

Welgingsverhinderling van een I-profiel . I-profiel waarvan het lijf als niet aanwezig wordt beschouwd . Welgingsverhinderling van een I-profiel (aan beide uiteinden ingeklemd; klassieke oplossing)

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D. (1964). *Welgingsverhinderling van een I-profiel . I-profiel waarvan het lijf als niet aanwezig wordt beschouwd . Welgingsverhinderling van een I-profiel (aan beide uiteinden ingeklemd; klassieke oplossing)*. (DCT rapporten; Vol. 1964.039). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1964

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

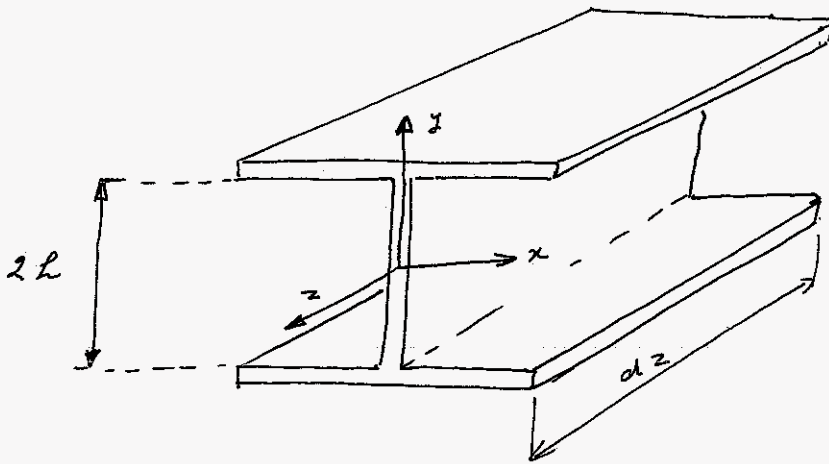
Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

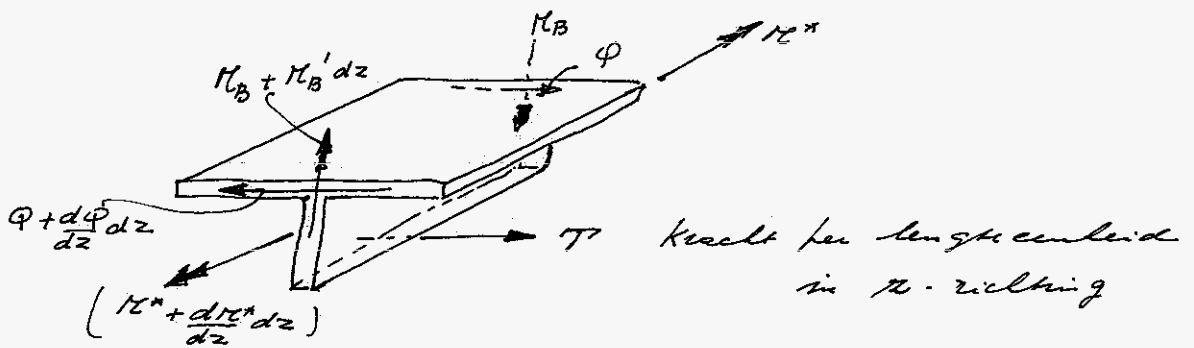
providing details and we will investigate your claim.

Werbingsverhinderung van een I-profiel



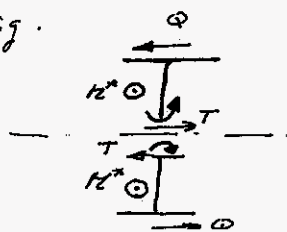
Het profiel is symmetrisch ten opzichte van het x - z -vlak. We snijden de balk op deze plaats door midden.

We weten dat er bij werbingsverhinderung normaalspanningen in de x -richting ontstaan, die voor iedere flens als resultante een moment M_B leveren. Omdat deze normaalspanningen van de plaats z afhangen, treden ook dwarskrachten Q op.



Opn: Differentieren naar z wordt in het vervolg aangegeven door een accent '.

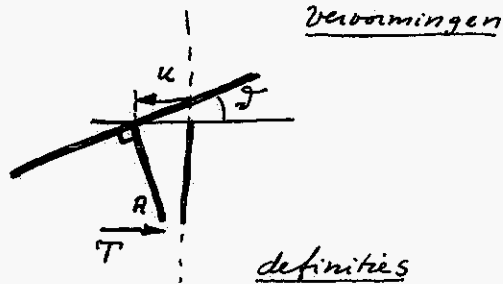
Opn: Op het symmetrievlak werkt geen moment in x -richting.



