"Ingeklemde" balk met variabele vrije lengte

WE 68-3

"Ingeklemde" balk met variabele vrije lengte.

februari 1968

F. Wellepans

Een in onbelaste toestand rechte balk met lengte L wordt over een afstand a in een precies passende, wrijvingsloze en starre bus geschoven en voorlopig in deze stand vastgehouden. De balk wordt belast door aan het vrije uiteinde op kwasi-statische wijze een kracht met de grootte F aan te brengen. Wij nemen aan dat één van de hoofdtraagheidsassen van iedere dwarsdoorsnede ligt in hetzelfde platte vlak als de werklijn van de belastende kracht; de in aanmerking komende stijfheidsfactor tegen buiging is EI. De door F verrichte arbeid geven wij aan met de letter A, terwijl U de in de balk opgehoopte elastische energie is.

De blokkering van de balk in de bus wordt opgeheven en de balk wordt over een bepaalde afstand <u>in</u> de bus getrokken. Hierdoor verandert de <u>vrije</u> <u>lengte</u> van de balk. Bij gelijkblijvende belasting betekent dit dat de doorzakking van het vrije uiteinde verandert; het aangrijpingspunt van de kracht F verplaatst daarbij over een afstand δ die gelijk is aan het verschil van de doorzakkingen. De hierbij door F verrichte arbeid noemen wij Ω. Een voor de hand liggende conclusie lijkt nu te zijn dat $|\Omega|$ gelijk moet zijn aan de absolute waarde van het verschil van de elastische energie in de oorspronkelijke toestand met die in de nieuwe toestand.

Als wij grootheden die betrekking hebben op de oorspronkelijke toestand van de index 1 voorzie en die, welke behoren bij de nieuwe toestand de index 2 geven dan zou dus moeten gelden: $|-\Omega| = |u_2 - u_1|$, of preciezer: $-\Omega = u_2 - u_1$. Deze conclusie blijkt niet waar te zijn. Om dit in te zien beschouwen wij een balk die aan één zijde is ingeklemd en aan de andere zijde op de voorgeschreven wijze wordt belast, zie fig. 1.

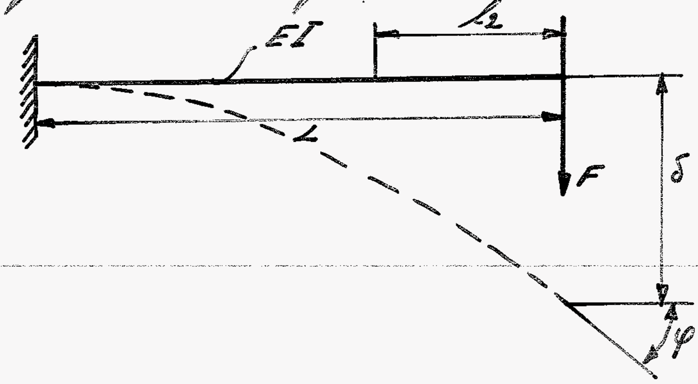

fig. 1

Met vergeet-my-nietjes volgt voor δ en φ:

$$\delta = \frac{F.L^3}{3EI} \quad \text{en} \quad \varphi = \frac{F.L^2}{2EI}.$$

De door F verrichte arbeid A is: $A = \frac{1}{2} F.\delta = \frac{FL^3}{6EI}$; dit is tevens de in de balk opgehoopte elastische energie: $U = A = \frac{FL^3}{6EI}$. Wij kunnen ook vragen naar de "arbeid" die in een stuk van de balk is opgehoopt. Als U_2 de elastische energie is in het stuk ter lengte l_2 (genomen vanaf het rechteruiteinde van de balk) dan is: $U_2 = \frac{F l_2^3}{6EI}$. De in het resterende deel opgehoopte energie is dan dus: $\Delta U = U - U_2 = \frac{F}{6EI}\{L^3 - l_2^3\}$

Wij stellen nu $L = l_1$ (= vrije lengte van de balk in

de oorspronkelijke toestand). Dan is $U = U_1$ en $\Delta U = U_1 - U_2$.
Bij het naar binnen trekken van de balk in de bus is de kracht F in zijn volle grootte aanwezig. De verplaatsing van het aangrijpingspunt van F is δ:
$\delta = \frac{F}{3EI} l_1^3 - \frac{F}{3EI} \cdot l_2^3 = \frac{F}{3EI}(l_1^3 - l_2^3)$, zie fig 2.

