98) het verband

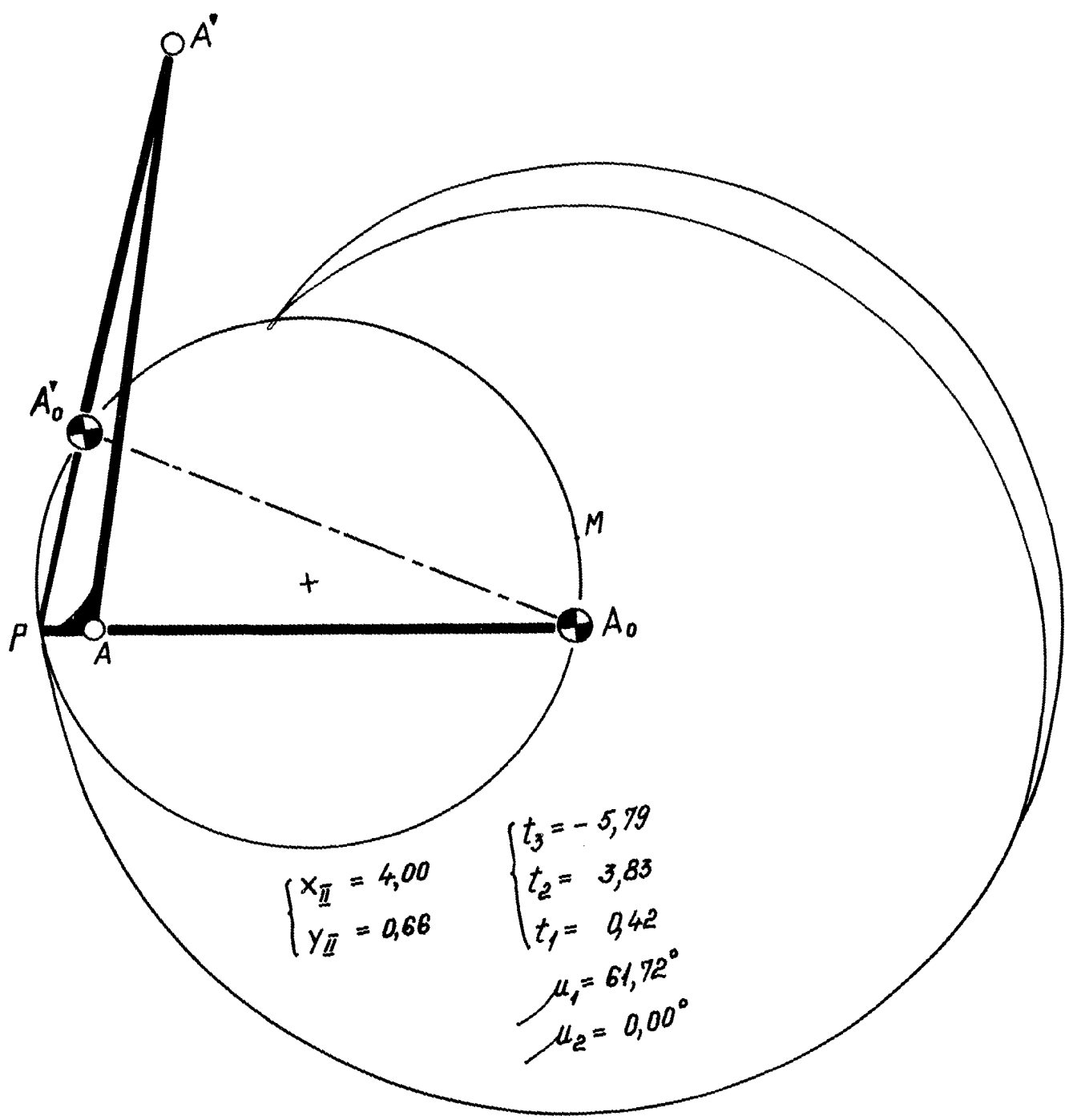
$$t_1 (t_1 - \beta_I) = 1 - \frac{1}{\alpha_I t_1} \quad (100)$$

zodat substitutie van de uitdrukking voor  $\frac{1}{\alpha_I t_1}$  in (99) het

resultaat geeft

$$\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_I} + \alpha_I (\beta_I^2 + 2) \quad (101)$$

Substitutie van deze uitdrukking voor  $\sum \frac{1}{\alpha}$  in de gevonden uitdrukking voor U geeft zodoende



Strekbare vierzijde met Koppelkromme

Figuur 18

$$U = \frac{1}{\alpha_I} (\alpha_I \beta_I - 1)^2 \quad (102)$$

Met de definities volgens (54) en (55) betekent dat dus, dat de uitdrukking

$$U = - \frac{\delta}{m} \left( \frac{m}{PS} - 2 \right)^2 \quad (103)$$

een invariant is t.o.v. idere Burmester- of Robertstransformatie.

Omdat ook m onveranderd blijft, kunnen we dus schrijven

$$\delta_I \left( \frac{m}{PS_I} - 2 \right)^2 = \delta_{II} \left( \frac{m}{PS_{II}} - 2 \right)^2 = \delta_{III} \left( \frac{m}{PS_{III}} - 2 \right)^2 = \delta_{IV} \left( \frac{m}{PS_{IV}} - 2 \right)^2 \quad (104)$$

hetgeen ook direct geverifiëerd kan worden aan de hand van de  $C_{BR}$ -configuratie, zoals deze gedemonstreerd is in figuur 13.

Van de gevonden invarianten, zoals  $(\alpha+\beta)$  en  $U = \frac{1}{\alpha}(\alpha\beta-1)^2$ , kan een

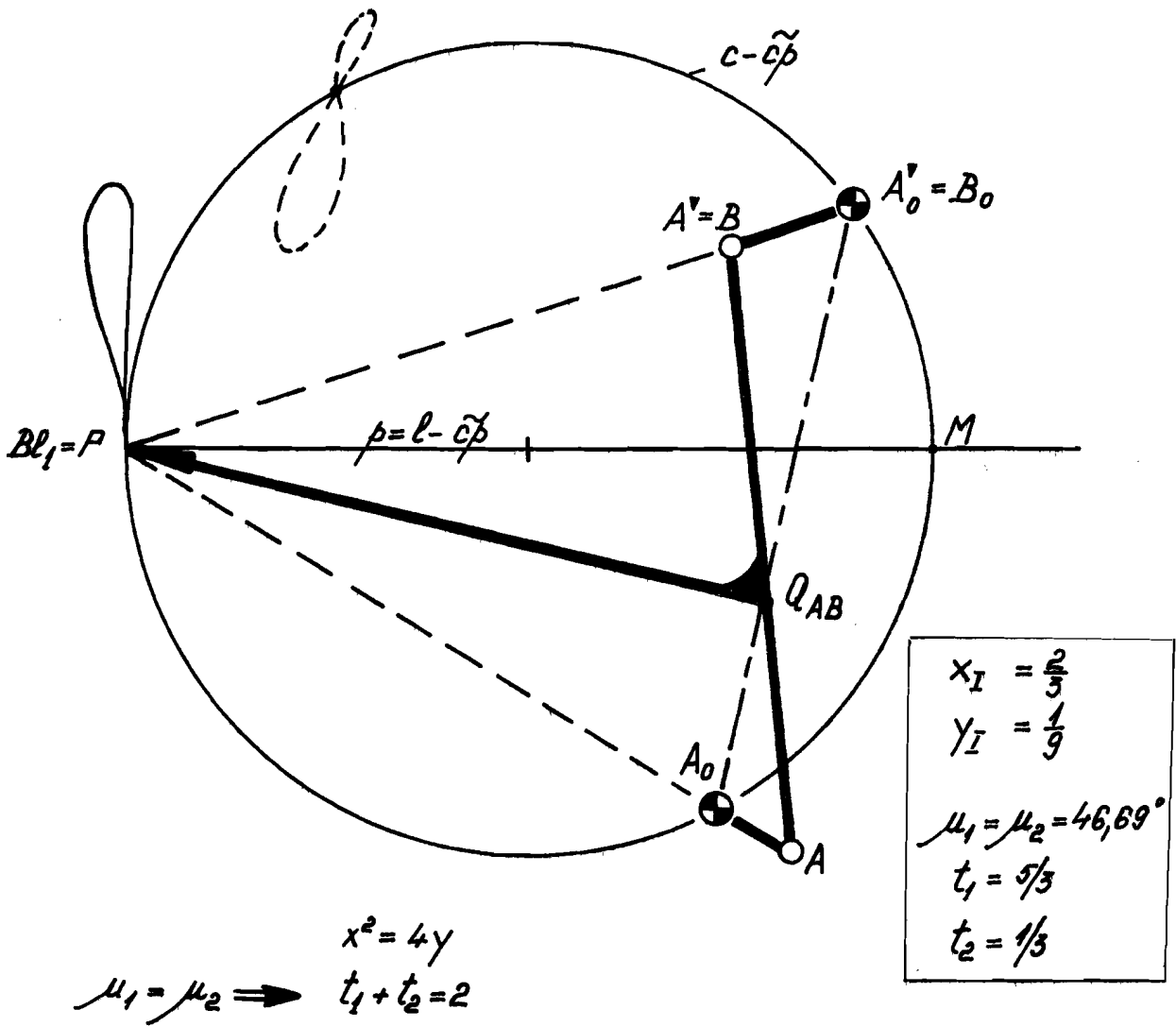
handig gebruik worden gemaakt bij het samenstellen van grafieken van bruikbare mechanismen. Daarbij spelen uiteraard ook de overbrengingshoeken  $\mu_1$  en  $\mu_2$ , zoals deze indertijd door H. Alt zijn geïntroduceerd, een belangrijke rol.

De figuren 5, 10 en 18 demonstreren strekbare stangenvierzijden met een vertakkingspositie, die aan de grensvoorwaarde van Grashof voldoen. Voor hen geldt, dat  $\mu_{\min} = \mu_2 = 0^\circ$ . In de grafiek van figuur 17 zijn deze stangenvierzijden vertegenwoordigd door punten van de kromme, waarvoor  $\mu_{\min} = 0^\circ$ ; een kromme, die de rechte  $y = 1$  tot asymptoot heeft.<sup>\*)</sup>