Evenwicht:

$$\begin{cases} M_B^* = Q \\ T = Q' \\ M^{*'} + T h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_B = - E J_y u'' \\ Q = - E J_y u''' \\ T = - E J_y u^{IV} \end{cases}$$



J_y : massa traagheidsmoment van een flens t.o.v. y-as

$G J_d$: torsiestijfheid van het halve profiel.

$$M^* = G J_d \vartheta'$$

Aansluitvoorwaarden

Stellen we de verplaatsing van het punt A ten gevolge van de kracht T (deze verplaatsing is evenredig met T) αT , dan geldt van de aansluiting wat de verplaatsingen betreft:

$$u - \alpha T = h \vartheta \quad \rightarrow \quad \alpha T = u - h \vartheta$$

Dan deze uitdrukking van T te substitueren in $T = -E J_y u^{IV}$ krijgt men:

$$\underline{-\alpha E J_y u^{IV} = u - h \vartheta} \quad \rightarrow \quad h \vartheta = u + \alpha E J_y u^{IV}$$

beiden geldt: $M^{*'} + T h = 0$

$$G J_d \vartheta' + T h = 0$$

$$\underline{2 G J_d \vartheta'' + h (u - h \vartheta) = 0}$$

$$2 G J_d [u'' + \alpha E J_y u^{IV}] + h^2 \alpha E J_y u^{IV} = 0$$

$$2EJ_y g J_d u^{VI} - h^2 E J_y u^{IV} + g J_d u'' = 0$$

$$\boxed{2EJ_y u^{VI} - \frac{h^2 E J_y}{g J_d} u^{IV} + u'' = 0}$$

Voer in: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha E J_y = \beta \\ \frac{h^2 E J_y}{g J_d} = \gamma \end{array} \right. \quad (\text{definitions})$

$$\boxed{\beta u^{VI} - \gamma u^{IV} + u'' = 0}$$

Opmerking:

Er hoeft niet gebruik te worden gemaakt van de evenwichtsvergelijking.

$$M^* + Tl = 0.$$

In plaats hiervan kunnen we gebruiken:

$$M_w = M_{\text{totaal}} = 2M^* + 2Ql$$

Hiermee volgt:

$$\begin{aligned} M_w &= 2 \frac{E J_y}{h} u^{IV} + 2 \\ &= 2 \frac{g J_d}{h} (u' + \alpha E J_y u^{IV}) - 2 E J_y h u^{IV} \end{aligned}$$

$$\text{of } \boxed{\frac{h}{2gJ_d} M_w = u' - \frac{h^2 E J_y}{g J_d} u^{IV} + \alpha E J_y u^{IV}}$$

Door deze vergelijking eenmaal naar z te differentieren, krijgen we de boven genoemde formule.

Randvoorwaarden:

We beschouwen een balk, waarvan aan beide uiteinden de "verloring" wordt verhinderd. Verder ~~wordt~~^{kan} de doorsnede $x=0$ geen verplaatsing of draaiing ondergaan. Van $x=l$ wordt de verplaatsing zodanig gedwongen, dat de doorsnede in zijn geheel een hoek θ draait om een as door het midden van het lijf.

Dus:

$x=0$	$u=0$	$x=l$	$u=l\theta$
	$\varphi=0$		$\varphi=0$
	$u'+l\varphi'=0$		$u'+l\varphi'=0$

Dit lijk van pag. 10.
 Randvoorwaarden moet zijn
 $u'=0!$

Deze laatste voorwaarden zeggen dat er geen verplaatsingen in axiale richting kunnen optreden voor $x=0$ en $x=l$. Als de flens alleen belast is met een u' verplaatst de punt van de flens lineair in de x -coördinaat (Bernoulli) in axiale richting; als de flens getoerdend wordt, met als punt waarom de doorsnede draait het midden van het lijf, krijgen de punten van de flens een verplaatsing in x -richting die gegeven wordt door $l\varphi'x$.

Opn: Bij gebruik van de formule $\pi^* = \int T_x \varphi' dx$ bij de bepaling van de verloring ten gevolge van het wrijvend moment π^* is er van uitgegaan dat de doorsnede in zijn geheel draait. Als $d \neq 0$ is dat hier niet het geval. We hebben wel aangenomen dat de flens in zijn geheel draait. Als de torsie-stijfheid van het lijf dus klein is t.o.v. die van de flens, moeten we dan ook de beste overaanname vinden.

Opn: Als $d=0$ (zie Seato), dus als het lijf stijf is tegen buiging, gaan de randvoorwaarden

$u' + hJ' = 0$ over in $J' = 0$, omdat in dit geval geldt $u = hJ$.

Algemene oplossing van de differentiaalvergelijking in u

$$\beta u^{VI} - \gamma u^{IV} + u'' = 0$$

Stel $u = e^{\lambda z}$

$$\beta \lambda^6 - \gamma \lambda^4 + \lambda^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0$$

$$\beta \lambda^4 - \gamma \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2\beta}$$

We veronderstellen nu: $\gamma^2 - 4\beta > 0$ Hieraan is reken voldaan voor niet te grote $\beta = \alpha \in \mathbb{D}_\gamma$, dus voor kleine α .