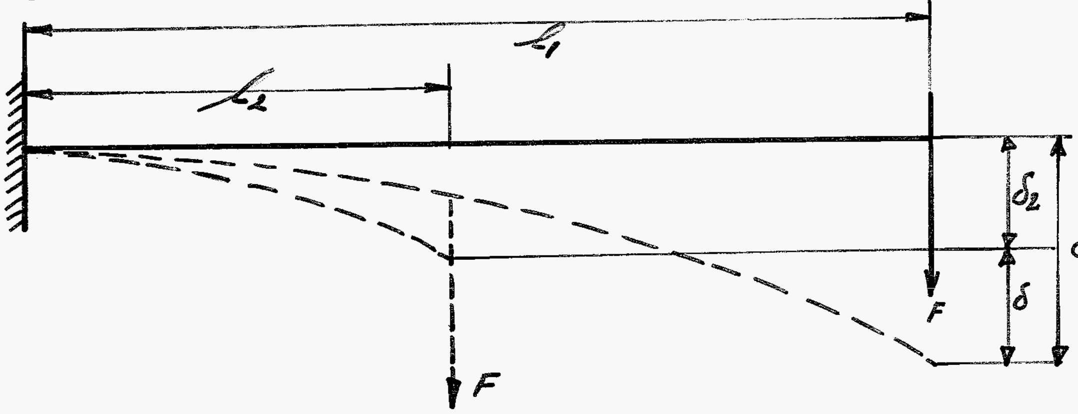

fig. 2.

De door F verrichte arbeid Ω bij het in de inklemming trekken van de balk is $\Omega = -F.\delta$, dus:
$\Omega = -\frac{F^2}{3EI}\{l_1^3 - l_2^3\}$. Volgens de eerder genoemde "conclusie" zou moeten gelden: $\Omega = -(U_1 - U_2)$. Invullen levert dat dit niet het geval is:

$\Omega + \Delta U = \Omega + (U_1 - U_2) = -\frac{F^2}{6EI}\{l_1^3 - l_2^3\}$. De energiebalans is dus __niet__ in evenwicht. Dit komt omdat wij bij deze "conclusie" de invloed vergeten hebben van de kracht die nodig is om de balk in de inklemming te trekken. Wij zullen hierna berekenen dat de arbeid die deze kracht verricht juist gelijk is aan het hierboven gevonden verschil: $-(\Omega + \Delta U) = \frac{F^2}{6EI}\{l_1^3 - l_2^3\}$. De berekening wordt opgezet voor een __elastische__ bus; het hiel interessante geval vinde door de bus zeer stijf te veronderstellen.

<u>Balk</u> met <u>elastische</u> ondersteuning.

De balk is over een afstand a in een precies passende bus geschoven en daarna belast aan het vrije uiteinde. De bus is elastisch met beddingsconstante k, zie fig. 3.

