

Wijziging van de Vlasov-theorie, die het mogelijk maakt een gesloten koker op te vatten als samenstel van twee open kokers

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D. (1965). *Wijziging van de Vlasov-theorie, die het mogelijk maakt een gesloten koker op te vatten als samenstel van twee open kokers*. (DCT rapporten; Vol. 1965.037). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1965

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Wijziging van de Vlasov-theorie, die het
mogelijk maakt een gebogen koker op te
vatten als samenstel van twee open kokers.

0. Samenvatting

Een open koker, die belast wordt door langstraalstralen op een gedeelte van het cilindrische oppervlak kan niet zonder meer behandeld worden met de Vlasov-theorie. Het duidelijkste komt dit tot uitdrukking als een koker opgevat wordt als samenstel van twee open kokers.

In de hier gegeven theorie wordt de hypothese van Vlasov dat de afscherming van het middelenvlak nul is vervangen door de hypothese dat deze afscherming onafhankelijk van S is.

Deze theorie is toegepast op een rechtehoekige koker die opgevat wordt als samenstel van een U-balk en een plaat. Afgezien van een nog onverklaard tekensverschil ontstaan de formules van de koker.

1. Gewijzigde Euler-theorie van een balk
met open dwarsdoorsnede.

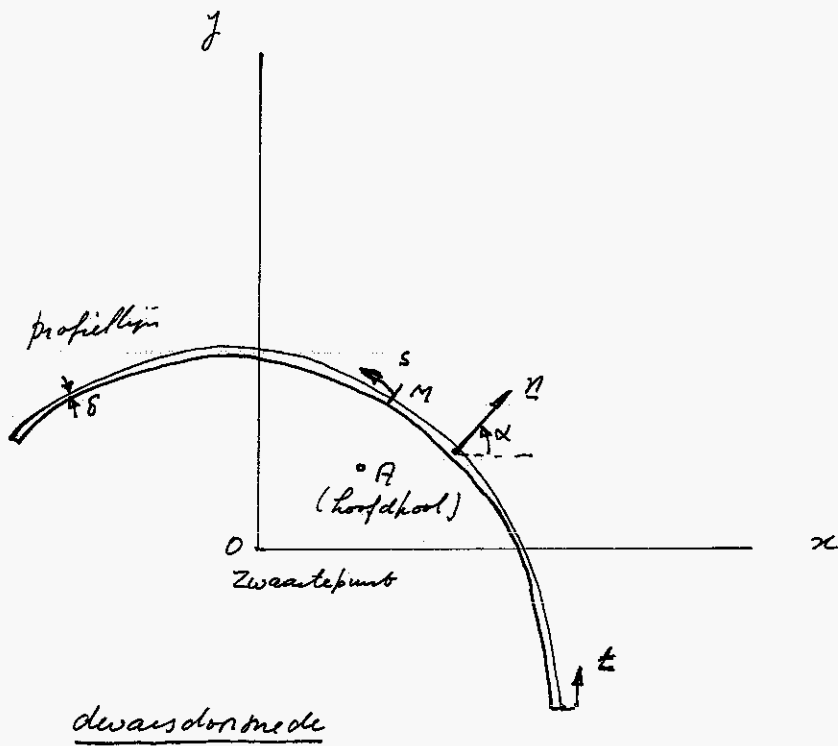


fig 1.1

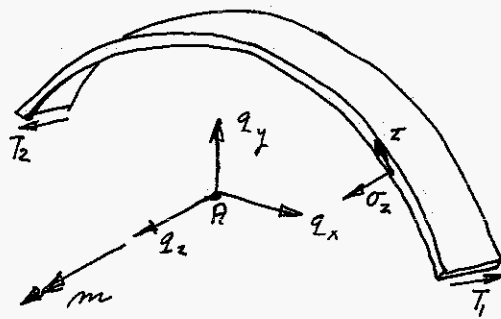


fig 1.2

De belangrijkste hypothesen zijn:

1. De profiellijn raakt in het vlak van de dwarsdoorsnede niet van vorm
2. De afschuiving in het middenvlak is constant, d.w.z. onafhankelijk van s .

Mit de eerste hypothese volgt voor de verplaatsing v van een punt van de profiellijn in tangentele richting:

$$v = -\alpha_x \sin \alpha + d_y \cos \alpha + \mathcal{J} h \quad (1.1)$$

- α_x : verplaatsing van A in x -richting
 α_y : " " " " y -richting
 \mathcal{J} : verdraaiing der dwarsdoorsnede
 h : afstand van A tot de raaklijn in S .

