

Visco-elastische modellering van insnoering

Citation for published version (APA):

Klompén, E. T. J. (1992). *Visco-elastische modellering van insnoering*. (DCT rapporten; Vol. 1992.118). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Visco-elastische modellering van insnoering

E.T.J. Klompen

WFW 92.118

Stageverslag

Technische Universiteit Eindhoven

Faculteit Werktuigbouwkunde

Vakgroep Fundamentele Werktuigkunde

Begeleider: Dr.Ir. L.E. Govaert

Eindhoven, september 1992

Samenvatting

Bij glasachtige polymeren blijkt voor verschillende belastingstoestanden insnoering op te treden, het duidelijkste gebeurt dit bij de trekproef. De vraag is nu of het optreden van deze instabiliteit verklaard kan worden vanuit een visco-elastische vloeistof benadering in plaats van de gebruikelijke vaste stof benadering. Hiertoe wordt het gedrag onder trek beschreven met een visco-elastisch model. Een lineair model geeft geen afdoende beschrijving, daarom wordt een niet-lineair Maxwell-model toegepast. In dit model beschrijft een lineaire veer de modulus en een niet-lineaire demper de vloeispanning. Om het verkregen model te toetsen zijn trekproeven verricht, waaruit door bepaling van het vloeipunt bij verschillende reksnelheden en temperaturen een mastercurve kan worden geconstrueerd. Deze mastercurve beschrijft de demperkarakteristiek van het materiaal. Wanneer deze wordt beschreven met een power-law kan hij worden toegepast in het model en kunnen er voorspellingen worden gedaan. Uit deze voorspellingen blijkt dat alleen de modulus en de vloeispanning goed worden beschreven. De insnoering kan echter worden verklaard op basis van de niet-lineaire demperkarakteristiek als iets wat instabiele vloeï wordt genoemd. Dit is een deformatie instabiliteit in het niet-lineaire deel van de demperkarakteristiek, veroorzaakt door een inhomogene spanningstoestand welke weer het gevolg is van variatie in oppervlakte. Spanningsoptische metingen bevestigen de inhomogene spanningstoestand rond het vloeipunt en de daarna optredende instabiliteit. Metingen voor een andere belastingstoestand, kruip, tonen aan dat ook dan eveneens aan dit model wordt voldaan. Hieruit volgt dat het goed mogelijk is insnoering te beschrijven vanuit de visco-elastische vloeistofbenadering.

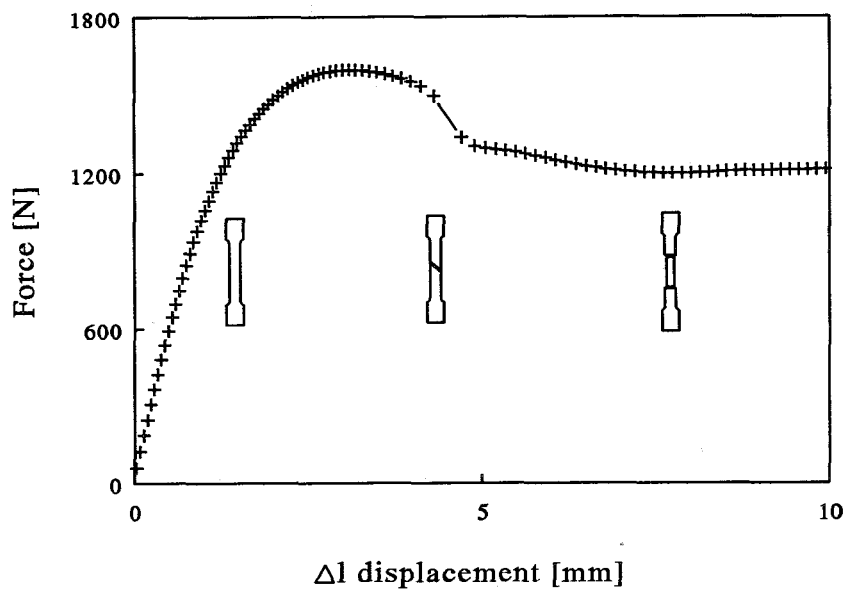
Inhoud.

Samenvatting	1
1 Inleiding	3
2 Visco-elastische modelvorming	5
2.1 Lineaire benadering	5
2.2 Niet-lineaire benadering	7
2.3 Temperatuurafhankelijkheid	8
3 Experimenteel	10
3.1 Materialen	10
3.2 Definities	10
3.3 Mechanische beproevingen	11
4 Resultaten & discussie	12
4.1 Visco-elastische benadering van vloeï	12
4.2 Extensie tot inhomogene deformatie	15
4.3 Deformatie-instabiliteiten onder constante spanning	18
5 Conclusies	21
Referenties	22
A Spanningsverloop bij constante reksnelheid voor een lineair Maxwell-model	23
B Rekverloop bij constante spanning voor een lineair Maxwell-model	24

1 Inleiding.

Tot relatief recent werd er weinig aandacht besteedt aan het vloeigedrag van polymeren, hoofdzakelijk omdat men dacht dat het niet nodig was om vloeit als een afzonderlijk mechanisch proces te beschouwen. Een drietal factoren hebben hierin echter verandering gebracht. Allereerst de erkenning van het feit dat plasticiteit een belangrijke rol speelt bij het vormgeven van polymeren. Ten tweede werd als gevolg van een aantal onderzoeken naar 'slip banden' en 'knik banden' in polymeren gesuggereerd dat het deformatieproces in polymeren overeenkomsten vertoont met dat in kristallijne materialen. Ten derde is duidelijk geworden dat er afzonderlijke vloeipunten worden geobserveerd en is er een toenemende belangstelling om dit te begrijpen in samenhang met bestaande ideeën uit de polymeerwetenschap [1].

Het duidelijkste manifesteert vloeit zich in een trekproef waarbij een insnoering ontstaat. Een karakteristieke trekcurve is hieronder weergegeven in figuur 1.1.



Figuur 1.1 Trekcurve polycarbonaat bij een reksnelheid van 0.0001 s^{-1} .

In een trekproef wordt een proefstaaf met constante reksnelheid verlengd. Zoals te zien is neemt hierbij in eerste aanleg de belasting toe met een toenemende verlenging. Op een zeker moment bereikt de kracht een maximum, het vloeipunt, waarna insnoering plaats vindt. Verder verlenging zorgt voor een afnemende belasting. Voortzetting van de verlenging na stabilisering van de insnoering wordt bereikt door de insnoering langs het

proefstuk te laten lopen. Hierbij neemt de doorsnede af van initieel naar ingesnoerd, de kracht blijft hierbij verder constant.

In de literatuur wordt het optreden van het vloeipunt veelal benaderd met de plasticiteits-theorie, waarbij vloeit optreedt na het overschrijden van een spannings- of energiecriterium (Tresca, Von Mises). Het doel van deze stage was om dit laatste niet vanuit de beschreven vaste stof maar vanuit een vloeistofbenadering te modelleren middels een visco-elastisch model.

