Ein Satz über schlichte Funktionen

Mathematics. — *Ein Satz über schlichte Funktionen.* Von N. G. DE BRUIJN. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

Bekanntlich hat R. NEVANLINNA[1]) bewiesen, dass eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die den Einheitskreis schlicht auf einen Stern mit $w = 0$ als Mittelpunkt abbildet, den Ungleichungen $|a_n| \leqslant n$ $(n = 1, 2, \dots)$ genügt. In dieser Note wird dieser Satz ausgedehnt auf etwas allgemeinere Gebiete, wovon die wichtigsten Sterne mit beliebigen Mittelpunkten sind.

Wir sagen, dass ein Gebiet G in Bezug auf einen Punkt a (bezw. eine Richtung l) zur Klasse S gehört, wenn jede Gerade durch a (bezw. $//l$) höchstens eine Strecke mit G gemeinsam hat. Die Klasse S umfasst die Sterngebiete, denn wenn a im Innern von G liegt, so ist G ein Stern in Bezug auf a. Für die S-Gebiete beweise ich die NEVANLINNAschen Ungleichungen und noch etwas mehr.

Schicken wir erst einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz.

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

sei regulär in $|z| < 1$, stetig und schlicht in $|z| \leqslant 1$; ϑ sei eine reelle Zahl. Die Gerade durch die Punkte $f(e^{i\vartheta})$ und $f(-e^{i\vartheta})$ in der w-Ebene habe mit dem Bilde von $|z| < 1$ nur die Strecke $\{f(e^{i\vartheta}), f(-e^{i\vartheta})\}$ gemeinsam. Dann gelten die Ungleichungen $(a_0 = 0)$:

$$|a_{n+2} e^{(n+2)i\vartheta} - a_n e^{ni\vartheta}| \leqslant 2|a_1|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und also

$$|a_n| \leqslant n |a_1|.$$

Beweis. Ersichtlich existieren reelle Zahlen μ und α, derart, dass

$$\Im(f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \geqslant 0 \text{ für } \Im(z e^{-i\vartheta}) \geqslant 0, |z| = 1.$$
$$\Im(f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \leqslant 0 \text{ für } \Im(z e^{-i\vartheta}) \leqslant 0, |z| = 1.$$

Für alle $|z| = 1$ gilt also

$$\Im\{ \sin(\arg z - \vartheta) . (f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \} \geqslant 0, \text{ oder}$$
$$\Re\{ (z^{-1} e^{i\vartheta} - z e^{-i\vartheta}) . (f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \} \geqslant 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

---

[1]) Oeversikt av Finska-Vetensk. Soc.-Förh., Bd. 63 (A) Nr 6 (1920—1921).

Weiter ist für $|z|=1$:

$$\Re\,(i a z e^{-i\vartheta} + i a z^{-1} e^{i\vartheta}) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Funktion

$$\Phi(z) = (z^{-1} e^{i\vartheta} - z e^{-i\vartheta})(f(z) e^{-i\mu} - i a) + i a z e^{-i\vartheta} + i a z^{-1} e^{i\vartheta} =$$

$$= a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} + z(a_2 e^{i(\vartheta-\mu)} + 2 i a e^{-i\vartheta}) + \sum_{n=2}^{\infty} z^n (a_{n+1} e^{i(\vartheta-\mu)} - a_{n-1} e^{-i(\vartheta+\mu)})$$

ist für $|z|<1$ regulär und für $|z|\leqq 1$ stetig. Wegen (2) und (3) genügt $\Phi(z)$ der Ungleichung $\Re\,\Phi(z) \geqq 0$. Nach dem CARATHÉODORYschen Satz betreffs Funktionen mit positivem Realteil ist jetzt:

$$\Re\, a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} \geqq 0, \text{ und}$$

$$|a_2 e^{i(\vartheta-\mu)} + 2 i a e^{-i\vartheta}| \leqq 2\,\Re\, a_1 e^{i(\vartheta-\mu)},$$

$$|a_{n+1} e^{i(\vartheta-\mu)} - a_{n-1} e^{-i(\vartheta+\mu)}| \leqq 2\,\Re\, a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} \, (n \geqq 2).. \quad \ldots \quad (4)$$

Die Behauptung erfolgt aus (4) und der BIEBERBACHschen Ungleichung $|a_2| \leqq 2|a_1|$.

Bemerkung: Ist $f(z)$ in $|z|<1$ regulär, in $|z|\leqq 1$ stetig und schlicht, und setzt man die a_n als reell voraus, so kann man $\vartheta=\mu=\alpha=0$ nehmen, und man erlangt die Ungleichungen von J. DIEUDONNÉ [1])

$$|a_{n+2} - a_n| \leqq 2|a_1|, \quad |a_n| \leqq n|a_1|. \, (n \geqq 0).$$

Satz.