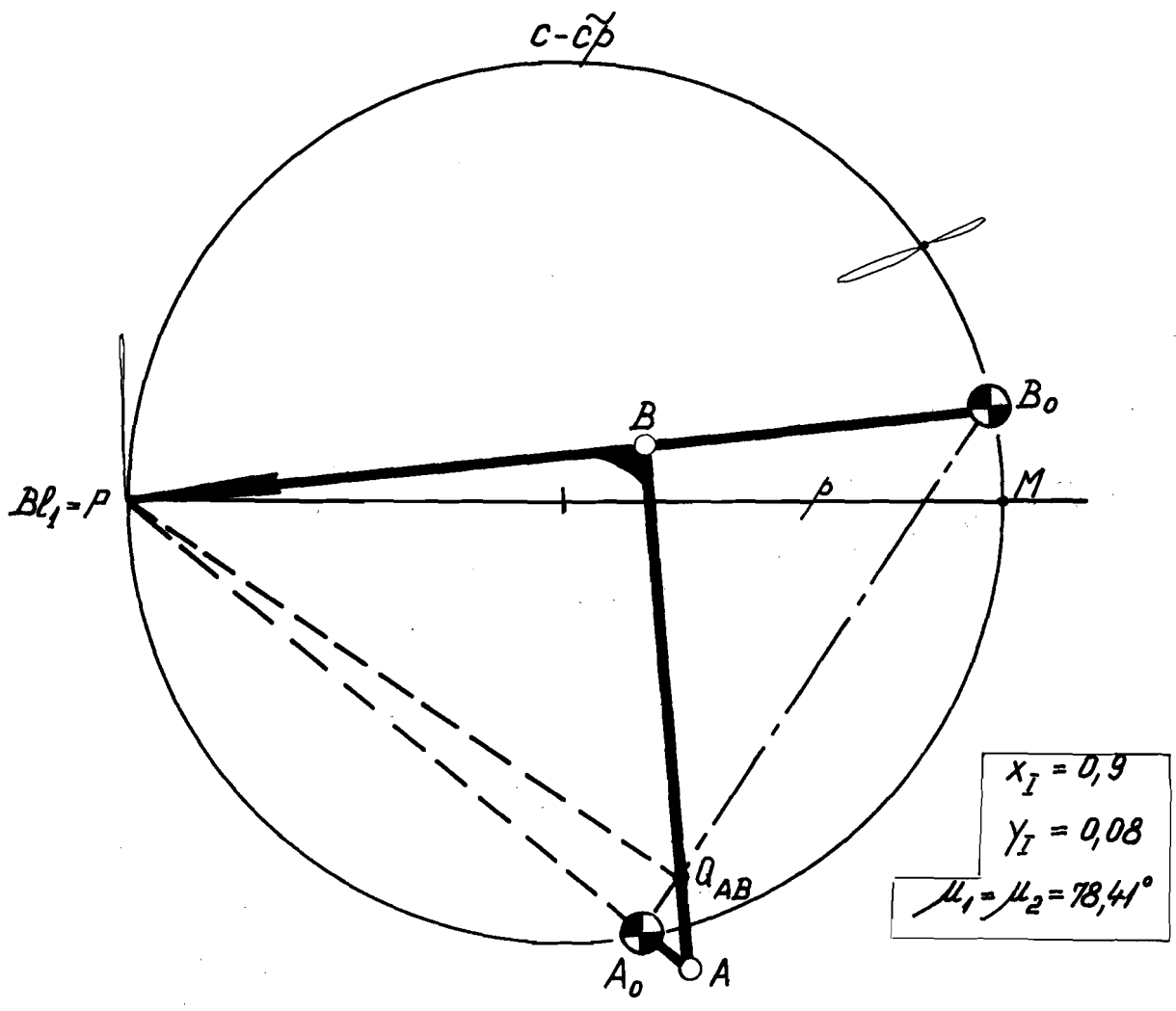
Mechanismen, waarvoor in de beide uiterste standen van de (slinger)-kruk de overbrengingshoeken aan elkaar gelijk zijn, zijn gedemonstreerd in de figuren 19 t/m 21. Men kan bewijzen, dat dit het geval is, wanneer  $t_1 + t_2 = 2$ . De twee Robertsverwante vierzijden met dezelfde eigenschap, voldoen respectievelijk aan de condities  $-t_2 - t_3 = 2$  en  $t_3 - t_1 = 2$ , hetgeen ook direct uit de Roberts-transformaties valt af te leiden. Zie daartoe bijv. formule (67).

De stangenvierzijden van de figuren 19, 20 en 21 zijn in figuur 22 uitgezet in een grafiek, waarbij de x- en y-waarden weer de coördinaten zijn. Continue voortzetting van de "overgangskromme",  $\mu_1 = \mu_2$ , in het eerste kwadrant, leidt <sup>daarbij</sup> vanzelf tot het toelaten van negatieve

\*) Het blijkt, dat de 2 takken van deze kromme, die door de asymptoot  $y = 1$  gescheiden zijn, uit elkaar verkregen kunnen worden door telkens de y-waarden om te keren van de aan elkaar toegevoegde snijpunten met een lijn uit de lijnenwaaier  $C(0, -1)$ .

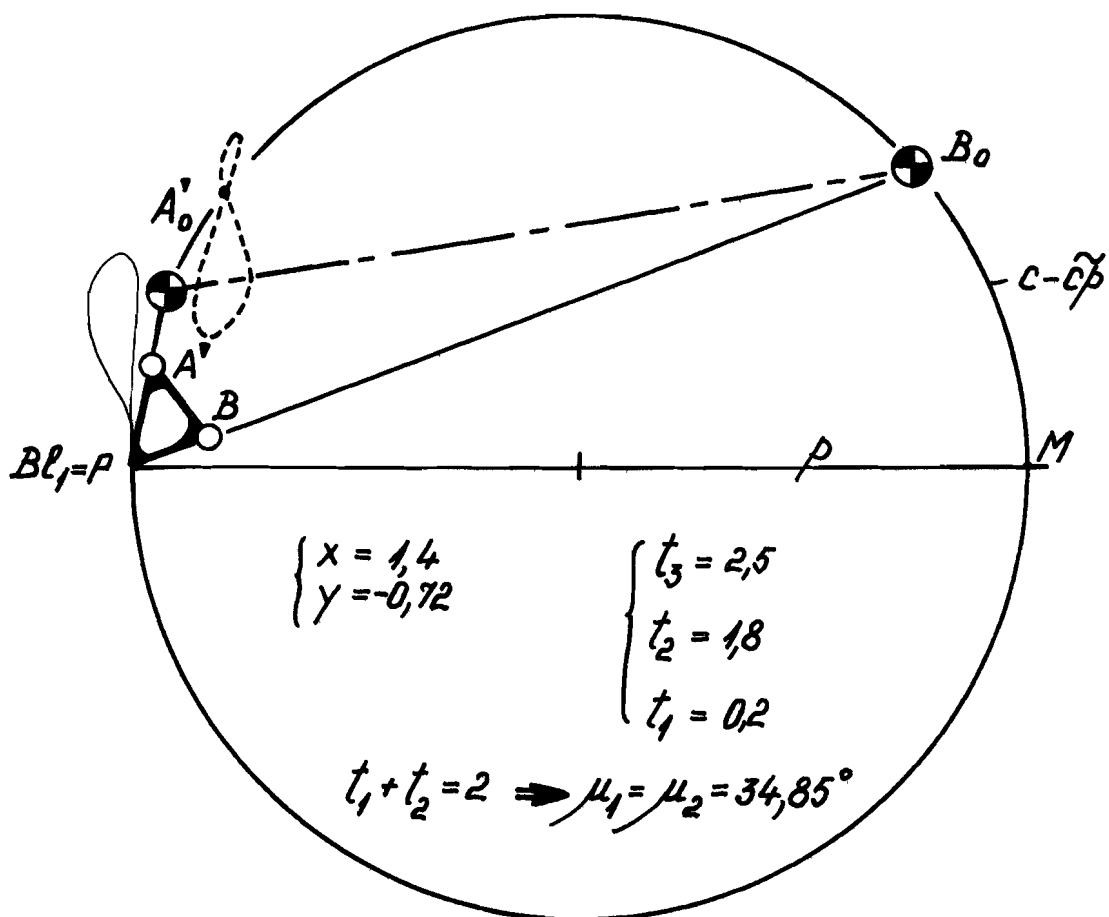


Figuur 19



$$\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow t_1 + t_2 = 2$$

Figuur 20



*Mechanisme met gelijke overbrengingshoeken  $\mu$  in de standen, waarbij de Kruk het gestel overlapt of in het verlengde ligt daarvan.*

*Figuur 21*

y-waarden in het vierde kwadrant. Deze tekenverandering van y hangt namelijk samen met het teken van de buigcirkeldiameter  $\delta$ . Dit teken voor  $\delta$  is echter, blijkens de formules (103) en (104) niet te beïnvloeden door welke Burmester- of Robertstransformatie dan ook, zodat het hierin niet gezocht kan worden.

Ook hoort bij ieder stel coördinaten  $(x, y)$  een unieke set waarden  $(t_3, t_2, t_1)$  die op haar beurt, blijkens de betrekkingen (30) t/m (36), weer tot een unieke, zeer bepaalde, stangenvierzijde leidt. Het is dus mogelijk, om met ieder stel coördinaten uit de grafiek een stangenvierzijde aan te duiden. Op deze manier is ook het 1e kwadrant van de grafiek tot stand gekomen. Zoals uit het voorgaande is gebleken, worden dan echter - met name in het 1e kwadrant - niet alle bestaande mechanismen ingevangen. Spiegelning van het mechanisme (om de poolraaklijn p) zou weliswaar een negatieve buigcirkeldiameter  $\delta$  weer positief maken, maar dan veranderen ook alle  $t_i$ -waarden van teken, zodat dan toch weer  $y = \frac{m}{\delta} t_1$  hetzelfde teken houdt.

Negatieve y-waarden leiden dus, in het algemeen, tot nieuwe, tot dusver niet ingevangen, stangenvierzijden. Zoals blijkt uit de formule

$\frac{m}{\delta} = \frac{xy}{y+1}$ , staat echter niet het gehele 4e kwadrant ter beschikking.

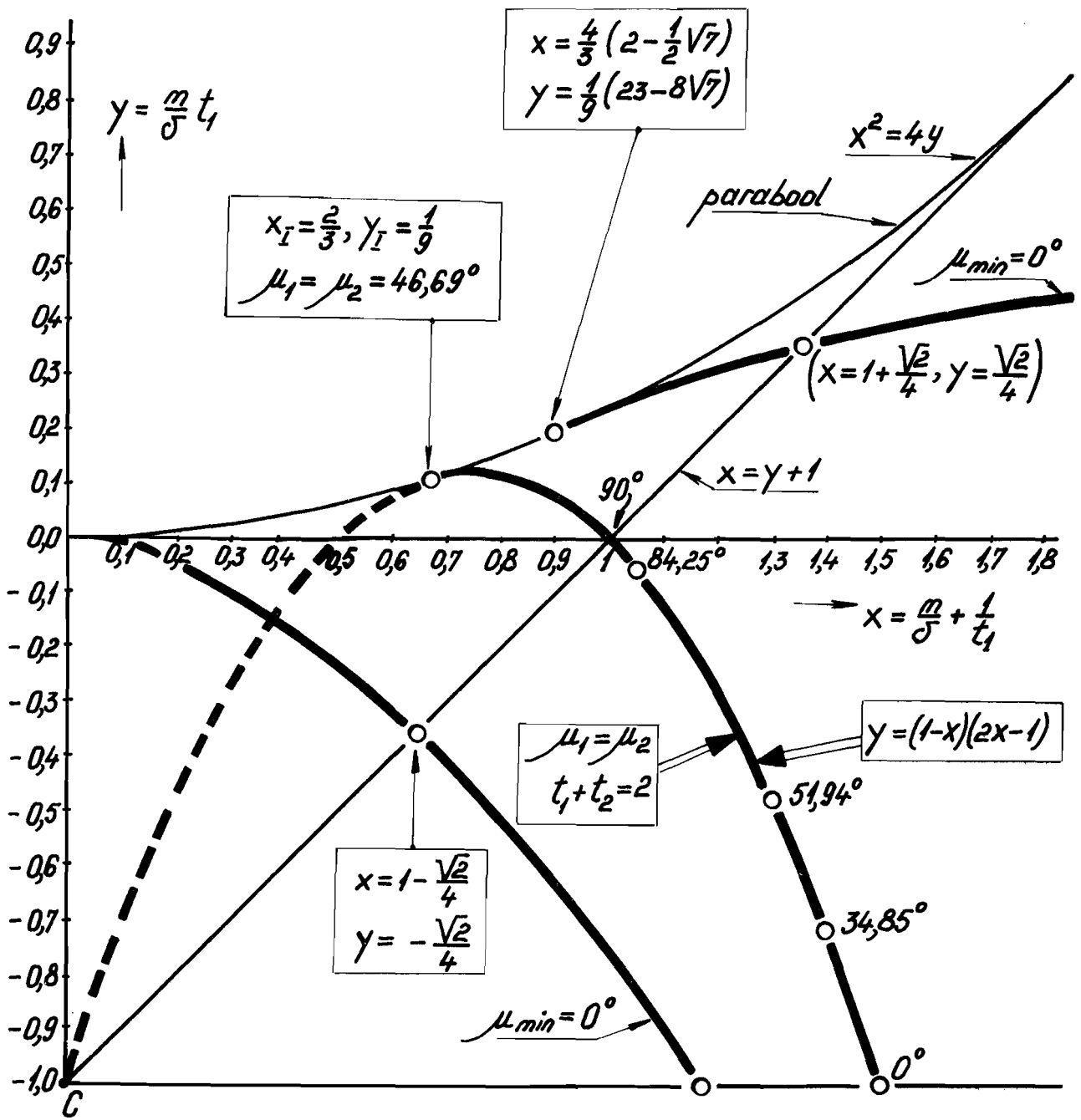
Bij negatieve waarden voor  $m/\delta$  en positieve x, is y in ieder geval beperkt tot het interval  $-1 < y < 0$ .

In tegenstelling met hetgeen gesteld is op blz. 3 van dit rapport, zal dus om continuïteitsredenen, de buigcirkel ook in het ondervlak geplaatst moeten kunnen worden. (Spiegelning van het mechanisme om p, waardoor weliswaar de buigcirkel weer in het bovenhalfvlak zou komen, veroorzaakt anders namelijk een sprong in de overgangskromme,  $\mu_1 \neq \mu_2$ , op de x-as, omdat door een dergelijke spiegeling, de x-waarde van teken zal veranderen.)

