

## Niet-lineaire analyse van snap-through gedrag

**Citation for published version (APA):**

Bogaers, H. P. J. M. (1991). *Niet-lineaire analyse van snap-through gedrag*. (DCT rapporten; Vol. 1991.095). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1991

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

**Niet-lineaire analyse van  
snap-through gedrag**

**WFW-rapport 91.095**

**H.P.J.M. Bogaers**

---

naam: H.P.J.M. Bogaers  
datum: 21 oktober 1991  
begeleider: dr.ir. P.J.G. Schreurs

## Samenvatting

Tijdens het oplossen van niet-lineaire problemen m.b.v. de E.E.M. stuit men vaak op fenomenen als snap-back, snap-through, bifurcatie en limietpunten. Deze fenomenen kunnen het gevolg zijn van geometrische niet-lineariteiten (grote verplaatsingen, vervormingen of rotaties) of van fysische niet-lineariteiten (lokalisatie van damage of softening). In de loop der jaren zijn verscheidene methoden ontwikkeld met allen een andere invalshoek. Een vrij recente methode is die van de Borst<sup>3</sup>, de indirecte verplaatsingscontrole.

Deze aan de Newton-Raphson methode verwante numerieke techniek is geschikt voor het passeren van limiet- en bifurcatiepunten evenals het traceren van snap-back en snap-through gedrag. De methode is incrementeel/iteratief van aard, d.w.z. dat de belasting incrementeel wordt voorgeschreven waarna binnen het increment naar de oplossing wordt geïtereerd.

In een E.E.M. programma is het algoritme voor het passeren van het limietpunt, het snap-through en het snap-back gedrag geïmplementeerd. Het algoritme voor het passeren van bifurcatiepunten is niet geïmplementeerd doch wel beschreven in de theorie.

Voor het testen van het algoritme zijn twee testproblemen opgezet: één waarbij snap-through optreedt en één waarbij naar verwachting bifurcatie optreedt.

**INHOUDSOPGAVE**

1. Probleemdefinitie .....	1
2. Indirecte verplaatsingscontrole .....	3
2.1    Stabiliteitscriterium	3
2.2    Eindige Elementen formulering	4
2.3.1  Voortgang na een bifurcatiepunt, limietpunten	8
2.3.2  Bifurcatie punten	9
2.3.3  Het passeren van bifurcatiepunten	11
3. Beschrijving oplosroutine .....	13
3.1    De oplosroutine	13
4. Testprobleem .....	17
4.1    Testprobleem 1	18
4.2    Testprobleem 2	21
4.3    Voorbeelden uit de literatuur	22
4.3.1  Bifurcatie probleem	22
4.3.2  Post-limiet probleem	23
5. Conclusie .....	26
5.1    Aanbevelingen	27
6. Referenties .....	28
7. Symbolenlijst .....	29

**Appendices:**

- 1 - Conditie voor bifurcatie- en limietpunten
- 2 - Voortgang na een bifurcatiepunt
- 3 - Matlab file testprobleem 1

**Figurenlijst:**

figuur:

- 1.1 - niet-lineair gedrag, bron: Bergan *et al.*<sup>2</sup>
- 2.1 - belasting 3D-model
- 2.2 - fysische interpretatie incr. verplaatsingsstap
- 2.3 - limietpunt, bron: de Borst<sup>3</sup>
- 2.4 - bifurcatiepunten en postbifurcatiegedrag, bron: de Borst<sup>3</sup>
- 3.1 - monotoon stijgende functie
- 3.2 - monotoon stijgende functie en limietpunt
- 3.3 - monotoon dalende functie
- 3.4 - snap-back gedrag
- 4.1 - testprobleem 1
- 4.2 -  $u_{32}=f(F_3)$
- 4.3<sup>a t/m c</sup> - invloed op increment verkleining
- 4.4 - testprobleem 2
- 4.5 - balkelement model, bron: de Borst<sup>3</sup>
- 4.6 - eigenwaarde analyse, bron: de Borst<sup>3</sup>
- 4.7 - balkmodel, bron: de Borst<sup>3</sup>
- 4.8 - vervormde balkmodel, bron: de Borst<sup>3</sup>
- 4.9 - belastings-verplaatsingscurve, bron: de Borst<sup>3</sup>

# Hoofdstuk 1

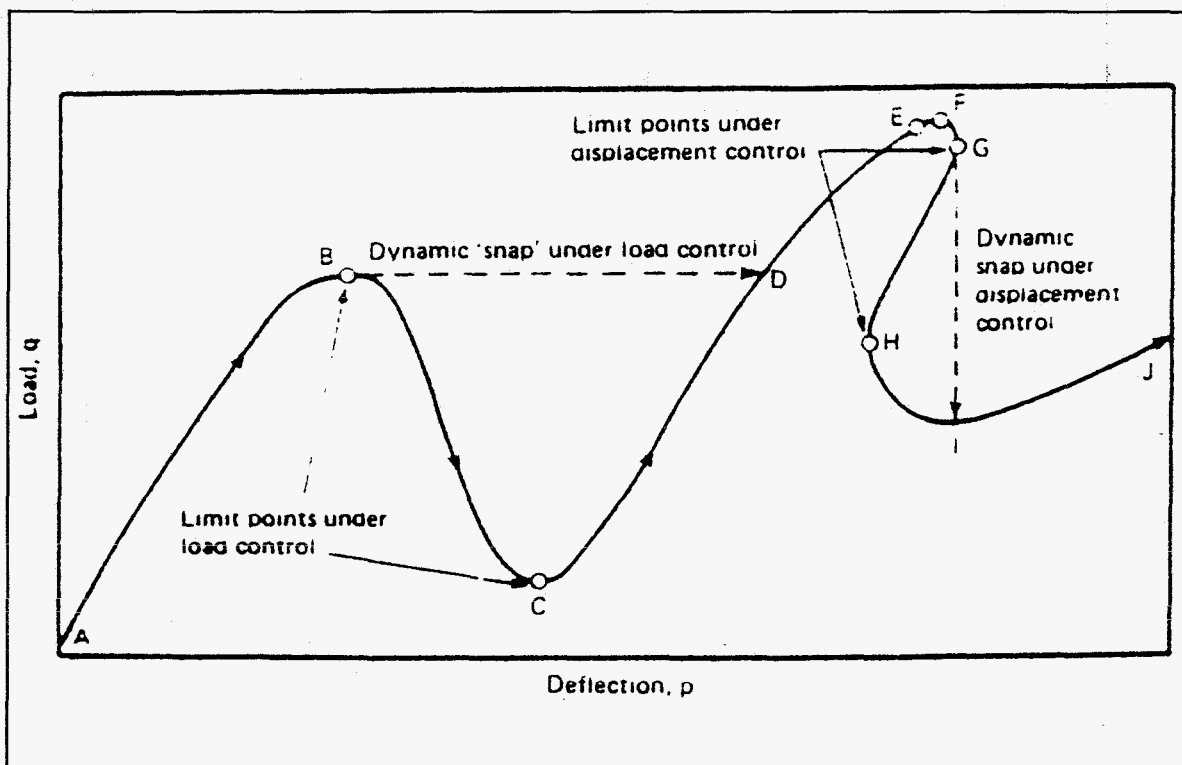
## Probleemdefinitie

Snap-through en snap-back fenomenen zijn één van de gecompliceerde problemen in de niet-lineaire analyse (zie figuur 1).

Voor de meeste praktische problemen is het niet noodzakelijk om het gehele kracht-verplaatsingspad te kunnen traceren. In het algemeen is het bepalen van de belasting bij het eerste limietpunt voldoende. Echter, zonder analysetechnieken die het limietpunt kunnen passeren is het bepalen van dit punt meestal onmogelijk of is de eventuele uitkomst onbetrouwbaar (i.v.m. divergentie van de oplossing). Vaak wordt breuk van het materiaal als oorzaak gegeven voor het divergeren van het oplosproces terwijl de eigenlijke oorzaak het gevolg is van het falen van de oplosroutine.

Bij andere problemen kan de analyse zijn gericht op een component uit een constructie. Hier moet men de limiet- en bifurcatiepunten kunnen passeren.

Bij het analyseren is het mogelijk de complexiteit van 'snap-analyse' te voorkomen door het toepassen van voorgeschreven verplaatsing (verplaatsingscontrole).



figuur 1.1: niet-lineair gedrag

Bij voorgeschreven verplaatsing, zie figuur 1, waarbij de verplaatsing  $\mathbf{p}$  wordt voorgeschreven kan het limietpunt  $\mathbf{B}$  zonder problemen worden gepasseerd waarna zich tot aan  $\mathbf{E}$  geen problemen voordoen. Deze methode loopt echter vast net voor of op het limietpunt  $\mathbf{G}$ . Dit hoeft niet erg te zijn indien men mag concluderen: na het maximum  $\mathbf{F}$  is er een plotselinge drop in de belasting  $\mathbf{q}$ .

Het niet-lineaire gedrag in  $\mathbf{G}$  kan echter ook aanleiding geven tot problemen in de incrementeel/iteratieve oplossings-procedure in  $\mathbf{E}$ . In dit geval is geen informatie beschikbaar over de oorzaak van het falen en is het zeker niet bekend of het materiaal is bezweken of dat de procedure op numerieke gronden is vastgelopen!

In de loop der tijd zijn verscheidene algoritmen ontwikkelt die allen vanuit een andere optiek het niet-lineaire gedrag proberen te beschrijven. Maewell en Nachbar<sup>1</sup> zien de oplossing in het aanpassen van de voorgeschreven verplaatsing afhankelijk van het convergeren of divergeren van de iteratieve oplossingsprocedure.

Bergan *et.al*<sup>2</sup> gebruikt de huidige stijfheidsparameter ( $= \det(\mathbf{K}_0)$ ) voor het bepalen van de positie van het lokale minimum of maximum. Dan onderdrukt hij het evenwicht van het limietpunt en verandert het teken van de opgelegde belasting als gevolg van het veranderen van het teken van de determinant van de stijfheidsmatrix.

De methode die in dit verslag wordt beschreven is gebaseerd op de methode van de indirecte verplaatsingscontrole ( zie de Borst<sup>3</sup>) en berekend een verplaatsing afhankelijk van de belasting, gedrag van het kracht-verplaatsingsdiagram etc..

Met behulp van deze 'indirecte verplaatsingscontrole' is het nu mogelijk om het gehele pad **ABCDEFGHI** te traceren zonder dat er numerieke problemen ontstaan.

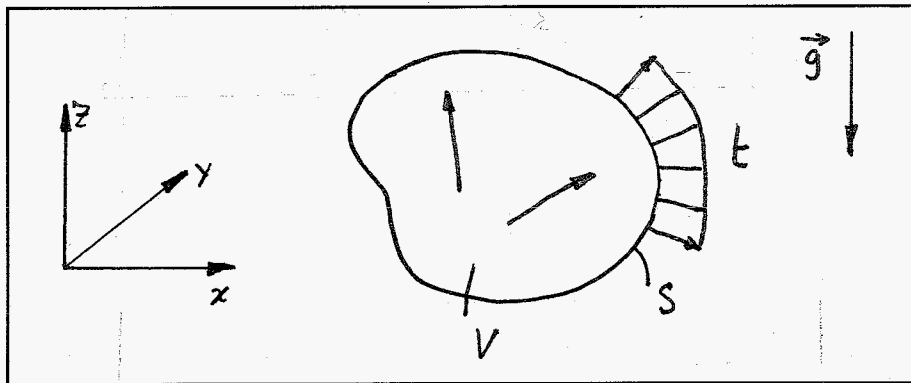
Daarnaast wordt een uitbreiding gemaakt naar bifurcatie-problemen waarbij meerdere evenwichtspaden op kunnen treden.

