

## Ein Satz über schlichte Funktionen

**Citation for published version (APA):**

Bruijn, de, N. G. (1941). Ein Satz über schlichte Funktionen. *Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 44(1), 47-49.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1941

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Mathematics. — Ein Satz über schlichte Funktionen. Von N. G. DE BRUIJN. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

Bekanntlich hat R. NEVANLINNA<sup>1)</sup> bewiesen, dass eine in  $|z| < 1$  reguläre Funktion

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die den Einheitskreis schlicht auf einen Stern mit  $w = 0$  als Mittelpunkt abbildet, den Ungleichungen  $|a_n| \leq n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) genügt. In dieser Note wird dieser Satz ausgedehnt auf etwas allgemeinere Gebiete, wovon die wichtigsten Sterne mit beliebigen Mittelpunkten sind.

Wir sagen, dass ein Gebiet  $G$  in Bezug auf einen Punkt  $a$  (bezw. eine Richtung  $l$ ) zur Klasse  $S$  gehört, wenn jede Gerade durch  $a$  (bezw.  $l$ ) höchstens eine Strecke mit  $G$  gemeinsam hat. Die Klasse  $S$  umfasst die Sterngebiete, denn wenn  $a$  im Innern von  $G$  liegt, so ist  $G$  ein Stern in Bezug auf  $a$ . Für die  $S$ -Gebiete beweise ich die NEVANLINNASCHEN Ungleichungen und noch etwas mehr.

Schicken wir erst einen Hilfssatz voraus:

**Hilfssatz.**

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

sei regulär in  $|z| < 1$ , stetig und schlicht in  $|z| \leq 1$ ;  $\vartheta$  sei eine reelle Zahl. Die Gerade durch die Punkte  $f(e^{i\vartheta})$  und  $f(-e^{i\vartheta})$  in der  $w$ -Ebene habe mit dem Bilde von  $|z| < 1$  nur die Strecke  $\{f(e^{i\vartheta}), f(-e^{i\vartheta})\}$  gemeinsam. Dann gelten die Ungleichungen ( $a_0 = 0$ ):

$$|a_{n+2} e^{(n+2)i\vartheta} - a_n e^{ni\vartheta}| \leq 2|a_1|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \dots \quad (1)$$

und also

$$|a_n| \leq n|a_1|.$$

**Beweis.** Evident existieren reelle Zahlen  $\mu$  und  $\alpha$ , derart, dass

$$\begin{aligned} \Im(f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) &\geq 0 \text{ für } \Im(z e^{-i\vartheta}) \geq 0, |z| = 1. \\ \Im(f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) &\leq 0 \text{ für } \Im(z e^{-i\vartheta}) \leq 0, |z| = 1. \end{aligned}$$

Für alle  $|z| = 1$  gilt also

$$\begin{aligned} \Im\{\sin(\arg z - \vartheta) \cdot (f(z) e^{-i\mu} - i\alpha)\} &\geq 0, \text{ oder} \\ \Re\{(z^{-1} e^{i\vartheta} - z e^{-i\vartheta}) \cdot (f(z) e^{-i\mu} - i\alpha)\} &\geq 0. \dots \quad (2) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Oeversikt av Finska-Vetensk. Soc.-Förh., Bd. 63 (A) Nr 6 (1920—1921).

Weiter ist für  $|z| = 1$ :

$$\Re(iaz e^{-i\vartheta} + ia z^{-1} e^{i\vartheta}) = 0. \quad (3)$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (z^{-1} e^{i\vartheta} - z e^{-i\vartheta})(f(z) e^{-i\mu} - ia) + iaz e^{-i\vartheta} + ia z^{-1} e^{i\vartheta} = \\ &= a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} + z(a_2 e^{i(\vartheta-\mu)} + 2ia e^{-i\vartheta}) + \sum_{n=2}^{\infty} z^n (a_{n+1} e^{i(\vartheta-\mu)} - a_{n-1} e^{-i(\vartheta+\mu)}) \end{aligned}$$

ist für  $|z| < 1$  regulär und für  $|z| \leq 1$  stetig. Wegen (2) und (3) genügt  $\Phi(z)$  der Ungleichung  $\Re \Phi(z) \geq 0$ . Nach dem CARATHÉODORYSchen Satz betreffs Funktionen mit positivem Realteil ist jetzt:

$$\begin{aligned} \Re a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} &\geq 0, \text{ und} \\ |a_2 e^{i(\vartheta-\mu)} + 2ia e^{-i\vartheta}| &\leq 2 \Re a_1 e^{i(\vartheta-\mu)}, \\ |a_{n+1} e^{i(\vartheta-\mu)} - a_{n-1} e^{-i(\vartheta+\mu)}| &\leq 2 \Re a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} \quad (n \geq 2). \quad (4) \end{aligned}$$

Die Behauptung erfolgt aus (4) und der BIEBERBACHSchen Ungleichung  $|a_2| \leq 2|a_1|$ .

