

Numerieke analyse van de spannings- en vervormingstoestand in het femur met behulp van de methode der eindige elementen

Citation for published version (APA):

Brekelmans, W. A. M., Poort, H. W., & Janssen, J. D. (1970). *Numerieke analyse van de spannings- en vervormingstoestand in het femur met behulp van de methode der eindige elementen*. (DCT rapporten; Vol. 1970.027). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1970

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
NEDERLAND
AFDELING DER WERKTUIGBOUWKUNDE
LABORATORIUM VOOR TECHNISCHE MECHANICA

TECHNOLOGICAL UNIVERSITY EINDHOVEN
NETHERLANDS
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING
LABORATORY OF ENGINEERING MECHANICS

Numerieke analyse van de spannings- en
vervormingstoestand in het femur met be-
hulp van de methode der eindige elementen.

door

W.A.M. Brekelmans en H.W. Poort

Inhoudsopgave

Symbolenlijst	1
Literatuur	2
Samenvatting	5
1. Inleiding	6
2. Basis van de methode	10
3. De elementenmethode als gereedschap	11
4. Numerieke resultaten	19
5. Vergelijking met de resultaten, waarbij een meer geavanceerd element werd gebruikt.	29
6. Veranderingen van de geometrie	35
7. Nabeschouwing en slotwoord	37
Appendix	38

SYMBOLLEN

E	Elasticiteitsmodulus
F	Potentiële energie van de uitwendige belasting
M	Aantal elementen
N	Aantal knooppunten
Q	Totale stijfheidsmatrix
U	Vormveranderingsenergie in het bot
V	Totale potentiële energie
Q^k	Stijfheidsmatrix van het k^e element
S^k	Met nullen uitgebreide stijfheidsmatrix van het k^e element
U^k	Vormveranderingsenergie van het k^e element
f	Totale belastingsvector
u	Verplaatsingsvector van het hele bot
w	Verplaatsingsvector met aangepaste volgorde
x,y	Coördinatenstelsel
f_1	Belastingsvector met de voorgeschreven krachten
f_2	Belastingsvector met de reactiekrachten
f_{ix}, f_{iy}	Uitwendige krachten in x en y-richting
\hat{u}, \hat{v}	Verplaatsingen in x en y-richting
u^k	Verplaatsingsvector van het k^e element
u_i, v_i	Verplaatsingen van het i^e knooppunt
w_1	Vector met de te variëren verplaatsingen
w_2	Vector met de voorgeschreven verplaatsingen
Δ	Oppervlakte van een element
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	Rekken
ν	Dwarscontractie coëfficiënt
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	Spanningen
σ_{verg}	Vergelijkspanning volgens Maxwell, Huber, Hencky

Samenvatting

Aan de hand van een twee-dimensionaal model van een femur zal de werkwijze bij het toepassen van de methode der eindige elementen voor de bepaling van het mechanisch gedrag van het bot worden toegelicht. Getracht zal worden duidelijk te maken dat de mogelijkheden bij een numerieke analyse van de spannings- en vervormingstoestand veel groter zijn dan bij de analytische methoden, waar een gecompliceerde geometrie en moeilijk materiaalgedrag vaak onoverkomelijke moeilijkheden opleveren. De beperking tot een twee-dimensionaal model is in het geheel niet essentieel, maar voor het doel van dit artikel - het aangeven van een andere berekeningsmethode met meer mogelijkheden - wegens de eenvoud ervan bijzonder geschikt.

Uitbreiding tot een drie-dimensionaal model brengt een aantal, overigens goed oplosbare, praktische problemen met zich mee, die de opzet van dit artikel slechts zouden vertroebelen.

Na een theoretisch begin zullen een aantal interessante resultaten volgen voor het twee-dimensionale model.

1. Inleiding

Wanneer een goed inzicht bestaat in de voor de skeletdelen onder reële omstandigheden optredende belastingssituaties en in het mechanisch gedrag van de skeletdelen onder die omstandigheden, kan veel beter het effect van ingrepen of vervangingen worden nagegaan.

De mogelijkheid bestaat dan om het gedrag onder extreme condities te voorspellen. Er kunnen criteria worden opgesteld, waaraan vervangingsmiddelen vanuit mechanisch oogpunt moeten voldoen.

Wij zullen ons in dit artikel niet bezighouden met het beschrijven en analyseren van reële belastingssituaties, maar nader ingaan op de problemen wat betreft sterkte en stijfheid van de skeletdelen.

Om voorspellingen te doen over het mechanisch gedrag van een bepaald skeletgedeelte, zal een mathematisch model van dit deel ontworpen moeten worden, waarvan is aangetoond, dat het de realiteit voldoende goed beschrijft. Gekozen is voor een onderzoek gericht op het femur (dijbeenbot) om de volgende redenen:

- het femur is een belangrijk dragend element van het lichaam
- het femur is een redelijk isoleerbare unit
- het femur vormt een relatief eenvoudig gedeelte van het skelet
- klinische behandeling van vaak in het femur optredende breuken en andere schade is niet geheel probleemloos.

Door bijvoorbeeld Koch [8] en Blaimont [1] worden methodieken voor de bepaling van de sterkte en stijfheid van het femur aangegeven, die gebaseerd zijn op analytische theorieën. Een aantal complicaties maken de kans echter klein dat een voldoende goede beschrijving op basis van analytische theorieën gerealiseerd kan worden.

In concreto zijn de nu volgende aspecten de oorzaak van deze complicaties:

1. de ingewikkelde geometrie, die moeilijk analytisch te beschrijven is.
2. de belastingssituaties, waarover vaak niet voldoende informatie aanwezig is [13].
3. het gedrag van het materiaal, waaruit het bot is samengesteld, bijvoorbeeld de anisotropie en de inhomogeniteit [2, 3, 14, 15, 16].