## Hoofdstuk 2

### Indirecte verplaatsingscontrole

#### 2.1 Stabiliteitscriterium

De totale potentiële energie van een lichaam in een ruimte kan worden geschreven als de som van de inwendige energie en de potentiaal van de uitwendige belasting.



figuur 2.1: belasting 3D lichaam

Het lichaam wordt uitwendig belast door een belastingsvector  $\mathbf{t}$  over de rand  $\mathbf{S}$  en inwendig belast door enerzijds de inwendige spanningen en anderzijds door de massakrachten.

De energiesom ziet er als volgt uit

$$U = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV - \int_S t_i u_i dS - \int_V \rho g_i u_i dV \quad (2.1)$$

Variatie van (2.1), ontwikkeling van de niet-lineaire spanningstensor  $\sigma_{ij}$  naar de tweede orde en gebruik makend van de relaties  $\delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \delta t$  en  $\delta(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) \delta t$  levert

$$\delta U = \int_V (\sigma_{ij} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij} \delta t) \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \delta t \right) dV - \int_S t_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta t dS - \int_V \rho g_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta t dV \quad (2.2)$$



Uit het principe van virtuele arbeid volgt

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \quad (2.3)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V \rho g_i \delta u_i dV$$

Gebruik makend van de variaties voor  $\delta u$  en  $\delta(\partial u_i / \partial x_j)$  levert

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \delta t dV = \int_S t_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta t dS + \int_V \rho g_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta t dV \quad (2.4)$$

Substitutie van (2.4) in (2.2) levert de uitdrukking:

$$\delta U = \frac{1}{2} (\delta t)^2 \int_V \dot{\sigma}_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} dV \quad (2.5)$$

waarbij het systeem in evenwicht verkeert als  $\delta U > 0$ .

Dit levert de randvoorwaarde:

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \geq 0 \quad (2.6)$$

Schrijven we de energievergelijking (2.2) uit en substitueren we voor  $\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{D}} \underline{\dot{\varepsilon}}$ , dan levert dit de volgende uitdrukking op:

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_V D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} d\tau \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V \rho g_i \delta u_i dV - \int_V \sigma_{ij}^{t-\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2.7)$$

Deze uitdrukking is in gelineariseerde vorm opgenomen. De geometrische niet-lineaire formulering is in de beschrijving van het element opgenomen.

## 2.2 Eindige Elementen formulering

De essentie van de E.E.M.-benadering is een volume te verdelen in discrete elementen en per element de onbekende grootheden te interpoleren tussen de bekende knooppuntswaarden. Willen we (2.5) discretiseren, dan moeten we het verplaatsingsveld  $\mathbf{u}$  en het rekveld  $\varepsilon$  als volgt interpoleren:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \underline{H} \mathbf{a} \\ \varepsilon = \underline{L} \mathbf{u} \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon = \underline{L} \underline{H} \mathbf{a} = \underline{B} \mathbf{a} \quad (2.8)$$

Substitueren we deze interpolatie functies in (2.7) en stellen we dat deze vergelijking moet gelden voor iedere willekeurige virtuele verplaatsing  $\delta \mathbf{a}$  dan volgt hieruit een set algebraïsche vergelijkingen:

$$\int_V \int_{t-\Delta t}^t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \dot{\mathbf{a}} d\tau dV = \int_S \underline{H}^T \mathbf{t} dS + \int_V \rho \underline{H}^T \mathbf{g} dV - \int_V \underline{B}^T \underline{\alpha}_0 dV \quad (2.9)$$

Hierin zien we dat het linkerlid zowel volume- als tijdsafhankelijk is. Voor het tijdsafhankelijke deel kunnen integratiemethoden als voorwaartse Euler- en Runge-Kutta methoden worden toegepast.

Na numerieke integratie van deze term resulteert in de volgende vergelijking:

$$\int_V \int_{t-\Delta t}^t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \dot{\mathbf{a}} d\tau dV = \int_V \underline{B}^T \underline{D}_0 \underline{B} dV \Delta \mathbf{a} \quad (2.10)$$

waarbij  $\underline{D}_0$  gedefinieerd aan het begin van iedere tijdsstap.

Introduceren we de volgende notatie

$$\underline{K}_0 = \int_V \underline{B}^T \underline{D}_0 \underline{B} dV \quad (2.11)$$

voor de stijfheidsmatrix aan het begin van iedere belastingsstap en

$$\mathbf{q} = \int_S \underline{H}^T \mathbf{t} dS + \int_V \rho \underline{H}^T \mathbf{g} dV \quad (2.12)$$

voor de externe belastingsvector.

Passen we proportionele belasting toe, dan vervangen we  $\mathbf{q}$  door  $\mu \mathbf{q}^*$  met  $\mathbf{q}^*$  een genormaliseerde belastingsvector met dezelfde richting als  $\mathbf{q}$  en met  $\mu$  als een belastingsparameter.

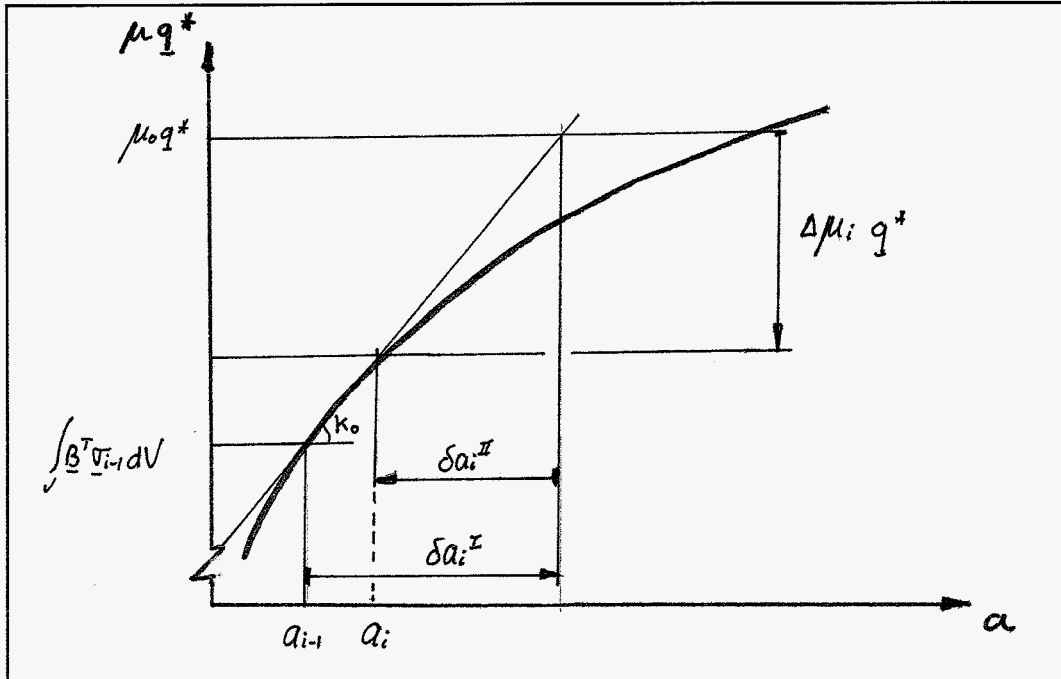
Met de volgende definitie:

$$\mathbf{p}_0 = \mu_0 \mathbf{q}^* - \int_V \underline{B}^T \underline{\alpha}_0 dV \quad (2.13)$$

vinden we voor de initiële schatting van de verplaatsingsstap  $\Delta \mathbf{a}_i$  binnen een belastingsincrement:

$$\Delta \mathbf{a}_1 = \underline{K}_0^{-1} [\Delta \mu_1 \mathbf{q}^* + \mathbf{p}_0] \quad (2.14)$$

Voor een fysische interpretatie zie figuur 2.2.



figuur 2.2: fysische interpretatie incrementele verplaatsingsstap

De belastingsparameter  $\mu_0$  en  $\Delta \mu_1$  zijn niet identiek!

$\mu_0$  is de waarde van de totale belastingsparameter aan het begin van het huidige belastingsincrement en  $\Delta \mu_1$  is de grootte van het belastingsincrement in de eerste iteratie aan het begin van de huidige stap.

Door voorwaartse integratie van (2.9) zal  $\Delta a_1$  meestal niet resulteren in een spanningsveld  $\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta \sigma_1$  dat tot evenwicht leidt.

Om tot een evenwichtstoestand te convergeren zal o.h.a. een extra correctie moeten worden toegepast in de vorm

$$\delta a_2 = \underline{K}_1^{-1} [ \Delta \mu_2 q^* + p_1 ] \tag{2.15}$$

met  $\underline{K}_1$  de mogelijk ge-update stijfheidsmatrix (afhankelijk van het toegepaste iteratie schema).

$\delta$  houdt niet langer een virtuele grootheid in maar een increment.

De correctie  $\delta \mathbf{a}_2$  wordt nu aan de eerste schatting van de nodale verplaatsing  $\Delta \mathbf{a}_1$  toegevoegd zodat we voor de incrementele verplaatsing krijgen:

$$\Delta \mathbf{a}_2 = \Delta \mathbf{a}_1 + \delta \mathbf{a}_2 \quad (2.16)$$

Dit proces kan worden herhaald totdat convergentie optreedt.

Voor iteratie  $i$  kan het proces worden omschreven tot:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{i-1} &= \mu_0 \mathbf{q}^* - \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma}_{i-1} dV \\ \delta \mathbf{a}_i &= \underline{K}_{i-1}^{-1} [\Delta \mu_i \mathbf{q}^* + \mathbf{p}_{i-1}] \\ \Delta \mathbf{a}_i &= \Delta \mathbf{a}_{i-1} + \delta \mathbf{a}_i \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Het verschil met andere Newton-Raphson achtige methoden is de bijdrage van de term  $\Delta \mu_i \mathbf{q}^*$  waarin  $\Delta \mu_i$  nog een onbekende scalar.

Deze scalar kan worden bepaald m.b.v. de volgende constraint vergelijking:

$$\Delta \mathbf{a}_i^T \Delta \mathbf{a}_i = \Delta l^2 \quad (2.18)$$

Formule (2.17<sup>b</sup>) kunnen we voor de eenvoud beter omschrijven naar de volgende vorm:

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{a}_i &= \delta \mathbf{a}_i^I + \Delta \mu_i \delta \mathbf{a}_i^{II} \\ \text{met:} \\ \delta \mathbf{a}_i^I &= \underline{K}_{i-1}^{-1} \mathbf{p}_{i-1} \\ \delta \mathbf{a}_i^{II} &= \underline{K}_{i-1}^{-1} \mathbf{q}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Substitutie van (2.19) in (2.18) levert na linearisatie de volgende uitdrukking voor  $\Delta \mu_i$ :

$$\Delta \mu_i = - \frac{\Delta \mathbf{a}_{i-1}^T \delta \mathbf{a}_i^I}{\Delta \mathbf{a}_{i-1}^T \delta \mathbf{a}_i^{II}} \quad (2.20)$$

### 2.3.1 Voortgang na een bifurcatiepunt, limietpunten

Een evenwichtstoestand is onvoorwaardelijk stabiel als bij een kleine verstoring de responsie klein blijft.