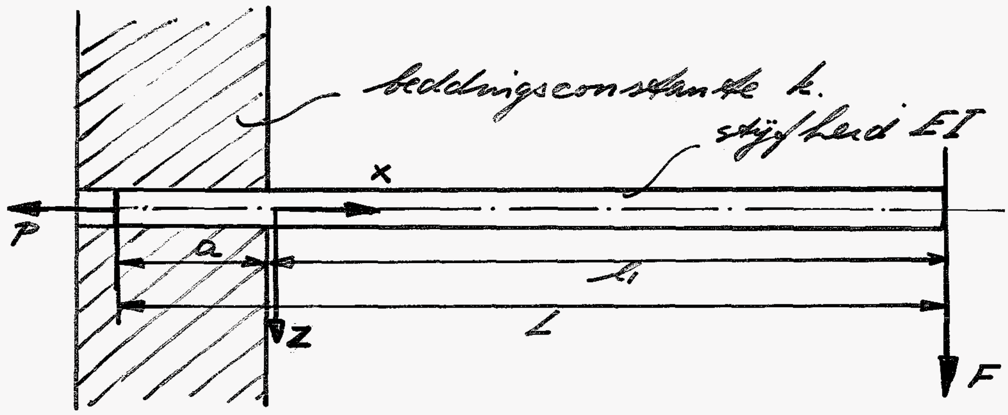

fig. 3.

Wij gaan uit van de volgende aannamen over de verplaatsingen van punten van de balk:

1) vlakken ⊥ neutrale lijn blijven vlak en loodrecht op deze lijn
2) de verplaatsingen blijven <u>klein</u> t.o.v. de afmetingen van de balk
3) de rekken <u>in</u> een vlak loodrecht op de neutrale lijn zijn verwaarloosbaar klein.

Wij zullen ons <u>niet</u> bezighouden met het gedeelte van de balk <u>buiten</u> de „inklemming"; de hierop betrekking hebbende theorie is bekend. Wij interesseren ons juist voor het gedeelte van de balk <u>in</u> de inklemming. Uit de gegevens en de aannamen volgt dat het probleem dat wij hier geschetst hebben hetzelfde is als dat van fig. 4:

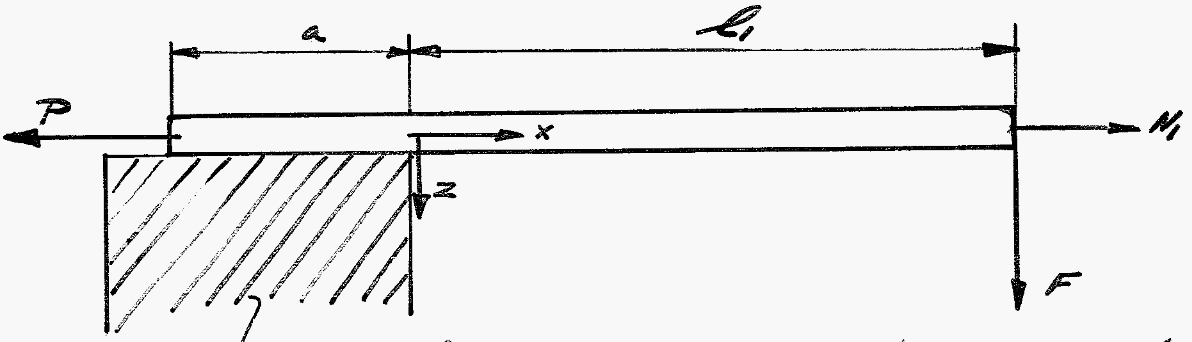

fig. 4.

elastische ondersteuning; beddingsconstante k.

De beddingsconstante k is de kracht die door de ondersteuning wordt uitgeoefend op een stukje balk van eenheidslengte als dit stukje over een eenheidsafstand in de z-richting verplaatst; in x-richting wordt de ondersteuning star verondersteld.

Wij snijden een stukje uit de balk en beschouwen het evenwicht, fig. 5.

