Wijziging van de Vlasov-theorie, die het mogelijk maakt een gesloten koker op te vatten als samenstel van twee open kokers

Wijziging van de Vlasov-theorie, die het mogelijk maakt een gesloten koker op te vatten als samenstel van twee open kokers.

0. Samenvatting

Een open koker, die belast wordt door langskrachten op een gedeelte van het cilindrisch oppervlak kan niet zonder meer behandeld worden met de Vlasov theorie. Het duidelijkste komt dit tot uitdrukking als een koker opgevat wordt als samenstel van twee open kokers.

In de hier gegeven theorie wordt de hypothese van Vlasov dat de afschuiving van het middenvlak nul is vervangen door de hypothese dat deze afschuiving onafhankelijk van ϑ is.

Deze theorie is toegepast op een rechthoekige koker die opgevat wordt als samenstel van een U-balk en een plaat. Afgezien van een nog onverklaard tekenverschil ontstaan de formules voor de koker.

1. Gewijzigde Vlasov-theorie van een balk met open dwarsdoorsnede.

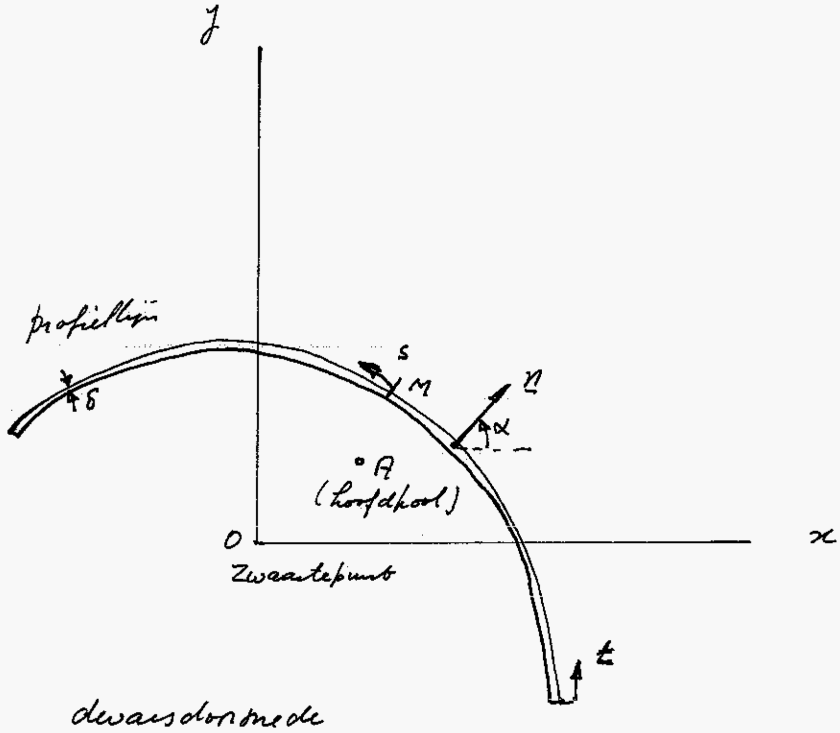


fig 1.1

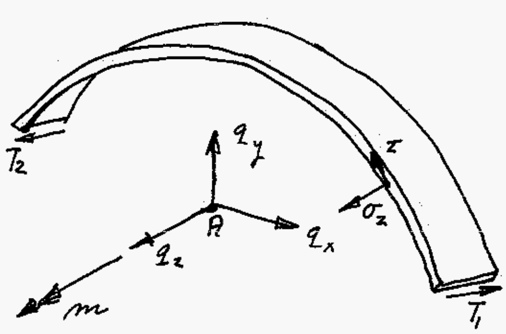


Fig 1.2

De belangrijkste hypothesen zijn:

1. De profiellijn verandert in het vlak van de dwarsdoorsnede niet van vorm

2. De afschuiving in het middenvlak is constant, d.w.z. onafhankelijk van s.

Uit de eerste hypothese volgt voor de verplaatsing v van een punt van de profiellijn in tangentiele richting.

$$v = -d_x \sin\alpha + d_y \cos\alpha + \vartheta h \qquad (1.1)$$

d_x : verplaatsing van A in x-richting
d_y : " y-richting
ϑ : verdraaiing der dwarsdoorsnede
h : afstand van A tot de raaklijn in s.