In appendix A is afgeleid dat een systeem stabiel is onder dode belasting als geldt:

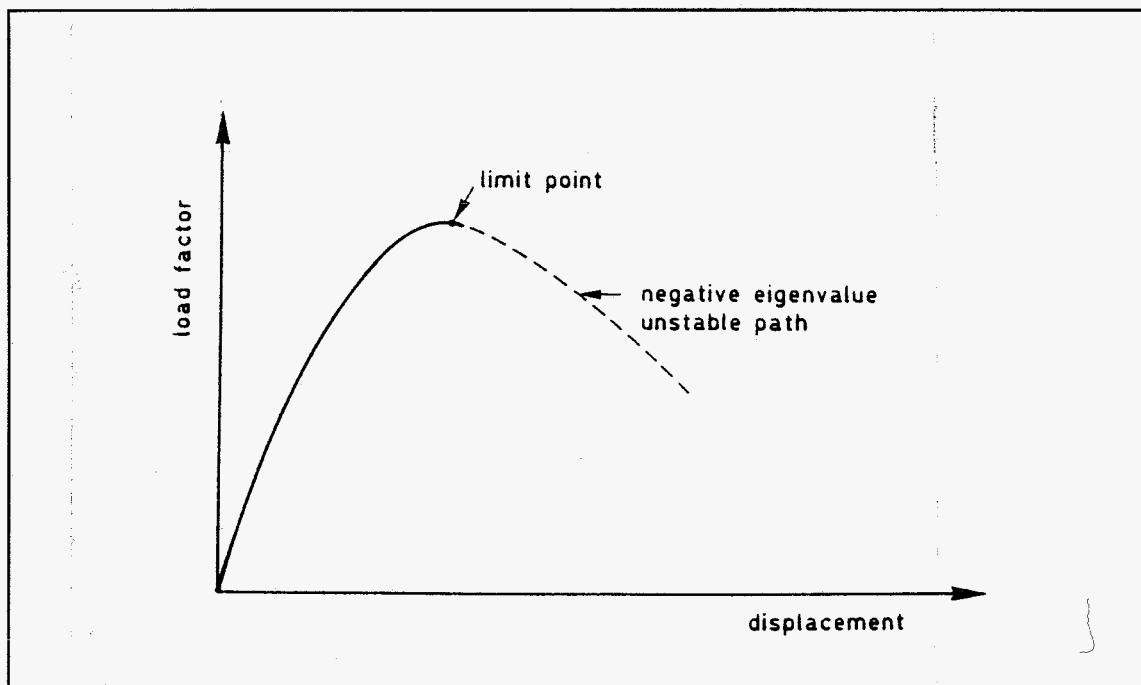
$$\det(\underline{K}) > 0 \quad (2.21)$$

Men kan dit fysisch interpreteren als een monotoon stijgend verband tussen de uitwendige belasting  $\mathbf{f}$  en de knooppuntsverplaatsingen  $\mathbf{u}$ .

In het geval dat geldt

$$\det(\underline{K}) = 0 \quad (2.22)$$

heeft men te maken met een limietpunt, zie figuur 2.3



figuur 2.3: limietpunt

In de berekening wordt een limietpunt gedetecteerd door het nul worden van de  $\det(\underline{K})$  (of  $\mu=0$ , zie A.12<sup>a</sup>).

Detecteert men een limietpunt dan dient het belastingsincrement van teken te veranderen omdat anders na het passeren van dit punt geen juiste oplossing van het stelsel wordt gevonden. Na het passeren van het limietpunt ontstaan negatieve eigenwaarden  $\lambda_i$  van  $\underline{K}$ .

### 2.3.2 Bifurcatie punten

Er zijn twee mogelijke interpretaties van negatieve eigenwaarden mogelijk.

De eerste is dat we een limietpunt hebben gepasseerd wat inhoudt dat de belasting afneemt. In dit geval vinden we negatieve eigenwaarden welke geassocieerd worden met een afnemend evenwichtspad, zie figuur 2.4<sup>b</sup>.

De andere mogelijkheid is dat negatieve eigenwaarden behoren tot alternatieve evenwichtspaden en dat we een bifurcatiepunt hebben gepasseerd.

Ook hier bestaan wederom twee varianten, te weten, het fundamenteel evenwichtspad is dalend of stijgend.

Wanneer het pad stijgend is, zie figuur 2.4<sup>a</sup>, kunnen alle  $\mathbf{m}$  optredende eigenwaarden toegekend worden aan  $\mathbf{m}$  alternatieve evenwichtspaden.

Wanneer het pad dalend is, zie figuur 2.4<sup>b</sup>, wordt één negatieve eigenwaarde geassocieerd met het fundamentele pad en de overige ( $\mathbf{m}-1$ ) met de alternatieve paden.

Een bifurcatiepunt wordt gekenmerkt door de volgende eigenschap (zie A.12<sup>b</sup>):

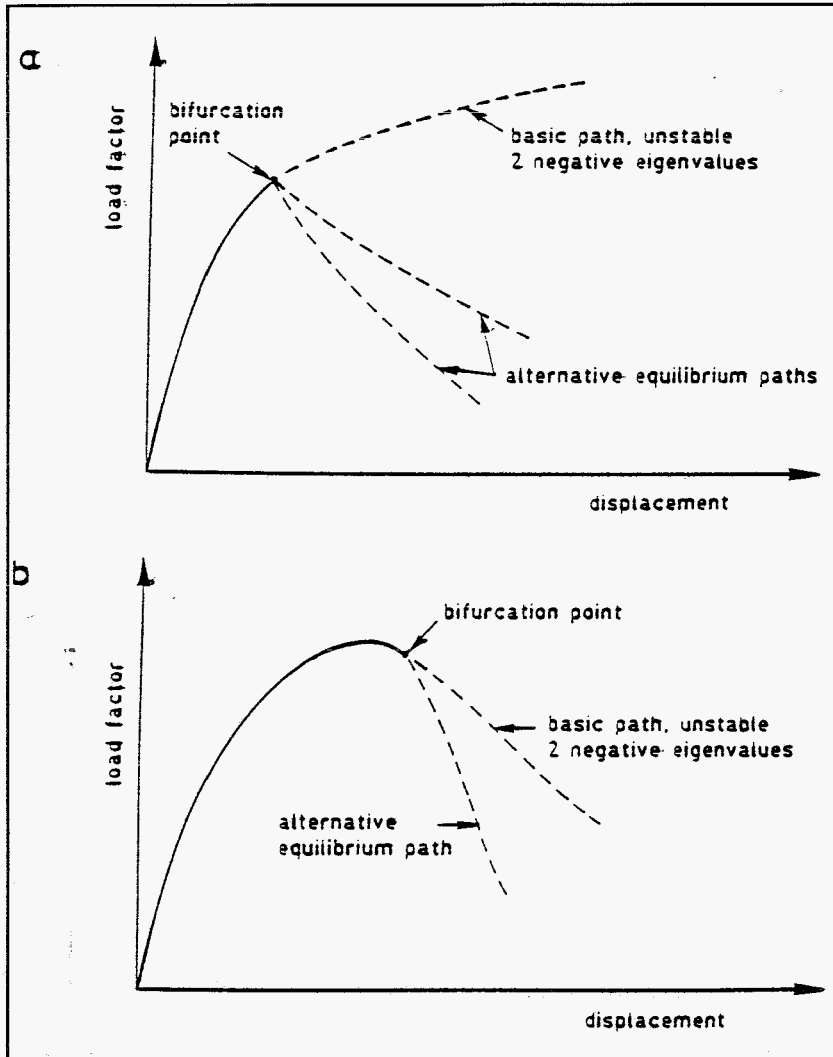
$$\omega_1^T \mathbf{q}^* = 0 \quad (2.23)$$

(2.23) zegt dat de belastingsvector  $\mathbf{q}^*$  orthogonaal is aan de rechtse eigenvector  $\omega_1$  van  $\underline{K}$ .

Een bifurcatiepunt kan ook samen met een limietpunt optreden.

Wanneer dit het geval is treedt ook  $\mu=0$  (A.12<sup>a</sup>) op. Deze gecombineerde situatie wordt in appendix B besproken.

Figuur 2.4<sup>a+b</sup> geeft enige voorbeelden van bifurcatiepunten en van post-bifurcatie gedrag.



figuur 2.4: bifurcatiepunten en post-bifurcatie gedrag

In de praktijk komen bifurcatiepunten zelden voor als gevolg van materiële imperfecties.

De bifurcatiepunten die in dit geval optreden zijn fundamenteel van een andere oorzaak dan de bifurcaties die we kennen uit de elasticiteitstheorie (de Euler knikstaaf bijvoorbeeld).

In ons geval treden bifurcaties op als gevolg van fysische niet-lineariteiten, d.w.z. lokalisatie van softening gedrag, terwijl het object op trek of op druk wordt belast.

Dit in tegenstelling tot de knik-theorie waarbij bifurcatie alleen bij op druk belaste objecten voorkomt.

Lokalisatie van softeninggedrag wil zeggen

dat in een perfecte staaf op een bepaald moment tijdens belasting lokaal softening of damage optreedt waardoor lokaal het materiaal ontlast wordt.

Hierdoor kunnen meerdere evenwichtspaden ontstaan<sup>5</sup>.

Tevens kan zo'n bifurcatiepunt gelijktijdig optreden met een limietpunt. Een methode om vanuit een bifurcatiepunt op het juiste evenwichtspad te komen is afgeleid in appendix B.

### 2.3.3 Het passeren van bifurcatiepunten

De procedure van indirecte verplaatsingscontrole biedt in principe de mogelijkheid tot het passeren van limietpunten en bifurcatiepunten en het traceren van post-pek gedrag.

Na het passeren van een bifurcatiepunt willen we verder gaan op het laagste bifurcatiepad omdat dan de minste energie wordt gedissipeerd. In appendix B is een methode afgeleid die hiertoe de mogelijkheid biedt.

De relatie die hieruit volgt is (2.24)

$$\dot{\mathbf{a}} = \alpha \mathbf{a}^* + \beta \mathbf{v}_1 \quad (2.24)$$

(2.24) geldt voor infinitesimaal kleine verplaatsingsincrementen waarbij de snelheidsvector na een bifurcatiepunt geschreven kan worden als een lineaire combinatie van het snelheidsveld behorende bij het fundamentele pad  $\mathbf{a}^*$  en de laagste eigenvector  $\mathbf{v}_1$ .

Voor kleine incrementen mag (2.24) worden geïntegreerd over de tijd wat leid tot:

$$\Delta \mathbf{a} = \alpha \Delta \mathbf{a}^* + \beta \mathbf{v}_1 \quad (2.25)$$

De meest eenvoudige manier om  $\beta$  te bepalen is een verplaatsings increment te construeren dat orthogonaal is aan het fundamentele pad:

$$\Delta \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{a}^* = 0 \quad (2.26)$$

Substitutie van (2.25) in (2.26) levert de volgende uitdrukking voor  $\beta$ :

$$\beta = -\alpha \frac{(\Delta \mathbf{a}^*)^T \Delta \mathbf{a}^*}{(\Delta \mathbf{a}^*)^T \mathbf{v}_1} \quad (2.27)$$

waarmee we voor het incrementele verplaatsingsincrement  $\Delta \mathbf{a}$  krijgen:

$$\Delta \mathbf{a} = \alpha \left\{ \Delta \mathbf{a}^* - \frac{(\Delta \mathbf{a}^*)^T \Delta \mathbf{a}^*}{(\Delta \mathbf{a}^*)^T \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \right\} \quad (2.28)$$

Vergelijking (2.28) gaat fout wanneer  $\Delta \mathbf{a}^*$  orthogonaal wordt aan  $\mathbf{v}_1$ .

Een eenvoudige manier om dit op te lossen is door  $\Delta \mathbf{a}$  op een volgende wijze te normaliseren.

$$(\Delta \mathbf{a}^*)^T \Delta \mathbf{a}^* = \Delta \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{a} \quad (2.29)$$



Dit resulteert in de volgende vergelijking:

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{(\Delta \mathbf{a}^*)^T \Delta \mathbf{a}^* - [(\Delta \mathbf{a}^*)^T \mathbf{v}_1]^2}} \{(\Delta \mathbf{a}^*)^T \mathbf{v}_1 \Delta \mathbf{a}^* - (\Delta \mathbf{a}^*)^T \Delta \mathbf{a}^* \mathbf{v}_1\} \quad (2.30)$$

De noemer van (2.30) wordt nooit nul omdat dit dan zou betekenen dat  $\mathbf{v}_1$  orthogonaal zou zijn aan het fundamentele pad!