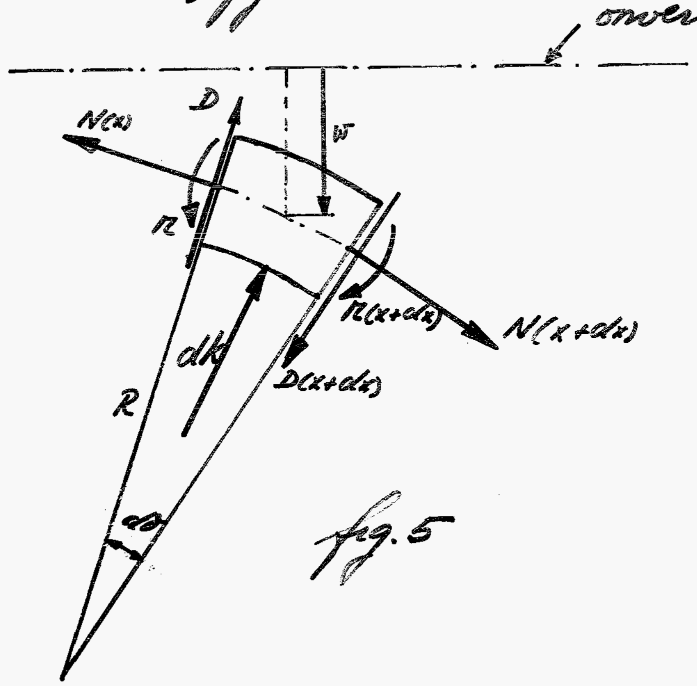

fig. 5

w is de verplaatsing in positieve z-richting
R is de kromtestraal

Voor dK volgt:

$$dK = k.w.dx.$$

Momentenevenwicht om een as ⊥ vlak van tekening:

$$\frac{dM}{dx} = -D.$$

Krachtenevenwicht in x-richting en z-richting leveren: $\{N(x+dx) - N(x)\}.\cos(\tfrac{1}{2}d\vartheta) - 2.D.\tfrac{1}{2}d\vartheta = 0$

en: $N.d\vartheta + D(x+dx) - D(x) - k.w.dx = 0$

Dus: $R.\frac{dN}{dx} = D$ en $N = k.R.w - R.\frac{dD}{dx}$, omdat $R.d\vartheta = dx$.

Tussen M en R bestaat een verband nl. $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$. Wij nemen aan dat EI constant is; dan volgt:

$$EI.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{dM}{dx} = -D = -\frac{R}{R}^2.\frac{dN}{dx}, \text{ dus: } \frac{dN}{dx} = -EI.\frac{1}{R}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{EI}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R}\right)^2 = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{EI}{2}.\frac{1}{R^2}\right\}$$

Dus: $N = -\frac{EI}{2}.\frac{1}{R^2} + c$ waarbij c een constante is.

Voor N geldt dus ook: $N = -\left\{\frac{EI}{R}\right\}^2.\frac{1}{2EI} + c = -\frac{M^2}{2EI} + c$

Voor $x=0$ moet aan de volgende voorwaarden voldaan worde: $M = F.l_1$; $D = F$; $N = N_1$. Voor c volgt bij invullen: $N_1 = c - \frac{F^2 l_1^2}{2EI}$, dus $c = N_1 + \frac{F^2 l_1^2}{2EI}$. Voor P geldt dan: $P = N(x=-a) = -\frac{M^2(x=-a)}{2EI} + N_1 + \frac{F^2 l_1^2}{2EI}$

$M(x=-a)$ is gelijk aan nul, dus $P = N_1 + \frac{F^2 l_1^2}{2EI}$. In het probleem dat wij willen onderzoeken is N_1 gelijk aan nul, derhalve is P dan gelijk aan: $P = \frac{F^2 l_1^2}{2EI}$. Deze P is de kracht die op het linkeruiteinde van de balk moet worden uitgeoefend om het evenwicht van de balk te garanderen. Wij merken op dat P <u>wel</u> afhankelijk is van de buigingsstijfheid van de balk maar <u>niet</u> van de elasticiteit van de ondersteunning; P is bovendien een functie van de vrije lengte l_1 en de belastende kracht F. Als de balk over een afstand dl in de ondersteunning wordt getrokken verricht P een arbeid dA die gelijk is aan $P.dl = dA$. Als A de arbeid is die door