Uit de tweede hypothese volgt:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{T(z)}{G\delta} \qquad (1.2)$$

of $$w = \xi(z) - d_x'(z).x - d_y'(z).y - \vartheta'(z).\omega + \frac{T(z).s}{G\delta} \qquad (1.3)$$

Uit de - geschematiseerde - wet van Hooke volgt voor de axiale normaalspanning:

$$\sigma_z = E\left[\xi' - d_x''.x - d_y''y - \vartheta''\omega + \frac{T's}{G\delta}\right] \qquad (1.4)$$

Het axiale evenwicht levert:

$$\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} + \delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_z = 0$$

of

$$\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial t} = -p_z - \delta E\left[\zeta'' - \alpha_x''' x - \alpha_y''' y - \vartheta''' \omega + \frac{T''}{G\delta} s\right]$$

$$\tau\delta(t) = T_1 - \int_0^t p_z\,dt - EF(t)\zeta'' + E\alpha_x''' S_y(t) + E\alpha_y''' S_x(t) + E\vartheta''' S_\omega(t) - \frac{E}{G} T'' \int_0^t s\,dt$$

Stel $S_s(t) = \int_0^t s\,dt$

$$\tau\delta(t) = T_1 - EF(t)\zeta'' + E\alpha_x''' S_y(t) + E\alpha_y''' S_x(t) + E\vartheta''' S_\omega(t) - \frac{E}{G} T'' S_s(t) - \int_0^t p_z\,dt \qquad (1.5)$$

Uit de evenwichtsvergelijkingen volgen de differentiaalvergelijkingen van ζ, α_x, α_y en ϑ.

Het <u>axiale evenwicht</u> levert:

$$\int_F \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\,dF + (T_2 - T_1) + q_z = 0$$

$$EF\zeta'' = -(q_z + T_2 - T_1) - \frac{T''}{2G}(s_2^2 - s_1^2) \qquad (1.6)$$

Uit het evenwicht in <u>x-richting</u> volgt:

$$+\int_F \frac{\partial(\tau S)}{\partial z}\, dx \; + q_x \; = 0$$

of

$$-EJ_y\, \alpha_x^{IV} \; - \frac{E}{G}\, T''' \int_F S_s(t)\, dx \; + q_x \; + x_2 T_2' - x_1 T_1' \; +$$

$$+\int_F x \frac{\partial p_z}{\partial z}\, dF = 0$$

Nu geldt.
$$\int_F S_s(t)\, dx = x\, S_s(t) \Big|_{t=0}^{t=L} - \int_F x\, s\, ds$$

dus:

$$EJ_y\, \alpha_x^{IV} = q_x + x_2 T_2' - x_1 T_1' - \left[\frac{x_2}{2} (S_2^2 - S_1^2) - \int_F x\, s\, ds \right] \frac{E}{G}\, T''' +$$

$$+\int_F x \frac{\partial p_z}{\partial z}\, dF \qquad (1.7)$$

Evenwicht in y-richting

$$EJ_x\, \alpha_y^{IV} = q_y + y_2 T_2' - y_1 T_1' - \left[\frac{y_2}{2} (S_2^2 - S_1^2) - \int_F y\, s\, ds \right] \frac{E}{G}\, T''' +$$

$$+\int_F y \frac{\partial p_z}{\partial z}\, dF \qquad (1.8)$$

Momentenevenwicht om de z-as:

$$EJ_\omega\, \vartheta^{IV} - GJ_d\, \vartheta'' = m + \omega_2 T_2' - \omega_1 T_1' - \left[\frac{\omega_2}{2} (S_2^2 - S_1^2) - \int_F \omega\, s\, ds \right] \times$$

$$\times \frac{E}{G}\, T''' + \int_F y \frac{\partial p_z}{\partial z}\, dF \qquad (1.9)$$

Het bepalen van de gegeneraliseerde krachten kan formeel op dezelfde manier worden uitgevoerd. Het wordt wel twijfelachtig of deze werkwijze goed gefundeerd is omdat het de vraag is of $T(z)$ in de formule voor w (form 1.3) ook als gegeneraliseerde coordinaat moet worden opgevat.
We zullen in eerste instantie niet verder ingaan op de gegeneraliseerde krachten

<u>Opm</u>:

Uit (1.5) volgt voor $t = \zeta_1$:

$$T_2 = T_1 - EF\xi'' - \frac{E}{2\xi} T''(S_2^2 - S_1^2) - q_z$$

Dit resultaat stemt overeen met de evenwichtsvergelijking in axiale richting (1.6)

2. Torsie van een rechthoekige koker, opgevat als samenstel van een U-balk en een plaat

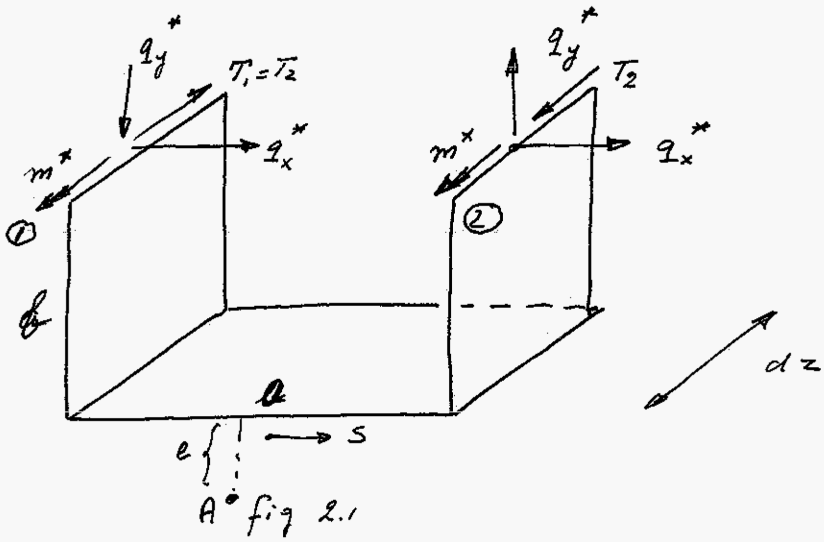
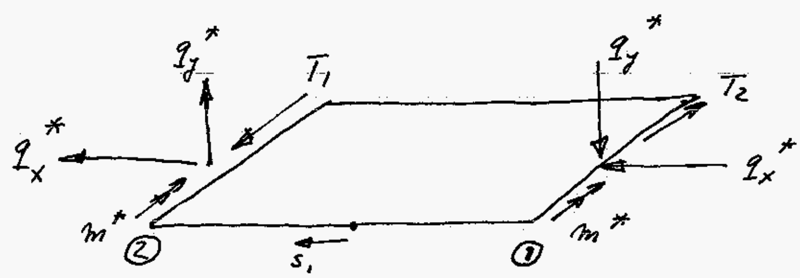


fig 2.1



Van de U-balk geldt:

$$p_z = 0 \quad ; \quad q_z = 0$$

$$q_x = 2\,q_x^*$$

$$q_y = 0$$

$$m = 2m^* + q_y^*\,a - 2q_x^*\,(b+e)$$

$$T_1 = T_2$$

$$x_1 = -x_2 \mp \frac{a}{2}$$

$$y_1 = y_2$$

$$\omega_1 = -\omega_2$$

$$s_1 = -s_2$$

De differentiaalvergelijking 1.6 t/m 1.9 gaan voor de U-balk over in:

$$E F \xi'' = 0 \qquad (2.1)$$

$$E J_y \alpha_x^{IV} = 2 q_x^* + a T_2' + \frac{E}{g} \int_F x s \, ds \, T''' \qquad (2.2)$$

$$E J_x \alpha_y^{IV} = \frac{E}{g} \int_F y s \, ds . T''' = 0 \qquad (2.3)$$

$$E J_\omega \vartheta^{IV} - g J_1 \vartheta'' = 2 m^* + q_y^* . a - 2 q_x^* (b+e) + 2 \omega_2 T_2' +$$

$$+ \frac{E}{g} \int_F \omega s \, ds . T''' \qquad (2.4)$$

Van de plaat voorzien we alle grootheden van een index 1. We bedenken dat voor de plaat geldt:

$$p_z = 0 \quad , \quad q_z = 0$$

$$q_x = -2 q_x^*$$

$$q_y = 0$$

$$m = -2 m^* - q_y^* a$$

$$T_1 = T_2$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{a}{2}$$

$$y_1 = y_2 = 0$$

$$s_1 = -s_2 = \frac{a}{2}$$

$$\omega \equiv 0$$

De differentiaalvergelijkingen luiden:

$$EF_1\,\xi_1'' = 0 \tag{2.5}$$

$$EJ_{y1}\,\alpha_{x1}^{IV} = -2q_x^* - aT_2' + \frac{E}{G}\int_{F_1} xs\,ds\;T''' \tag{2.6}$$

$$EJ_{x1}\,\alpha_{y1}^{IV} = 0 \tag{2.7}$$

$$-GJ_{d1}\,\vartheta_1'' = -2m^* - q_y^* a \tag{2.8}$$

Met behulp van (2.6) en (2.8) kunnen de grootheden q_x^*, m^* en q_y^* worden geëlimineerd in de vergelijkingen (2.2) en (2.4)

$$EJ_y\,\alpha_x^{IV} = -EJ_{y1}\,\alpha_{x1}^{IV} + \frac{E}{G}\int_{F_1} xs\,ds\,.\,T''' + \frac{E}{G}\int_{F} xs\,ds\,.\,T''' \tag{2.9}$$

$$EJ_\omega\,\vartheta^{IV} - GJ_d\,\vartheta'' = GJ_{d1}\,\vartheta_1'' + (b+e)\Big[EJ_{y1}\,\alpha_{x1}^{IV} + aT_2' + \\ - \frac{E}{G}\int_{F_1} xs\,ds\,.\,T'''\Big] + 2\omega_2 T_2' + \frac{E}{G}\int_{F}\omega s\,ds\,.\,T''' \tag{2.10}$$

De aansluitcondities in het vlak van de dwarsdoorsnede resulteren in de vergelijkingen:

$$\alpha_{x1} = \alpha_x - \vartheta(b+e) \tag{2.11}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \tag{2.12}$$

Aansluiting in axiale richting levert voor het hoekpunt $x = \frac{a}{2}$:

$$w(2) = w_1(1)$$

$$\xi(z) - \alpha_x'(z)\frac{a}{2} - \alpha_y'(z)\,y_2 - \vartheta'(z)\,\omega_2 + \frac{T(z)}{G\delta}\,s_2 =$$

$$\xi_1(z) - \alpha_{x1}'(z)\cdot\frac{a}{2} - \frac{T(z)}{G\delta}\,\frac{a}{2}$$

Met $\alpha_{x1}' = \alpha_x' - (b+e)\vartheta'$ gaat deze relatie over in:

$$\xi(z) - \alpha_y'(z)\,y_2 - \vartheta'(z)\,\omega_2 + \frac{T}{G\delta}\left(\frac{a}{2} + b\right) =$$

$$\xi_1(z) + (b+e)\frac{a}{2}\,\vartheta' - \frac{T}{G\delta}\,\frac{a}{2}$$

~~Aansluiting van het andere hoekpunt levert:~~

$$\xi(z) - \alpha_y'(z)\,y_2 + \vartheta'(z)\,\omega_2 - \frac{T}{G\delta}\left(\frac{a}{2} + b\right) =$$

$$\xi_1(z) - (b+e)\frac{a}{2}\,\vartheta' + \frac{T}{G\delta}\,\frac{a}{2}$$

Uit beide relaties volgt:

$$\xi(z) - \alpha_y'(z)\,y_2 = \xi_1(z) \qquad (2.13)$$

en

$$\vartheta'(z)\,\omega_2 - \frac{T}{G\delta}\left(\frac{a}{2}+b\right) = -(b+e)\frac{a}{2}\,\vartheta' + \frac{T}{G\delta}\left(\frac{a}{2}+b\right)$$

Met $\omega_2 = \frac{a}{2}(b-e)$ vinden we hieruit

$$T = G \, \frac{ab\delta}{a+b} \, \vartheta' \qquad (2.14)$$

Als enige nog onbekende functie in de voorgaande differentiaalvergelijkingen blijft over $T_2 = T_1$. Alle andere grootheden zijn uitgedrukt in de vervormingsparameters G, α_x, α_y en ϑ.