In H2 zal worden gedemonstreerd hoe vloeit te beschrijven is door middel van een visco-elastisch model, waarbij zowel met reksnelheid als met temperatuurafhankelijkheid rekening wordt gehouden. H3 geeft een overzicht van gebruikte materialen, methodes en apparatuur. H4 geeft experimentele resultaten en een vergelijking met het model waarbij eventueel optredende verschillen verklaard zullen worden. En uiteindelijk H5 met de conclusies en aanbevelingen voor verder onderzoek.

2 Visco-elastische modelvorming.

2.1 Lineaire benadering

Het eenvoudigste visco-elastisch model is het lineaire Maxwell-model, bestaande uit een serieschakeling van een Hookse veer met modulus E en een Newtonse demper met viscositeit η . Er is op eenvoudige wijze af te leiden dat de bewegingsvergelijking van dit model er als volgt uitziet [1]:

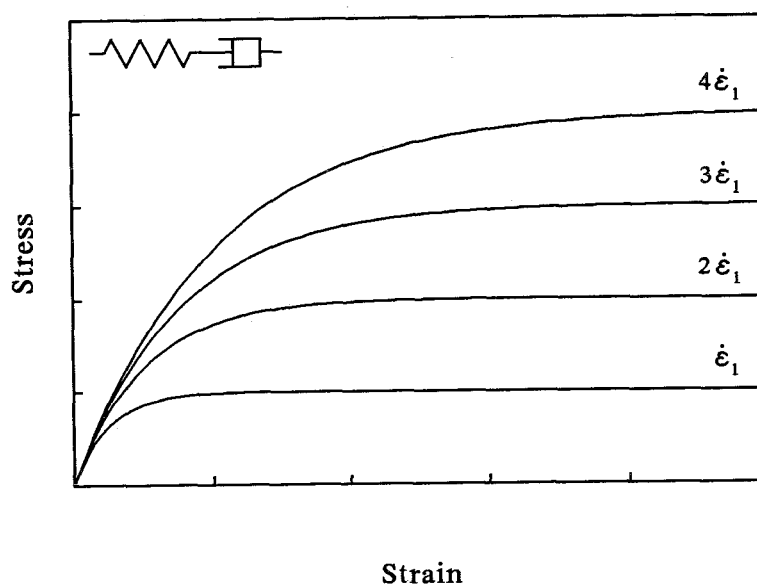
$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E \dot{\epsilon} \quad \text{met:} \quad \tau = \frac{\eta}{E} \quad (2.1)$$

Met behulp van deze vergelijking kan nu de respons worden bepaald voor een tweetal belastingstoestanden namelijk, trek (constante reksnelheid) en kruip (constante spanning).

Voor het eerste geval is af te leiden (zie bijlage A):

$$\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.2)$$

Indien voor verschillende reksnelheden de spanning als functie van de rek wordt berekend, krijgen we het spanningsverloop als in figuur 2.1.



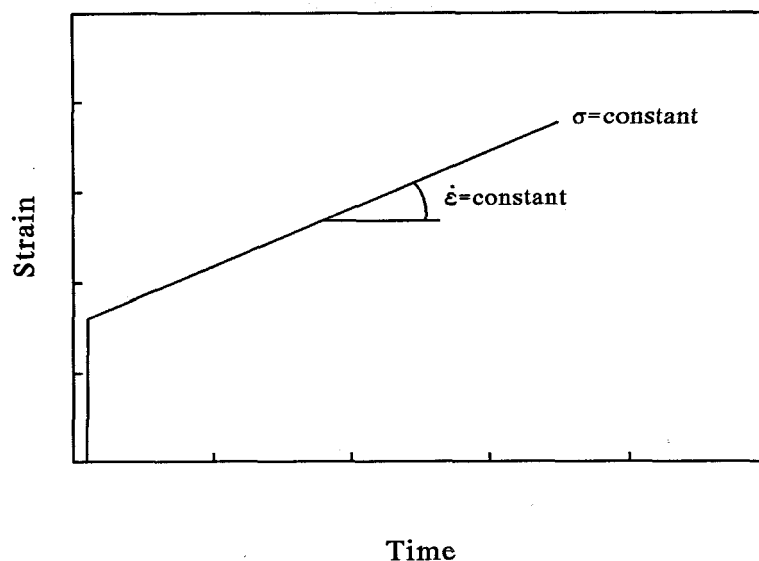
Figuur 2.1 Spanning tegen rek in een lineair Maxwell-model voor vier reksnelheden.

In het begin werkt alleen de veer (constante beginhelling gelijk aan de modulus), vervolgens neemt de demper langzaam over, dit wordt bepaald door tijdconstante τ , wat uiteindelijk leidt tot een constante vloeispanning. Duidelijk is te zien dat de vloeispanning proportioneel toeneemt met de reksnelheid.

Voor het tweede geval is af te leiden (zie bijlage B):

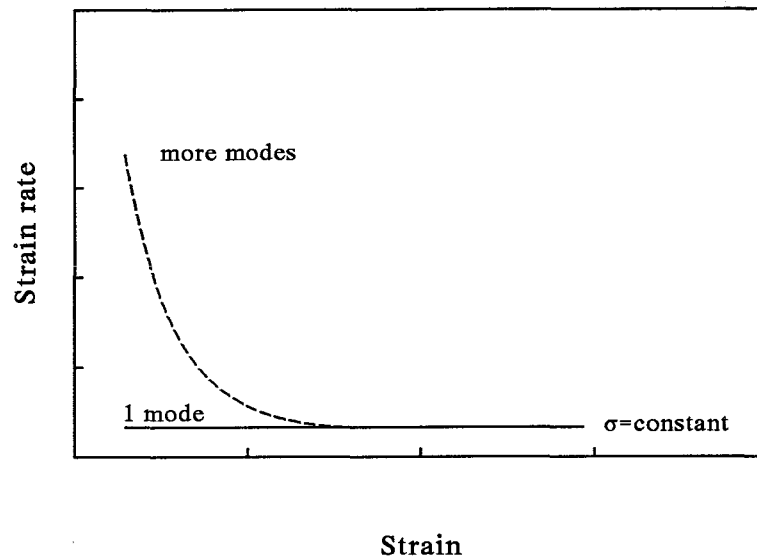
$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.3)$$

In dit geval is het handiger de rek uit te zetten tegen de tijd aangezien het spanningsverloop reeds bekend is. Deze wordt (theoretisch) oneindig snel naar het constant niveau σ_0 gebracht hetgeen leidt tot een beginrek ϵ_0 gelijk aan de bijdrage van de veer. Bij de vervolgens constant blijvende spanning treedt er vloeï op, met een reksnelheid die volgt uit formule 2.3.



Figuur 2.2 Rek tegen tijd in lineair Maxwell-model bij constante spanning.

Om de constante reksnelheid zichtbaar te maken wordt gebruik gemaakt van een zogeheten Sherby-Dorn plot [2], waarin de reksnelheid wordt uitgezet tegen de rek. Voor één enkel Maxwell-element houdt dit in dat bij een toenemende rek, de reksnelheid constant is, terwijl voor een realistisch model met meerdere elementen de reksnelheid eerst afneemt en vervolgens constant blijft, zie figuur 2.3.