Gebruik van op de computer afgestemde procedures, met name de methode der eindige elementen [6, 7, 18, 21], afgekort de elementenmethode, biedt aanzienlijk meer kans op succes. Bij deze methode wordt het te onderzoeken object verdeeld in een groot aantal deeltjes (elementen) met vaak een zeer eenvoudige begrenzing, twee-dimensionaal bijvoorbeeld driehoeken of rechthoeken, driedimensionaal bijvoorbeeld viervlakken of prisma's.

De mechanische eigenschappen van zo'n element zijn minder complex dan voor het object als geheel, met zijn willekeurige geometrie. Door het op de juiste wijze aan elkaar koppelen van de elementen kunnen uitspraken worden gedaan over de mechanische eigenschappen van het gehele object.

Het resultaat van een dergelijke berekeningswijze zal bestaan uit numerieke gegevens voor:

1. de verplaatsingen
2. de rekken
3. de spanningen

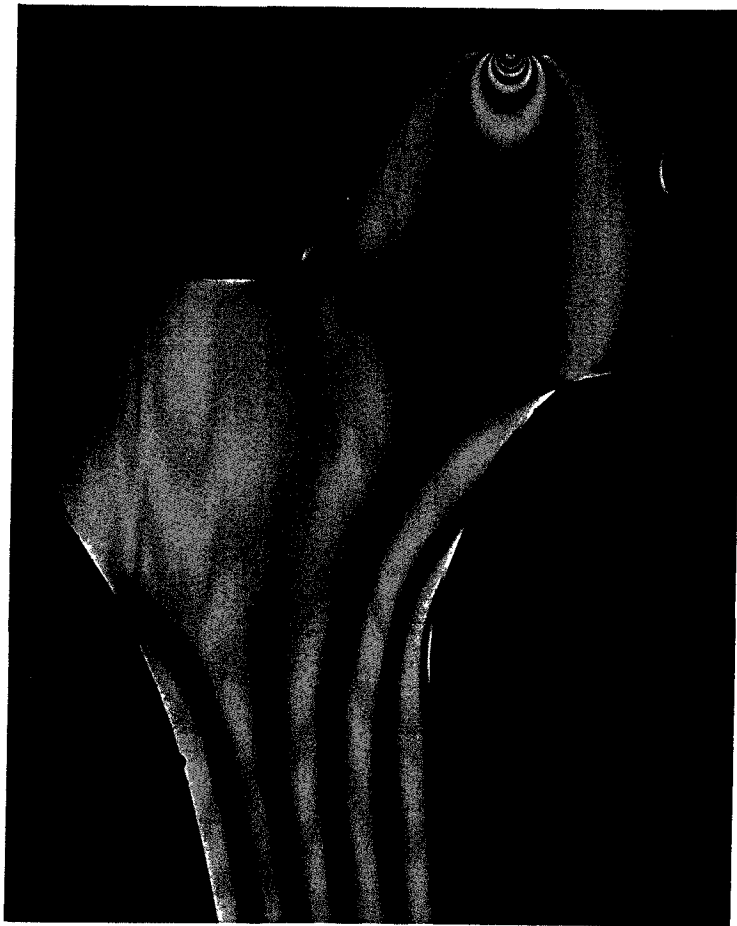
Gecompliceerd materiaalgedrag of een ingewikkelde geometrie brengen geen essentiële moeilijkheden met zich mee, mits over deze fenomenen voldoende informatie bekend is. Op dit moment willen wij ons daarvan echter distancieren omdat wij ons met dit artikel primair tot doel hebben gesteld de methodiek en de mogelijkheden van de elementenmethode aan te geven.

Wij zullen dit doen aan de hand van een twee-dimensionaal, vlak, homogeen en isotroop model van een femur onder statische belastingssituaties.

Een dergelijk twee-dimensionaal model is in principe identiek met het model dat bij foto-elastisch onderzoek wordt gebruikt [9, 10, 11, 12].

Echter met dien verstande dat de elementenmethode veel meer informatie verstrekt dan foto-elastisch onderzoek. De foto-elasticiteit [4, 19] verschaft ons:

1. isoklinen, waarmee de hoofdspanningsrichtingen te construeren zijn
2. isochromaten, de lijnen waarlangs het verschil van de hoofdspanningen constant is.



Figuur 1.1

Fig. 1.1 laat een afbeelding zien van het verloop van de isochromaten in het bovenste gedeelte van een femur, welke met een geconcentreerde kracht op de kop is belast.

Als wij het foto-elastisch onderzoek vergelijken met de modelvorming met behulp van de elementenmethode, kunnen wij concluderen:

1. De resultaten verkregen met de elementenmethode - zoals we later zullen zien - zijn aanzienlijk uitgebreider.
2. Met de foto-elasticiteit is het onmogelijk het anisotrope en inhomogene materiaalgedrag in het model na te bootsen. Dit in tegenstelling met de elementenmethode.

3. In het elementenmodel kost het geen moeite elke willekeurige belasting te creëren.
4. Overgang naar een drie-dimensionaal model levert geen moeilijkheden op met het elementenmodel. Het foto-elastisch onderzoek wordt bijzonder gecompliceerd, als dit op een ruimtelijk model wordt toegepast. Hierbij blijven dezelfde beperkingen gelden als met het twee-dimensionale onderzoek.
5. Het verkrijgen van resultaten en de verwerking ervan is, bij aanwezigheid van geschikte algemene rekenprogramma's, bij de elementenmethode veel minder tijdrovend dan bij foto-elastisch onderzoek.

2. Basis van de methode

Het centrale uitgangspunt voor een numerieke analyse van de spannings- en vervormingstoestand van het bot met behulp van de elementenmethode is "het principe van de minimale potentiële energie" [17, 18].