Mit de tweede hypothese volgt:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{T(z)}{\mathcal{J} S} \quad (1.2)$$

$$\text{of } w = f(z) - d_x'(z) \cdot x - d_y'(z) \cdot y - \mathcal{J}'(z) \cdot w + \frac{T(z) \cdot S}{\mathcal{J} S} \quad (1.3)$$

Mit de - geschematiseerde - wet van Hooke volgt voor de axiale normaalspanning:

$$\sigma_z = E \left[f' - d_x'' \cdot x - d_y'' \cdot y - \mathcal{J}'' w + \frac{T' S}{\mathcal{J} S} \right] \quad (1.4)$$

Het axiale evenwicht levert:

$$\frac{\partial(\Sigma S)}{\partial s} + \delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_z = 0$$

of

$$\frac{\partial(\Sigma S)}{\partial t} = -p_z - \delta E \left[f'' - \alpha_x''' x - \alpha_y''' y - \mathcal{J}''' \omega + \frac{T''}{g} s \right]$$

$$\begin{aligned} \Sigma S(t) = T_1 - \int_0^t p_z dt - E F(t) f'' + E \alpha_x''' S_y(t) + \\ + E \alpha_y''' S_x(t) + E \mathcal{J}''' S_\omega(t) - \frac{E T''}{g} \int_0^t s dt \end{aligned}$$

$$\text{Stel } S_s(t) = \int_0^t s dt$$

$$\begin{aligned} \Sigma S(t) = T_1 - E F(t) f'' + E \alpha_x''' S_y(t) + E \alpha_y''' S_x(t) + E \mathcal{J}''' S_\omega(t) + \\ - \frac{E T''}{g} S_s(t) - \int_0^t p_z dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

Mit de ~~axiale~~ evenwichtsvergelijkingen volgen de differentiaalvergelijkingen van f , α_x , α_y en \mathcal{J} .

Het axiale evenwicht levert:

$$\int_F \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dF + (T_2 - T_1) + q_z = 0$$

$$E F f'' = -(q_z + T_2 - T_1) - \frac{T''}{2g} (s_2^2 - s_1^2) \quad (1.6)$$

Mit het evenwicht in x-richting volgt:

$$+ \int_F \frac{\partial (T_2)}{\partial z} dx + q_x = 0$$

of

$$- E J_y \alpha_x'''' - \frac{E}{J} T'''' \int_F S_s(t) dx + q_x + x_2 T_2' - x_1 T_1' +$$

$$+ \int_F x \frac{\partial p_2}{\partial z} dF = 0$$

hier gelte:

$$\int_F S_s(t) dx = x S_s(t) \Big|_{t=0}^{t=L} - \int_F x s ds$$

das:

$$E J_y \alpha_x'''' = q_x + x_2 T_2' - x_1 T_1' + \left[\frac{x_2}{2} (S_2^2 - S_1^2) - \int_F x s ds \right] \frac{E}{J} T'''' + \int_F x \frac{\partial p_2}{\partial z} dF \quad (1.7)$$

Equilibrium in y-direction

$$E J_x \alpha_y'''' = q_y + x_2 T_2' - y_1 T_1' - \left[\frac{y_2}{2} (S_2^2 - S_1^2) - \int_F y s ds \right] \frac{E}{J} T'''' + \int_F y \frac{\partial p_2}{\partial z} dF \quad (1.8)$$

Momentenequilibrium om die z-as:

$$E J_\omega \vartheta'''' - J_y \alpha_x'''' = m + \omega_2 T_2' - \omega_1 T_1' - \left[\frac{\omega_2}{2} (S_2^2 - S_1^2) - \int_F \omega s ds \right] \frac{E}{J} T'''' + \int_F y \frac{\partial p_2}{\partial z} dF \quad (1.9)$$

Het bepalen van de ggeneraliseerde krachten kan formel op dezelfde manier worden uitgevoerd. Het wordt wel twijfelachtig of deze werkwijze goed opgefundeerd is omdat het de vraag is of $T(z)$ in de formule voor \dot{w} (form 1.3) ook als ggeneraliseerde coördinaat moet worden opgevat.

We zullen in eerste instantie niet verder ingaan op de ggeneraliseerde krachten.