Figuur 2.3 Sherby-Dorn plot voor één enkele en meerdere lineaire Maxwell-elementen.

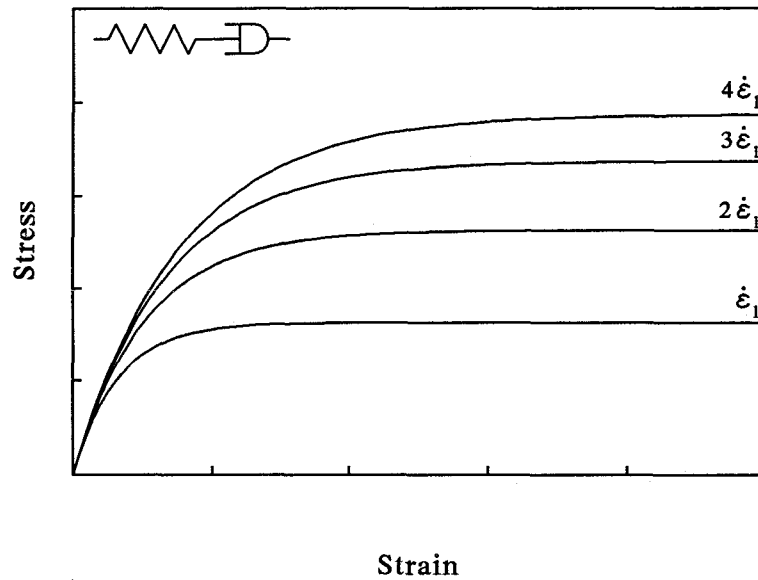
Uit een dergelijke figuur kan dan op eenvoudige wijze de reksnelheid worden afgelezen die zich instelt tijdens een kruipproef.

2.2 Niet-lineaire benadering

Omdat het lineaire model in de praktijk vaak geen goede beschrijving geeft, wordt geprobeerd dit te verbeteren door gebruik te maken van een niet-lineaire benadering. Hierbij wordt weer het Maxwell-model gebruikt, maar nu met een niet-lineaire demper. Voor dit soort dempers geldt dat de viscositeit niet langer constant is, maar een functie van de reksnelheid:

$$\sigma(\dot{\epsilon}) = \eta(\dot{\epsilon}) \dot{\epsilon} \quad (2.4)$$

Ook nu kan weer de respons worden bekeken op de twee genoemde belastingstoestanden. In het eerste geval ziet het spanningsverloop voor verschillende reksnelheden eruit als in figuur 2.4.



Figuur 2.4 Spanning tegen rek in een niet-lineair Maxwell-model voor vier reksnelheden.

In tegenstelling tot de vorige paragraaf blijkt dat de vloeispanning nu niet langer proportioneel toeneemt met de reksnelheid.

Voor kruip kan worden verwezen naar figuur 2.2 en 2.3 in paragraaf 2.1, omdat vanwege de constante spanning de reksnelheid en dus ook de viscositeit van de demper constant zijn. Dit levert dezelfde figuren.

2.3 Temperatuurafhankelijkheid

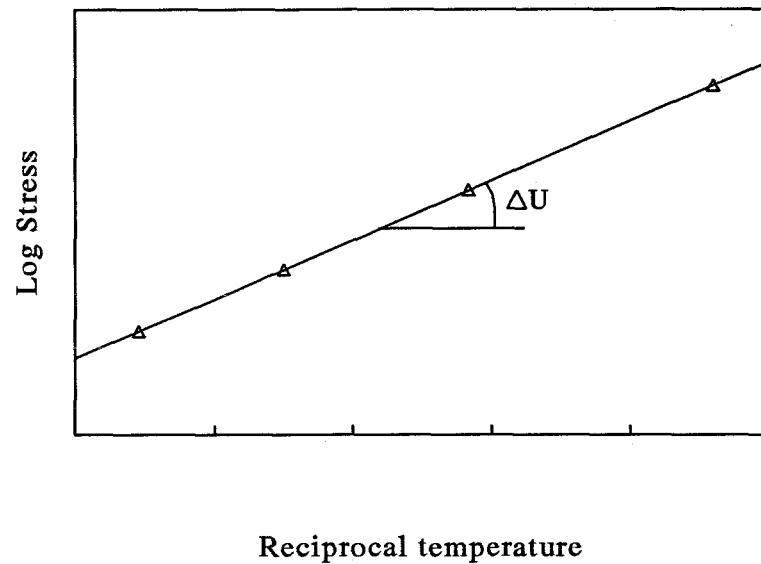
Naast afhankelijkheid van reksnelheid blijkt de vloeispanning ook afhankelijk te zijn van de temperatuur. Voor de modellering van deze afhankelijkheid maken we gebruik van de Arrhenius vergelijking. Deze kan worden geschreven als:

$$\eta(T) = \eta_0 e^{\frac{\Delta U}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (2.5)$$

Waarbij η_0 de viscositeit is bij de referentietemperatuur T_0 .

De viscositeit blijkt dus afhankelijk te zijn van de temperatuur en wel zodanig dat de viscositeit afneemt bij een toenemende temperatuur. Wanneer deze formule wordt

gecombineerd met die voor de berekening van het spanningsverloop, formule (2.2), dan volgt dat de vloeispanning tevens een functie is van de viscositeit en zodoende ook van de temperatuur. Indien deze vloeispanning logaritmisches wordt uitgezet tegen de reciproke temperatuur moet volgens formule (2.5) een rechte ontstaan waarvan de helling gelijk is aan de activeringsenergie. Is de activeringsenergie constant dan wordt aan de Arrheniusvergelijking voldaan. Dit betekent dat tijd-temperatuur-superpositie mag worden toegepast.



Figuur 2.5 Arrhenius plot van de vloeispanning voor één reksnelheid.

3 Experimenteel.

3.1 Materialen

Het gebruikte materiaal is polycarbonaat, lexan. Enkele mechanische eigenschappen:

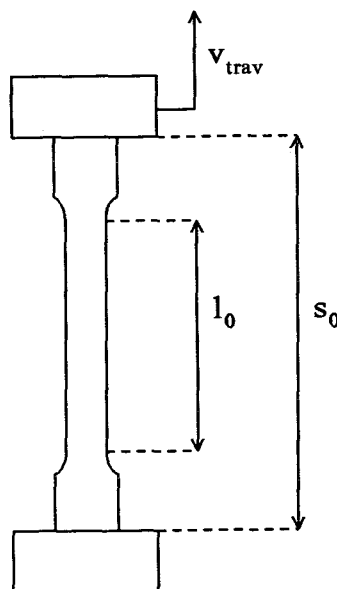
Eigenschappen	Testmethode	Eenheid	Waarde voor Polycarbonaat standaard
Elasticiteitsmodulus	DIN 53457	N/mm ²	2300
Treksterkte	DIN 53455	N/mm ²	67-70
Breuk bij rek	DIN 53455	%	>100

Tabel 3.1 Mechanische eigenschappen van lexan.