In dit geval zijn beide wortels van λ^2 reëel en groter dan nul. We stellen dan ook:

$$\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2\beta} = p^2$$

en
$$\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2\beta} = q^2.$$

Opm: Wat gebeurt er met p en q als $\alpha \rightarrow 0$? ; dus als $\beta \rightarrow 0$?

$$\text{Dan geldt: } \frac{\gamma \pm \gamma \sqrt{1 - \frac{4\beta}{\gamma^2}}}{2\beta} = \frac{\gamma \pm \gamma \left(1 - \frac{2\beta}{\gamma^2} - 2 \frac{\beta^2}{\gamma^4} \dots \right)}{2\beta}$$

Dus:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} p^2 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2\gamma - \frac{2\beta}{\gamma} - \frac{2\beta^2}{\gamma^3}}{2\beta} \rightarrow \infty \text{ sign} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} q^2 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\frac{2\beta}{\gamma} + \frac{2\beta^2}{\gamma^3}}{2\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma^3} \right) = \frac{1}{\gamma}$$

Dus q^2 gaat dan over in de wortels die optreden in de algemeen gebruikte theorie van de belastingverdeling van een I-profiel

De algemene oplossing van de d.v. in u luidt nu:

$$u = c_1 + c_2 z + c_3 \cosh \beta z + c_4 \sinh \beta z + c_5 \cosh qz + c_6 \sinh qz$$

Hiervan volgt:

$$u' = c_2 + c_3 \beta \sinh \beta z + c_4 \beta \cosh \beta z + c_5 q \sinh qz + c_6 q \cosh qz$$

$$u^{IV} = c_3 \beta^4 \cosh \beta z + c_4 \beta^4 \sinh \beta z + c_5 q^4 \cosh qz + c_6 q^4 \sinh qz$$

$$u^V = c_3 \beta^5 \sinh \beta z + c_4 \beta^5 \cosh \beta z + c_5 q^5 \sinh qz + c_6 q^5 \cosh qz$$

c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 en c_6 te bepalen met:

$$\begin{array}{l} \underline{z=0} \\ u=0 \\ \gamma=0 \Rightarrow u + \beta u^{IV} = 0 \\ u' + h\gamma' = 0 \Rightarrow 2u' + \beta u^V = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} u=0 \\ u^{IV}=0 \end{array} \quad \text{(zie pag 2.)}$$

$$\begin{array}{l} \underline{z=l} \\ u = h\theta \\ \gamma = 0 \\ u' + h\gamma' = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} u = h\theta \\ \Rightarrow u + \beta u^{IV} = h\theta \\ \Rightarrow 2u' + \beta u^V = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = h\theta \\ u^{IV} = 0 \end{array}$$

De randvoorwaarden waaraan we zullen werken, luiden dus

$$x=0 \left\{ \begin{array}{l} u=0 \\ u''=0 \\ 2u'+\beta u^{\text{IV}}=0 \end{array} \right. \quad x=l \left\{ \begin{array}{l} u=l\theta \\ u''=0 \\ 2u'+\beta u^{\text{IV}}=0 \end{array} \right.$$

We bepalen nog de algemene uitdrukking van

$$2u'+\beta u^{\text{IV}} = 2c_2 + c_3 \beta (2+\beta \beta^4) \sinh \beta z + c_4 \beta (2+\beta \beta^4) \cosh \beta z + \\ + c_5 \beta (2+\beta \beta^4) \sinh \beta z + c_6 \beta (2+\beta \beta^4) \cosh \beta z$$

De randvoorwaarden leveren ons:

- (1) $c_1 + c_3 + c_5 = 0$
- (2) $c_3 \beta^4 + c_5 \beta^4 = 0$
- (3) $2c_2 + c_4 \beta (2+\beta \beta^4) + c_6 \beta (2+\beta \beta^4) = 0$
- (4) $c_1 + c_2 l + c_3 \cosh \beta l + c_4 \sinh \beta l + c_5 \cosh \beta l + c_6 \sinh \beta l = l\theta$
- (5) $c_3 \beta^4 \cosh \beta l + c_4 \beta^4 \sinh \beta l + c_5 \beta^4 \cosh \beta l + c_6 \beta^4 \sinh \beta l = 0$
- (6) $2c_2 + c_3 \beta (2+\beta \beta^4) \sinh \beta l + c_4 \beta (2+\beta \beta^4) \cosh \beta l + \\ c_5 \beta (2+\beta \beta^4) \sinh \beta l + c_6 \beta (2+\beta \beta^4) \cosh \beta l = 0$