Benutting van het 4e kwadrant, zoals in figuur 22 is uitgevoerd, leidt dus door de invoering van negatieve buigcirkeldiameters tot een doorlopende, continue differentiëerbare, overgangskromme,  $\mu_1 = \mu_2$ .

De vergelijking van deze overgangskromme kan als volgt worden vastgesteld: Zoals geconstateerd is, geldt in ieder geval voor een tak van deze kromme, dat

$$t_1 + t_2 = 2 \quad (105)$$



$(x, y)$  - coördinaten voor stangenvierzijden met  
 gelijke overbrengingshoeken  $\mu_1 = \mu_2$   
 en voorts die voor de strekbare  
 stangenvierzijden ( $\mu_{min} = \mu_2 = 0^\circ$ ).

Figuur 22



De  $Bl_1$ -conditie geeft voorts de betrekking

$$-t_2 + t_1 + t_3 = t_1 t_2 t_3 \quad , \quad (81.c)$$

zodat met (105)

$$t_3 = \frac{2}{1-t_1} \quad (106)$$

Voor  $m/b$  leidt dit dan tot de uitdrukking

$$\frac{m}{b} = -\frac{t_2}{t_1 t_3} = \frac{(t_1-1)(2-t_1)}{2t_1} \quad (107)$$

zodat

$$y = \frac{m}{b} t_1 = \frac{(t_1-1)(2-t_1)}{2} \quad (108)$$

en

$$x = \frac{m}{b} + \frac{1}{t_1} = \frac{3-t_1}{2} \quad (109)$$

Eliminatie van de parameter  $t_1$  uit de laatste twee vergelijkingen geeft dan tenslotte

$$y = (1-x)(2x-1) \quad (110)$$

Voor die tak, waarvoor  $t_1 + t_2 = 2$ , heeft de overgangskromme dus de gedaante van een parabool, waarbij de top  $(x_T = \frac{3}{4}, y_T = \frac{1}{8})$  in

het 1e kwadrant ligt en de as evenwijdig loopt met de  $y$ -as.

(Merk op, dat deze parabool overigens abrupt stopt in het 2e punt  $x=2/3, y=1/9$ , dat het exacte punt is, waar zij de parabool  $x^2 = 4y$  bereikt. In figuur 22 is de  $(\mu_1 = \mu_2)$ -parabool weliswaar op onderbroken wijze vervolgd, maar zij heeft daar verder geen praktische betekenis meer.)

Figuur 22, die ook een deel van het 1e kwadrant bedekt, geeft daarnaast een meetkundige plaats van punten, waar  $\mu_{\min} = 0^\circ$ . Hiermede zijn de strekbare vierzijden bedoeld, ook voor die gevallen, waar  $x > 0$  en  $-1 < y < 0$ .

De formule  $m/b = xy/(y+1)$  maakt overigens duidelijk, dat het 2e kwadrant, zeker voor positieve waarden van  $m/b$ , niet gebruikt kan worden. Voor negatieve waarden van  $m/b$  heeft dat deel van het 3e kwadrant, dat boven het niveau  $y = -1$  uitkomt ook weinig zin, omdat reeds gekozen is voor het 4e kwadrant boven die rechte.

Behalve het 1e en het 4e kwadrant, is nog een gebied over in het 3e kwadrant, waar  $x < 0$  en  $y < -1$  en waar de dan nog overgebleven

stangenvierzijden kunnen worden ingevangen.

Figuur 22 laat ook zien, dat de kromme, waarvoor  $\mu_{\min} = 0$ , de lijn  $x = y+1$  behalve in de punten

$(1+\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$  en  $(1+2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  van het bovenhalfvlak, ook nog snijdt in het punt  $(1-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$  van het onderhalfvlak. Het punt

$(1-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$  uit het derde kwadrant op die lijn, blijkt een mechanisme te vertegenwoordigen, dat niet meer aan de voorwaarde van Grashof voldoet en zodoende ook geen schakel bezit, dat volledige omwentelingen kan maken. Dit wordt ook duidelijk gedemonstreerd in figuur 23, waarin de  $(\mu_{\min} = 0)$ -kromme is getekend. Zij vertoont, althans in dat kwadrant, geen enkel reëel snijpunt met de rechte  $x = y+1$ .

De overgangskromme, met  $\mu_1 = \mu_2$ , in het 3e kwadrant, blijkt in ieder punt van de grafiek aan de betrekking  $t_2 + t_3 = 2$  te voldoen. Combinatie met de  $Bl_1$ -conditie geeft dan de relatie

$$t_1 = \frac{2}{1-t_3} \quad (111)$$

zodat

$$\frac{m}{b} = - \frac{(2-t_3)(1-t_3)}{2t_3} \quad (112)$$

en zodoende

$$y = \frac{m}{b} t_1 = 1 - 2t_3 \quad (113)$$

en ook

$$x = (1-t_3)(1-t_3) \quad (114)$$

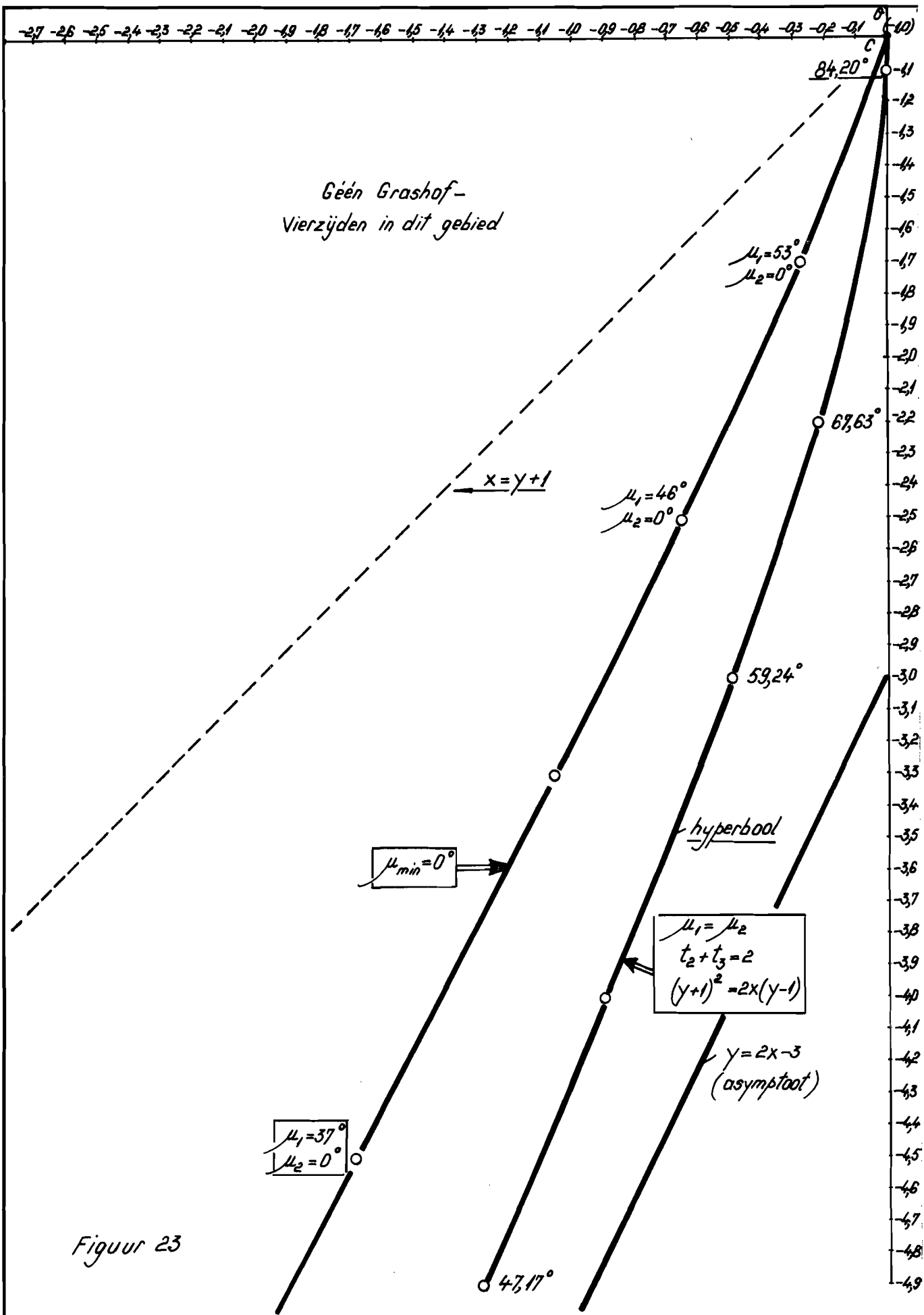
Eliminatie van  $t_3 = t_3^{-1}$  leidt dan tot een hyperbool als tak voor de overgangskromme in het 3e kwadrant. Zij heeft de vergelijking:

$$(y+1)^2 = 2x \cdot (y-1) \quad (115)$$

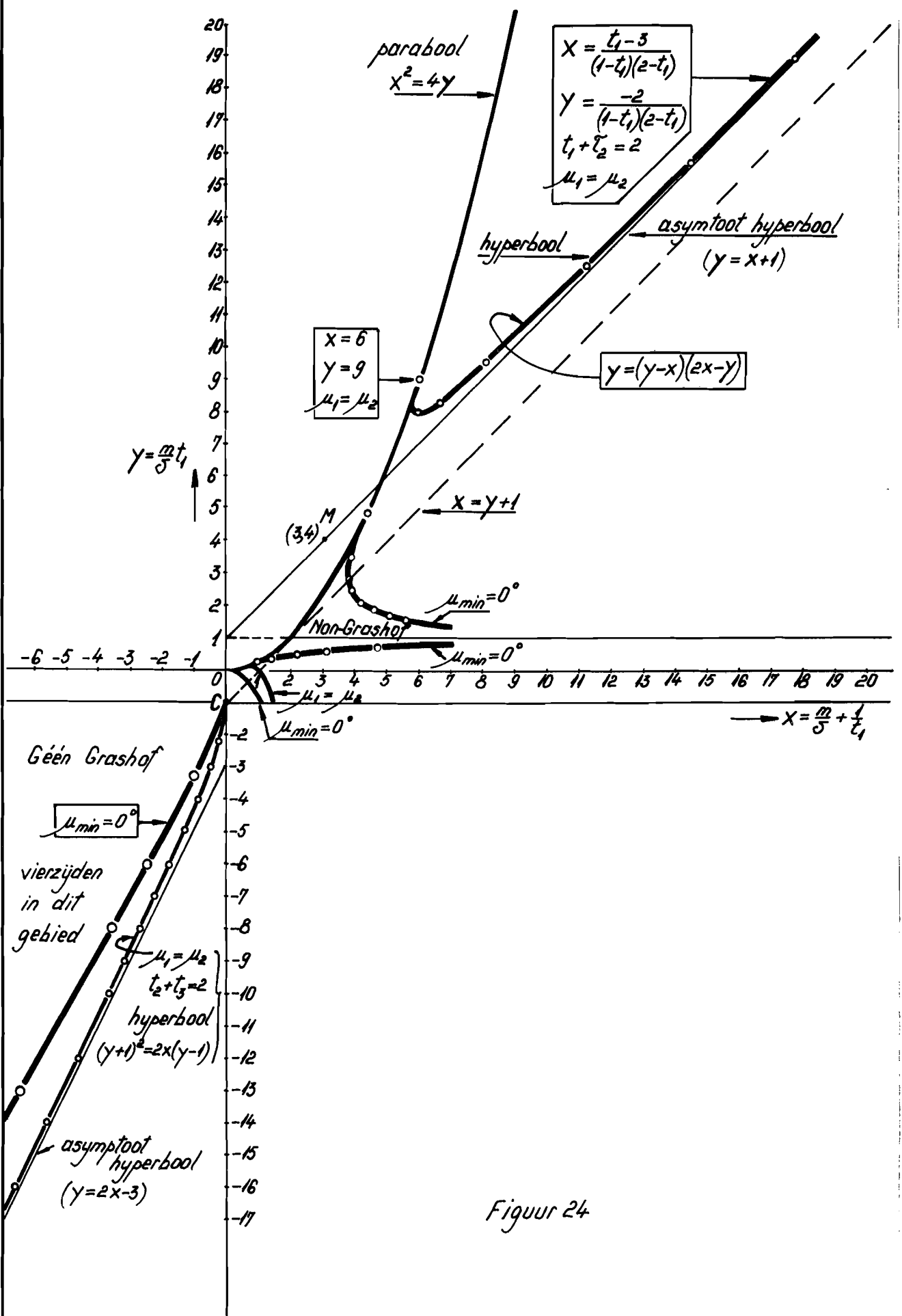
een kromme, die in het punt C(0,-1) het kwadrant verlaat en daar dus ook wordt afgesneden. De van belang zijnde asymptoot van deze hyperbool heeft als vergelijking

$$y = 2x - 3 \quad (116)$$

die door het middelpunt (2,1) van deze hyperbool gaat. Doordat de 2e asymptoot de rechte  $y = 1$  is, wordt daarmee tevens duidelijk, dat de hyperbool het 3e kwadrant, onder het niveau  $y = -1$ , verder niet meer zal betreden.