Er werd voor plaatvormig materiaal gekozen, omdat dit voordelen bood bij het onderzoek. Proefstaafjes werden vervaardigd volgens ASTM D 638 met een dikte van 2 mm.

3.2 Definities

De inklemlengte van het trekstaafje bedroeg 130 mm (s_0) en de meetlengte waarvan de verlenging werd bepaald 50 mm (l_0), zie figuur 3.1.



Figuur 3.1 Schematische weergave van trekstaaf met meetlengte l_0 en inklemlengte s_0 .

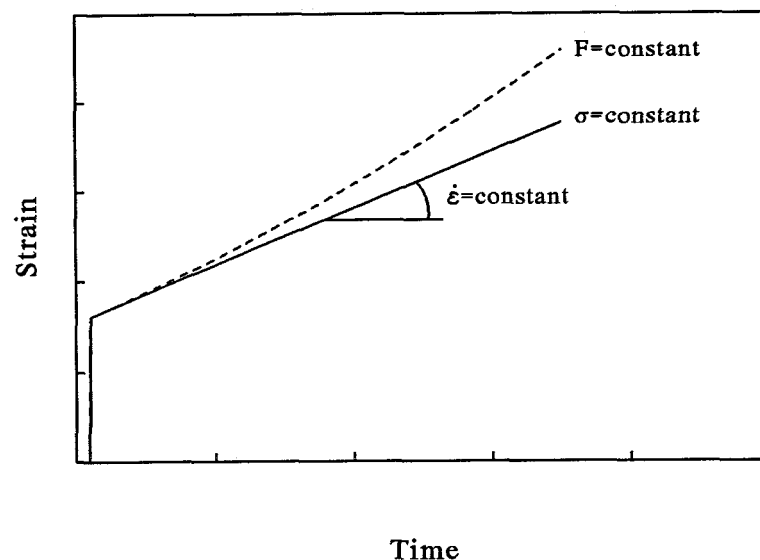
De gemeten spanningen zijn allemaal betrokken op de oorspronkelijke dwarsdoorsnede A_0 . De later op basis van volumeinvariantie berekende ware spanningen bleken in het algemeen 5% hoger te liggen.

3.3 Mechanische beproevingen

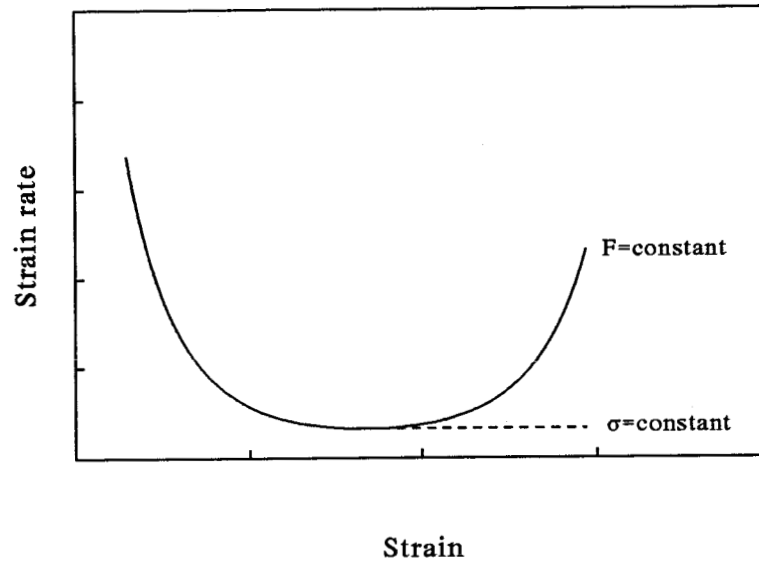
Proeven met constante reksnelheid en constante spanning werden gedaan op een Frank 81565 trekbank, uitgerust met oven en extensiometer. Relatieve nauwkeurigheid van kracht en rekmetingen was respectievelijk 0.1% en 0.5%.

Proeven met constante reksnelheid zijn uitgevoerd in het temperatuurgebied van 20 tot en met 60 °C en reksnelheden van 0.0001 tot en met 0.05 s⁻¹. Proeven met constante spanningen werden uitgevoerd in het zelfde temperatuurgebied bij spanning van 48 tot en met 60 MPa.

Met betrekking tot de proeven met constante spanning dient nog te worden opgemerkt dat deze als zodanig niet uitvoerbaar zijn op de genoemde trekbank. De proeven zijn daarom gedaan met constante kracht, dit leidt echter tot een iets afwijkend beeld van dat beschreven in paragraaf 2.1. Als gevolg van het afnemende oppervlak zal de spanning toenemen, hetgeen leidt tot een toename van de reksnelheid. Voor rek tegen tijd betekent dit een helling met toenemende steilheid (toenemende reksnelheid) en voor het Sherby-Dorn plot een op het einde weer oplopende helling in plaats van een constante reksnelheid.

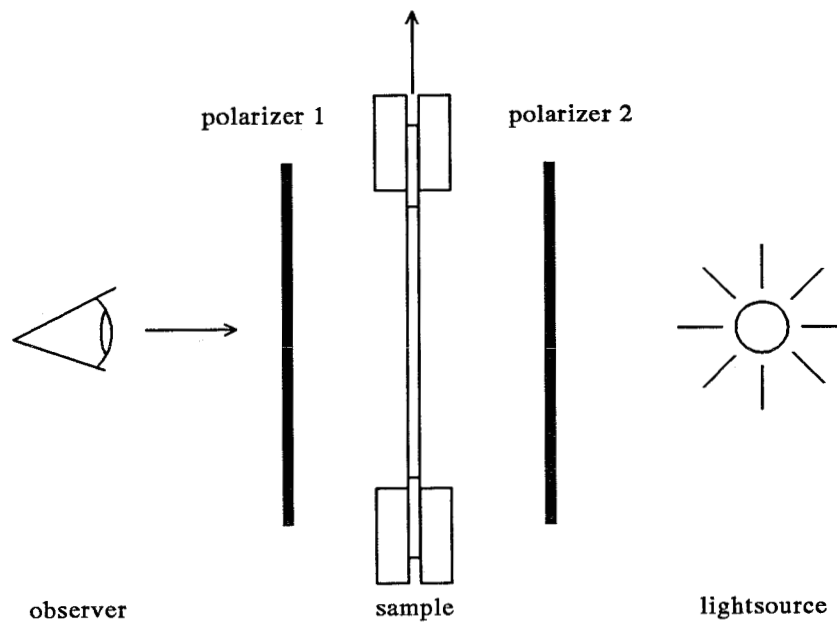


Figuur 3.2 Rek tegen tijd voor constante kracht en spanning.



Figuur 3.3 Sherby-Dorn plot voor constante kracht en spanning.

Tevens zijn er spanningsoptische metingen gedaan met behulp van een tweetal polarisatiefilters. De aldus zichtbaar gemaakte spanningspatronen zijn zowel op video als op foto vastgelegd, zie figuur 3.3 voor een schematische weergave van de opstelling.