Wanneer wij definiëren:

U: de ten gevolge van de uitwendige belasting in het bot opgehoopte vormveranderingsenergie, uitgedrukt in de verplaatsingen.

F: de potentiële energie van de belasting, i.e. de som van het negatieve product van elke op het bot werkende kracht, met de arbeidsabsorberende component van de verplaatsing van het aangrijpingspunt.

$V = U + F$: de potentiële energie.

dan kan het principe van de minimale potentiële energie als volgt worden geformuleerd:

Wanneer wij voor een probleem beschikken over een aantal verschillende verplaatsingsvelden, die alle compatibel zijn en voldoen aan de geometrische randvoorwaarden, dan is die keuze daaruit de het best met de werkelijkheid overeenstemmende oplossing, die de uitdrukking voor de potentiële energie minimaal maakt ten opzichte van "naburige" toelaatbare verplaatsingsvelden.

Het keuzeproces wordt gerealiseerd door te eisen, dat de variatie van de potentiële energie nul is,

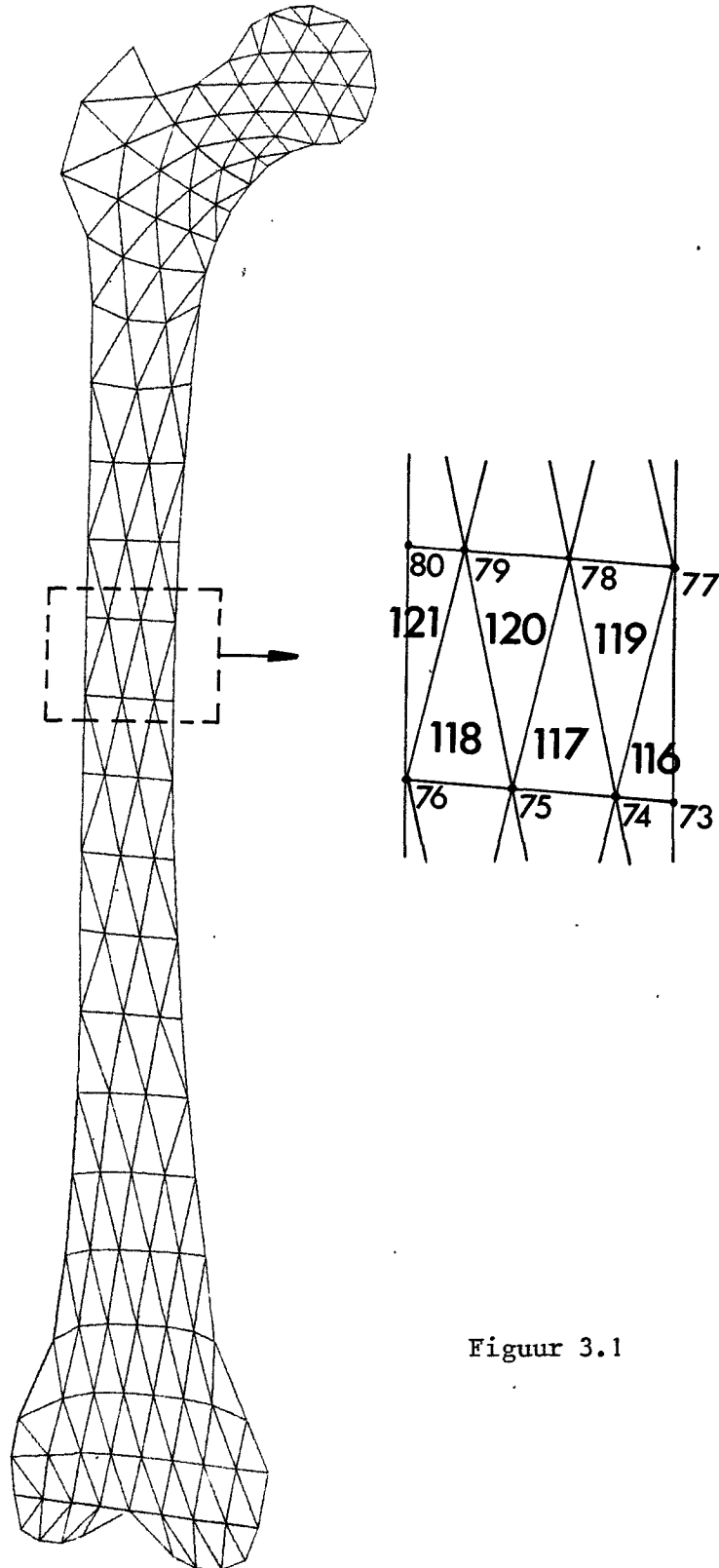
$$\delta V = 0 \quad (2.1)$$

voor alle toelaatbare variaties van het verplaatsingsveld.

In het volgende hoofdstuk zal aangegeven worden op welke wijze de uitwerking van het principe tot een bruikbare methodiek verloopt. Daarbij dient men zich te realiseren dat als voorbeeld om de werkwijze toe te lichten, slechts een zeer beperkte keuze is gedaan uit een groot scala van mogelijkheden, namelijk een werkwijze met de elementenmethode voor een twee-dimensionaal model met gebruikmaking van een zeer eenvoudig element.

3. De elementenmethode als gereedschap

Een twee-dimensionaal model van een femur wordt verdeeld in een aantal bijvoorbeeld driehoekige elementen, die van 1 tot M worden genummerd.



Figuur 3.1

Alle knooppunten, de hoekpunten van de elementen, nummeren wij van 1 tot N. Fig. 3.1 geeft een voorbeeld van een dergelijke verdeling met $M = 224$ en $N = 146$.