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

sei regulär und schlicht in $|z|<1$, das Bild G von $|z|<1$ in der w-Ebene gehöre zur Klasse S in Bezug auf a (bezw. l). Dann gibt es eine reelle Zahl ϑ derart, dass die Ungleichungen (1) erfüllt sind.

Beweis. Wir definieren zuerst eine Unterklasse der Klasse S: wir sagen, dass ein Gebiet G in Bezug auf a (bezw. l) zur Klasse S' gehört, wenn

1. G in Bezug auf a (bezw. l) zu S gehört,
2. Der Rand von G eine geschlossene doppelpunktfreie Jordankurve J ist,
3. a nicht auf J liegt, und
4. jede Gerade durch a (bezw. $//l$), die J in zwei verschiedenen Punkten trifft, die dazwischen gelegene Strecke mit G gemeinsam hat [2]).

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass G in Bezug auf einen Punkt a zu S' gehört (im Fall einer gegebenen Richtung l verläuft

[1]) J. DIEUDONNÉ: C. R. Acad. Sc. Paris, **192**, 1148—1150 (1931). W. ROGOSINSKI. Math. Zeitschr. **35**, 93—121 (1932). O. SZÁSZ: Jhrber. d. Deutsch. Math. Verein., **42**, 73—75 (1932).

[2]) Diese letzte Beschränkung hat dann und nur dann Zweck, wenn a nicht in G liegt.

der Beweis ebenso). Die Abbildungsfunktion $f(z)$ ist dann stetig und schlicht in $|z| \leqq 1$ und die Funktion

$$g(\Phi) = \frac{f(e^{i\Phi}) - a}{f(-e^{i\Phi}) - a}$$

ist für alle reelle Φ stetig und $\neq 0$. $\Im\, g(\Phi)$ verschwindet für wenigstens einen Wert von Φ. Ist nähmlich $\Im\, g(0) \neq 0$, so haben $\Im\, g(0)$ und $\Im\, g(\pi) = \Im\,(g(0))^{-1}$ verschiedene Vorzeichen; wegen der Stetigkeit von $\Im\, g(\Phi)$ gibt es also ein ϑ im Intervall $0 < \Phi < \pi$ mit $\Im\, g(\vartheta) = 0$.

Die drei verschiedenen Punkte $f(e^{i\vartheta})$, $f(-e^{i\vartheta})$ und a liegen dann in einer Geraden; da G zu S' gehört, sind jetzt die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt und die Ungleichungen (1) bewiesen.

Falls G in Bezug auf a zu S, aber nicht zu S' gehört, so gibt es eine Folge von Gebieten

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots \text{ mit } \lim_{n\to\infty} G_n = G \text{ und } 0 \in G_1,$$

welche alle zu S' gehören. Der Beweis dieser Behauptung lässt sich leicht geben mittels Annäherung durch passend gewählte Polygone.

Bei jedem $k \geqq 1$ gibt es eine Funktion

$$f_k(z) = a_1^{(k)} z + a_2^{(k)} z^2 + a_3^{(k)} z^3 + \ldots$$

die $|z| < 1$ schlicht auf G_k abbildet, während $\frac{a_1^{(k)}}{a_1} > 0$ ist. Der Limessatz über schlichte Abbildungen besagt jetzt, dass $f_k(z)$ in $|z| \leqq r$ gleichmässig gegen $f(z)$ konvergiert für jedes $r < 1$, sodass für alle n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a_n. \qquad (5)$$

Bei jedem k wählen wir wie oben eine ϑ_k mit $0 \leqq \vartheta_k < \pi$ und $\Im\, g_k(\vartheta_k) = 0$. Die beschränkte Folge ϑ_k hat wenigstens einen Haüfungspunkt ϑ, wir können also eine Teilfolge $\vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, \vartheta_{k_3}, \ldots$ wählen, mit

$$\lim_{m\to\infty} \vartheta_{k_m} = \vartheta. \qquad (6)$$

Für jedes m gelten die Ungleichungen (1) mit $\vartheta = \vartheta_{k_m}$, also für jedes $m \geqq 1$ und $n \geqq 0$

$$|a_{n+2}^{(k_m)} e^{(n+2)i\vartheta_{k_m}} - a_n^{(k_m)} e^{ni\vartheta_{k_m}}| \leqq 2\,|a_1^{(k_m)}|. \qquad (7)$$

Die Behauptung erfolgt jetzt durch Limesübergang $(m \to \infty)$ aus (5), (6) und (7).