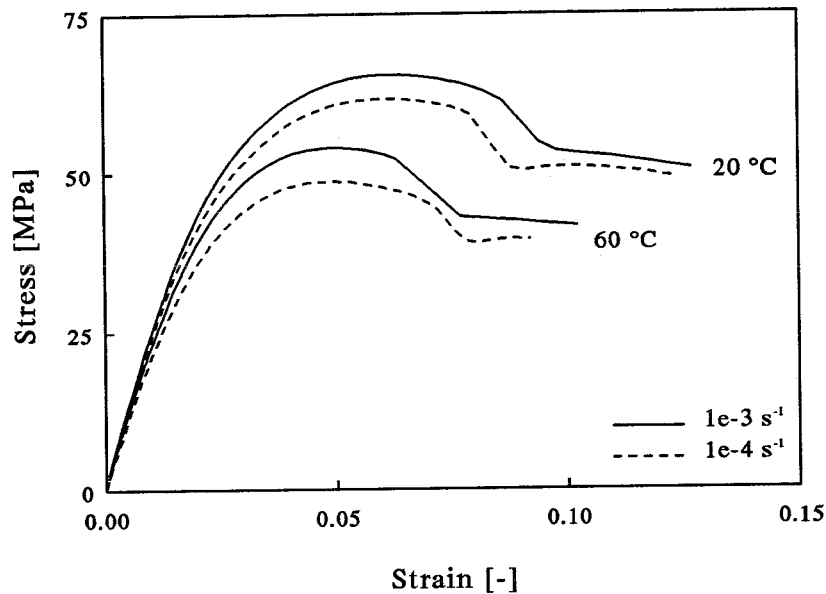


Figuur 3.3 Schematische weergave van de opstelling voor spanningsoptische metingen.

4 Resultaten & discussie.

4.1 Visco-elastische benadering van vloeï

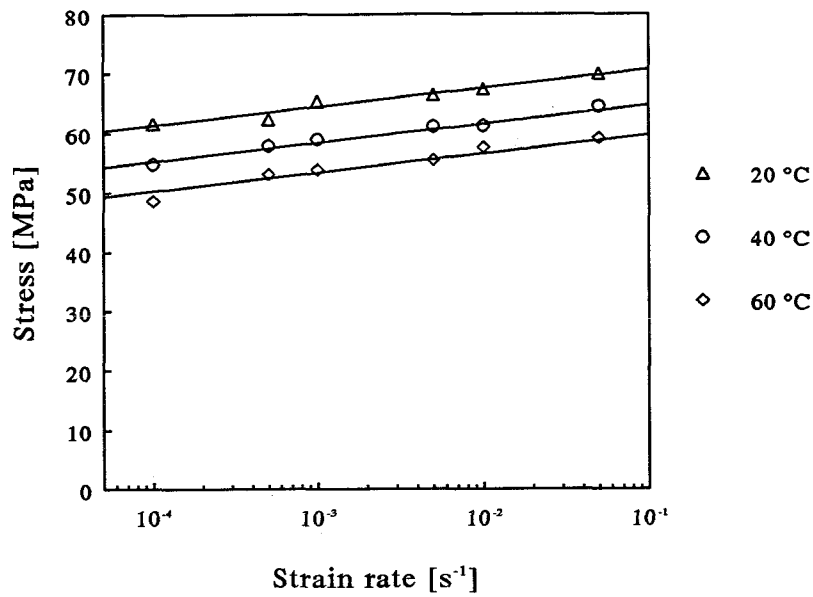
In het nu volgende zullen de resultaten van de metingen bij constante reksnelheid worden gepresenteerd en besproken. Allereerst zal worden gekeken naar een algemeen geval van de trekproef met daarin aandacht voor zowel reksnelheids- als voor temperatuurafhankelijkheid.



Figuur 4.1 Trekproef met temperaturen van 20 en 60 °C en reksnelheden van 0.001 en 0.0001 s⁻¹.

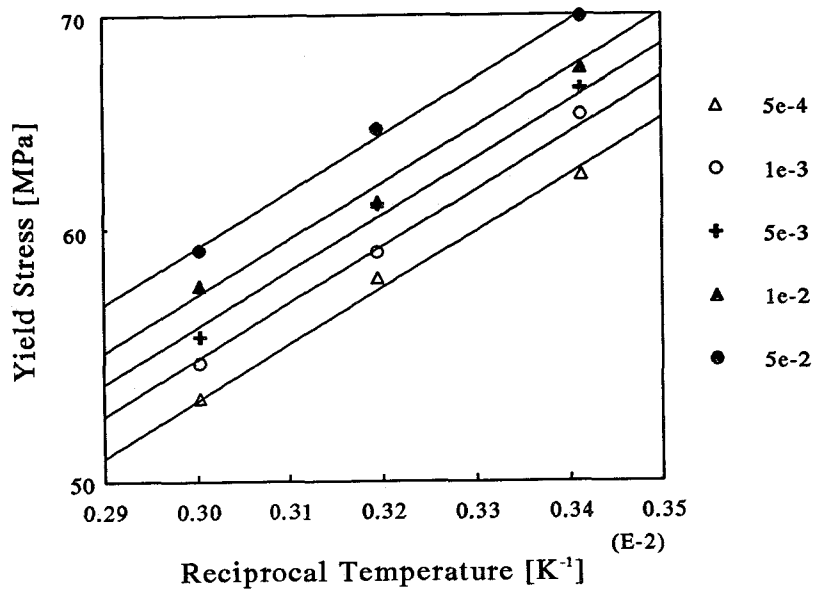
Figuur 4.1 blijkt wat betreft reksnelheids- en temperatuurafhankelijkheid overeen te komen met het niet-lineaire visco-elastisch model. Tot het maximum lijkt het verloop op het door het model voorspelde. In het model wordt dit maximum of te wel vloeipunt geheel bepaald door de demper. Door het uitzetten van vloeispanning tegen de opgelegde reksnelheid kan dan dus de demperkarakteristiek van het materiaal worden bepaald. Als gevolg van het beperkte instelbare reksnelheidsgebied moet dit voor verschillende temperaturen gebeuren. Door dan vervolgens tijd-temperatuur-superpositie toe te passen kan dan het reksnelheidsgebied worden uitgebreid.

Eerste stap is echter het meten van de vloeispanning als functie van de reksnelheid voor verschillende temperaturen, zie figuur 4.2.



Figuur 4.2 Reksnelheidsafhankelijkheid van de vloeispanning voor 20, 40 en 60 °C.