We trachten met behulp van de vergelijkingen (1) en (2) c_3 en c_5 in c_1 uit te drukken. Vervolgens drukken we m.b.v. (3), (5) en (6) c_2 , c_4 en c_6 in c_1 uit. Ten slotte gebruiken we (4) om c_1 te bepalen.

$$\text{Lit (2)} \Rightarrow c_3 = -\frac{q^4}{p^4} c_5$$

$$\text{In (1)} \Rightarrow c_1 - \frac{q^4}{p^4} c_5 + c_5 = 0$$

$$c_1 = \frac{q^4 - p^4}{p^4} c_5$$

$$c_5 = \frac{p^4}{q^4 - p^4} c_1$$

$$c_3 = \frac{-q^4}{q^4 - p^4} c_1$$

$$\text{Lit (5)} \Rightarrow$$

$$-\frac{p^4 q^4}{q^4 - p^4} c_1 \cosh pl + c_4 p^4 \sinh pl + \frac{p^4 q^4}{q^4 - p^4} c_1 \cosh ql +$$

$$c_6 q^4 \sinh ql = 0$$

$$c_4 p^4 \sinh pl + c_6 q^4 \sinh ql = \frac{p^4 q^4}{q^4 - p^4} c_1 [\cosh pl - \cosh ql]$$

$$(6) - (3) \Rightarrow$$

$$-\frac{q^4 p (2 + \beta p^4)}{q^4 - p^4} c_1 \sinh pl + \frac{p^4 q (2 + \beta q^4)}{q^4 - p^4} c_6 \sinh ql +$$

$$c_4 p \left\{ (2 + \beta p^4) [\cosh pl - 1] \right\} + c_6 q (2 + \beta q^4) [\cosh ql - 1] = 0$$

$$c_4 p (2 + \beta p^4) (\cosh pl - 1) + c_6 q (2 + \beta q^4) (\cosh ql - 1) =$$

$$\frac{q p}{q^4 - p^4} c_1 [q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql]$$

$$c_4 = \frac{q^4}{q^4 - p^4} \frac{c_1 (\cosh pl - \cosh ql)}{\sinh pl} - c_6 \frac{q^4}{p^4} \frac{\sinh ql}{\sinh pl}$$

$$\left[\frac{q^4}{q^4 p^4} \frac{\cosh pl - \cosh ql}{\sinh pl} c_1 - \frac{q^4}{p^4} \frac{\sinh ql}{\sinh pl} c_6 \right] p (2 + p^4) (\cosh pl - 1) +$$

$$+ c_6 q (2 + p^4) (\cosh ql - 1) = \frac{q p}{q^4 - p^4} c_1 [q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql]$$

$$c_6 \left[q (2 + p^4) (\cosh ql - 1) - \frac{q^4}{p^4} \frac{\sinh ql}{\sinh pl} (2 + p^4) (\cosh pl - 1) \right] =$$

$$c_1 \frac{q}{q^4 - p^4} \left[p q^3 \sinh pl - p^4 \sinh ql - \frac{q^3 (\cosh pl - \cosh ql)}{\sinh pl} p (2 + p^4) \frac{(\cosh pl - 1)}{(\cosh pl - 1)} \right]$$

of

$$\rightarrow c_6 = \frac{p q}{q^4 - p^4} c_1 \frac{p \sinh pl (q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql) - q^3 (\cosh pl - \cosh ql) p (2 + p^4) (\cosh pl - 1)}{p^3 (2 + p^4) \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 (2 + p^4) \sinh ql (\cosh pl - 1)}$$

$$c_4 = \frac{q^4}{q^4 - p^4} c_1 \frac{\cosh pl - \cosh ql}{\sinh pl} - \frac{q^4}{p^4} \frac{\sinh ql}{\sinh pl} \cdot \frac{p^3}{q^4 - p^4} c_1 \dots$$

$$= \frac{q^4}{q^4 - p^4} c_1 \frac{(\cosh pl - \cosh ql) [p^3 (2 + p^4) \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 (2 + p^4) \sinh ql (\cosh pl - 1)] +$$

$$- \sinh ql [p^3 (2 + p^4) \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 (2 + p^4) \sinh ql (\cosh pl - 1)]}{\sinh pl [p^3 (2 + p^4) \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 (2 + p^4) \sinh ql (\cosh pl - 1)]} =$$

$$\rightarrow c_4 = \frac{q^4}{q^4 - p^4} c_1 \frac{-\sinh ql (q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql) + p^3 (\cosh pl - \cosh ql) (2 + p^4) (\cosh ql - 1)}{p^3 (2 + p^4) \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 (2 + p^4) \sinh ql (\cosh pl - 1)}$$

Opmerking: Als controle is te gebruiken dat c_4 met c_6 te berekenen is door p te verwisselen door q en omgekeerd. De gevonden

resultatus voldoen lieraan.