De verplaatsingen in een willekeurig punt van het bot in x- resp. y-richting geven wij aan met \hat{u} en \hat{v} . Deze verplaatsingen zullen onder andere afhangen van de coördinaten van dat punt en zij zullen in dit vlakke model dus een functie zijn van x en y. Het nog onbekende verplaatsingsveld kunnen wij aangeven met

$$\hat{u} = \hat{u}(x,y) \quad (3.1)$$

$$\hat{v} = \hat{v}(x,y) \quad (3.2)$$

In plaats van de in de continue theorieën optredende verplaatsingsgrootheden, die een functie zijn van de coördinaten, wordt in een elementenmodel het gedrag gekarakteriseerd met een concreet aantal grootheden, de knooppuntsverplaatsingen.

Binnen elk element wordt een verplaatsingsveld aangenomen dat afhankelijk is van en consistent is met de verplaatsingen van de bij het beschouwde element behorende knooppunten.

In fig. 3.2 is een willekeurig element (met nummer k) weergegeven. Bij de knooppunten zijn niet de globale nummers uit de rij 1 tot N vermeld, maar er is gewerkt met een lokale nummering: 1, 2 en 3.

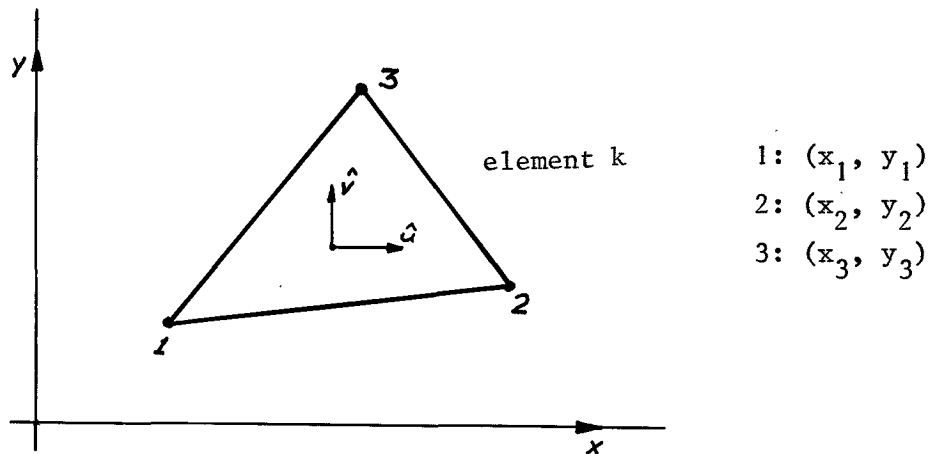


Fig. 3.2

De gehele vervormingstoestand van dit element k moet worden gekarakteriseerd door de knooppuntsverplaatsingen, die wij opbergen in een vector u^k :

$$u^k = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3) \quad (3.3)$$

Opm.: Voor de hier gebruikte vectornotatie en de nog te gebruiken matrixnotatie verwijzen wij naar de appendix.

Het is gebruikelijk bij dit element voor het verplaatsingsveld een interpolatiefunctie te kiezen die lineair is in de coördinaten x en y . Uiteraard is dit een benadering van de werkelijkheid, die des te beter is, naarmate de elementenverdeling fijner wordt genomen.

De keuze heeft het voordeel dat langs de randen de aansluiting tussen twee elementen ook in vervormde toestand is gegarandeerd. Voor het vervormingsveld van dit element kan worden geschreven:

$$\hat{u}(x,y) = u_1 \cdot P_1(x,y) + u_2 \cdot P_2(x,y) + u_3 \cdot P_3(x,y) \quad (3.4)$$

$$\hat{v}(x,y) = v_1 \cdot P_1(x,y) + v_2 \cdot P_2(x,y) + v_3 \cdot P_3(x,y) \quad (3.5)$$

met:

$$P_1(x,y) = \frac{1}{2\Delta} \left[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \right] \quad (3.6)$$

Hierbij is Δ het oppervlak van het beschouwde element. $P_2(x,y)$ en $P_3(x,y)$ kunnen worden gevonden door in formule (3.6) de indices cyclisch te verwisselen.

Wanneer wij uitgaan van de voor dit model geschikte twee-dimensionale elasticiteitstheorie met vlakspanningstoestand, dan kunnen wij de in dit element opgehoopte vormveranderingsenergie, U^k , uitdrukken in de nog onbekende componenten van de vector u^k en in de voor dit element geldende geometrische en fysische eigenschappen. Beperken wij ons tot een homogeen, isotroop en lineair materiaalgedrag en tot een constante dikte, dan geldt:

$$U^k = \int_{\Delta} \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + (1-\nu) \gamma_{xy}^2 \right] \right\} dx dy \quad (3.7)$$

De gestelde beperkingen zijn in het geheel niet essentieel, maar ze maken de formulering aanzienlijk eenvoudiger.

Voor de rekgrootheden ϵ_x , ϵ_y en γ_{xy} geldt:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \quad (3.10)$$

Substitutie van (3.4) en (3.5) in deze rekuitedrukkingen geeft de volgende resultaten:

$$\epsilon_x = \frac{1}{2\Delta} \left[u_1 \cdot (y_2 - y_3) + u_2 \cdot (y_3 - y_1) + u_3 \cdot (y_1 - y_2) \right] \quad (3.11)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2\Delta} \left[v_1 \cdot (x_3 - x_2) + v_2 \cdot (x_1 - x_3) + v_3 \cdot (x_2 - x_1) \right] \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \frac{1}{2\Delta} \left[u_1 \cdot (x_3 - x_2) + u_2 \cdot (x_1 - x_3) + u_3 \cdot (x_2 - x_1) + \right. \\ \left. + v_1 \cdot (y_2 - y_3) + v_2 \cdot (y_3 - y_1) + v_3 \cdot (y_1 - y_2) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Hier blijkt dat per element de rekgrootheden constant zijn, hetgeen een gevolg is van het aangenomen verplaatsingsveld.