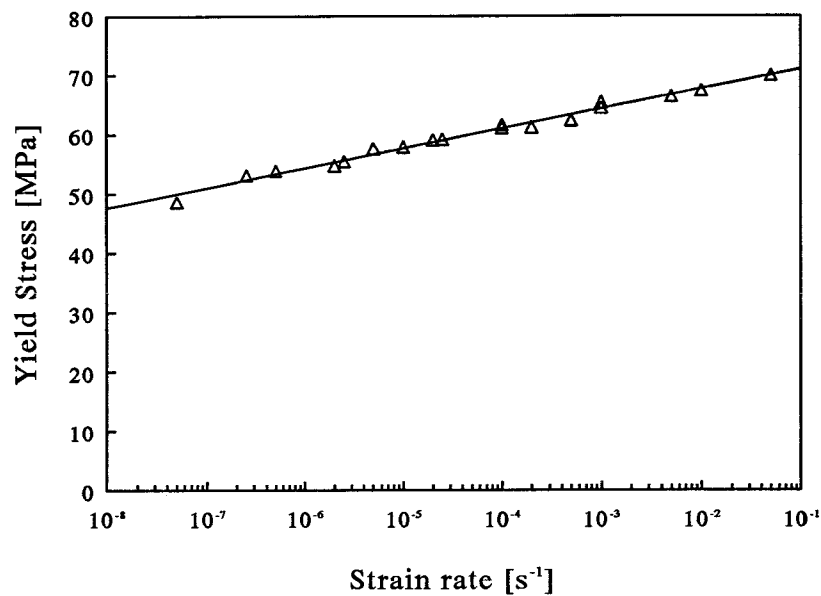
Om te controleren of de activeringsenergie constant is en dus tijd-temperatuur-superpositie is toegestaan wordt de vloeispanning uitgezet tegen de reciproke temperatuur.



Figuur 4.3 Arrhenius plot van de vloeispanning voor verschillende reksnelheden.

Uit figuur 4.3 blijkt dat inderdaad is voldaan aan de eis van constante activeringsenergie. De waarde hiervan bedraagt 3,39 kJ/mol. Vervolgens kan door tijd-temperatuur-superposi-

tie toe te passen op figuur 4.2 de mastercurve worden samengesteld.



Figuur 4.4 Samengestelde mastercurve, power-law.

De verkregen mastercurve kan vervolgens worden beschreven met een power-law:

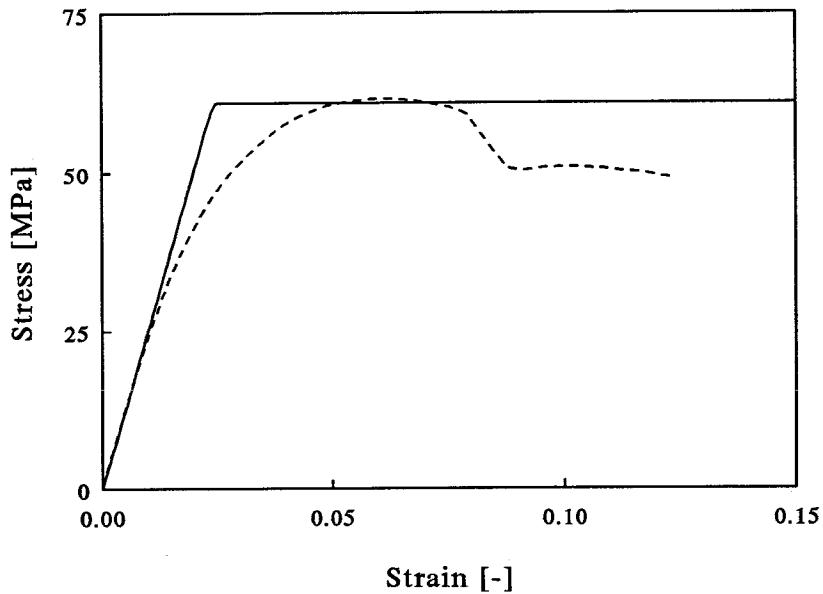
$$\sigma = C\dot{\epsilon}^m \quad (4.1)$$

Deze power-law geeft dan de demperkarakteristiek voor een groot reksnelheidsinterval en kan worden toegepast in het niet-lineaire Maxwell-model voor de berekening van het spannings- en/of rekverloop.

4.2 Extensie tot inhomogene deformatie

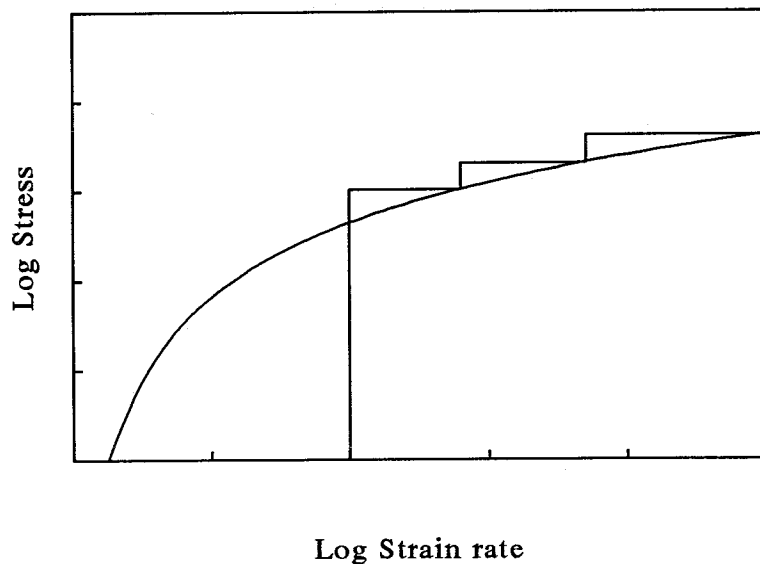
Wanneer het spanningsverloop wordt berekend met behulp van het model met de power-law als demperkarakteristiek zoals beschreven in de voorgaande paragraaf, dan volgt voor de trekproef het spanningsverloop zoals is te zien in de figuur op de volgende pagina.

Bij vergelijking van het werkelijke gedrag met het door het model voorspelde gedrag, is te zien dat alleen de beginhelling (modulus) en het niveau van de vloeispanning goed worden beschreven. Het eerste afwijkende gebied is te verklaren doordat het gebruikte Maxwell-model slechts één relaxatietijd heeft, terwijl realistische materialen een spectrum van relaxatietijden bezitten. Het tweede afwijkende gebied treedt op na het bereiken van de maximum spanning, hier ontstaat in de werkelijkheid een insnoering die in het gebruikte model achterwege blijft.



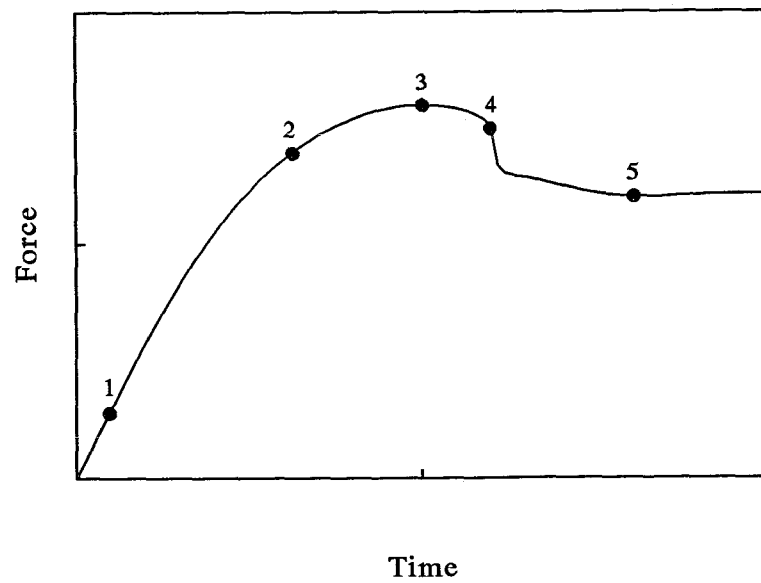
Figuur 4.5 Vergelijking werkelijk gedrag en de visco-elastische benadering.