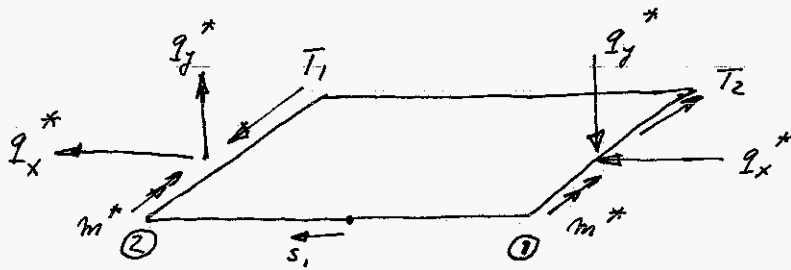
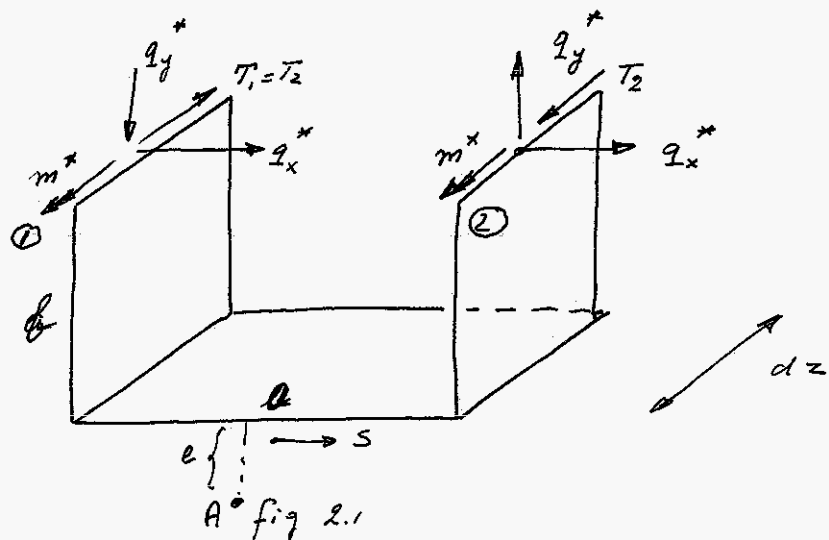
Opmerking:

Mit (1.5) volgt voor $t = L$:

$$T_2 = T_1 - EF f'' - \frac{E}{2g} T'' (S_2^2 - S_1^2) - q_2$$

Dit resultaat stemt overeen met de evenwichtsvergelijking in axiale richting (1.6)

2. Torsie van een rechthoekige koker, opgevat als
samenstel van een L-balk en een plaat



Van de L-balk geldt:

$$k_2 = 0 \quad ; \quad q_z = 0$$

$$q_x = 2 q_x^*$$

$$q_y = 0$$

$$m = 2m^* + q_y^* b - 2q_x^* (b+e)$$

$$T_1 = T_2$$

$$x_1 = -x_2 \mp t \frac{q}{2}$$

$$y_1 = y_2$$

$$\omega_1 = -\omega_2$$

$$s_1 = -s_2$$

De differentiaalvergelijking 1.6 t/m 1.9 gaan van de U-balk over in:

$$EF \delta'' = 0 \quad (2.1)$$

$$EJ_y \delta_x^{IV} = 2q_x^* + a T_2' + \frac{E}{g} \int_F x s ds T''' \quad (2.2)$$

$$EJ_x \delta_y^{IV} = \frac{E}{g} \int_F y s ds \cdot T''' = 0 \quad (2.3)$$

$$EJ_\omega \delta'' - gJ_\omega \delta'' = 2m^* + q_y^* a - 2q_x^* (b+e) + 2\omega_2 T_2' + \frac{E}{g} \int_F \omega s ds \cdot T''' \quad (2.4)$$