Figuur 23



Figuur 24

Figuur 24 tenslotte, geeft een totaal-beeld onder meer ook van de overgangskromme in het 1e kwadrant. Net als bij de ( $\mu_{\min} = 0$ )-kromme bestaat deze uit 2 delen, te weten het in figuur 22 getekende stuk, dat van  $(2/3, 1/9)$  tot  $(1, 0)$  loopt en een stuk, dat weer door omkering van  $y$ -waarden op exemplaren van de lijnenwaaier  $C(0, -1)$  daaruit kan worden afgeleid. De cubo-bitetraëder laat zien, dat een dergelijke transformatie de relatie  $t_1 + t_2 = 2$  overvoert in de vergelijking  $t_1 + \tau_2 = 2$ , een vergelijking, die inderdaad alleen steek blijkt te houden in sector IV daar dan weer abrupt blijkt op te houden in het punt  $(x = 6, y = 9)$  van de parabool  $x^2 = 4y$ .

De betrekking  $t_1 + \tau_2 = 2$ , die in sector IV voor de overgangskromme van kracht is, leidt voorts, op analoge wijze als bij de andere takken, tot de parameterrepresentatie

$$y = \frac{-2}{(1-t_1)(2-t_1)} \quad (117)$$

en

$$x = \frac{t_1 - 3}{(1-t_1)(2-t_1)} \quad (118)$$

Voor het uitzetten van deze tak is deze parameterrepresentatie handiger dan het directe gebruik van het omkeringsprincipe. Eliminatie van  $t_1$  leidt verder tot de vergelijking

$$y = (y-x)(2x-y) \quad (119)$$

welke de vergelijking is van een hyperbool, waarvan alleen de asymptoot  $y = x+1$  praktische betekenis heeft. Deze gaat, evenals de tweede asymptoot, waarvoor  $y = 2x-2$ , door het middelpunt  $(3, 4)$  van de hyperbool. De 'meetkundige symmetrieas' van de betrokken tak van de hyperbool heeft als vergelijking

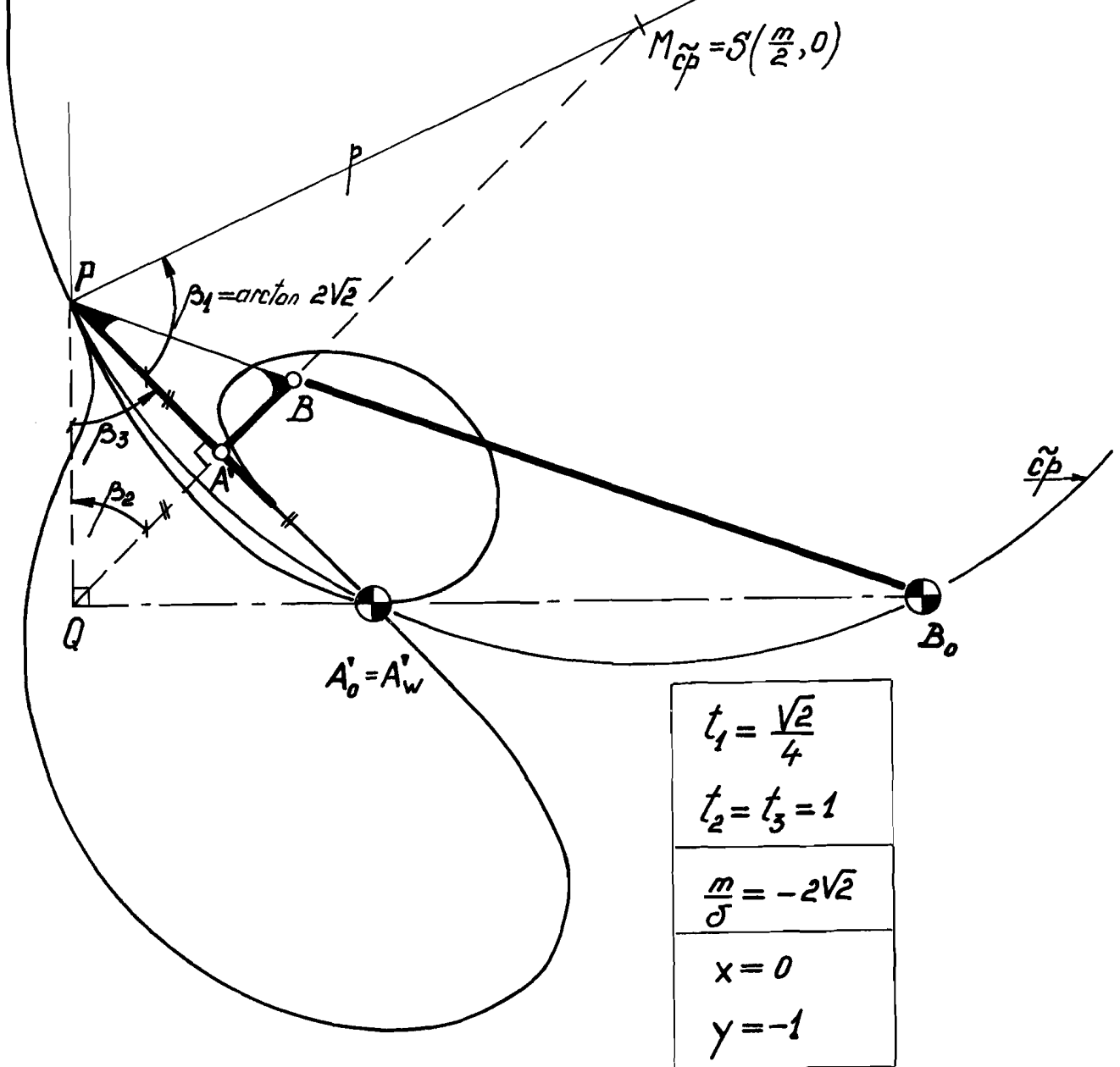
$$y = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} x + 3 - \sqrt{10} \quad (120)$$

Deze snijdt de hyperbool-tak in een reëel **toppunt**

$$x_T = 3 + \sqrt{4 + \frac{7}{5} \sqrt{10}} = 5,9029621 \quad (121)$$

$$y_T = 4 + \sqrt{8 + \frac{13}{5} \sqrt{10}} = 8,0276447$$

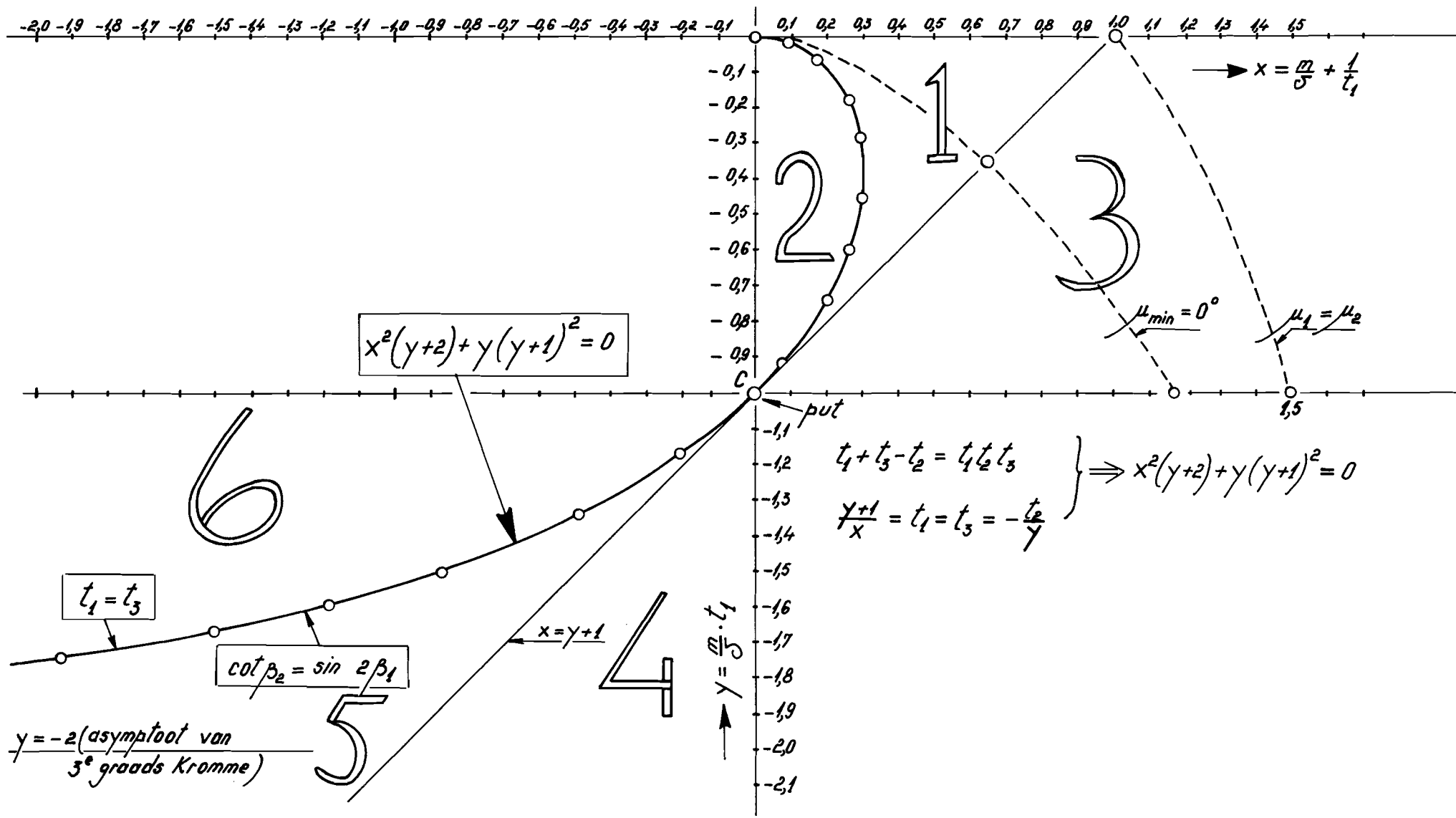
(Alle vierzijden met variabele waarden voor  $t_1$ , waarbij  $t_2 = t_3 = 1$ , worden in het centrum  $C$  van de grafiek afgebeeld. Door de mogelijke verwisseling van  $\beta_1$  en  $\beta_3$  zijn deze vierzijden echter identiek aan diegenen, die op de andere punten van de rechte  $x = y + 1$  zijn afgebeeld.)