In het algemeen zal het bifurcatiepad niet orthogonaal zijn aan het fundamentele pad maar door iteratie naar volgende evenwichtstoestanden zal de orthogonaliteits conditie (2.26) de kans maximaliseren dat we naar een bifurcatiepad convergeren en niet naar een fundamenteel pad. Dit hoeft dan niet het laagste bifurcatiepad te zijn.

Om dit te bereiken zal men de hiervoor beschreven procedure moeten herhalen totdat we op het laagste pad zijn.

## Hoofdstuk 3

### Beschrijving oplosroutine

In hoofdstuk 2 is de theorie achter de indirecte verplaatsingscontrole uiteengezet.

Uitgaande van de energievergelijking is een methode afgeleid voor het oplossen van een stelsel niet-lineaire vergelijkingen.

Deze methode (2.17) is geïmplementeerd in een 2D-E.E.M. programma dat is geschreven door P. Schreurs. Het programma werkt onder Matlab.

De basis van het programma is een staafelement met een geometrisch niet-lineaire beschrijvingswijze. De rekenwijze is incrementeel/iteratief waarbij de methode van de indirecte verplaatsingscontrole het iteratieve deel beschrijft. In appendix C is de file van het niet-lineaire staafelement weergegeven.

#### 3.1 De oplosroutine

Om de methode achter de niet-lineaire berekeningswijze te begrijpen wordt in deze paragraaf een grafische weergave in 2D gepresenteerd. In deze weergave worden situaties besproken die normaal tot divergentie of vastlopen van de oplosroutine leiden. Situaties die worden besproken zijn o.a. limietpunten, snap-through en snap-back gedrag. De 2D weergave is een simplificatie van de n-dimensionale theorie.

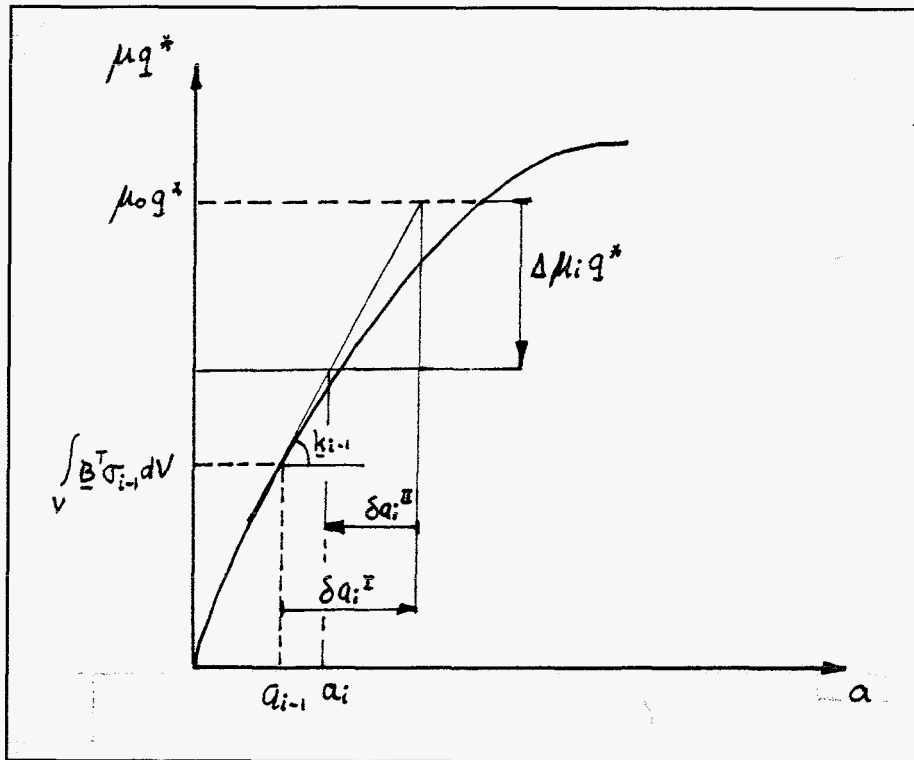
Uitgangspunt bij de weergave zijn de formules (2.16) en (2.17):

$$\delta \mathbf{a}_i = \delta \mathbf{a}_i^I + \Delta \mu_i \delta \mathbf{a}_i^{II}$$

waarbij:

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{a}_i^I &= \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \mathbf{p}_{i-1} \\ \delta \mathbf{a}_i^{II} &= \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \mathbf{q}^* \\ \Delta \mu_i &= - \frac{\Delta \mathbf{a}_{i-1}^T \delta \mathbf{a}_i^T}{\Delta \mathbf{a}_{i-1}^T \delta \mathbf{a}_i^{II}} \\ \mathbf{p}_{i-1} &= \mu_0 \mathbf{q}^* - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{a}_{i-1} dV \end{aligned} \right\}$$

\* I. monotoon stijgende functie



figuur 3.1, monotoon stijgende functie

Eigenschappen functie:

\*  $\det(\underline{K}) > 0$

\*  $\mu_0 \mathbf{q}^*$  is opl. van stelsel

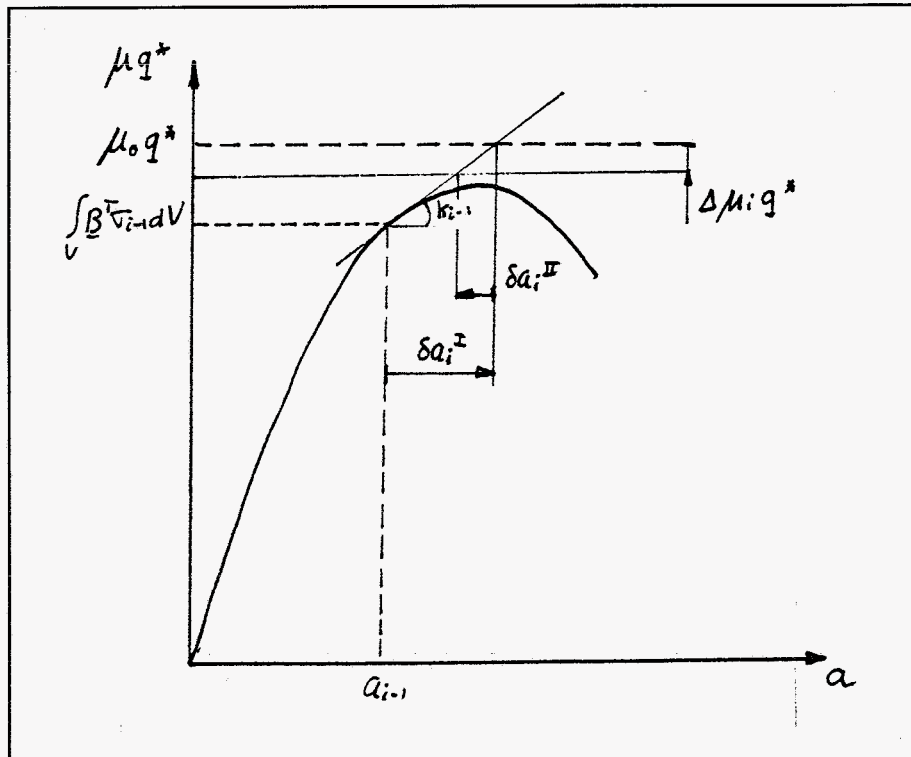
$\delta \mathbf{a}_i^I > 0, \delta \mathbf{a}_i^{II} > 0 \Rightarrow \Delta \mu_i < 0$

$\mathbf{p}_{i-1}$  groot :  $\Delta \mu_i$  groot èn negatief

$\mathbf{p}_{i-1}$  klein :  $\Delta \mu_i$  klein èn negatief

Naarmate  $\mathbf{p}_{i-1}$  kleiner wordt (dus naar een opl. wordt geconvergeerd) wordt  $\Delta \mu_i$  ook kleiner tot aan nul toe als  $\mathbf{p}_{i-1} = 0$ .

## \* II. monotoon stijgende functie en limietpunt



figuur 3.2: monotoon stijgende functie + limietpunt .

Eigenschappen functie:

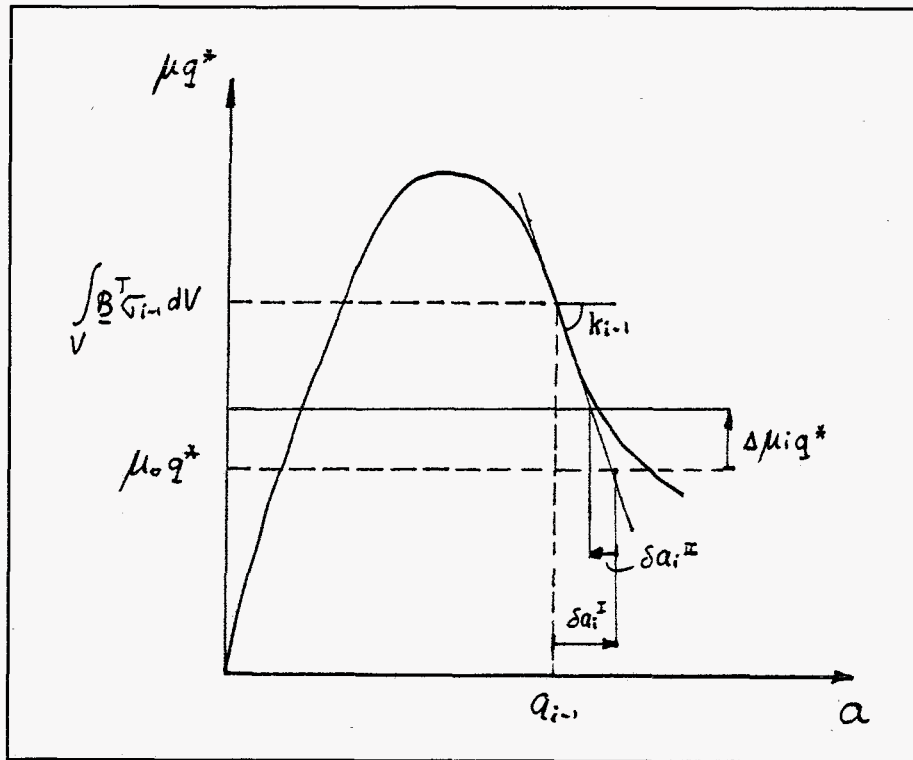
- \*  $\det(\underline{K}) > 0$
- \*  $\mu_0 \mathbf{q}^*$  is geen opl. van stelsel

Figuur 3.2 geeft de situatie weer als  $\mu_0 \mathbf{q}^*$  geen oplossing is van de niet-lineaire vergelijking.

Op het moment dat  $\det(\underline{K}) < \varepsilon$  (met  $\varepsilon$  een bepaalde tolerantie) dient het teken van het belastingsincrement te veranderen.

Het limietpunt stelt hier een lokaal maximum voor.