Ter bepaling van c_2 gebruiken we (3).

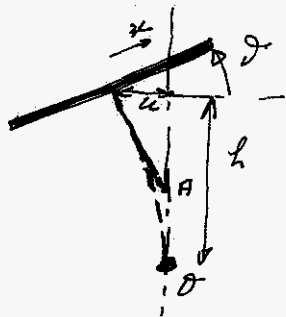
$$\rightarrow -2c_2 = p(2+\beta p^4) c_4 + q(2+\beta q^4) c_6 =$$

$$c_1 \cdot \frac{pq (q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql)(p^3 \sinh pl - q^3 \sinh ql) +}{(q^4 - p^4) \left[p^3(2+\beta q^4) \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3(2+\beta p^4) \sinh ql (\cosh pl - 1) \right]}$$

$$- \frac{p^4 q^4 (2+\beta p^4)(2+\beta q^4) (\cosh pl - \cosh ql)^2}{\dots}$$

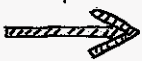
N.B. Opmerking

Op pag. 4 werd gezegd dat volledige
 melingsverhindering van de flenzen gegeven
 wordt door de relatie $u' + hD' = 0$. Dit is niet
 juist. Immers een hoekverdraaiing van de flens
 om zijn eigen zwaartepunt levert geen verplaatsingen
 in axiale richting van de "middenlijn". Als de
 hoekverdraaiing van de flens als star lichaam
 plaats leuft om een ander punt dan dit
 zwaartepunt treedt er wel meling op.
 Neem als voorbeeld de volgende situatie:



De flens draait als het ware om het punt A. De afstand
 van A tot de flens bedraagt: $\frac{u}{D} = h^*$

De meling der flens ten gevolge van u en D wordt
 dan gegeven door: $(h^* \cdot D)' x = u' x$.



dit moet nog bewezen worden!

Omdat we dit bewijs nog niet kunnen leveren, kunnen
 we wel beter stellen dat de u de grootheid is, die
 de meling bepaald. Immers bij een veranderende u
 met de z -coördinaat ($D=0$) treedt meling op F_0 ver-
 draaiing van de flens om een hoek D levert geen
 extra verplaatsingen in z -richting.

Conclusie: De randvoorwaarden $u' + hD' = 0$ van $z=0$ en $z=l$
 dient vervangen te worden door $u' = 0$ van $z=0$ en $z=l$

Swolq van de juiste resultaten:

De in de randvoorwaarden vergelijking (3) en (6) op pag. 7 voorkomende factoren $(2 + \beta p^4)$ en $(2 + \beta q^4)$ moeten vervangen worden door 2 resp. 2.

De constanten in

$$u = c_1 + c_2 z + c_3 \cosh pz + c_4 \sinh pz + c_5 \cosh qz + c_6 \sinh qz$$

worden dan (uitgedrukt in c_1):

$$c_5 = \frac{p^4}{q^4 - p^4} c_1 \quad ; \quad c_3 = \frac{-q^4}{q^4 - p^4} c_1$$

$$c_4 = \frac{q^4}{q^4 - p^4} c_1 \frac{-\sinh ql (\cancel{\cosh pl - \cosh ql} + q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql) + p^3 (\cosh pl - \cosh ql) (\cosh ql - 1)}{p^3 \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 \sinh ql (\cosh pl - 1)}$$

$$c_6 = \frac{p^4}{q^4 - p^4} c_1 \frac{\sinh pl (q^3 \sinh pl - p^3 \sinh ql) - q^3 (\cosh pl - \cosh ql) (\cosh pl - 1)}{p^3 \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 \sinh ql (\cosh pl - 1)}$$

c_2 volgt men uit vgl. (3).

$$c_2 = -p c_4 - q c_6$$

c_1 volgt uit vgl. (4) :

Limietgval voor $d \rightarrow 0$

Als $d=0$ moet de klassieke theorie een welbringsverbodering te voorschijn komen. We verwijzen hiervoor naar een aparte aantekening d.d. 16-2-1964.