Substitutie van (3.11), (3.12) en (3.13) in (3.7) en verdere uitwerking resulteert in een kwadratische uitdrukking in de componenten van de vector u^k en daarom kan voor U^k , met gebruikmaking van de matrixnotatie worden geschreven:

$$U^k = \frac{1}{2} u^k Q^k u^k \quad (3.14)$$

De coëfficiëntenmatrix Q^k , die zonder meer symmetrisch kan worden genomen, $Q^k = Q^k$, wordt de stijfheidsmatrix van element k genoemd.

Deze matrix ligt voor elk element geheel vast, onafhankelijk van de belastingssituatie.

Tot op dit moment is voor het beschouwde element k steeds gewerkt met een lokale knooppuntnummering. Om te komen tot een globale nummering definiëren wij de totale verplaatsingsvector $\overset{\cdot}{u}$:

$$\overset{\cdot}{u} = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_N \quad v_N) \quad (3.15)$$

die wordt gevormd door de verplaatsingen van alle knooppunten van het bot. Het zal duidelijk zijn dat de vector u^k is opgebouwd uit slechts zes componenten van de vector u .

Het is mogelijk om de symmetrische matrix Q^k , van de orde (6×6) , zodanig met een aantal nullen uit te breiden tot een symmetrische matrix S^k van de orde $(2N \times 2N)$, dat geldt:

$$U^k = \frac{1}{2} \overset{\cdot}{u} S^k u \quad (3.16)$$

Door middel van sommatie over alle elementen verkrijgen wij de totale in het bot opgehoopte vormveranderingsenergie:

$$U = \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} \overset{\cdot}{u} S^k u = \frac{1}{2} \overset{\cdot}{u} Q u \quad (3.17)$$

waarbij voor Q geldt:

$$Q = \sum_{k=1}^M S^k \quad (3.18)$$

Aangezien de matrices S^k voor $k = 1 \dots M$ alle symmetrisch zijn, zal deze eigenschap eveneens voor Q gelden.

Wij hebben nu de totale vormveranderingsenergie uitgedrukt in een discreet aantal onbekende verplaatsingsgrootheden. Deze energie vormt het ene gedeelte van de voor de oplossingsmethode benodigde uitdrukking voor de potentiële energie. De andere bijdrage is afkomstig van de op het bot werkende belastingskrachten.

De in werkelijkheid op het bot werkende belasting zullen wij steeds transformeren naar in de knooppunten geconcentreerde krachten.

Wij definiëren de belastingsvector f met als componenten, de in elk knooppunt werkende krachten in x- en y-richting:

$$\overset{\cdot}{f} = (f_{1x} \quad f_{1y} \quad f_{2x} \quad f_{2y} \quad \dots \quad f_{N_x} \quad f_{N_y}) \quad (3.19)$$

Wij merken op dat de i^e component van f de kracht is op de plaats van en in de richting van de i^e component van de verplaatsingsvector.

De bijdrage tot de potentiële energie kunnen wij nu schrijven als het vectorproduct:

$$F = - \overset{\cdot}{u} \overset{\cdot}{f} \quad (3.20)$$

zodat voor de potentiële energie V geldt:

$$V = \frac{1}{2} \overset{\cdot}{u} Q \overset{\cdot}{u} - \overset{\cdot}{u} \overset{\cdot}{f} \quad (3.21)$$

Geëist moet worden dat de variatie van deze uitdrukking nul is, voor alle toelaatbare variaties van het verplaatsingsveld, en dus voor alle toelaatbare variaties van de componenten van de vector u .

Niet alle mogelijke variaties zijn toelaatbaar.

Om een eenduidige oplossing voor het verplaatsingsveld te vinden, zullen tenminste drie verplaatsingsmogelijkheden moeten worden verhinderd om beweging als star lichaam uit te sluiten. De bij deze mogelijkheden behorende componenten van de vector u zijn nul en een variatie daarvan is niet toegestaan. Wij definiëren nu opnieuw een verplaatsingsvector w , die alle componenten van u bevat, echter in een andere volgorde:

$$\overset{\cdot}{w} = (\overset{\cdot}{w}_1 \quad \overset{\cdot}{w}_2) \quad (3.22)$$

met: $\overset{\cdot}{w}_1$: vector met de te variëren verplaatsingen
 $\overset{\cdot}{w}_2$: vector met de voorgeschreven verplaatsingen, waarvan de componenten allen nul zijn.

Met de vector f doen wij hetzelfde, met als resultaat:

$$(\overset{\cdot}{f}_1 \quad \overset{\cdot}{f}_2) \quad (3.23)$$

met: $\overset{\cdot}{f}_1$: belastingsvector behorende bij de verplaatsingen $\overset{\cdot}{w}_1$, die de voorgeschreven krachten bevat.
 $\overset{\cdot}{f}_2$: belastingsvector behorende bij de voorgeschreven verplaatsingen $\overset{\cdot}{w}_2$ en die dus de onbekende reactiekrachten bevat.

Na verwisseling van een aantal rijen en kolommen in de matrix Q en na partitionering gaat (3.21) over in:

$$V = \frac{1}{2} (\overset{r}{w}_1 \quad \overset{r}{w}_2) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - (\overset{r}{w}_1 \quad \overset{r}{w}_2) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Wij kunnen nu eisen:

$$\delta V = 0 \quad \text{voor alle variaties van } w_1$$

met als resultaat een stelsel lineaire vergelijkingen:

$$Q_{11} w_1 = f_1 \quad (3.25)$$

Inverteren van de matrix Q_{11} geeft ons de resultaten voor de onbekende verplaatsingen:

$$w_1 = Q_{11}^{-1} f_1 \quad (3.26)$$

Nu de componenten van de vector w_1 bekend zijn, ligt het verplaatsingsveld in het bot geheel vast. Voor elk element is de vector u^k (zie (3.3)) bekend. Met behulp van de formules (3.11), (3.12) en (3.13) kunnen wij de rekgrootheden berekenen. Met de Wet van Hooke:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

worden dan de spanningen per element bepaald.