Van de plaat nemen we alle grootheden van een index 1. We bedenken dat van de plaat geldt:

$$k_2 = 0 \quad , \quad q_2 = 0$$

$$q_x = -2q_x^*$$

$$q_y = 0$$

$$m = -2m^* - q_y^* a$$

$$T_1 = T_2$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{a}{2}$$

$$y_1 = y_2 = 0$$

$$s_1 = -s_2 = \frac{a}{2}$$

$$\omega = 0$$

De differentiaalvergelijkingen luiden:

$$EF_1 \zeta_1'' = 0 \quad (2.5)$$

$$EJ_{y_1} \alpha_{x_1}^{IV} = -2q_x^* + aT_2' + \frac{E}{f} \int_{F_1} \alpha s ds T''' \quad (2.6)$$

$$EJ_{x_1} \alpha_{y_1}^{IV} = 0 \quad (2.7)$$

$$-gJ_{d_1} \vartheta_1'' = -2m^* - q_y^* a \quad (2.8)$$

Met behulp van (2.6) en (2.8) kunnen de grootheden q_x^* , m^* en q_y^* worden gelijkgesteld in de vergelijkingen (2.2) en (2.4)

$$EJ_y \alpha_x^{IV} = -EJ_{y_1} \alpha_{x_1}^{IV} + \frac{E}{f} \int_{F_1} \alpha s ds \cdot T''' + \frac{E}{f} \int_{F_1} \alpha s ds \cdot T''' \quad (2.9)$$

$$EJ_w \vartheta'' - gJ_d \vartheta'' = gJ_{d_1} \vartheta_1'' + (b+e) \left[EJ_{y_1} \alpha_{x_1}^{IV} + aT_2' + \frac{E}{f} \int_{F_1} \alpha s ds \cdot T''' \right] + 2\omega_2 T_2' + \frac{E}{f} \int_{F_1} \omega s ds \cdot T''' \quad (2.10)$$

De aansluitcondities in het vlak van de dwarsdoorsnede resulteren in de vergelijkingen:

$$\alpha_{x_1} = \alpha_x - \vartheta(b+e) \quad (2.11)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \quad (2.12)$$

Aansluiting in axiale richting levert voor het
lockpunt $x = \frac{a}{2}$:

$$w(z) = w_1(z)$$

$$f(z) - \alpha_x'(z) \frac{Q}{2} - \alpha_y'(z) y_2 - \vartheta'(z) \omega_2 + \frac{T(z)}{g\delta} S_2 =$$

$$f_1(z) - \alpha_{x_1}'(z) \frac{Q}{2} - \frac{T(z)}{g\delta} \frac{a}{2}$$

Met $\alpha_{x_1}' = \alpha_x' - (b+e)\vartheta'$ gaat deze relatie
over in:

$$f(z) - \alpha_y'(z) y_2 - \vartheta'(z) \omega_2 + \frac{T}{g\delta} \left(\frac{a}{2} + b \right) =$$

$$f_1(z) + (b+e) \frac{a}{2} \vartheta' - \frac{T}{g\delta} \frac{a}{2}$$

Aansluiting van het andere lockpunt levert:

$$f(z) - \alpha_y'(z) y_2 + \vartheta'(z) \omega_2 - \frac{T}{g\delta} \left(\frac{a}{2} + b \right) =$$

$$f_1(z) - (b+e) \frac{a}{2} \vartheta' + \frac{T}{g\delta} \frac{a}{2}$$

Uit beide relaties volgt:

$$f(z) - \alpha_y'(z) y_2 = f_1(z) \quad (2.13)$$

en

$$\vartheta'(z) \omega_2 - \frac{T}{g\delta} \left(\frac{a}{2} + b \right) = -(b+e) \frac{a}{2} \vartheta' + \frac{T}{g\delta} \left(\frac{a}{2} + b \right)$$

Met $\omega_2 = \frac{a}{2} (b-e)$ vinden we hieruit

$$T = \int \frac{ab\delta}{a+b} \mathcal{J}' \quad (2.14)$$

Als enige nog onbekende functie in de voorgaande differentiaalvergelijkingen blijft over $T_2 = T_1$. Alle andere grootheden zijn uitgedrukt in de besonningsparameters \mathcal{J} , α_x , α_y en \mathcal{J} .

Het is wellicht verstandig om te kiezen:

$$T_1 = T_2 = T$$

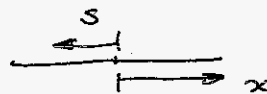
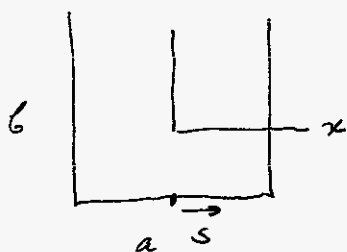
Met de vergelijkingen (2.11) en (2.14) gaat de differentiaalvergelijking (2.9) over in:

$$E \mathcal{J}_y \alpha_x^{IV} = -E \mathcal{J}_y \left\{ \alpha_x^{IV} - (b+c) \mathcal{J}'^{IV} \right\} + \frac{Eab\delta}{a+b} \mathcal{J}'^{IV} \cdot \varphi \quad (2.15)$$

met

$$\varphi = \int_P x s ds + \int_{F_1} x s ds \quad (2.16)$$

We merken op dat $s=0$ voor de eerste integraal niet samenvalt met $s=0$ voor de tweede.