Op pag. 6 werd bewezen:

$$\lim_{d \rightarrow 0} p^2 = \infty. \text{Sign}\left(\frac{p}{p}\right)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} q^2 = \frac{1}{p} = \frac{k^2}{l^2}$$

We noemen $\lim_{d \rightarrow 0} c_1 = c_1^*$

$$\lim_{d \rightarrow 0} c_5 = -c_1^*$$

Resultaat kloft

$$\lim_{d \rightarrow 0} c_6 = c_1^* \lim_{d \rightarrow 0} \frac{p^4 \cdot \frac{-q^3 - p^3 \sinh pl \cdot \sinh ql + q^3 \cosh pl + q^3 \cosh ql \cosh pl - q^3 \cosh ql}{q^4 p^4}}{p^3 \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 \sinh ql (\cosh pl - 1)}$$

\downarrow
 $p^2 \rightarrow \infty$
 $q^2 \rightarrow \frac{k^2}{l^2}$

$$= -c_1^* \lim_{d \rightarrow 0} \frac{-q^3 - p^3 \sinh pl \cdot \sinh ql + q^3 \cosh pl + q^3 \cosh ql \cosh pl - q^3 \cosh ql}{p^3 \sinh pl (\cosh ql - 1) - q^3 \sinh ql (\cosh pl - 1)}$$

Deel teller en noemer door $p^3 \sinh pl$.

De limiet wordt dan:

$$\lim_{d \rightarrow 0} c_6 = -c_1^* \cdot \frac{-\sinh k}{\cosh k - 1} = -\frac{\sinh k}{1 - \cosh k} c_1^*$$

kloft!

$$\lim_{d \rightarrow 0} c_3 = -c_1^* \lim_{d \rightarrow 0} \frac{q^4}{q^4 p^4} = 0.$$

\downarrow
 $p^2 \rightarrow \infty$
 $q^2 \rightarrow \frac{k^2}{l^2}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_4 = 0$$

Dit is meteen te zien aan de uitdrukking van c_4 onderaan pag. 8

Het volgt ook uit het eindresultaat van c_4 .

Numera:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_4 = c_1^+ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{q^4}{q^4 - p^4} \frac{-p^3 - q^3 \cosh k l \sinh q l + p^3 \cosh q l + p^3 \cosh p l \cosh q l + \dots}{q^3 \sinh q l (\cosh k l - 1) - p^3 \sinh k l (\cosh q l - 1)}$$

$- p^3 \cosh k l$

\downarrow
 $p^2 \rightarrow \infty$
 $q^2 \rightarrow \frac{k^2}{\alpha^2}$

Deel teller en noemer door $p^4 \sinh p l$

De teller wordt dan nul; de noemer wordt:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ q^3 \sinh q l + p^3 (\cosh q l - 1) \} = \infty$$

Tenslotte:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_2 = - \lim_{\alpha \rightarrow 0} (p c_4 + q c_6) = \frac{k}{l} \frac{\sinh k}{1 - \cosh k} c_1^+ \quad \text{Kloft}$$

We krijgen voor het geval $\alpha \rightarrow 0$ inderdaad hetzelfde resultaat als in de klassieke theorie.*

De eerste benadering van kleine α is natuurlijk ook te geven. Op dit moment gaan we daar echter niet verder op in.

* Deze opmerking is nog niet helemaal bewezen. Weliswaar is aangetoond dat $\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_3 = 0$ en $\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_4 = 0$.

Maar kunnen in de uitdrukking voor u de termen $c_3 \cosh p z$ en $c_4 \sinh p z$ ook worden weggelaten? En gelat blijft niet: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_3 \cosh p l = 0$. Want

van deze uitdrukking is te schrijven: $- c_1^+ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{q^4}{q^4 - p^4} \cosh p l \rightarrow \infty$

15-2-1964

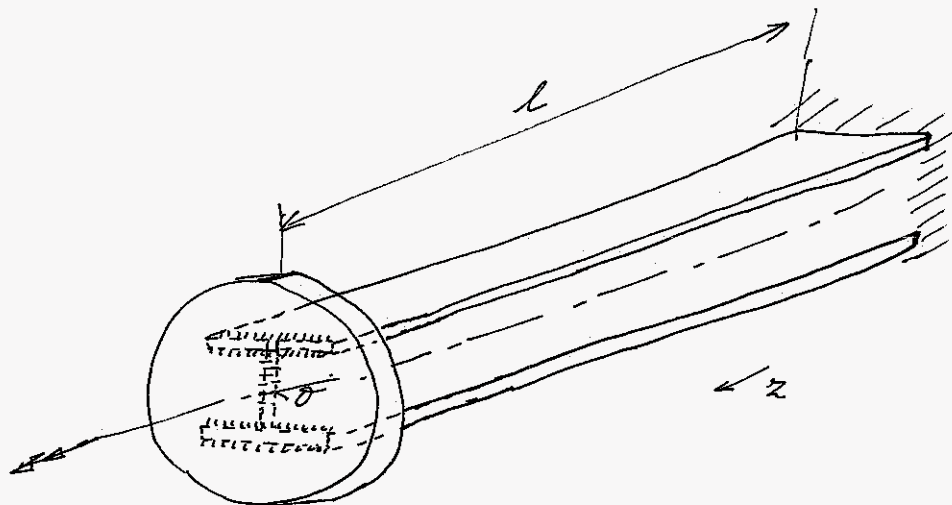
I-profiel waarvan ~~het lijf~~ als niet aanwrijf
wordt beschouwd

Inleiding.