De geschetste werkwijze is uitstekend generaliseerbaar en eenvoudig te programmeren voor een willekeurige twee-dimensionale "constructie" in zijn vlak belast op willekeurige wijze.

De voor zo'n rekenprogramma benodigde invoergegevens zijn:

1. De coördinaten van de knooppunten (geometrie)
2. De bij elk element behorende knooppuntnummers (topologie)
3. De materiaaleigenschappen (eventueel verschillend van element tot element).

4. De dikte van de elementen (eventueel eveneens verschillend).
5. Gegevens over de wijze waarop en de plaats waar de "constructie" aan de vaste wereld vastzit, m.a.w. een karakterisering van de voorgeschreven verplaatsingen.

Uitsluitend met deze gegevens is het mogelijk de matrix Q_{11} uit vergelijking (3.25) op te stellen. Na karakterisering van de belasting wordt de vector f_1 samengesteld.

Oplossing van het stelsel (3.25) gebeurt met een bij vrijwel elke computer behorende standaardprocedure voor het oplossen van een lineair stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden.

Als uitvoer kunnen wij dan bijvoorbeeld verwachten:

1. de bij elk knooppunt behorende verplaatsingen
2. de rekken voor elk element
3. de spanningen in elk element
4. eventueel de hoofdspinningen, hoofdspinningsrichting^{en} en gelijkspanning voor elk element.

N.B. De op deze wijze verkregen (constante) spanningen per element brengen met zich mee dat voor de "constructie" als geheel een discontinu spanningsverloop wordt gevonden, hetgeen niet met de realiteit in overeenstemming zal zijn. Daarom wordt de gevonden spanning per element vaak slechts toegekend aan het zwaartepunt van dat element.

4. Numerieke resultaten

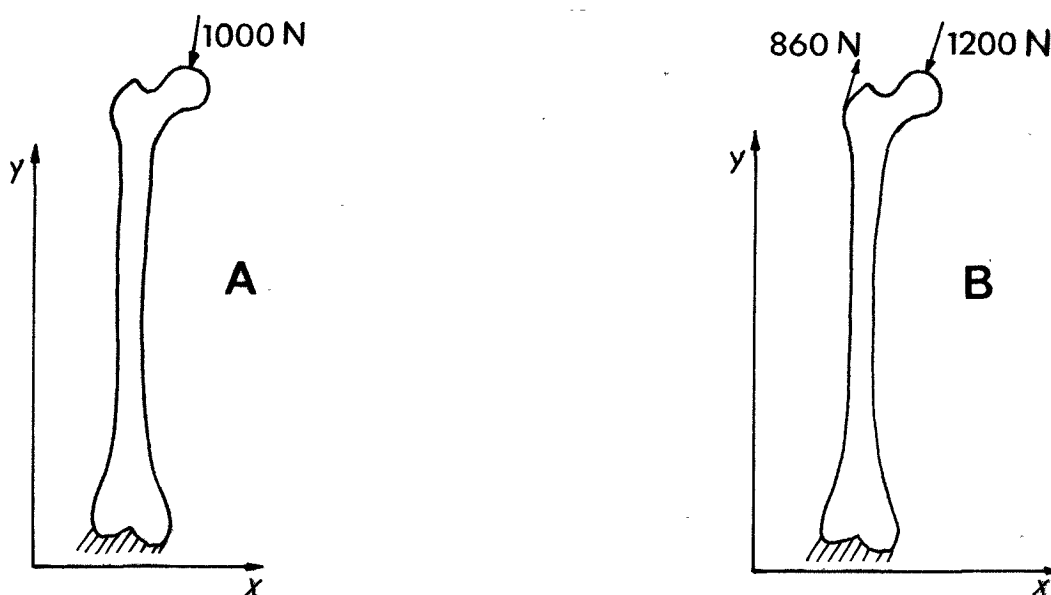
Een twee-dimensionaal model van een femur met een buitengeometrie zoals die door Koch [8] wordt gegeven zal in twee verschillende belastingsituaties worden geanalyseerd.

- A. Een belasting zoals door Koch wordt gebruikt, zijnde een kracht, werkend op de femurkop met een werklijn die de verbindingslijn is van het middelpunt van de kop en het midden tussen de condylis medialis en de condylis lateralis.
- B. Een belasting zoals door Rydell [13] wordt aangegeven, een kracht op de femurkop gericht naar het middelpunt van de kop met een aangrijpingspunt binnen het door hem aangegeven gebied op de kop en een kracht op de trochanter major met een eveneens door Rydell aangegeven richting, de richting van de resultante van de abductor-spiers *kracht*.

Voor belastingsgeval A is de grootte van de kracht niet interessant in verband met de lineariteit van de theorie.

Voor belastingsgeval B is alleen de verhouding van beide krachten belangrijk. Voor beide belastingsgevallen is de verbinding met de vaste wereld hetzelfde gekozen.

Wij denken het bot langs de gehele onderzijde ingeklemd. Dit betekent dat voor de verplaatsingen van alle punten van de rand van de condylis medialis en de condylis lateralis een voorgeschreven waarde gelijk aan nul is verondersteld. Fig. 4.1 geeft een beeld van de te analyseren belastingsituaties voor het bot.



Figuur 4.1

Hoewel niet essentieel voor de methode maken wij de volgende beperkingen:

1. Wij veronderstellen op dit ogenblik het materiaal homogeen, isotroop en lineair met

$$E = 20.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.37$$

2. Wij nemen aan dat de dikte van het model constant is. De getalwaarde die wij aan deze dikte toekennen is niet belangrijk, omdat de voor de verplaatsingen, rekken en spanningen te verkrijgen resultaten wegens de lineariteit van de theorie omgekeerd evenredig zijn met de dikte.