P wordt verricht als de balk zover in de bus geschoven wordt dat de vrije lengte afneemt van l_1 tot l_2 dan volgt:

$$A = -\int_{l=l_1}^{l_2} P(l).dl = \int_{l=l_2}^{l_1} \frac{F^2 l^2}{2EI}.dl = \frac{F^2}{6EI}\{l_1^3 - l_2^3\}.$$

Dit resultaat bevestigt de bewering van blz. 3, waar gesteld werd dat de door P geleverde arbeid gelijk zou moeten zijn aan $-(\Omega + \Delta U) = \frac{F^2}{6EI}(l_1^3 - l_2^3) = A$, dus:

$A + \Omega + \Delta U = 0$. De energiebalans is nu wel in evenwicht!

Om een beetje inzicht te krijgen in de manier waarop deze P "tot stand" komt gaan wij de verplaatsing w van punten van de balk in de elastische ondersteuning berekenen. De door de ondersteuning uitgeoefende krachten vinden wij dan door de beddingsconstante k in rekening te brengen.

Volgens blz. 6 geldt:

$$N = k.R.w - R.\frac{dD}{dx} \quad \text{en} \quad N = -\frac{M^2}{2EI} + N_1 + \frac{F^2 l_1^2}{2EI}.$$

Met $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$ volgt dan:

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} = k.w - \frac{N}{R} = k.w + \frac{M^2}{2EI}.\frac{1}{R} - \frac{N_1}{R} - \frac{F^2 l_1^2}{2EI}.\frac{1}{R}.$$

dus: $-EI.\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{R}\right) = k.w + \frac{EI}{2}.\frac{1}{R^3} - \{N_1 + \frac{F^2 l_1^2}{2EI}\}.\frac{1}{R}.$

Stellen wij weer $P = N_1 + \frac{F_1^2 l_1^2}{2EI}$ dan volgt:

$$\underline{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{P}{EI}.\frac{1}{R} + \frac{k}{EI}.w + \frac{1}{2}.\frac{1}{R^3} = 0}$$

Als de doorbuigingen klein blijven dan mogen wij stellen: $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2w}{dx^2}$ en $\frac{1}{R^3} \ll \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{R}\right)$. Invullen in de D.V. levert ons dan:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{k}{EI}.w - \frac{P}{EI}.\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{P}{EI}.\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{k}{EI}.w \approx 0.}$$

De oplossing vinden wij door te stellen: $w = Ae^{\lambda t}$. Dan volgt:

$$\lambda^4 - \frac{P}{EI}.\lambda^2 + \frac{k}{EI} = 0, \text{ dus } \lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2EI}\left[P \pm EI\sqrt{\left(\frac{P}{EI}\right)^2 - \frac{4k}{EI}}\right]$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2EI}\left[P \pm \sqrt{P^2 - 4kEI}\right]$$

of: $\lambda_{1,2}^2 = \sqrt{\frac{k}{EI}}.\left\{\frac{P}{\sqrt{4kEI}} \pm \sqrt{\left\{\frac{P}{\sqrt{4kEI}}\right\}^2 - 1}\right\}$

Wij noemen: $\sqrt{\frac{k}{EI}} = \varepsilon$ en $\frac{P}{\sqrt{4kEI}} = \nu = \frac{P}{2EI}.\frac{1}{\lambda}$.

Voor λ^2 geldt dan: $\lambda_{1,2}^2 = \varepsilon\left(\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 1}\right)$.

__Als__ $\nu \geq 1$, dus $P \geq 4kEI$ dan is zowel λ_1^2 als λ_2^2 positief; er zijn dan vier __reële__ wortels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ van de karakteristieke vergelijking.

__Als__ $\nu < 1$, dus $P < 4kEI$, dan zijn λ_1^2 en λ_2^2 complex; de karakteristieke vergelijking heeft vier __complexe__ wortels.

Wij beperken ons tot het geval dat $\nu \ll 1$; dit is voor ons het meest interessante omdat wij tenslotte een zeer __stijve__ bus willen analyseren, dus $k \to \infty$.