Non-Grashof-mechanisme

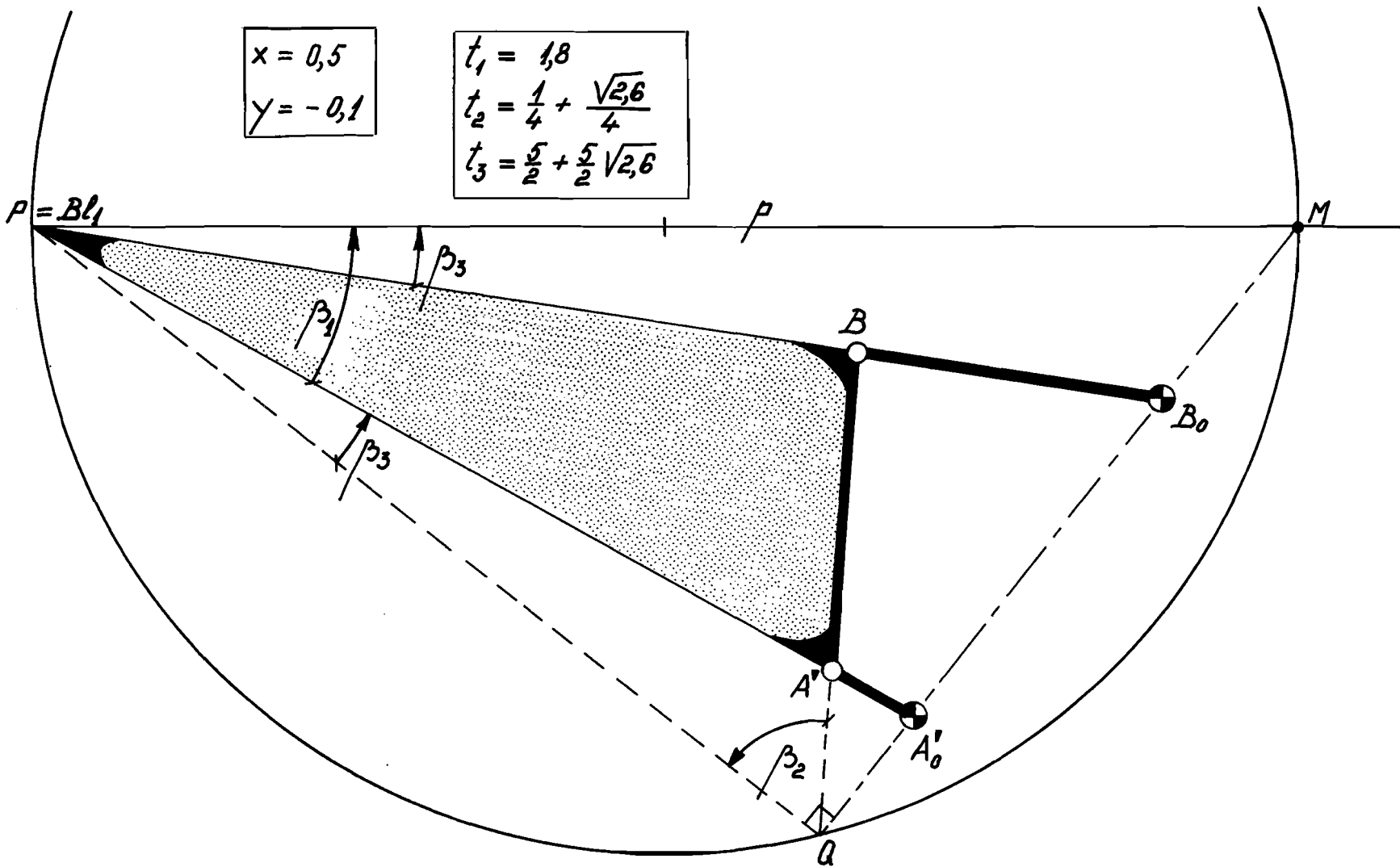
Mechanisme afgebeeld in het lijnenwaaiers-centrum  $C$ .

Figuur 25



De gebieden 2, 4 en 6 representeren, door verwisseling van  $\beta_1$  en  $\beta_3$ , dezelfde stangenvierzijden als in de overeenkomstige gebieden 1, 3 en 5. Op de 3<sup>e</sup> graads-Kromme, waar  $t_1 = t_3$ , is juist de Koppelstanglengte nul.

Figuur 26



Grashof-Vierzijde in Gebied 1 ( $4^2 = \text{Kwadrant}$ )

(Na verwisseling van  $t_1$  en  $t_3$  wordt  $x = 0,0975$  en  $y = -0,3628$ , behorend tot gebied 2.)

Figuur 27



in welk punt voor de overeenkomstige stangenvierzijde

$$\mu_1 = \mu_2 = 57,3^\circ \quad (122)$$

hetgeen juist 1 radiaal is.

Het totale beeld, dat zo met de overgangskromme<sup>\*)</sup> en met de kromme voor de strekbare vierzijden verkregen wordt, geeft zo voor de constructeur een aanwijzing welke indirecte coördinaten hij dient te kiezen om tot bruikbare mechanismen te komen.

---

\*) Merk op, dat in tegenstelling tot hetgeen vaak verwacht wordt, de overgangskromme (waar dus  $\mu_1 = \mu_2$ ) in dit geval niet de mechanismen levert met de grootste en dus ook de beste overbrengingshoeken. Het blijkt, dat in het onderhavige geval zelfs grotere overbrengingshoeken verkregen worden wanneer  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Niettemin wisselt hier wel de uiterste stand van de kruk met betrekking tot  $\mu_{\min}$ , zodat de kromme in verband hiermee toch wel een bruikbare aanwijzing voor de constructeur-gebruiker oplevert.

APPENDIX

RELATIES VOOR STREKBARE VIERZIJDEN

Met betrekking tot de grenskromme, waarvoor  $\mu_{\min} = 0^\circ$  en dus de som der lengten van de kleinste en de grootste staaf juist gelijk is aan die van de twee overige staven, kan een eenvoudig verband tussen de 'collineatie'-hoeken  $\beta_i$  worden gevonden. Dit verband blijkt, afgeleid voor de punten van sector III, de volgende gedaante aan te nemen:

$$\tan(\beta_1/2) = \tan(\beta_2/2) \cdot \tan(\beta_3/2) \quad (1)$$

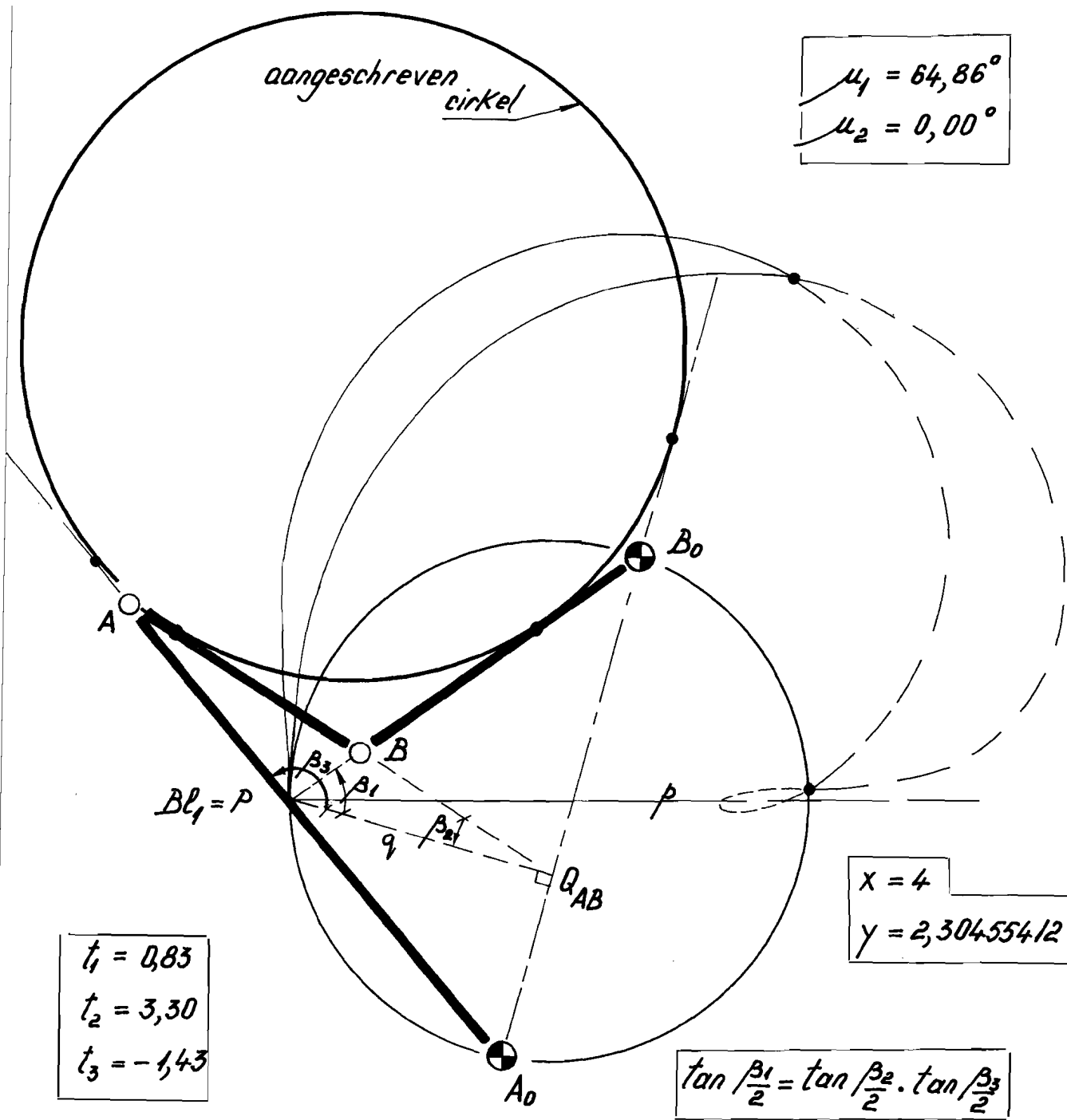
Voor de afleiding van dit verband, maken we gebruik van de volgende stelling:

Iedere strekbare stangenvierzijde heeft in iedere stand een in- of een aangeschreven cirkel.

Er zijn twee gevallen: óf de som van telkens twee overstaande zijden is aan elkaar gelijk, óf wel de som van twee aangrenzende zijden is gelijk aan die van de twee andere aangrenzende zijden. We volstaan met het bewijs te leveren voor het tweede geval, dat ook in figuur A1 gedemonstreerd is.

Vanwege de bijzondere relatie tussen de afmetingen, is het mechanisme vast te leggen door 3 stanglengten en een positiehoek, waarvoor de krukhoek  $\varphi$  kan worden genomen. Een strekbare vierzijde kan echter ook door 2 stanglengten en twee krukhoeken, zoals de in- en uitgangsvariabele ( $\varphi$  en  $\psi$ ) worden vastgelegd. Dit komt, omdat het verband tussen  $\varphi$  en  $\psi$  een verband is, dat alleen van de afmetingen afhangt. In het laatste geval, kan echter de stangenvierzijde volledig worden geconstrueerd door gebruik te maken van de aangeschreven cirkel. De met deze cirkel gevonden oplossing voldoet, zoals direct te zien is, aan de gegeven grensvoorwaarde van Grashof, zodat de oplossing juist is en de bij de constructie gebruikte aangeschreven cirkel tevens de gezochte cirkel is, die bij de strekbare stangenvierzijde in die stand hoorde. Daarmee is dus het bewijs van de stelling geleverd.

De bijzondere kracht van de stelling wordt pas duidelijk, wanneer ze wordt toegepast op de ontwerppositie van de stangenvierzijde. De stelling geeft dan een direct, meetkundig verband tussen de ontwerppositie en de gestrekte positie van de stangenvierzijde, waarbij alle stangen dezelfde werklijn hadden.



$$\mu_1 = 64,86^\circ$$

$$\mu_2 = 0,00^\circ$$

$$t_1 = 0,83$$

$$t_2 = 3,30$$

$$t_3 = -1,43$$

$$x = 4$$

$$y = 2,30455412$$

$$\tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2}$$

Streekbare Vierzijde met aangeschreven cirkel  
(sector III)

Figuur A1

In het gegeven voorbeeld van figuur A1 geldt, dat

$$A_0 A + AB = BB_0 + B_0 A_0 \quad (2)$$

Deling door de 'collineatielengte' PQ en toepassing van de sinusregel in de daarvoor in aanmerking komende driehoeken geeft dan

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} + \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} = \tan \beta_1 + \frac{1}{\cos \beta_1} \quad (4)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit, dat  $\beta_0 = \sphericalangle A_0 Q P = \pi/2$ .