Gekozen is:

$$t = 10 \text{ mm}$$

De afmetingen in het vlak van fig. 4.1 nemen wij identiek met die van Koch en dus op ware grootte. Het model wordt verdeeld in 936 elementen, waarbij 537 knooppunten worden gecreëe. Fig. 4.2 geeft een beeld van deze verdeling.

Voor het maken van een dergelijke verdeling en de hierbij behorende geometrische en topologische gegevens is een elementgenerator ontwikkeld, zodat de hierbij behorende hoeveelheid handwerk tamelijk gering is.

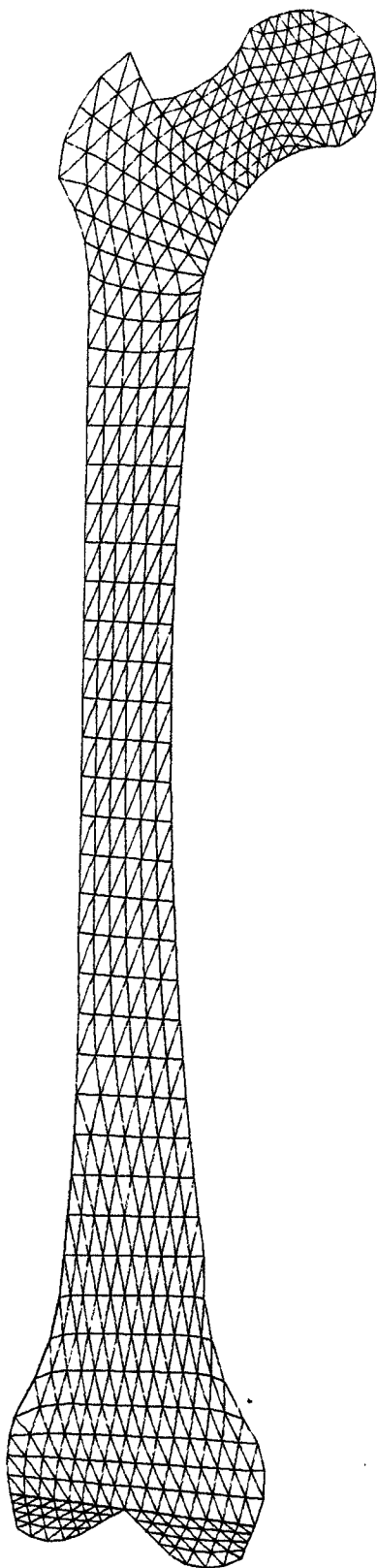
Na verwerking met de computer verkrijgen wij primair de verplaatsingen van de knooppunten. Van de buitenomtrek is in fig. 4.3 zowel de oervormde als de vervormde contour weergegeven waarbij voor de duidelijkheid een vergrotingsfactor voor de verplaatsingen is toegepast. Gebruikt werden:

- schaal voor de buitenomtrek: 1 : 2.5

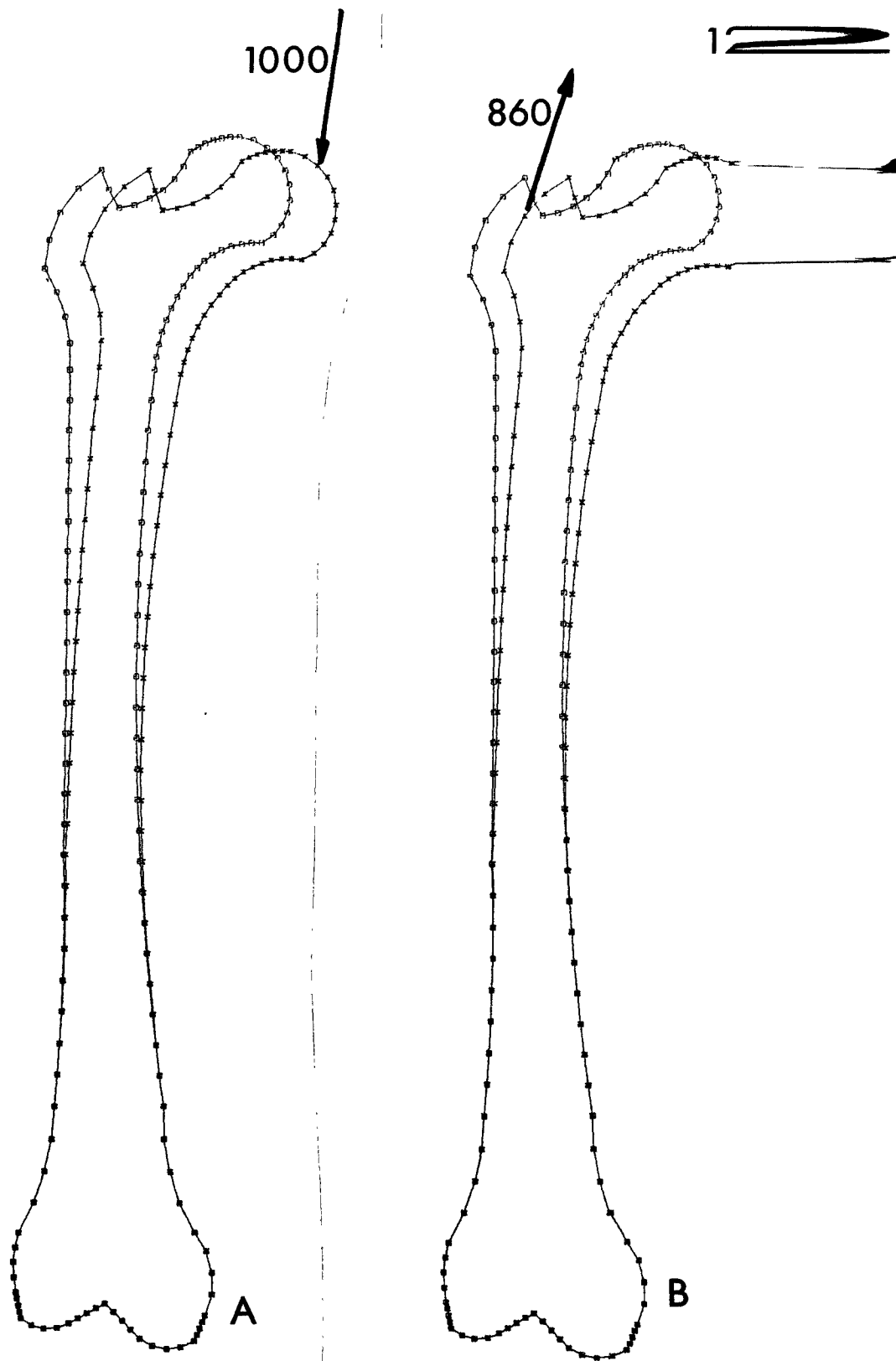
- schaal voor de verplaatsingen: 1 : 0.5