\* III. monotoon dalende functie



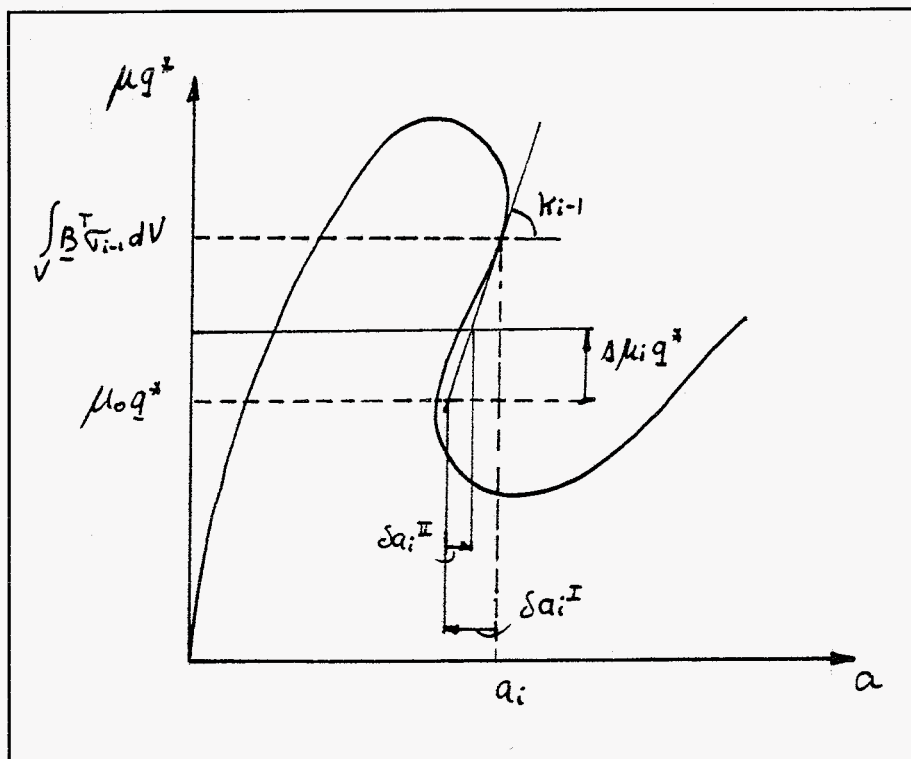
figuur 3.3: monotoon dalende functie

Eigenschappen functie:

- \*  $\det(\underline{K}) < 0$
- \*  $\mu_0 \mathbf{q}^*$  is opl. van stelsel

$$\left. \begin{array}{l} p_{i-1} < 0 \\ \det(K) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta a_i^I > 0 \\ \delta a_i^{II} < 0 \Rightarrow \Delta \mu_i > 0 \end{array}$$

IV. Snap-back gedrag



figuur 3.4: snap-back gedrag

Eigenschap functie:

$$* \det(\mathbf{K}) > 0$$

Fysisch gezien is het snap-back gedrag anders dan het snap-through gedrag. Echter, mathematisch maakt het geen verschil voor het algorithm.

$$\left. \begin{array}{l} p_{i-1} < 0 \\ \det(\mathbf{K}) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta a_i^I < 0 \Rightarrow \Delta \mu_i > 0 \\ \delta a_i^{II} > 0 \end{array}$$

$$\Delta a_i = \delta a_i^I + \Delta \mu_i \delta a_i^{II} \Rightarrow \Delta a_i < 0$$

## Hoofdstuk 4

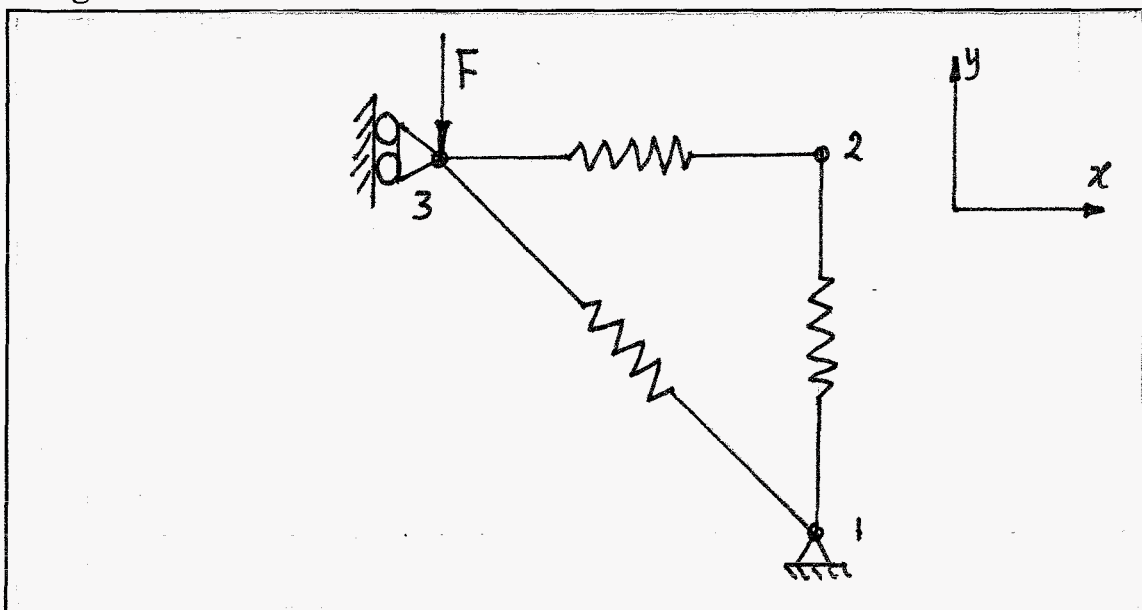
### Testprobleem

In hoofdstuk 2 is een methode uiteengezet waarmee het theoretisch mogelijk is om limietpunten te passeren en bifurcatiepunten te detecteren om daarna op het laagste evenwichtspad de analyse te vervolgen.

De beschrijving van het algoritme en de implementatie is besproken in hoofdstuk 3. In dit hoofdstuk worden twee testproblemen besproken die zijn doorgerekend. Daarnaast worden nog enige problemen voorgelegd die in de literatuur zijn beschreven en berekend m.b.v. deze routine.

#### 4.1 Testprobleem 1

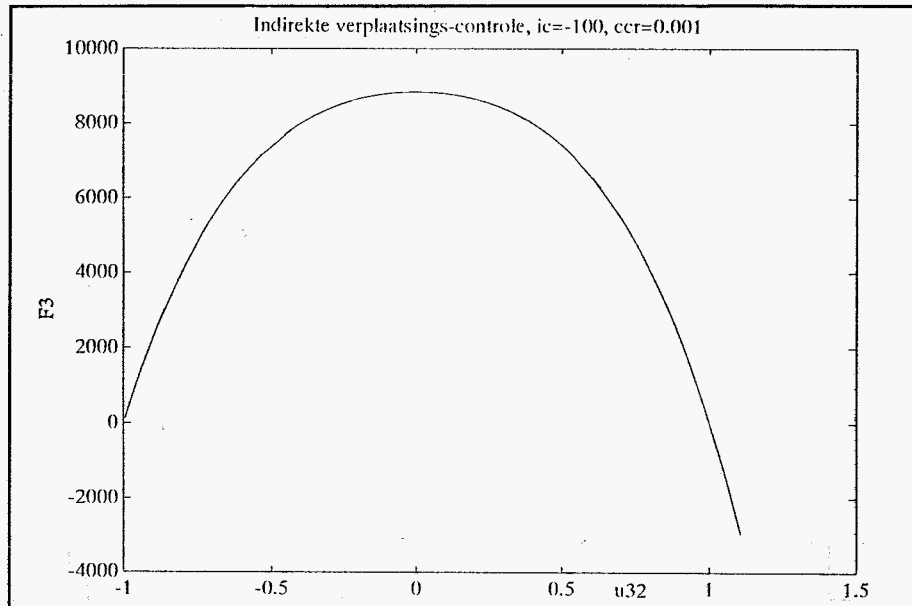
Het model, zie figuur 4.1 bestaat uit een vakwerk constructie van drie gekoppelde, lineaire veren. De knooppunten 1,2 en 3 zijn scharnierverbindingen. De verplaatsingen  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  van knooppunt 1 zijn onderdrukt alsmede de  $\mathbf{u}$ -verplaatsing van knooppunt 3. De kracht  $F$  in knooppunt 3 wordt incrementeel voorgeschreven.



figuur 4.1: testprobleem 1

De veren a, b en c hebben alle dezelfde veerstijfheid terwijl voor de materiaalbeschrijving de tweede Piola-Kirchhoff spanningstensor lineair wordt gekoppeld aan de Green-Lagrange rektensor. De norm is 0.001, het belastingsincrement 100 N.

Het resultaat is weergegeven in figuur 4.2.



figuur 4.2:  $u_{32}=f(F_3)$

In deze figuur is de kracht in veer  $c$  uitgezet tegen de verplaatsing van knooppunt 3 in y-richting. De tekens van de kracht  $F_3$  en verplaatsing  $u_{32}$  zijn veranderd. Tussen  $F=7000$  en  $F=8000$  is t.p.v.  $u=0.5$  een merkwaardig verschijnsel te zien.

Als men dit verschijnsel goed bestudeert blijkt dat de oplossing heen en weer springt alsof er geen evenwichtspunt zou zijn.

Dit punt komt nu juist overeen met  $\det(\underline{K})=0$ , dus een stationaire situatie voor de kracht  $F$ .

Volgens mij kunnen er voor dit verschijnsel twee oorzaken zijn:

1. t.p.v.  $\det(\underline{K})=0$  wordt de richting van het belastingsincrement veranderd
2. t.p.v.  $\det(\underline{K})=0$  bestaat er een bifurcatiepunt waardoor niet naar het juiste evenwichtspad wordt geconvergeerd.

Door het belastingsincrement nu per berekening te verkleinen kan de invloed van de incrementsgrootte op het verschijnsel worden bestudeerd.

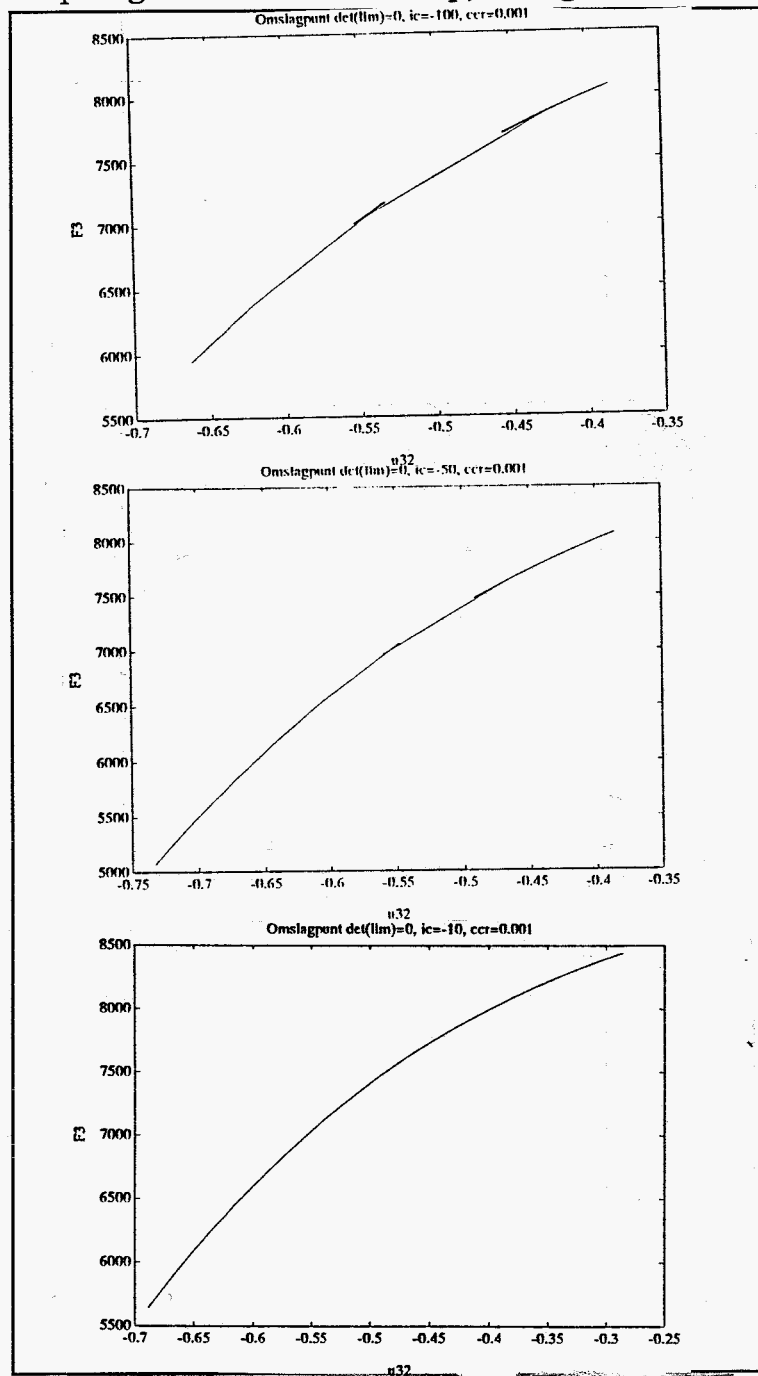
De oorzaak blijkt het gevolg te zijn van punt 1.