Er geldt:

$$\begin{aligned} \int_P x s ds &= \frac{1}{12} a^3 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(b + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{12} a^3 + \frac{1}{2} a (b^2 + ab) \end{aligned}$$

$$\int_{F_1} x s \, ds = - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} s^2 \, ds = -\frac{1}{12} a^3$$

Dus
$$Q = \frac{1}{2} ab(a+b) \quad (2.17)$$

Substitueer van (2.17) in (2.15) levert:

$$E(I_y + I_{y_1}) \alpha_x^{IV} = E \mathcal{I}^{IV} \left[y_1(b+e) + \frac{1}{2} a^2 b^2 \delta \right] \quad (2.18)$$

$$y_1(b+e) + \frac{1}{2} a^2 b^2 \delta = \frac{1}{12} \delta a^3 \left(b + \frac{3b^2}{a+6b} \right) + \frac{1}{2} a^2 b^2 \delta =$$

$$= \frac{\delta a^2 \left[a^2 b + 6ab^2 + 3ab^2 + 6ab^2 + 36b^3 \right]}{12(a+6b)} =$$

$$= \frac{\delta a^2 b \left[a^2 + 15ab + 36b^2 \right]}{12(a+6b)} = \frac{\delta a^2 b (a+12b)(a+3b)}{12(a+6b)}$$

Omdat

$$I_y + I_{y_1} = \frac{1}{12} \delta a^2 (a+3b) \quad \text{gaat over}$$

in de uitdrukking over in

$$\frac{b(a+12b)}{2(a+6b)} (I_y + I_{y_1}) = \left(\frac{b}{2} + \frac{3b^2}{a+6b} \right) \overset{(I_y + I_{y_1})}{=} \left(\frac{b}{2} + e \right) (I_y + I_{y_1})$$

Vergelijking (2.18) gaat over in:

$$E(I_y + I_{y_1}) \left[\alpha_x - \left(e + \frac{b}{2} \right) \mathcal{I} \right]^{IV} = 0 \quad (2.19)$$

We merken op dat deze d.v. overeenstemt met de d.v. van een gesloten koker omdat

$$d_x = \mathcal{D} \left(e + \frac{b}{z} \right) \quad \text{juist de verplaatsing}$$

in x-richting van het dwarsvlakmiddenpunt van de koker.

Bij gebruik van de Blasov theorie wordt dit resultaat niet gevonden zoals uit rapport WE-65/36 volgt

We willen vervolgens de differentiaalvergelijking (2.9) omwerken. We zullen voor T_2 kiezen

$$T_2 = T = \int \frac{ab\delta}{a+b} \mathcal{D}'$$

Beide geldt

$$\begin{aligned} d_{x1} &= d_x - (b+e) \mathcal{D} \\ d_{x1}^{IV} &= d_x^{IV} - (b+e) \mathcal{D}^{IV} \end{aligned}$$

In b.v. (2.19) wordt dit:

$$\begin{aligned} d_{x1}^{IV} &= d_x^{IV} - \frac{(b+e)}{e+\frac{b}{2}} d_x^{IV} = \left(e + \frac{b}{2} - b - e \right) \mathcal{D}^{IV} = \\ &= -\frac{b}{2} \mathcal{D}^{IV} \end{aligned}$$

(2.10) gaat over in:

$$\begin{aligned} E \left[\mathcal{D}_w + \frac{b}{2} (b+e) \mathcal{D}_{y1} + \frac{ab\delta}{a+b} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D} (b+e) \int_{\mathbb{R}} x s ds - \int_{\mathbb{R}} w s ds \right\} \right] \mathcal{D}^{IV} + \\ - \int_{\mathbb{R}} \left[\mathcal{D}_d + \mathcal{D}_{d1} + (ab+ae+2w_2) \frac{ab\delta}{a+b} \right] \mathcal{D}'' = 0 \end{aligned}$$