Als $\nu \ll 1$ dan geldt: $\sqrt{1-\nu^2} = 1 - \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{8}\nu^4 + \cdots$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{8}\nu^4$$

Voor $\lambda_{1,2}^2$ volgt: $\lambda_{1,2}^2 = \varepsilon\{\nu \pm i(1 - \frac{1}{2}\nu^2)\} \approx \varepsilon\{\nu \pm i\}$.

Om hieruit de vier aparte wortels te destileren stellen wij $\lambda = r e^{i\varphi}$, dus $\lambda^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Terwille van de eenduidigheid moeten wij nemen $r \geq 0$ en $-\pi < \varphi \leq \pi$. Ingevuld: $r^2 e^{2i\varphi} = \varepsilon\{\nu \pm i\}$, met de oplossinge:

$$r = \sqrt{\varepsilon}.\sqrt{1+\nu^2} = \sqrt{\varepsilon}$$

$$2\varphi_{1,2} = \arg(\nu + i) \quad \text{en} \quad 2\varphi_{3,4} = \arg(\nu - i).$$

Aangezien $\nu << 1$ geldt: $2\varphi_{1,2} \approx \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ en $2\varphi_{3,4} \approx -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, dus: $\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}$; $\varphi_2 = -\frac{3}{4}\pi$; $\varphi_3 = -\frac{\pi}{4}$ en $\varphi_4 = +\frac{3}{4}\pi$.

Voor de λ's volgt:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{\varepsilon}(1+i) = \mu(1+i) \quad \text{met } \mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{\varepsilon}(1-i). = \mu(1-i)$$

en: $w = A_1 e^{\lambda_1 x} + B_1 e^{\lambda_2 x} + C_1 e^{\lambda_3 x} + D_1 e^{\lambda_4 x}$

$$w = A_2 e^{\mu x}\cos\mu x + B_2 e^{\mu x}\sin\mu x + C_2 e^{-\mu x}\cos\mu x + D_2 e^{-\mu x}\sin\mu x.$$

$$w = A\cosh\mu x\cos\mu x + B\sinh\mu x\cos\mu x + C\cosh\mu x\sin\mu x + D\sinh\mu x\sin\mu x$$

De constanten A, B, C en D volgen uit de randvoorwaarde.

Deze zijn:

$M = F.l_1$	voor	$x = 0$
$D = F$	voor	$x = 0$
$M = 0$	voor	$x = -a$
$D = 0$	voor	$x = -a.$

Uitgedrukt in w zijn deze voorwaarde:

$$\left.\begin{aligned} M = EI.\frac{d^2w}{dx^2}, \quad \text{dus} \quad \frac{d^2w}{dx^2} &= \frac{M l_1}{EI} \\ D = -\frac{dM}{dx}, \quad \text{dus} \quad \frac{d^3w}{dx^3} &= -\frac{F}{EI} \end{aligned}\right\} x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^3w}{dx^3} &= 0 \end{aligned}\right\} x = -a.$$

Met: $w = \{A \cos\mu x + B \sin\mu x\} e^{\mu x} + \{C \cos\mu x + D \sin\mu x\} e^{-\mu x}$

volgt door differentiëren naar x:

$$\frac{dw}{dx} = \mu e^{\mu x}\{(A+B)\cos\mu x + (B-A)\sin\mu x\} + \mu e^{-\mu x}\{(D-C)\cos\mu x - (C+D)\sin\mu x\}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 2\mu^2 e^{\mu x}\{B\cos\mu x - A\sin\mu x\} - 2\mu^2 e^{-\mu x}\{D\cos\mu x - C\sin\mu x\}.$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 2\mu^3 e^{\mu x}\{(B-A)\cos\mu x - (B+A)\sin\mu x\} + 2\mu^3 e^{-\mu x}\{(C+D)\cos\mu x - (C-D)\sin\mu x\}.$$