Het is wellicht verstandig om te kiezen:

$$T_1 = T_2 = T$$

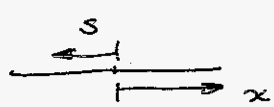
Met de vergelijkingen (2.11) en (2.14) gaat de differentiaalvergelijking (2.9) over in:

$$EJ_y \, \alpha_x^{IV} = - EJ_{y_1} \left\{ \alpha_x^{IV} - (b+e)\,\vartheta^{IV} \right\} + \frac{E\,ab\delta}{a+b} \vartheta^{IV} \cdot \varphi \qquad (2.15)$$

met

$$\varphi = \int_F x s \, ds + \int_{F_1} x s \, ds \qquad (2.16)$$

We merken op dat $s=0$ van de eerste integraal niet samenvalt met $s=0$ van de tweede.



Er geldt

$$\int_F x s \, ds = \frac{1}{12} a^3 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{12} a^3 + \frac{1}{2} a \left(b^2 + ab \right)$$

$$\int_{F_1} x\, s\, ds = -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} s^2\, ds = -\frac{1}{12}\, a^3$$

Dus $$\underline{\varphi = \frac{1}{2}\, ab\, (a+b)} \qquad (2.17)$$

Substitutie van (2.17) in (2.15) levert:

$$E(J_y + J_{y1})\, \alpha_x^{IV} = E\, \vartheta^{IV} \left[J_{y1}(b+e) + \frac{1}{2} a^2 b^2 \delta \right] \qquad (2.18)$$

$$J_{y1}(b+e) + \frac{1}{2} a^2 b^2 \delta = \frac{1}{12} \delta a^3 \left(b + \frac{3b^2}{a+6b} \right) + \frac{1}{2} a^2 b^2 \delta =$$

$$= \frac{\delta a^2 \left[a^2 b + 6ab^2 + 3ab^2 + 6ab^2 + 36 b^3 \right]}{12\,(a+6b)} =$$

$$= \frac{\delta a^2 b \left[a^2 + 15ab + 36 b^2 \right]}{12\,(a+6b)} = \frac{\delta a^2 b\, (a+12b)(a+3b)}{12\,(a+6b)}$$

Omdat
$$J_y + J_{y1} = \frac{2}{12}\, \delta a^2 (a+3b)$$ gaat deze

uitdrukking over in

$$\frac{b\,(a+12b)}{2\,(a+6b)} \left(J_y + J_{y1} \right) = \left(\frac{b}{2} + \frac{3b^2}{a+6b} \right)^{(J_y+J_{y1})} = \left(\frac{b}{2} + e \right)(J_y + J_{y1})$$

Vergelijking (2.18) gaat over in:

$$\underline{\underline{E\,(J_y + J_{y1}) \left[\alpha_x - \left(e + \frac{b}{2} \right) \vartheta \right]^{IV} = 0}} \qquad (2.19)$$

We merken op dat deze d.v. overeenstemt met de d.v. voor een gesloten koker omdat

$$\alpha_x - \vartheta\left(e+\frac{b}{2}\right)$$ juist de verplaatsing

in x-richting van het dwarsdoorsnedemiddelpunt van de koker.
Bij gebruik van de Vlasov theorie wordt dit resultaat niet gevonden zoals uit rapport WE - 65/36 volgt

We willen vervolgens de differentiaalvergelijking (2.9) omwerken. We zullen voor T_2 kiezen $T_2 = T = G\,\frac{ab\delta}{a+b}\,\vartheta'$

Verder geldt

$$\alpha_{x1} = \alpha_x - (b+e)\,\vartheta$$
$$\alpha_{x1}^{IV} = \alpha_x^{IV} - (b+e)\,\vartheta^{IV}$$

M.b.v. (2.19) wordt dit:

$$\alpha_{x1}^{IV} = \cancel{\alpha_x}^{IV} - \cancel{\frac{(b+e)}{e+\frac{b}{2}}\alpha_x}^{IV} = \left(e+\frac{b}{2}-b-e\right)\vartheta^{IV} =$$

$$= -\frac{b}{2}\,\vartheta^{IV}$$

(2.10) gaat over in:

$$E\left[J_\omega + \frac{b}{2}(b+e)\,J_{y1} + \frac{ab\delta}{a+b}\left\{\cancel{\oint_F} a(b+e)\int_{F_1} x s\,ds - \int_F \omega s\,ds\right\}\right]\vartheta^{IV} +$$

$$-G\left[J_d + J_{d1} + (ab+ae+2\omega_2)\,\frac{ab\delta}{a+b}\right]\vartheta'' = 0$$