De factor van J'' wordt (zie rapport WF-65/36, pag 232):

$$g \left(J_a + J_{a1} + \frac{2a^2 b^2 \delta}{a+b} \right)$$

Deze uitdrukking geeft de torsie stijfheid van een ~~rect~~ koker met rechthoekige doorsnede volgens de Bredt theorie, vermeerderd met de torsie stijfheid van de platen afzonderlijk. Deze term stemt dus overeen met de ~~e~~ koker theorie waarbij in het algemeen $J_a + J_{a1}$ nu waarborgd kan worden ten opzichte van $\frac{2a^2 b^2 \delta}{a+b}$.

We willen proberen de factor van J'' met iets om te werken.

Op pag 11 hebben we afgeleid:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} x s ds &= -\frac{1}{12} a^3 + \frac{1}{2} a(b) + ab \\ \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} w s ds &= 2 \left[-e \int_0^{\frac{a}{2}} s^2 ds + \frac{a}{2} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (s-e-\frac{a}{2}) s ds \right] = \\ &= 2 \left[-\frac{1}{24} e a^3 + \frac{a}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a}{2}+b\right)^3 - \frac{a^3}{8} \right] - \frac{1}{2} \left(e+\frac{a}{2}\right) \left[\left(\frac{a}{2}+b\right)^2 - \frac{a^2}{4} \right] \right\} \right] = \\ &= 2 \left[-\frac{1}{24} e a^3 + \frac{a}{2} \left\{ \frac{a^2 b}{4} + \frac{e b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right\} - \frac{1}{4} a \left(e+\frac{a}{2}\right) b(a+b) \right] = \\ &= 2 \left[-\frac{1}{24} e a^3 + \frac{1}{24} a b (3a^2 + 6ab + 4b^2) - \frac{1}{4} a b (a+b) \left(e+\frac{a}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{12} a b \left[-\frac{e a^2}{b} + 3a^2 + 6ab + 4b^2 - 6(a+b) \left(e+\frac{a}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{12} \frac{a b}{(a+6b)} \left[-3 b a^2 + (3a^2 + 6ab + 4b^2)(a+6b) - 3(a+b)(\cancel{6b+a^2}) \right] = \\ & \hspace{15em} (6b^2 + 6ab) \end{aligned}$$

$$= \frac{ab}{12(a+6b)} (4ab^2 + 6b^3)$$

$$(b+e) \int_{F_1} x s ds - \int_F \omega s ds =$$

$$- \frac{ab}{12(a+6b)} \left[9a^2b + a^3 + 4ab^2 + 6b^3 \right] =$$

$$- \frac{ab}{12(a+6b)} \left[a^3 + 9a^2b + 4ab^2 + 6b^3 \right]$$

$$\frac{ab\delta}{a+b} \left\{ (b+e) \int_{F_1} x s ds - \int_F \omega s ds \right\} =$$

$$- \frac{a^2b^2\delta}{12(a+b)(a+6b)} (a^3 + 9a^2b + 4ab^2 + 6b^3)$$

Im rapport WE-65/36 pag 24 is afgeleid dat geldt:

$$J_{\omega} = \frac{a^2b^2\delta}{12(a+6b)} b(2a+3b)$$

$$J_{\omega} + \frac{b}{2}(b+e)J_{y_1} =$$

$$\frac{a^2b^2\delta}{24(a+6b)} (a^2 + 13ab + 6b^2)$$

De factoren van J'' kan dus geschreven worden als:

$$\frac{a^2 b^2 \delta (a^3 + 13a^2 b + 6ab^2 + a^2 b + 13ab^2 + 6b^3 - 2a^3 - 18a^2 b + 8ab^2 - 12b^3)}{24(a+6b)(a+b)} =$$

$$\frac{a^2 b^2 \delta (-a^3 - 4a^2 b + 11ab^2 - 6b^3)}{24(a+6b)(a+b)} =$$

$$-\frac{a^2 b^2 \delta (a-b)^2 (a+6b)}{24(a+6b)(a+b)} = -\frac{a^2 b^2 \delta (a-b)^2}{24(a+b)}$$

We merken op dat deze grotlied juist het sectoriel draagleridsmoment van de gesloten koker is, afgezien van het minusteken. We vragen ons af of dit tekenverschil het gevolg is van een cyclusfout in de hier gegeven berekening, of of essential is.