In de aantekeningen d.d. 11-2-'64 is de invloed van de doorbuiging van het lijf in rekening gebracht.

Als extreem geval kan enerzijds beschouwd worden de oneindig stijve lijfflaat, anderzijds de oneindig slappe lijfflaat. Dit laatste is te realiseren door het hele lijf weg te snijden.

De "balk" wordt als volgt belast:



Voor $z=0$ is de balk, bestaande uit twee platen op een afstand $2h$ van elkaar, star ingeklemd.

Voor $z=l$ zijn de platen vastgeleerd op een onverwringbare schijf. Aan de schijf wordt een loekbedraining ϑ of een wringend moment M opgedrongen.

Gebruikend nu de in 11-2-'64 afgeleide theorie, dan geldt voor dit speciale geval dat $T=0$. Dit wil zeggen dat de door het lijf overgedragen dwarskracht nul is. Hieruit volgt onmiddellijk:

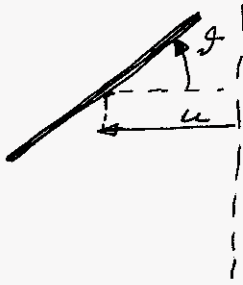
$$M^* = \text{constant}$$

$$\vartheta = \text{constant}$$

Hier het globale evenwicht van een afgezonderd stuk geldt dat in ieder doornede hetzelfde totale buigend moment moet worden overgedragen.

Dus

$$M = 2M^* + 2QL = \text{Constant}$$



$$M^* = GJ_d \vartheta' \Rightarrow \vartheta = \frac{M^* x}{GJ_d} + C_1$$

Van $x=0$ geldt $\vartheta=0 \Rightarrow \vartheta = \frac{M^* x}{GJ_d}$

$$Q = -EJ_y u'''' \quad \left[\text{Van } x=l \rightarrow \vartheta = \theta \Rightarrow M^* = \frac{GJ_d \theta}{l} \Rightarrow \vartheta = \frac{x}{l} \theta \right]$$

Dus $u = -\frac{Q}{6EJ_y} x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

Randvoorwaarden:

$$x=0 \quad u=0 \quad ; \quad x=l \quad u = l\theta$$

$\Rightarrow C_4 = 0$

Aldus wordt de verplaatsing van de punten der flens in x -richting van $x=0$ en $x=l$ tegen elkaar.

Dus van $x=0$ en $x=l$ geldt tevens:

$$u' + \frac{l}{2} \theta = 0 \quad \text{of} \quad u' + \frac{l}{2} \theta = 0 \quad \begin{matrix} \text{van } x=0 \\ x=l \end{matrix}$$

$$\text{of} \quad -\frac{Q}{2EJ_y} x^2 + C_2 x + C_3 + \frac{l}{2} \theta = 0 \quad \begin{matrix} \text{van } x=0 \\ x=l \end{matrix}$$

$$\Rightarrow C_3 = 0 \quad \text{en} \quad -\frac{Ql}{2EJ_y} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{Ql}{2EJ_y}$$

Dus

$$u = -\frac{Q}{6EJ_y} z^3 + \frac{Ql}{4EJ_y} z^2 - \frac{2Ql^2}{E}$$

om $z=l \Rightarrow u = 2\theta$

dus

$$2\theta = -\frac{Ql^3}{6EJ_y} + \frac{Ql^3}{4EJ_y} + \frac{2Ql^2}{E}$$

$$2\theta = \frac{1}{12} \frac{Ql^3}{EJ_y} \Rightarrow Q = 12 \frac{EJ}{l^3} 2\theta$$

$$M = \left(\frac{29J_p}{l} + \frac{24EJ}{l^3} l^2 \right) \theta$$

Hoe is het verloop der normaalspanningen?

$$M_B = -EJ_y u''$$

$$\sigma_z = -E \chi u''$$

$$M_B = (Qz - \frac{Ql}{2}) \chi$$

$$\sigma_z = \frac{Q(2 - \frac{z}{l}) \chi}{J_y}$$

om $z = \frac{l}{2}$ zijn de normaalspanningen nul.

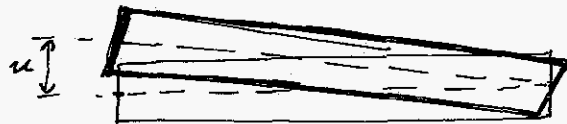
om $z=0$ en $z=l$ zijn de normaalspanningen maximaal.

De hier berekende spanningsverdeling is nog op een enigszins elementaire wijze te bepalen. Brengen we het wrijvend moment M^* aan, dan verdraait de flens een hoek δ om het zwaartepunt van het systeem. De benaamde Dondon krijgt de flens een verplaatsing u en in hoekverdraaiing δ .