Goniometrisch kan dit verder worden omgewerkt tot

$$\frac{1 + \tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2}}{1 - \tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2}} = \frac{\cos(\frac{\beta_2}{2} - \frac{\beta_3}{2})}{\cos(\frac{\beta_2 + \beta_3}{2})} = \frac{\sin \beta_2 + \sin \beta_3}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} = \frac{1 + \sin \beta_1}{\cos \beta_1} = \cot(45^\circ - \frac{\beta_1}{2})$$

zodat inderdaad

$$\tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2} = \frac{\cot(45^\circ - \frac{\beta_1}{2}) - 1}{\cot(45^\circ - \frac{\beta_1}{2}) + 1} = \tan \frac{\beta_1}{2} \quad (1)$$

Hetgeen tenslotte ook nog geschreven kan worden als

$$(t_2 + \sqrt{1+t_2^2})(t_3 + \sqrt{1+t_3^2}) = t_1 + \sqrt{1+t_1^2} \quad (5)$$

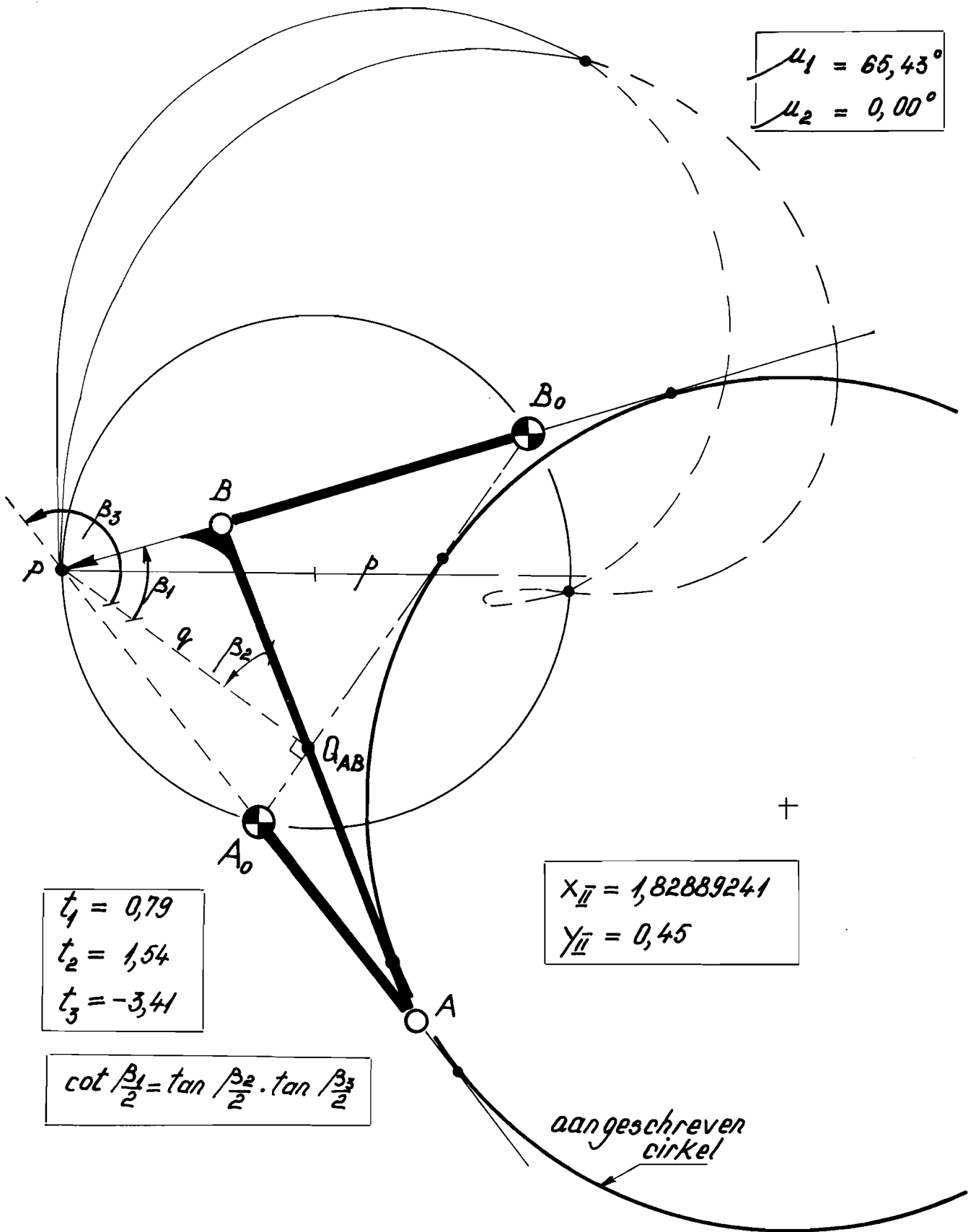
waarin  $t_i = \cot \beta_i$  zoals voorheen.

De formule (5) is afgeleid voor de 'hyperbolische' tak van de ( $\mu_{\min} = 0$ )-kromme in sector III van de figuren 17 en 24. (De juistheid van de gevonden formule kan overigens gemakkelijk worden gecontroleerd aan de hand van het gegeven voorbeeld van figuur A1 in deze Appendix.)

Om continuïteitsredenen zal duidelijk zijn, dat formule (5) ook geldig is voor sector IV van het bovenhalfvlak.

Voor de sectoren I en II komt een enigszins afwijkende formule tot stand. Weliswaar is ook in dat gebied  $A_0 A + AB = BB_0 + B_0 A_0$ , maar, zoals gedemonstreerd in figuur A2, hebben we nu met een gekruiste stangenvierzijde te doen, waardoor met

$$PA + AQ = QB_0 + B_0 P$$



Streekbare Vierzijde met aangeschreven cirkel  
 (sector II)

Figuur A<sub>2</sub>

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_2 + \beta_3 - 180^\circ)} + \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_2 + \beta_3 - 180^\circ)} = \tan \beta_1 + \frac{1}{\cos \beta_1}$$

Wanneer we hierin  $\beta_1$  door  $180^\circ - \beta_1$  vervangen, blijkt deze 'Grashof'-relatie weer dezelfde te zijn als eerder afgeleid voor de sector III. Er komt dus voor sector II:

$$\tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2} = \tan(90^\circ - \frac{\beta_1}{2}) = \cot \frac{\beta_1}{2} \quad (6)$$

Dit kan ook worden genoteerd als

$$(t_2 + \sqrt{1+t_2^2})(t_3 + \sqrt{1+t_3^2}) = -t_1 + \sqrt{1+t_1^2} \quad (7)$$

(sector I en II)

In het onderhalfvlak van de grafiek, daar waar  $0 > y > -1$  en dus  $x > 0$ , hebben we te doen met het geval, waarbij de som van telkens twee overstaande zijden aan elkaar gelijk is. Daarbij is dus  $A'_0A' + BB_0 = A'B + B_0A'_0$ .

Men vindt dan, op geheel analoge wijze, dat

$$(t_2 + \sqrt{1+t_2^2})(t_1 + \sqrt{1+t_1^2}) = t_3 + \sqrt{1+t_3^2} \quad (8)$$

zodat in dat gebied

$$\tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\beta_3}{2} \quad (9)$$

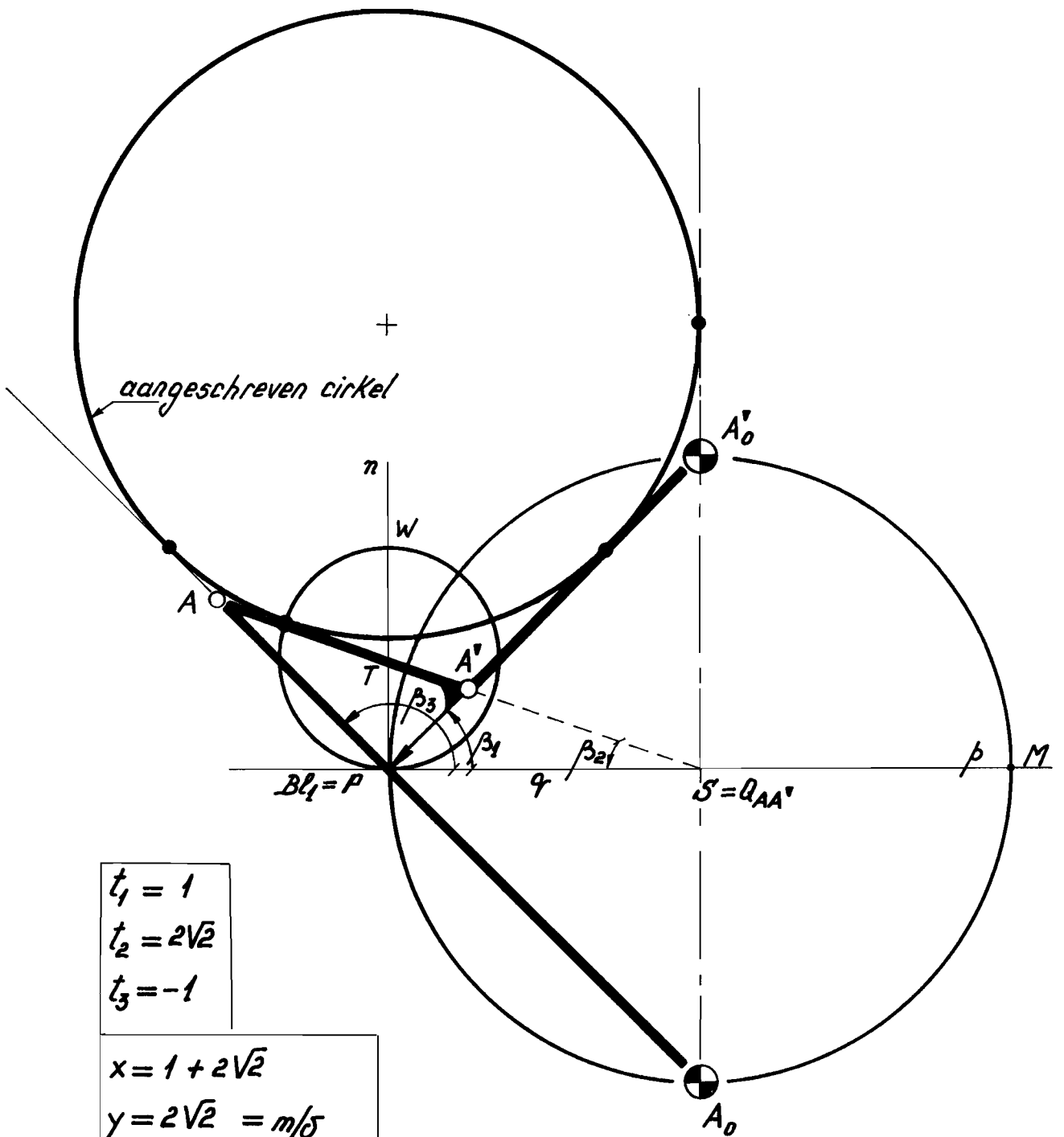
In het gebied, waarbij  $y < -1$  en  $x < 0$  is voor iedere strekbare vierzijde formule (5) weer van kracht.

Vanzelfsprekend zijn deze 'Grashof'-relaties alleen geldig voor de ontwerppositie van de stangenvierzijde, omdat ook nu weer gebruik gemaakt is van het vaste gegeven, dat  $\beta_0 = \pi/2$ .

Het  $(x,y)$ -verband, dat tussen de punten van de ( $\mu_{\min} = 0^\circ$ )-kromme in het  $x,y$ -vlak bestaat, wordt nu vastgelegd door de relaties (5), (7) of (9) en verder door de betrekkingen

$$\begin{cases} t_1 = \frac{y+1}{x} \\ 2t_2 = x + \sqrt{x^2 - 4y} \\ t_3 = -t_2/y \end{cases}$$

Op deze 4 betrekkingen kan tenslotte een iteratie-methode worden gebaseerd, die dus  $\mu_{\min} = 0^\circ$  maakt, zodat daarmee de betrokken grenslijnen in de figuren 17, 22, 23 en 24 kunnen worden vastgelegd, die voor de constructeur van zo eminent belang zijn.