Het niet optreden van de insnoering kan vanuit de vloeistofbenadering worden verklaard door een effect genaamd 'instabiele vloeï'. Wat houdt dit in? Wanneer over de gehele lengte van een trekstaafje het oppervlak wordt gemeten, dan blijkt hierin een variatie van ca. 3% te bestaan. Dit betekent lokaal een hogere spanning dan op grond van de niet-lineaire demperkarakteristiek voor een gegeven reksnelheid mag worden verwacht. Een lokaal hogere spanning betekent een lokaal hogere reksnelheid. Als gevolg daarvan zal de dwarscontractie lokaal groter zijn, wat weer leidt tot een hogere spanning. Dit proces leidt uiteindelijk tot insnoering.



Figuur 4.6 Schematische weergave van het ontstaan van instabiele vloeï.

Deze verklaring betekent dus dat rond het vloeipunt een sterk inhomogene deformatie zichtbaar moet zijn. Dit kan worden gecontroleerd door middel van spanningsoptische metingen (zie paragraaf 3.3). Door op diverse momenten zoals aangegeven in figuur 4.7, de spanningen zichtbaar te maken, is te zien dat dit klopt, figuur 4.8.



Figuur 4.7 Tijdstippen waarop de trekproef is onderbroken.

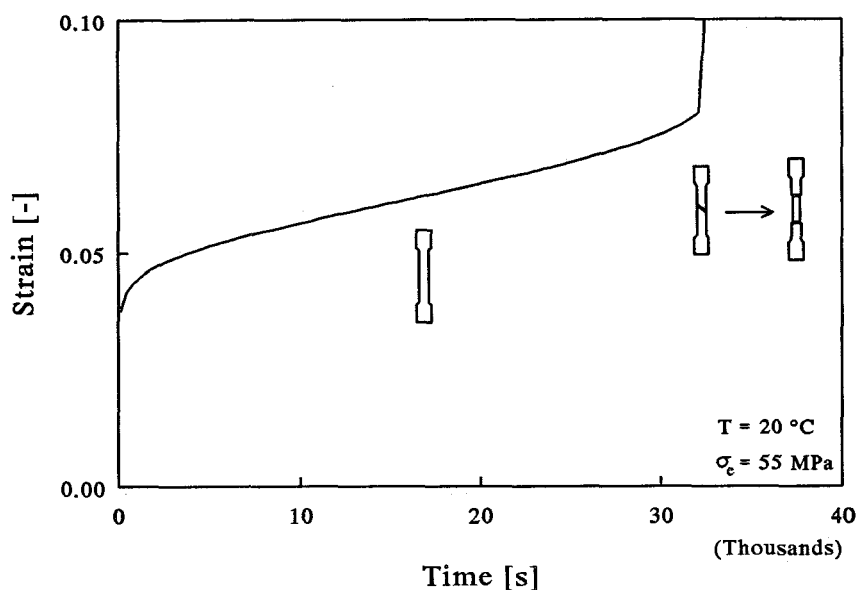


Figuur 4.8 Spanningstoestanden voor de belastingstijdstippen zoals aangegeven in figuur 4.7.

In de foto is te zien dat reeds voor het bereiken van het vloeipunt de spanningstoestand inhomogeen aan het worden is (staaf 2). Op het maximum is al duidelijk de lokalisering te zien die optreedt alvorens de insnoering ontstaat (staaf 3). In de staven 4 en 5 is respectievelijk nog het insnoeren en vervolgens het trekken met constante kracht te zien. De verklaring van insnoering op grond van 'instabiele vloeï' wordt hierdoor bevestigd.

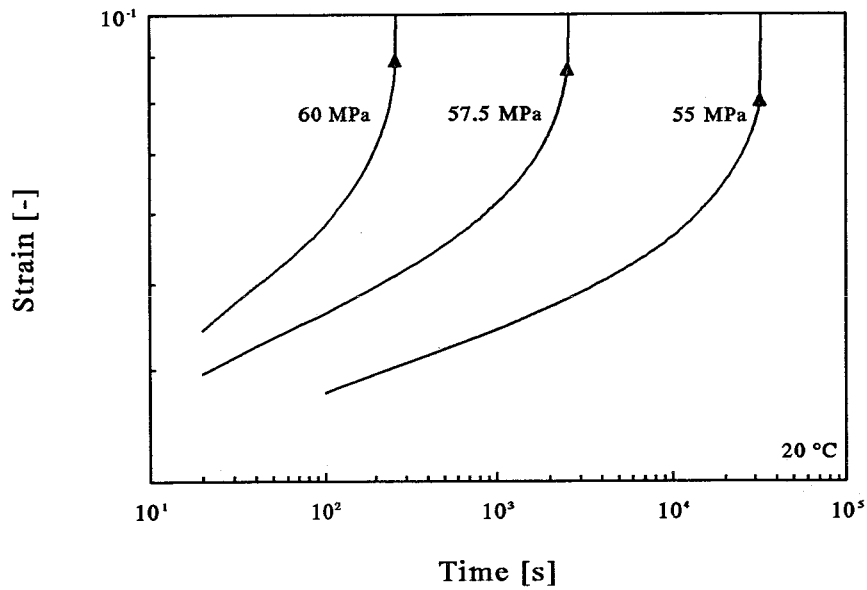
4.3 Deformatie instabiliteiten onder constante spanning.

Uit de voorgaande paragraaf is gebleken dat met de vloeistofbenadering het gedrag van polymeren onder trek goed kan worden beschreven. Om te zien of dit ook voor andere belastingstoestanden geldt zijn er naast de trekproeven ook nog kruipproeven gedaan. Hierbij werd met een reksnelheid van 0.0001 s^{-1} de belasting naar een niveau gebracht dat lager was dan de met deze reksnelheid corresponderende vloeispanning. Een karakteristiek voorbeeld van het hierdoor veroorzaakte rekverloop is te zien in de hier onderstaande figuur.