Doordat tijdens een bepaald belastingsincrement  $\det(\underline{K})$  nul wordt waargenomen, wordt niet naar een oplossing geconvergeerd.

$\det(\underline{K})=0$  betekent tekwisseling van het belastingsincrement. Het volgende increment zal nu wel een oplossing leveren.

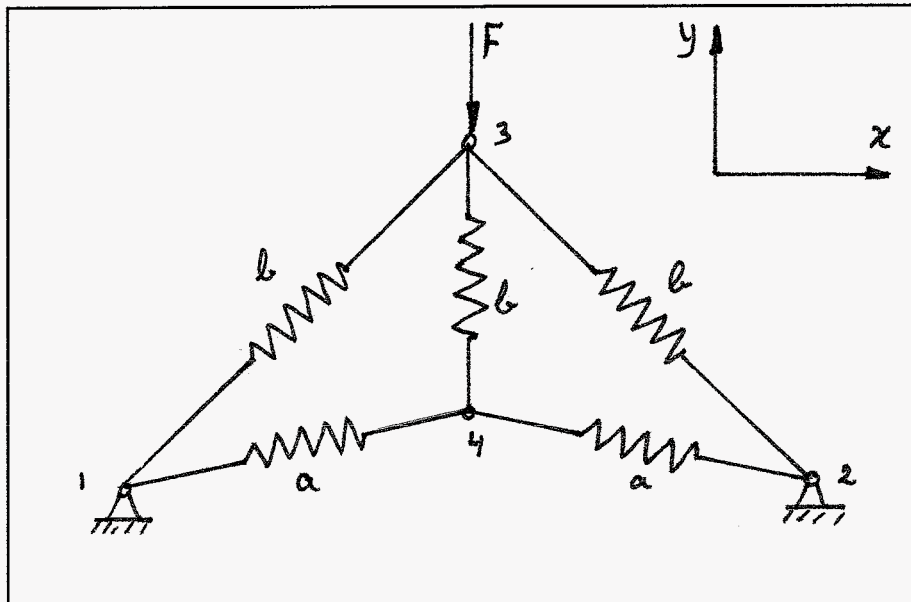
Gevolg: één of twee belastingsincrementen hebben geen juiste oplossing wat resulteert in een sprong in het functieverloop, zie figuur 4.3<sup>a</sup> t/m c.



figuur 4.3<sup>a</sup> t/m c: invoed op increment verkleining

## 4.2 Testprobleem 2

Testprobleem 2 is een probleem met meerdere vrijheidsgraden en een ander soort beweging optreedt. In figuur 4.4 is de configuratie weergegeven.



figuur 4.4: testprobleem 2

Het model is uitgevoerd met 5 veerelementen waarvan twee met een stijfheid **a** en drie veren met een stijfheid **b** ( $k_a > k_b$ ).

De belasting  $F$  grijpt aan op knooppunt 3, de bewegingen van de knooppunten 1 en 2 worden in  $x$ - en  $y$ -richting onderdrukt.

De belasting wordt in incrementen met een grootte van 100 N aangebracht.

Na analyse van het probleem bleek dat in het punt  $\det(\underline{K})=0$  een bifurcatiepunt bestond. Dit was te zien omdat één eigenwaarde nul werd en omdat het teken van de determinant van  $\underline{K}$  alterneerde rondom dit punt.

Dit gaf aanleiding tot divergentie van de oplossing waardoor geen oplossing t.p.v. dit punt werd verkregen.

De oorzaak van dit falen ligt natuurlijk aan het feit dat het bifurcatie algoritme niet was geïmplementeerd. Hierdoor kon niet naar het laagste evenwichtspad worden geconvergeerd.

### 4.3 Voorbeelden uit de literatuur

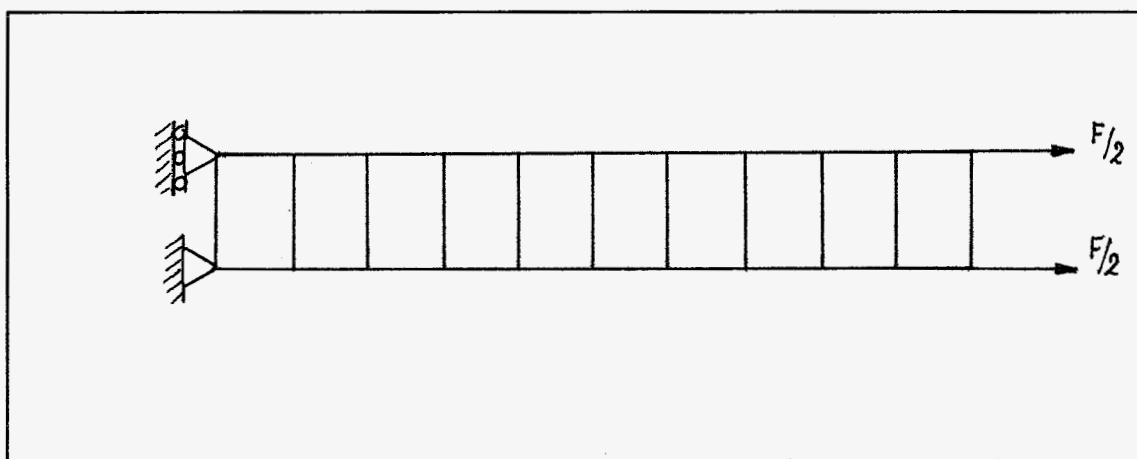
De problemen die in de literatuur worden beschreven zijn o.h.a. plaat- of schaalproblemen waarbij het snap-back, het snap-through en het bifurcatieprobleem optreedt.

In de komende twee paragrafen zal een bifurcatie analyse en een limiet/snap-back analyse worden besproken.

#### 4.3.1 Bifurcatie probleem

In de Borst<sup>5</sup> wordt een balk, verdeeld in 10 elementen, belast door een kracht  $F$ , zie figuur 4.5.

Er worden geen imperfecties geïntroduceerd. Het materiaal is gedefinieerd als elastisch-softening materiaal.



figuur 4.5: balkelementmodel

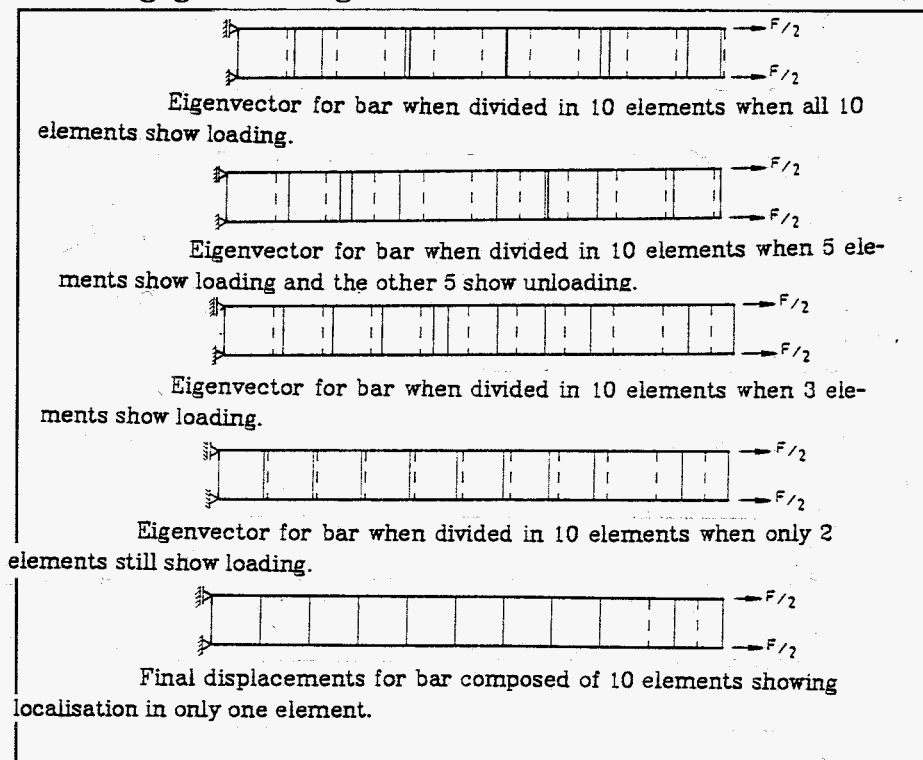
Na belasting wordt een eigenwaarde analyse van de stijfheidsmatrix gemaakt. Wordt een eigenwaarde nul of negatief dan wordt een deel van de bijbehorende eigenvector aan de fundamentele oplossing toegevoegd (zie (2.23)) en de berekening wordt herhaald.

We zullen nu convergeren naar een evenwichtspad dat niet noodzakelijkerwijs het laagste hoeft te zijn.

Zijn we niet naar het laagste pad geconvergeerd, dan voeren we wederom een eigenwaardeanalyse uit en voegen de laagste eigenvector weer toe aan de oplossing.

Dit herhalen we totdat we op het laagste evenwichtspad zitten (de richting van de laagste eigenvector komt nu overeen met de richting van de oplossing).

Dit proces is weergegeven in figuur 4.6<sup>a t/m d</sup>.



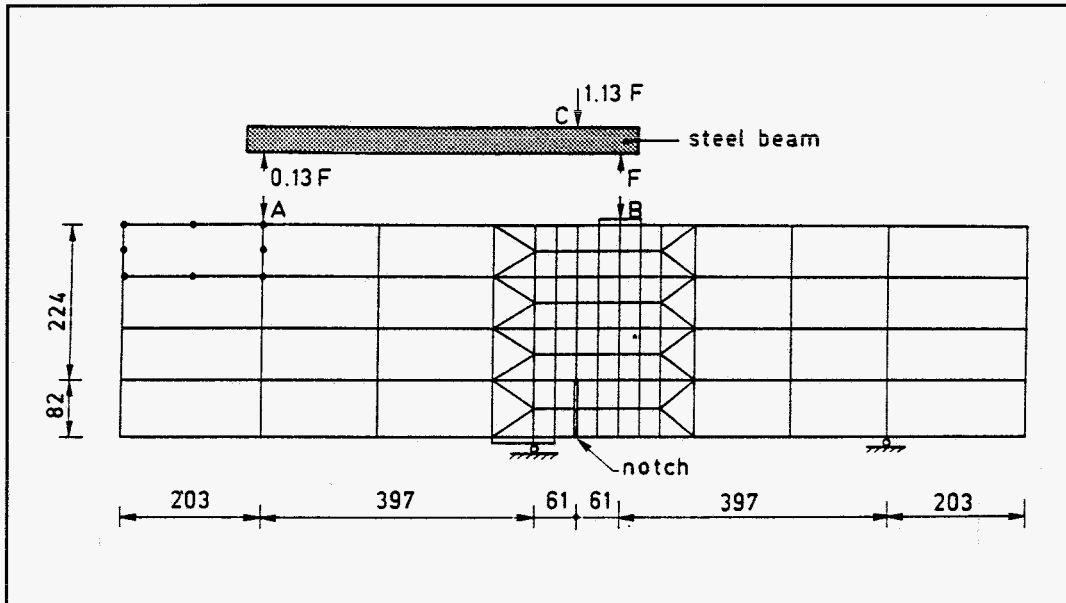
figuur 4.6: eigenwaardeanalyse

Het eigenwaardeanalyse proces vergt wel veel rekentijd maar hoeft alleen uitgevoerd te worden in de buurt van een bifurcatiepunt.