$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 2\sqrt{2}$$

$$t_3 = -1$$

$$x = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$y = 2\sqrt{2} = m/\delta$$

$$\tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2}$$

$$\mu_{min} = \mu_2 = 0^\circ$$

Streekbare Vierzijde met aangeschreven cirkel  
(Punt op de scheidslijn van de sectoren III en IV)

Figuur A3

$T(0, \delta/2)$

$$t_1 = t_2 = 1$$

$$t_3 = -2\sqrt{2}$$

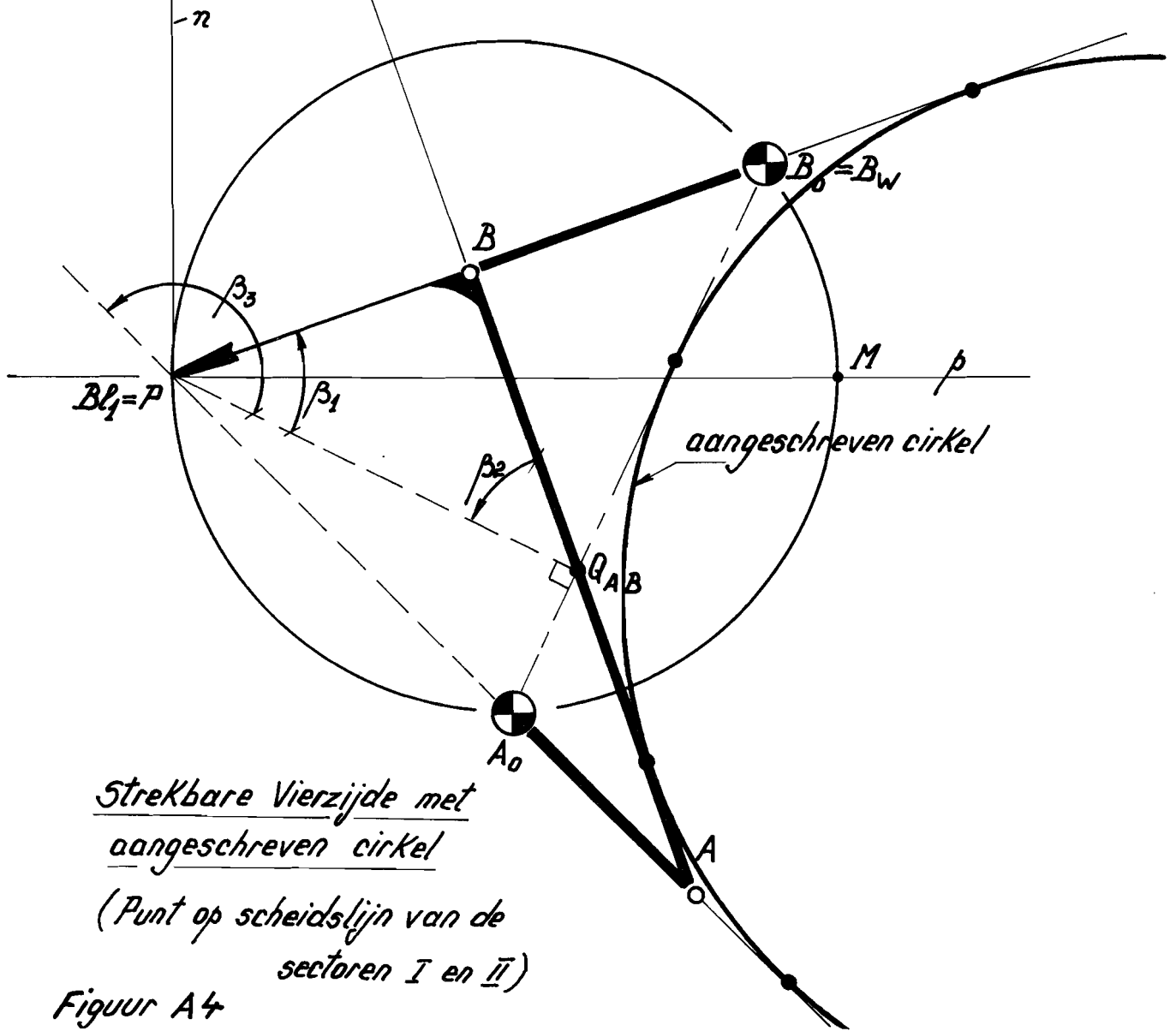
$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{m}{\sigma}$$

$$\mu_{min} = 0^\circ$$

$$\tan \frac{\beta_1}{2} \cdot \tan \frac{\beta_2}{2} \cdot \tan \frac{\beta_3}{2} = 1$$

$$A_0A + AB = BB_0 + B_0A_0$$

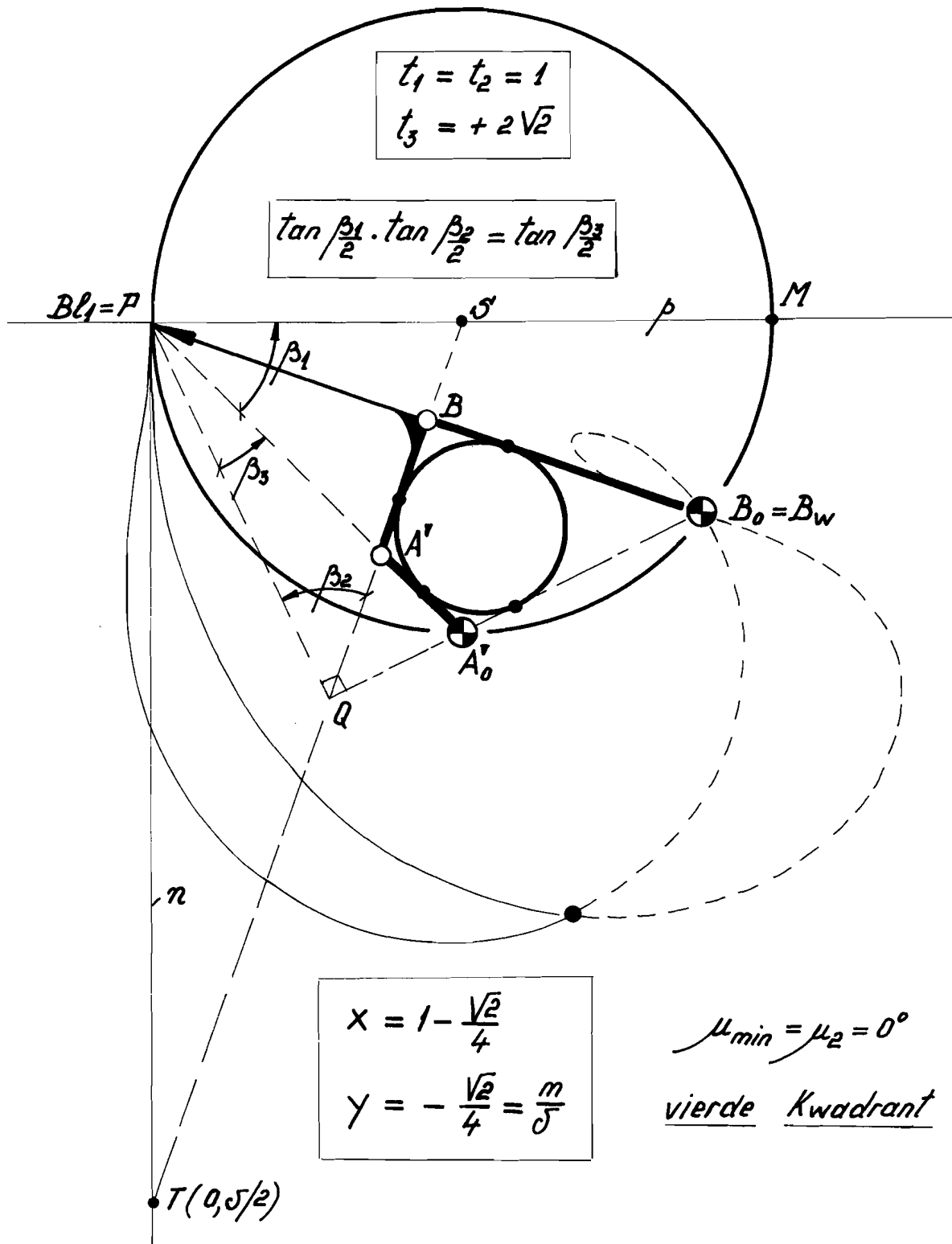


Strekbare Vierzijde met  
aangeschreven cirkel

(Punt op scheidslijn van de  
sectoren I en II)

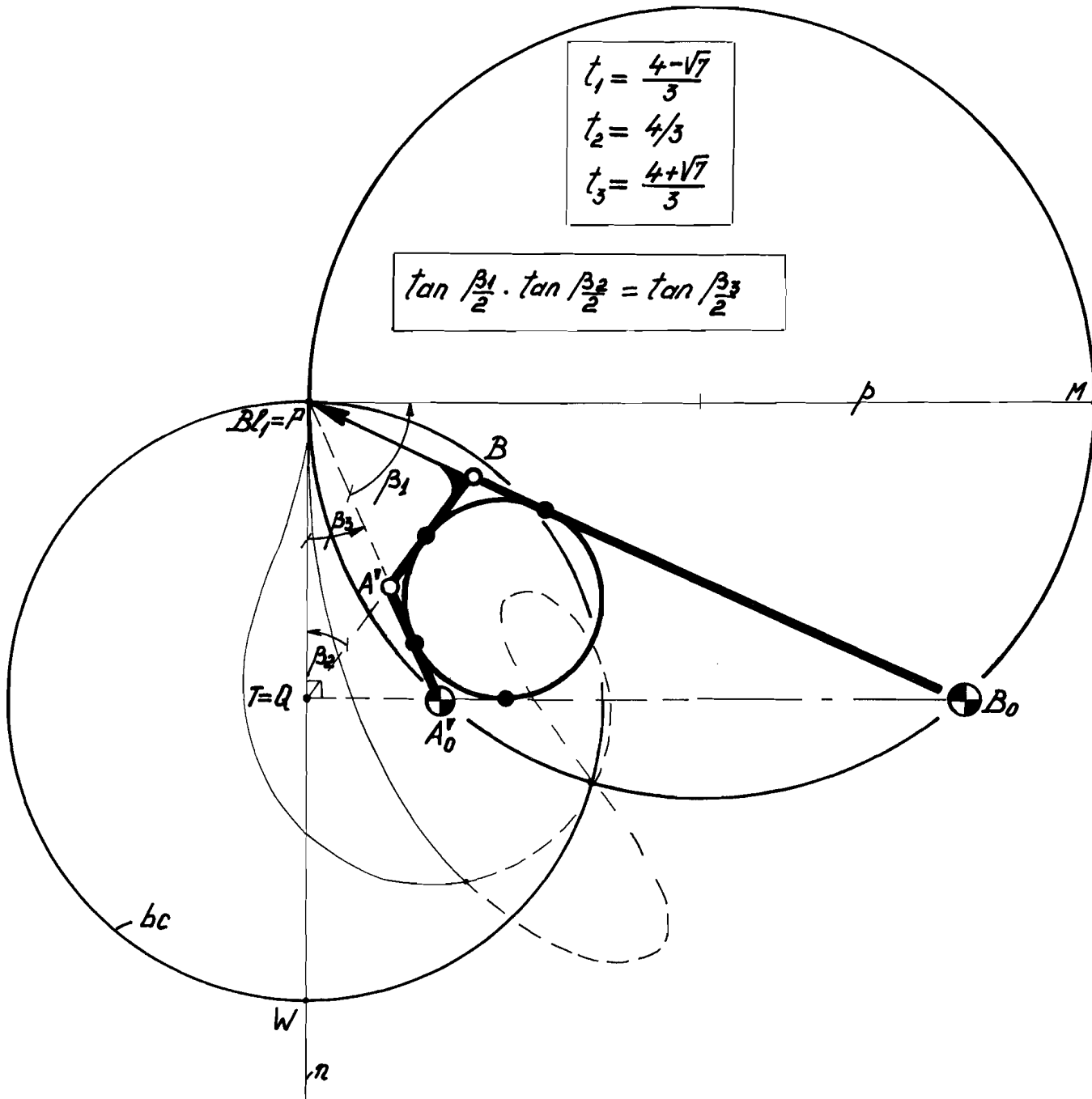
Figuur A4





Streekbare Vierzijde met ingeschreven cirkel

Figuur A5



$$t_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$$t_2 = \frac{4}{3}$$

$$t_3 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$\tan \frac{\beta_1}{2} \cdot \tan \frac{\beta_2}{2} = \tan \frac{\beta_3}{2}$$

vierde  
Kwadrant

$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$y = \frac{-4(4-\sqrt{7})}{9}$$