Invullen van de randvoorwaarden levert vier vergelijkingen voor A, B, C en D. Wij zullen ons tot lange ondersteuningen beperken; dan geldt: $\mu a \gg 1$. Hieraan is voor grote waarden van k (stijve ondersteuning) reeds bij kleine a (klein t.o.v. karakteristieke afmetingen van de balk) voldaan. Dan geldt: $A = B = 0 \Rightarrow$

$$w = \{C\cos\mu x + D.\sin\mu x\} e^{-\mu x}.$$

De voorwaarden voor $x=0$ leveren dan:

$$\frac{F}{EI} = -2\mu^3(C+D) \;;\quad -2\mu^2 D = \frac{F l_1}{EI}.$$

Dus: $D = -\dfrac{F l_1}{2\mu^2 EI}$, $C = -D - \dfrac{F}{2\mu^3 EI} = \dfrac{F}{2\mu^3 EI}\{\mu l_1 - 1\}$;

$$w = \frac{F}{2\mu^3 EI}\cdot e^{-\mu x}\left[(\mu l_1 - 1)\cos\mu x - \mu l_1 \sin\mu x\right].$$

Deze indrukking heeft krachten op de ondersteuning ten gevolge, zie fig. 6.

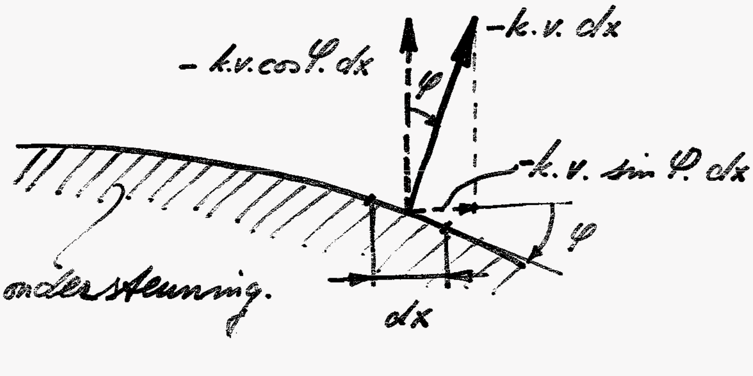

fig. 6.

Voor de resulterende kracht K_x op de ondersteuning in positieve x-richting volgt:

$$K_x = -\int_{x=-a}^{0} k.w.\sin\varphi.dx.$$

Uit: $\tan\varphi = \frac{dw}{dx}$ en de aanname dat $\frac{dw}{dx} \ll 1$ volgt: $\tan\varphi \approx \varphi \approx \sin\varphi = \frac{dw}{dx}$ en dus:

$$K_x = -\int_{x=-a}^{0} k.w.\frac{dw}{dx}.dx = -\int_{x=-a}^{0} k\, w(x).\,d\,w(x)$$

$$K_x = \frac{-1}{2}k\{w^2(x=0) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{w^2(x=-a)}}\} = \frac{-1}{2}.k.\,w^2(x=0).$$

Deze kracht is in grootte gelijk aan de kracht P uit de figuren 3 en 4, dus $P = -K_x = \frac{1}{2}k.\{\frac{F}{EI}\}^2.\frac{1}{4\mu^6}.\{\mu l_1 - 1\}^2$. Wij hebben verondersteld dat $\mu a \gg 1$; aangezien l_1 en a van dezelfde orde van grootte zijn volgt: $\mu l_1 \gg 1$, dus:

$$P \approx \frac{1}{2}.k\{\frac{F}{EI}\}^2.\frac{4EI}{k}.\frac{1}{4\mu^2}.\mu^2 l_1^2 = \frac{F^2 l_1^2}{2EI}.$$ Deze P is juist gelijk aan de reeds eerder berekende. Wij moeten P dus zien als de kracht die nodig is evenwicht te maken met de resultante van de horizontale "componenten van de krachten" die door de ondersteuning op de balk worden uitgeoefend.