### 4.3.2 Post-limiet probleem

In paragraaf 4.3.1 is besproken hoe men oplossingen in het post-bifurcatie gebied kan verkrijgen. In deze paragraaf wordt het traceren van limiet- en post limiet gedrag bekeken.

Het voorbeeld dat wordt behandeld is dat van een tweepunts ondersteunde balk met een initiële scheur, belast door een kracht  $F$ , zie figuur 4.7, de Borst<sup>5</sup>.



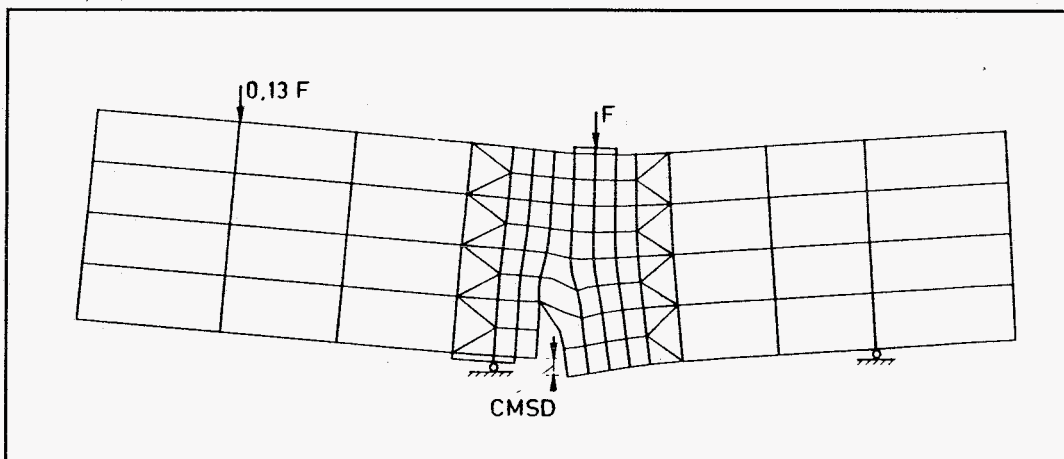
figuur 4.7: balkmodel

In eerste instantie is tijdens de berekening gebruik gemaakt van een globale norm voor de verplaatsingscontrole (zie (2.17)).

Vlak na de piek-belasting leidde dit tot divergentie van de oplossing.

Hierna werd door de auteur een alternatieve methode gebruikt, nl. de CMSD-controle (= Crack Mouth Sliding Displacement).

Het divergeren was een gevolg van de sterke lokalisatie van de scheurvorming. Na het veranderen van de norm naar CMSD-controle verliep de berekening perfect. De resultaten zijn deels weergegeven in figuur 4.8 en 4.9.

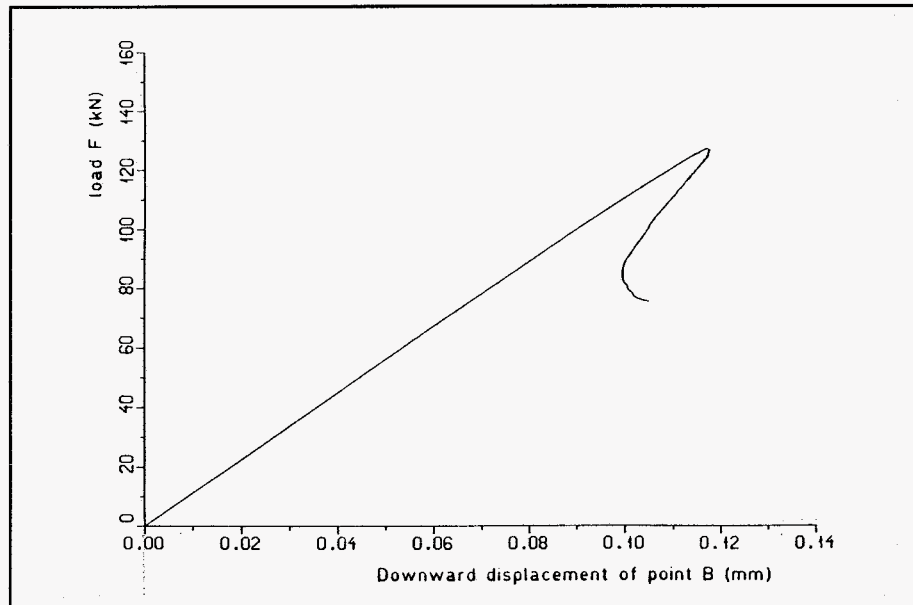


figuur 4.8: vervormde balk

In figuur 4.8 is de laagste eigenmode weergegeven alsook de betekenis van CMSD.

In figuur 4.9 is de belastingskracht  $F$  tegen de verticale verplaatsing van punt B uitgezet.

Hierin ziet men het snap-back gedrag verschijnen.



figuur 4.9: belastings-verplaatsingscurve

---

## Hoofdstuk 5

### Conclusie

Met behulp van de methode 'indirekte verplaatsingscontrole' van de Borst<sup>3</sup> is het theoretisch mogelijk snap-back en snap-through gedrag te analyseren alsmede het bepalen en passeren van limiet- en bifurcatiepunten onder voorgescreven belastingen.

Om de bruikbaarheid van de methode te controleren zijn twee testproblemen opgesteld. Eén probleem waarbij snap-through optrad en één probleem waarbij naar verwachting bifurcatie op zou treden. Snap-back gedrag heb ik niet kunnen simuleren omdat ik daar geen geschikt model voor ter beschikking had.

Testvoorbeeld 1, waarbij alleen snap-through optreedt werd keurig door het algoritme berekend (zie figuur 4.2 en 4.3). Het probleem dat optrad tijdens het wisselen van het belastingsincrement teken (t.p.v.  $\det(\underline{K})=0$ ) kan op een eenvoudige manier worden opgelost door t.p.v. dit punt de incrementsstap te verkleinen.

Testvoorbeeld 2, waarbij bifurcatie op zou treden gaf aanleiding tot divergentie van de oplossing. Dit was te verwachten omdat het algoritme voor het passeren van bifurcatiepunten niet in het programma is geïmplementeerd.

Het algoritme is geschreven voor een n-dimensionale toestand ( $n>1$ ). Voor het geval dat  $n=1$  loopt het algoritme vast. Rede hiervoor ligt in de opbouw van formule (2.18<sup>a</sup>) waarbij voor scalaire waarden voor  $\Delta\mathbf{a}$ ,  $\delta\mathbf{a}_i^I$  en  $\Delta\mu_i, \delta\mathbf{a}_i^{II}$  exact dezelfde waarden geven met slechts een verschil in teken. In de praktijk komt deze situatie bijna nooit voor omdat gecompliceerde berekeningen altijd n-dimensionale stelsels geven.

In de theorie, bijvoorbeeld (3), wordt geconcludeerd dat numerieke problemen optreden in het geval van lokalisatie van softening of damage (zie § 2.3.3). Dit is door mij niet geverifieerd.

## 5.1 Aanbevelingen

Als vervolg op deze stageopdracht zijn er een aantal punten die volgens mij meer aandacht verdienen en verder uitgewerkt kunnen worden:

- ▣ implementatie van het bifurcatie algoritme (§ 2.3.3)
- ▣ model opzetten waarmee snap-back gedrag beschreven kan worden door het toepassen van bijv. damage- of softening materiaalbeschrijving



---

## Hoofdstuk 6

### Referenties

1. Maewell, A. & Nachbar, W., *Stable postbuckling equilibria of axially compressed elastic circular cylindrical shells: a finite element analysis and comparison with experiments*, J. Appl. Mech. 44, 475-481, 1977
2. Bergan, P.J.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., & Soreide, T.H., *Solution techniques for non-linear finite element problems*, Int. J. Num. Meth. Engng. 12, 1677-1696, 1978
3. de Borst, R., *Non-linear analysis of frictional materials*, disertatie T.U Delft, 1986
4. Ralston, A. & Rabinowitz, P., *A first course in numerical analysis*, second edition, McGraw Hill, Tokyo, 1978
5. de Borst, R., *Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-softening solids*, Computers & Structures, vol. 25, no. 2, pp. 211-224, 1987
6. Schreurs, P.J.G., *2D-E.E.M. programma*, T.U.E., faculteit werktuigbouwkunde, vakgroep W.F.W.
7. Hill, R., *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. Mech. Phys. Solids, 7, 209-225, 1959

## Hoofdstuk 7

### Symbolenlijst

<u>A</u>	matrix	
<u>a</u>	kolomrepresentatie van een vector	
a	scalar	
a	verplaatsingskolom	[L]
<u>D</u>	elasticiteitsmatrix	[F/L]
<u>g</u>	gravitatiekolom	[F/L <sup>2</sup> ]
<u>H</u>	Interpolatiepolynomen matrix	[-]
<u>K</u>	stijfheidsmatrix	[F/L]
<u>L</u>	differentiaaloperatoren matrix	[d/dx]
<u>p</u>	krachts-verschilvector	[F]
<u>q</u>	krachtsvector	[F]
<u>q'</u>	genormaliseerde krachtsvector (2-norm)	[F]
<u>t</u>	uitwendige krachtsvector	[F]
t	tijd	[s]
u	verplaatsing	[L]
U	potentiële energie	[FL]
$\alpha$	willekeurige scalar	
$\beta$	willekeurige scalar	
$\delta$	virtuele grootheid	[-]
$\Delta$	incrementele grootheid	[-]
$\varepsilon$	rekvector	[-]
$\lambda$	eigenwaarde	[-]
$\mu$	belastingsparameter	[-]
$\rho$	soortelijke massa	[m/L <sup>3</sup> ]
<u><math>\sigma</math></u>	Cauchy spanningsmatrix	[F/L <sup>2</sup> ]
$\tau$	tijdsintegrand	[s]
u	rechter eigenvector	[RAD/s]
$\omega$	linker eigenvector	[RAD/s]
..i	component uit vector (i <sup>e</sup> rij)	
..ij	component uit matrix (i <sup>e</sup> rij, j <sup>e</sup> kolom)	
..ijkl	component uit 2 <sup>e</sup> -orde tensor	
..	tijdsafgeleide	
..0	representatie t.o.v. begintoestand	

## Conditie voor bifurcatie- en limietpunten

In hoofdstuk 2.1 is afgeleid dat een systeem in evenwicht verkeert als geldt:

$$\int_{\downarrow} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\sigma} dV > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{e}} \quad (\text{A.1})$$

Wanneer A.1 naar nul nadert bevindt het systeem zich in een kritische staat van evenwicht.

Met de toegepaste notaties kan A.1 als volgt worden herschreven:

$$\int_{\downarrow} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\sigma} dV = \int_{\downarrow} \dot{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{a}} dV = \dot{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} \quad (\text{A.2})$$

zodat als analogon voor A.1 en A.2 de voorwaarde geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Evenwicht:} \quad \dot{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} > 0 \\ \text{Kritische evenwicht:} \quad \dot{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \forall \dot{\mathbf{a}} \quad (\text{A.3})$$

Voor de symmetrische matrix  $\underline{\mathbf{K}}$  geldt dat als noodzakelijke eis voor evenwicht:

$$\det(\underline{\mathbf{K}}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Voor niet-symmetrische matrix  $\underline{\mathbf{K}}$ , wat bijvoorbeeld optreedt bij niet-associatieve plasticiteit, geldt nog een andere voorwaarde, nl.

$$\underline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

A.5 betekent dat  $\underline{\mathbf{K}}$  orthogonaal is aan  $\mathbf{a}$ .