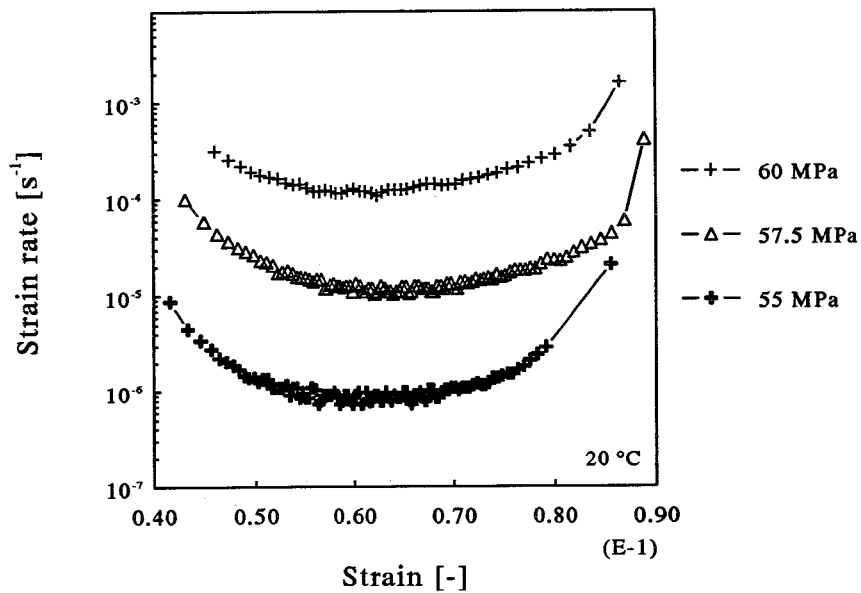
Figuur 4.9 Rek tegen tijd voor een kruipproef bij 55 MPa en 20 °C.

Uit deze figuur blijkt dat zich na het aanbrengen van de belasting eerst een constante verlenging instelt terwijl na verloop van tijd ook hier zich een instabiliteit voordoet. Wanneer deze experimenten voor verschillende spanningen worden herhaald blijkt zoals te zien in de volgende figuur dat ook dan na verloop van tijd instabiliteiten optreden, afhankelijk van het aangelegde belastingniveau.



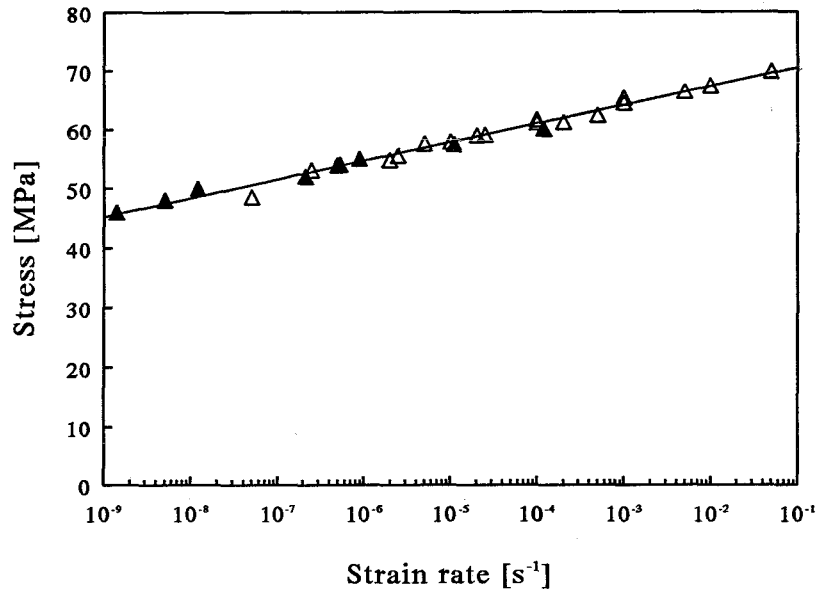
Figuur 4.10 Kruipdata voor 20 °C bij 55, 57.5, 60 MPa.

Voorts blijkt uit deze figuur een duidelijk tijdsafhankelijkheid, hetgeen het idee versterkt dat ook deze belastingtoestand beschreven kan worden door middel van een visco-elastisch model. Om de reksnelheden te bepalen kan gebruik gemaakt worden van de reeds genoemde Sherby-Dorn plots.



Figuur 4.10 Sherby-Dorn plot voor 50, 57.5 en 60 MPa bij 20 °C.

De resulterende gegevens (reknelheid, spanning) kunnen dan worden uitgezet in een power-law curve zoals figuur 4.4. Wanneer dit gebeurt blijkt dat de data identiek zijn en dus gebruikt kunnen worden als demperkarakteristiek in een visco-elastisch model, ter beschrijving van zowel trek als kruip en de daarbij optredende instabiliteiten.



Figuur 4.11 Vloeispanning tegen reksnelheid, power-law met trek en kruipdata.

5 Conclusies.

Het is gebleken dat met behulp van een eenvoudig visco-elastisch model waarbij een power-law wordt gebruikt als demperkarakteristiek het vloeigedrag van een polymeer kan worden beschreven. Verder lijkt een visco-elastische vloeistof benadering interessante mogelijkheden te bieden voor de simulatie van deformatie instabiliteiten die optreden in inhomogene spanningsvelden.

Verder onderzoek is gewenst om de algemene geldigheid van de besproken modelvorming te bewijzen door ook naar andere materialen te kijken. Verder zou het model verbeterd kunnen worden door het meenemen van versteving en uitgebreid worden naar drie dimensionale numerieke simulaties.

Referenties.

1. Ward, I.M., *Mechanical Properties of Solid Polymers*, John Wiley & Sons, London (1971).
2. Sherby, O.D., Dorn, J.E., *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 145-162 (1958).

Bijlage A: Spanningsverloop bij constante reksnelheid voor een lineair Maxwell-model.

De bewegingsvergelijking voor een lineair Maxwell-model is reeds gegeven door formule (2.1), paragraaf 2.1. Wanneer dit model een stap in de rek wordt opgelegd kan de staprespons van het systeem worden bepaald:

$$E(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{A.1})$$

Boltzmann-superpositie-integraal:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt' \quad (\text{A.2})$$

Substitutie van (A.1) in (A.2) gecombineerd met:

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon} = \text{constant} \quad (\text{A.3})$$

levert:

$$\sigma(t) = \int_0^t E e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \dot{\epsilon} dt' \quad (\text{A.4})$$

Substitueer $\langle u=t-t' \rangle$ in (A.4) dan volgt:

$$\sigma(t) = - \int_t^0 E e^{-\frac{u}{\tau}} \dot{\epsilon} du \quad (\text{A.5})$$

of te wel omgewerkt:

$$\sigma(t) = \int_0^t E e^{-\frac{u}{\tau}} \dot{\epsilon} du \quad (\text{A.6})$$

Uitwerken hiervan levert op:

$$\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (\text{A.7})$$

Bijlage B: Rekverloop bij constante spanning voor een lineair Maxwell-model.

De bewegingsvergelijking voor een lineair Maxwell-model is reeds gegeven door formule 2.1, paragraaf 2.1. Hier geldt $\sigma(t)=\sigma_0=\text{constant}$, dit kan rechtstreeks in de bewegingsvergelijking worden gesubstitueerd. Dit levert:

$$\frac{1}{\tau}\sigma = E\dot{\varepsilon} \quad (\text{B.1})$$

Of te wel omgewerkt:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{B.2})$$

met voor het tijdstip van het aanbrengen van de belasting:

$$\varepsilon_0 = E\sigma_0 \quad (\text{B.3})$$