Om de verplaatsing u te herstellen, is geen kracht nodig. Het torsiemoment geeft geen verplaatsingen in axiale richting als de de draaiing der flens om zijn eigen hart beschouwen.

Boven aan zicht:

(geen belonings-
verhuiding)

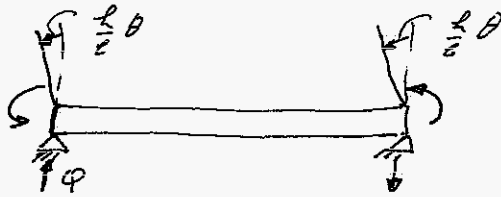


Werkwijze: verplaats de flens aan iis uiteinde een stuk u . Hierom is geen kracht nodig.

Bring een torsiemoment aan, dat een locken-draaiing $\vartheta = \frac{u}{L}$ levert met het vlak van bekeering.

Met u en $\vartheta = \frac{u}{L}$ volgt dat de flens gedraaid is om het punt θ .

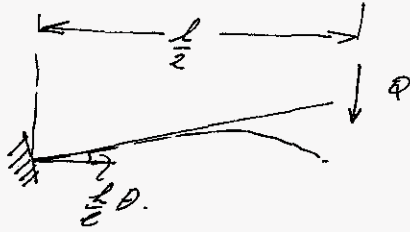
De vervorming is dan ^{totaal} zoals voorgeschreven wordt. Alleen de uiteinden der platen hebben nog niet de goede richting, wel de goede plaats.



Om de opgelegde balk zijn momenten nodig, die de stand der eindvlakken juist dwingen, dit wil zeggen die de eindvlakken verdraaien over een lock: $\frac{u}{L} = \frac{L}{2} \theta$. De ondersteuningskrachten zijn dan de dwarskrachten Q die door de plaat worden overgedragen.

De belasting der balk is antisymmetrisch. In het middelen vindt er dus geen buigend moment en geen rakking. De daar heersende dwarskracht is Q .

Klein de balk bij de oplegging omdat de gegeven lock in en lid dat Q zo is dat het midden der balk geen doorzakking krijgt.



$$\frac{Q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{1}{2} l \cdot \theta \cdot \frac{l}{L} \rightarrow \underline{\underline{Q = \frac{12 E J l \theta}{l^3}}}$$

Dit is hetzelfde resultaat dat in het voorgaande ook reeds gevonden werd. Hier is echter alleen gebruik gemaakt van elementaire beschouwingen.

Loefingsbeheindering van een I profiel

(aan beide uiteinden ingeklemd;
klassieke oplossing)

Gekocht de aantekeningen d.d. 11-2-1964 en/of het
afstudewerk p.p. 103-107.

De d.v. op pag 3 van (11-2-64) gaat over in

$$\frac{k^2 EJ_y}{I^2 J_d} u^{IV} - u'' = 0 \quad \text{als}$$

(met $u = k J_d$)

$\alpha = 0$ gekozen wordt. Deze keuze komt overeen met
een onvervormbare dwarsdoorsnede.

$$\text{Stel nu} \quad \frac{I^2 J_d}{L^2 EJ_y} = \frac{l^2}{k^2}$$

l : totale lengte
van de staaf.

Algemene oplossing:

$$J_d = u = c_1 + c_2 z + c_3 \sinh \frac{k}{l} z + c_4 \cosh \frac{k}{l} z$$

Randvoorwaarden:

$$\begin{array}{cc} z=0 & J_d=0 \\ & J'_d=0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} z=l & J_d=0 \\ & J'_d=0 \end{array}$$

Oplossing:

$$J(z) = \frac{\frac{l}{k} \frac{1 - \cosh k}{\sinh k} (1 - \cosh \frac{k}{l} z) + z - \frac{l}{k} \sinh \frac{k}{l} z}{\frac{l}{k} \frac{(1 - \cosh k)^2}{\sinh k} + l - \frac{l}{k} \sinh k} \quad \ominus$$

Ter vergelijking met de aantekeningen d.d. 11-2-1964
schrijven we elke uitdrukking van $\mathcal{J}(z)$ in de
volgende vorm:

$$h \mathcal{J} = u = c_1 + c_2 z + c_3 \cosh \frac{h}{l} z + c_6 \sinh \frac{h}{l} z.$$

Wc drukken nu c_2 & c_6 uit in c_1 .

$$c_2 = + \frac{h}{l} \frac{\sinh h}{1 - \cosh h} c_1,$$

$$c_3 = - c_1,$$

$$c_6 = - \frac{\sinh h}{1 - \cosh h}$$

merk op dat $\frac{h^2}{l^2} = \frac{1}{\beta}$