De factor van ϑ'' wordt (zie rapport WE-65/36, pag 23a):

$$G\left(J_d + J_{d1} + \frac{2a^2b^2\delta}{a+b} \right)$$

Deze uitdrukking geeft de torsiestijfheid van een ~~recht~~ koker met rechthoekige doorsnede volgens de Bredt theorie, vermeerderd met de torsiestijfheid van de platen afzonderlijk. Deze term stemt dus overeen met de ~~d~~ kokertheorie waarbij in het algemeen $J_d + J_{d1}$ verwaarloosd kan worden ten opzichte van $\frac{2a^2b^2\delta}{a+b}$.

We willen proberen de factor van ϑ^{IV} niet iets om te werken.

Op pag 11 hebben we afgeleid:

$$\int_F x\,s\,ds = -\frac{1}{12}a^3 + \cancel{\tfrac{1}{2}a(b^2+ab)}$$

$$\int_F \omega\,s\,ds = 2\left[-e\int_0^{\frac{a}{2}} s^2\,ds + \frac{a}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} \left(s-e-\frac{a}{2}\right)s\,ds \right] =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{24}e a^3 + \frac{a}{2}\left\{ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}+b\right)^3 - \frac{a^3}{8} \right] - \frac{1}{2}\left(e+\frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{a}{2}+b\right)^2 - \frac{a^2}{4} \right] \right\} \right] =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{24}e a^3 + \frac{a}{2}\left\{ \frac{a^2b}{4} + \frac{ab^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right\} - \frac{1}{4}a\left(e+\frac{a}{2}\right)b(a+b) \right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{24}e a^3 + \frac{1}{24}ab(3a^2+6ab+4b^2) - \frac{1}{4}ab(a+b)\left(e+\frac{a}{2}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{12}ab\left[-\frac{e a^2}{b} + 3a^2+6ab+4b^2 - 6(a+b)\left(e+\frac{a}{2}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{ab}{(a+6b)}\left[-3ba^2 + (3a^2+6ab+4b^2)(a+6b) - 3(a+b)\underset{(6b^2+6ab)}{(\cancel{6b}+a^2)} \right] =$$

$$= \frac{ab}{12(a+6b)}\left(4ab^2+6b^3\right)$$

$$(b+e)\int_{F_1} x s\,ds - \int_F \omega s\,ds =$$

$$- \frac{ab}{12(a+6b)}\left[9a^2b + a^3 + 4ab^2 + 6b^3\right] =$$

$$- \frac{ab}{12(a+6b)}\left[a^3 + 9a^2b + 4ab^2 + 6b^3\right]$$

$$\frac{ab\delta}{a+b}\left\{(b+e)\int_{F_1} x s\,ds - \int_F \omega s\,ds\right\} =$$

$$- \frac{a^2b^2\delta\,(a^3+9a^2b+4ab^2+6b^3)}{12(a+b)(a+6b)}$$

In rapport WE-65/36 pag 24 is afgeleid dat geldt:

$$I_\omega = \frac{a^2b^2\delta\, b\,(2a+3b)}{12(a+6b)}$$

$$I_\omega + \frac{b}{2}(b+e) I_{y1} =$$

$$\frac{a^2b^2\delta}{24(a+6b)}\left(a^2+13ab+6b^2\right)$$

De factor vóór ϑ^{IV} kan dus geschreven worden als:

$$\frac{a^2b^2\delta}{24(a+6b)(a+b)}\left(a^3+13a^2b+6ab^2+a^2b+13ab^2+6b^3-2a^3-18a^2b+\right.$$

$$\left.-8ab^2-12b^3\right) =$$

$$\frac{a^2b^2\delta(-a^3-4a^2b+11ab^2-6b^3)}{24(a+6b)(a+b)} =$$

$$-\frac{a^2b^2\delta\,(a-b)^2(a+6b)}{24(a+6b)(a+b)} = -\frac{a^2b^2\delta\,(a-b)^2}{24(a+b)}$$

We merken op dat deze grootheid juist het sectoriel traagheidsmoment van de gesloten koker is, afgezien van het minusteken. We vragen ons af of dit tekenverschil het gevolg is van een cijferfout in de hier gegeven berekening, of ~~ook~~ essentieel is.