*Bemerkung:* Ist  $f(z)$  in  $|z| < 1$  regulär, in  $|z| \leq 1$  stetig und schlicht, und setzt man die  $a_n$  als reell voraus, so kann man  $\vartheta = \mu = \alpha = 0$  nehmen, und man erlangt die Ungleichungen von J. DIEUDONNÉ<sup>1)</sup>

$$|a_{n+2} - a_n| \leq 2|a_1|, \quad |a_n| \leq n|a_1| \quad (n \geq 0).$$

**Satz.**

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

sei regulär und schlicht in  $|z| < 1$ , das Bild  $G$  von  $|z| < 1$  in der  $w$ -Ebene gehöre zur Klasse  $S$  in Bezug auf  $a$  (bezw.  $l$ ). Dann gibt es eine reelle Zahl  $\vartheta$  derart, dass die Ungleichungen (1) erfüllt sind.

**Beweis.** Wir definieren zuerst eine Unterklasse der Klasse  $S$ : wir sagen, dass ein Gebiet  $G$  in Bezug auf  $a$  (bezw.  $l$ ) zur Klasse  $S'$  gehört, wenn

1.  $G$  in Bezug auf  $a$  (bezw.  $l$ ) zu  $S$  gehört,
2. Der Rand von  $G$  eine geschlossene doppelpunktfreie Jordankurve  $J$  ist,
3.  $a$  nicht auf  $J$  liegt, und
4. jede Gerade durch  $a$  (bezw.  $l$ ), die  $J$  in zwei verschiedenen Punkten trifft, die dazwischen gelegene Strecke mit  $G$  gemeinsam hat<sup>2)</sup>.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass  $G$  in Bezug auf einen Punkt  $a$  zu  $S'$  gehört (im Fall einer gegebenen Richtung  $l$  verläuft

<sup>1)</sup> J. DIEUDONNÉ: C. R. Acad. Sc. Paris, 192, 1148—1150 (1931). W. ROGOSINSKI. Math. Zeitschr. 35, 93—121 (1932). O. SZASZ: Jhrber. d. Deutsch. Math. Verein., 42, 73—75 (1932).

<sup>2)</sup> Diese letzte Beschränkung hat dann und nur dann Zweck, wenn  $a$  nicht in  $G$  liegt.

der Beweis ebenso). Die Abbildungsfunktion  $f(z)$  ist dann stetig und schlicht in  $|z| \leq 1$  und die Funktion

$$g(\phi) = \frac{f(e^{i\phi}) - a}{f(-e^{i\phi}) - a}$$

ist für alle reelle  $\phi$  stetig und  $\neq 0$ .  $\Im g(\phi)$  verschwindet für wenigstens einen Wert von  $\phi$ . Ist nämlich  $\Im g(0) \neq 0$ , so haben  $\Im g(0)$  und  $\Im g(\pi) = \Im(g(0))^{-1}$  verschiedene Vorzeichen; wegen der Stetigkeit von  $\Im g(\phi)$  gibt es also ein  $\vartheta$  im Intervall  $0 < \phi < \pi$  mit  $\Im g(\vartheta) = 0$ .

Die drei verschiedenen Punkte  $f(e^{i\vartheta})$ ,  $f(-e^{i\vartheta})$  und  $a$  liegen dann in einer Geraden; da  $G$  zu  $S'$  gehört, sind jetzt die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt und die Ungleichungen (1) bewiesen.

Falls  $G$  in Bezug auf  $a$  zu  $S$ , aber nicht zu  $S'$  gehört, so gibt es eine Folge von Gebieten

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \dots \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = G \text{ und } 0 \in G_1,$$

welche alle zu  $S'$  gehören. Der Beweis dieser Behauptung lässt sich leicht geben mittels Annäherung durch passend gewählte Polygone.

Bei jedem  $k \geq 1$  gibt es eine Funktion

$$f_k(z) = a_1^{(k)} z + a_2^{(k)} z^2 + a_3^{(k)} z^3 + \dots$$

die  $|z| < 1$  schlicht auf  $G_k$  abbildet, während  $\frac{a_1^{(k)}}{a_1} > 0$  ist. Der Limesatz über schlichte Abbildungen besagt jetzt, dass  $f_k(z)$  in  $|z| \leq r$  gleichmässig gegen  $f(z)$  konvergiert für jedes  $r < 1$ , sodass für alle  $n$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(k)} = a_n. \quad \dots \quad (5)$$

Bei jedem  $k$  wählen wir wie oben eine  $\vartheta_k$  mit  $0 \leq \vartheta_k < \pi$  und  $\Im g_k(\vartheta_k) = 0$ . Die beschränkte Folge  $\vartheta_k$  hat wenigstens einen Häufungspunkt  $\vartheta$ , wir können also eine Teilfolge  $\vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, \vartheta_{k_3}, \dots$  wählen, mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \vartheta_{k_m} = \vartheta. \quad \dots \quad (6)$$

Für jedes  $m$  gelten die Ungleichungen (1) mit  $\vartheta = \vartheta_{k_m}$ , also für jedes  $m \geq 1$  und  $n \geq 0$

$$|a_{n+2}^{(k_m)} e^{(n+2)i\vartheta_{k_m}} - a_n^{(k_m)} e^{ni\vartheta_{k_m}}| \leq 2 |a_1^{(k_m)}|. \quad \dots \quad (7)$$

Die Behauptung erfolgt jetzt durch Limesübergang ( $m \rightarrow \infty$ ) aus (5), (6) und (7).