$$\frac{m}{f} = -\frac{4}{3}$$

$$\mu_{min} = 0^\circ$$

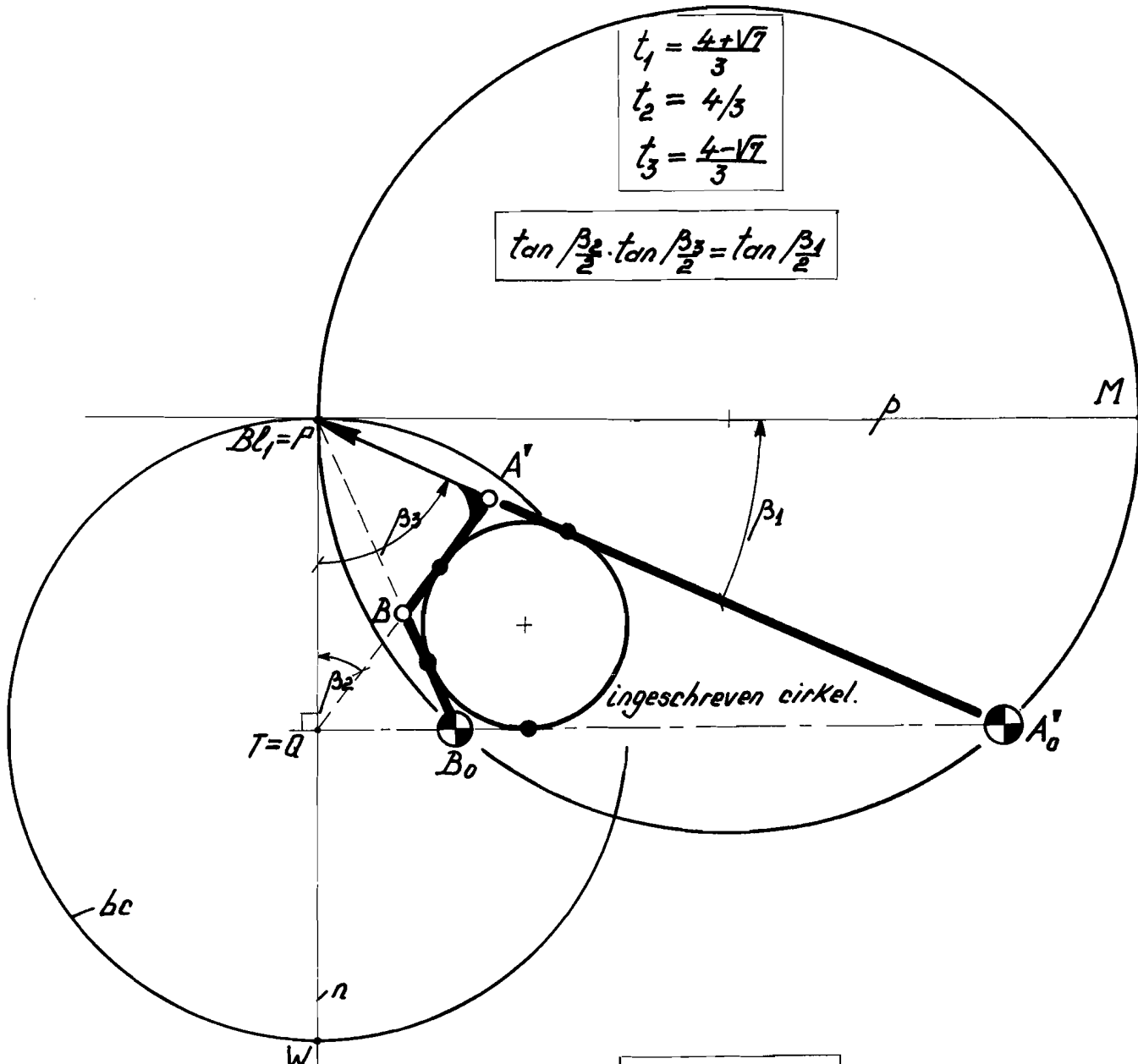
Strekbare Vierzijde met ingeschreven cirkel

Gespiegelde Robertsverwant van het mechanisme, waarvoor

$$A_0^{\nabla} A^{\nabla} + B B_0 = A^{\nabla} B + A_0^{\nabla} B_0$$

$$x = \frac{4}{3} \left( 2 + \frac{1}{2} \sqrt{7} \right) \text{ en } y = \frac{23 + 8\sqrt{7}}{9}$$

Figuur A6



$$t_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$t_2 = \frac{4}{3}$$

$$t_3 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$$\tan \beta_2 \cdot \tan \beta_3 = \tan \beta_1$$

derde  
Kwadrant

$$x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

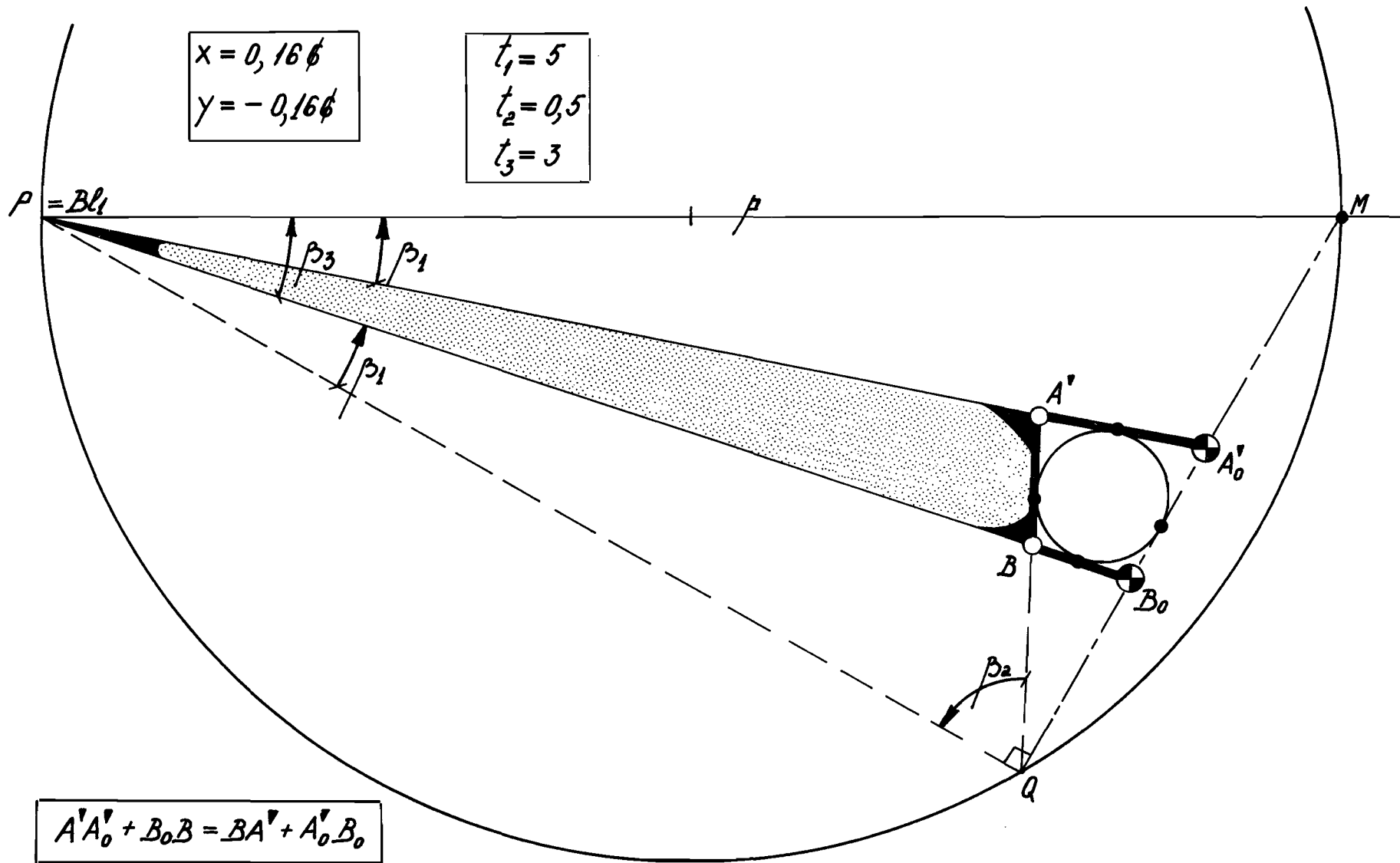
$$y = \frac{-4(4+\sqrt{7})}{9}$$

$$\frac{m}{s} = -\frac{4}{3}$$

$$\mu_{min} = 0^\circ$$

Strekbare Vierzijde met ingeschreven cirkel  
(Consequenties bij verwisseling van Krukken)

Figuur A7



Streekbare Vierzijde met ingeschreven cirkel (Gebied 2 in 4<sup>e</sup> Kwadrant)  
 (Na verwisseling van  $t_1$  en  $t_3$  wordt  $x = 0,3$  en  $y = -0,1$ .)

Figuur A8

Literatuur

- (1) Dijksman, E.A.  
APPROXIMATE STRAIGHT-LINE MECHANISMS THROUGH 4-BAR LINKAGES.  
Rev. Roum. Sci. Tech. Ser. Méc. Appl. (Bucarest), Vol. 17(1972),  
p. 319-372.
- (2) Dijksman, E.A.  
RECHTGELEIDINGEN MET STANGENVIERZIJDEN.  
Polytech. Tijdschr. A, Vol. 21(1966), p. 247-254, 294-303,  
339-347.
- (3) Vries, H. de  
LEERBOEK DER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING, EN VAN DE  
THEORIE DER DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN. Deel 1: De differentiaal-,  
en elementaire integraalrekening. 2e druk.  
Groningen: Noordhoff, 1924.  
Noordhoff's verzameling van wiskundige werken, deel 6.  
Par. 89, p. 424-425.
- (4) Müller, R.  
KONSTRUKTION DER BURMESTERSCHEN PUNKTE FÜR EIN EBENES  
GELENKVIERECK. Erste und zweite Mitteilung.  
Z. Math. & Phys., Vol. 37(1892), p. 213-217, Vol. 38(1893),  
p. 129-147.  
Engelse vert.: Kansas State Univ. Bull., Vol. 46(1962), No. 6,  
p. 93-134.
- (5) Bottema, O.  
ON THE DETERMINATION OF THE BURMESTER POINTS FOR FIVE  
POSITIONS OF A MOVING PLANE.  
Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Ser. A, Vol. 67(1964), p. 310-318.
- (6) Veldkamp, G.R.  
APPLICATIONS OF THE BOTTEMA-INVARIANTS IN PLANE KINEMATICS.  
Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Ser. A, Vol. 67(1964), p. 430-440.
- (7) Roberts, S.  
THREE-BAR MOTION IN PLANE SPACE.  
Proc. London Math. Soc., Vol. 7(1875), p. 14-23.
- (8) Dijksman, E.A.  
MOTION GEOMETRY OF MECHANISMS.  
Cambridge University Press, 1976. Chapters 2, 3, 5, 6.  
Spaanse vert.: Cinémática de mecanismos. Mexico: Limusa, 1981.
- (9) Hunt, K.H.  
KINEMATIC GEOMETRY OF MECHANISMS.  
Oxford University Press, 1978.  
Oxford engineering science series

- (10) Hain, K.  
KOPPELKURVEN MIT SPITZEN UND IHRE GETRIEBETECHNISCHE  
ANWENDUNGEN.  
Getriebetechnik. Reuleaux-Mitt., Vol. 9(1941), No. 7,  
p. R29-R32.
- (11) Hain, K.  
KOPPELKURVEN MIT SPITZEN AN GELENKVIERECKEN.  
Feinmechanik und Präzision, Vol. 49(1941), No. 5, p. 61-63.
- (12) Hain, K.  
FÜHRUNGSGETRIEBE DER AUTOMATISIERUNGSTECHNIK FÜR HOHE  
GESCHWINDIGKEITEN MIT GENAUEN LAGENSICHERUNGEN.  
VDI Z., Vol. 122(1980), p. 878-882.

Dankwoord

Bij deze dank ik Ir,A.T.J.M.Smals voor het overeenkomstige software-programma, zonder hetwelk dit rapport in deze vorm niet mogelijk zou zijn geweest.

In het bijzonder dank ik mijn vrouw,M.Dijksman-Mārgārit voor de uitzonderlijke zorg aan de figuren besteed.

Eersel,december 1983