Definieren we nu de rechter eigenvectoren van  $\underline{\mathbf{K}}$  als  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  en de linker eigenvectoren van  $\underline{\mathbf{K}}$  als  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  corresponderend met de eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ ) dan geldt:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}} \nu_i &= \lambda_i \nu_i \\ \omega_i^T \underline{\mathbf{K}} &= \lambda_i \omega_i^T \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

In het geval van een symmetrische matrix  $\underline{K}$  volgt  $v_i = \omega_i$ . Indien  $\underline{K}$  niet defect<sup>4</sup> is, d.w.z. dat  $\mathbf{n}$  eigenvectoren een n-dimensionale ruimte opspannen, kan iedere vector geschreven worden als een lineaire combinatie van de rechter eigenvectoren (A.7<sup>a</sup>) of van de linker eigenvectoren (A.7<sup>b</sup>).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \sum_{i=1}^n (\omega_i^T \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{a}} &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{v}_j^T \dot{\mathbf{a}}) \omega_j \end{aligned} \tag{A.7}$$

Schrijven we de E.E.M.-formulering (2.16) in snelheidsnotatie en nemen we aan dat de restkracht-vector  $\mathbf{p}_0$  verwaarloosbaar klein is ( dat geldt in een geconvergeerde evenwichtsstand) en schrijven we daarnaast de vergelijking niet in incrementvorm, dan betekent dat wanneer (A.4) geldt, vergelijking (A.8) singulier wordt.

Decomposeren we  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{q}^*$  in de zin van (A.7) en substitueren we dit resultaat in (A.8) waarbij we ook gebruik maken van (A.6), dan resulteert dit in de volgende vergelijking:

$$\sum_{i=1}^n [\lambda_i (\omega_i^T \dot{\mathbf{a}}) - \dot{\mu} (\omega_i^T \mathbf{q}^*)] \mathbf{v}_i = 0 \tag{A.9}$$

Als  $\underline{K}$  niet defect is, d.w.z.  $\mathbf{v}_i$  bestaat uit een set van n lineair onafhankelijke vectoren, dan kan aan (A.9) alleen worden voldaan als geldt

$$\lambda_i (\omega_i^T \dot{\mathbf{a}}) - \dot{\mu} (\omega_i^T \mathbf{q}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_i \tag{A.10}$$

Eigenschap (A.4) impliceert dat één of meerdere eigenwaarden nul wordt, dus  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  etc. kunnen daarna ook nul worden.

We zullen in dit geval geen aandacht geven aan het geval dat  $\lambda_1$  nul wordt met in ons achterhoofd dat het nul worden van de andere eigenwaarden geen probleem levert.

Met  $\lambda_1=0$  verkrijgen we uit (A.10)

$$\dot{\mu} (\omega_i^T \mathbf{q}^*) = 0 \tag{A.11}$$

Aan vergelijking (A.11) wordt voldaan als aan één van de volgende twee eigenschappen wordt voldaan:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mu} = 0 \\ \omega_1^T \mathbf{q}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

## Passeren van bifurcatiepunten

Het bereiken van een limietpunt wordt gekarakteriseerd door  $\mu=0$ .

Dit resulteert in vergelijking A.5.

Substitutie van A.6<sup>a</sup> en A.7<sup>a</sup> in A.5 levert de volgende vergelijking:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\omega_i^T \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{v}_i = 0 \quad (\lambda_i > 0, \forall i > 1) \quad (B.1)$$

Voor alle  $i > 1$  wordt aan (B.1) alleen voldaan als het volgende geldt:

$$\omega_i^T \dot{\mathbf{a}} = 0 \quad \forall i > 1 \quad (B.2)$$

Aan vergelijking (B.2) kan alleen worden voldaan als

$$\dot{\mathbf{a}} = \alpha \mathbf{v}_1 \quad (B.3)$$

met  $\alpha$  een nader te bepalen scalar.

Alleen een veelvoud van de laagste eigenvector  $\mathbf{v}_1$  behorende bij de laagste eigenvector is een mogelijke oplossing voor een limietpunt.

Met betrekking tot het bifurcatiepunt nemen we aan dat  $\mathbf{a}^*$  een oplossing is van de vergelijking:

$$K \mathbf{a} = \mu \mathbf{q}^* \quad (B.4)$$

waarbij we  $\mathbf{a}^*$  de oplossing van het fundamentele pad noemen. We merken op dat  $\mu \neq 0$  voor deze oplossing.

Substitutie van (B.4) in (A.10) en decompositie van  $\mathbf{a}^*$  in de zin van (A.7) levert de volgende relatie:

$$\lambda_i \{ (\omega_i^T \dot{\mathbf{a}}) - \omega_i^T [ \sum_{j=1}^n \omega_j^T \mathbf{a}^* ] \mathbf{v}_j \} = 0 \quad (B.5)$$

Omdat  $\lambda_i > 0 \quad \forall i \neq 1$  en wegens orthogonaliteit van  $\omega_i$  en  $\mathbf{v}_j$  kunnen we (B.5) reduceren tot:

$$\omega_i^T (\dot{\mathbf{a}} - \mathbf{a}^*) = 0 \quad \forall \omega_i \quad (B.6)$$

Aan (B.6) kan alleen worden voldaan als de volgende relatie geldt:

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}^* = \beta \mathbf{v}_1 \quad (B.7)$$

met  $\beta$  een willekeurige scalaire parameter.

Dit resulteert in de volgende mogelijke oplossingen in het bifurcatiepunt:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \beta \mathbf{v}_1 \quad (B.8)$$

(B.8) bevat de fundamentele oplossing als  $\beta=0$  maar bevat niet de oplossing

$$\mathbf{a} = \beta \mathbf{v}_1 \quad (B.9)$$

Desondanks bevat (B.9) altijd een oplossing die voldoet aan (B.4).

We zullen dit bewijzen.

Substitueren we (B.9) in (A.10) dan levert dit samen met de orthogonaliteitseigenschap tussen  $\omega_i$  en  $\mathbf{v}_1$  de volgende relatie:

$$\mu (\omega_i^T \mathbf{q}^*) = 0 \quad \forall i > 1 \quad (B.10)$$

waarbij  $\mathbf{q}^*$  geen nulvector is.

Dit betekent dat wil men aan (B.10) voldoen,  $\mu$  naar nul moet naderen wat impliceert dat we te maken hebben met een bifurcatiepunt met richtingsafgeleide nul.

Het feit dat zowel de set oplossingen (B.8) als de set oplossingen (B.9) voldoen kunnen we als volgt veralgemeniseren:

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a}^* + \beta \mathbf{v}_1 \quad (B.11)$$

waarbij  $\alpha$  en  $\beta$  scalaire waarden die we later via een constraint vergelijking kunnen bepalen.

---

*Niet-lineaire analyse van snap-through gedrag ..... Appendix C*

---

```

*****
%
% in2x3, configuratie
%
%      | F
%      |
%      \|(3)
% |0|>o*****o (2)
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      *          *
%      o (1)
%      ^
%      ---

```

\*\*\*\*\*

```

atelkp = 2;
atelip = 0;
atkpvg = 2;
atel   = 3;
atkp   = 3;
atelgr = 1;
atodvg = 3;
atvovg = 0;
atvokr = 1;
atvodr = 0;

```

```

lok   = [ 1 2 1; 2 3 1; 1 3 1 ];
crd0  = [ 1 0; 1 1; 0 1 ];
odv   = [ 1 1; 1 2; 3 1 ];
vov   = [ ];
vovw  = [ ];
vok   = [ 3 2 ];
vokw  = [ -100 ];

```

% rod elements \*\*\*\*\*

```

% opp0  em  nu  mat  hh  kk  sigv0
elgeg  = [ 1 50000 0.3 3 5000 5000 2500 ];

```

```

bic   = 1;
atic  = 100;
mait  = 5;
nm    = 1;
ccr   = 0.001;

```

```
ini;
```

\*\*\*\*\*



---

*Niet-lineaire analyse van snap-through gedrag ..... Appendix C*

---

```
*****
%
% xstnla
% programma voor het berekenen van een niet-lineaire staaf m.b.v. een
% indirecte verplaatsingscontrole methode ( incrementeel-itteratief )
*****

if bic==1
    vic=zeros(atvg,1); v=zeros(atvg,1); ke=zeros(atvg,1); ki=zeros(atvg,1);
    sm=zeros(atvg); crd=crd0; elda=zeros(atel,25);
    da=zeros(atonvg,1); dal=zeros(atonvg,1); da2=zeros(atonvg,1);
    tek=1;

    [perm]=permarr(odvg,vovg,atvg,atodvg,atvovg,atonvg);
    [lokvgp]=mlokvgp(lok,perm,atelkp,atkpvg,atel);
    [elda]=eldatn0(elda,crd0,lok,elgr,elgeg,atel);

    for e=1:atel
        eldae=elda(e,[4 6 12 13 15 19 23]);    % 10 oppo s c lab stif pksp
        [em]=emnld(eldae,e);
        [sm]=assmat(sm,em,lokvgp,atkpvg*atelkp,e);
    end;
end;

[vw0]=extv(vov,vovw,atvg,atvovg,atkpvg,perm,1);
[ke0]=extv(vok,vokw,atvg,atvokr,atkpvg,perm,1);

ic = bic;
while ic<=atic , ic
    veri=zeros(atonvg,1); ke=ke+tek*ke0
    if (ke==0);ke=ke+tek*ke0;end;
    vw=vw0;

    rs = ke - ki;
    vicl=vic; vic=zeros(atvg,1); nrm=1000; it=1;

    while (nrm>ccr) & (it<=mait)

        [llm,rlv]=partp(sm,rs,vw,atonvg,atvovg,it);

*****
% Programmadeel voor het berekenen van de itteratieve verplaatsing van
% een geometrisch niet-lineaire functie volgens een indirecte
% verplaatsings controle volgens de methode "de Borst"
% De methode is incrementeel-itteratief!
%
% Erik-Jan Bogaers, 30-07-1991
*****

A=inv(llm);                % inverteren stijfheidsmatrix
ikv=ke(1:atonvg);
nor=norm(ikv,2);          % normaliseren belastingsvector

dal=A*rlv;
da2=(1/nor).*A*ikv;
```

```
if (it==1)
    dmu=[0];
else
    d1=veri'*da1;
    d2=veri'*da2;
    dmu=-d1/d2;
end;

da=da1+dmu.*da2;          % itteratieve verplaatsing

%*****

if it>1, vw=zeros(atvg,1); end; vw(1:atonvg)=da;

dv = kpw(vw,perm,atvg); kdv = genkv(dv,atkp);
vic = vic + dv; v = v + dv; crd = crd + kdv;
kv = genkv(v,atkp); kki = kpw(ki,perm,atvg); kkki = genkv(kki,atkp);

for e=1:atel
    [elda]=eldatn(elda,crd,lok,e);
end;

sm=zeros(atvg); ki=zeros(atvg,1);

for e=1:atel
    eldae=elda(e,[4 6 12 13 15 19 23]); % 10 opp0 s c lab stif pksp
    [ek]=eknld(eldae,e);
    [em]=emnld(eldae,e);
    [ki]=assvec(ki,ek,lokvgp,atkpvg*atelp,e);
    [sm]=assmat(sm,em,lokvgp,atkpvg*atelp,e);
end;

rs = ke - ki;
[nrm]=norem(vw,vic,vicl,rs,atonvg,nm);
it=it+1;
veri=veri+da;
end;
tek=sign(det(llm));

% opslaan coordinaten
% element 1
u11(ic)=crd(1,1);u12(ic)=crd(1,2);f1(ic)=elda(1,24);
% element 2
u21(ic)=crd(2,1);u22(ic)=crd(2,2);f2(ic)=elda(2,24);
% element 3
u31(ic)=crd(3,1);u32(ic)=crd(3,2);f3(ic)=elda(3,24);

bic=ic+1;
ic=ic+1;
end;

%*****
```