De toegepaste vergrotingsfactor voor de verplaatsingen had dus de waarde 5.

De verplaatsingsvelden voor beide belastingsituaties blijken nauwelijks onderling te verschillen.

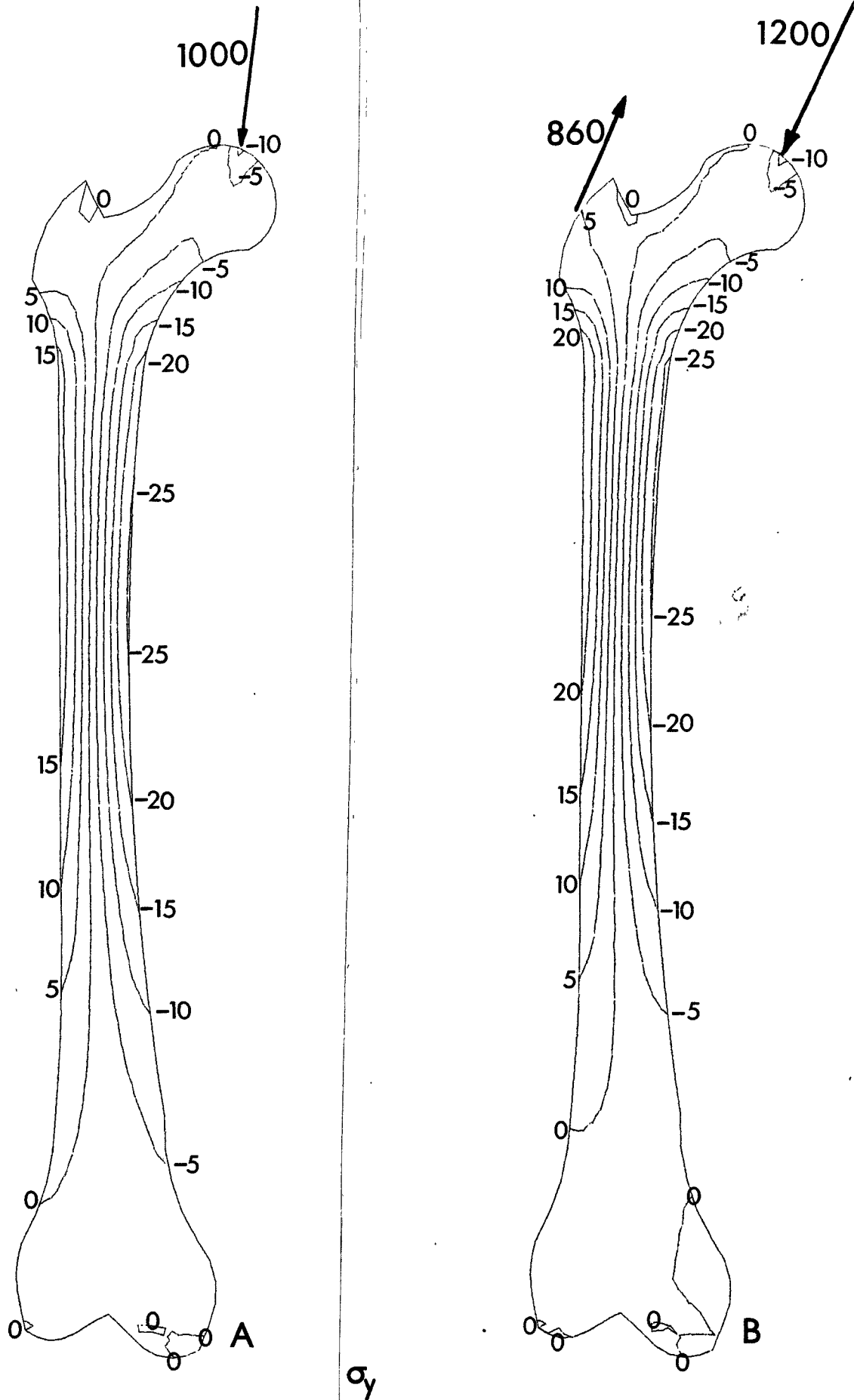


Figuur 4.2



—□—□—□— contour in onbelaste toestand
—×—×—×— contour in belaste toestand

Figuur 4.3



Figur 4.4

Uit de verplaatsingen worden door middel van de rekenmachine de rekken en spanningen in ieder element bepaald. Deze spanningen zouden wij kunnen representeren als tabellen of als getallen geschreven in de elementen bij een figuur als fig. 4.2. Een duidelijker beeld levert bijvoorbeeld fig. 4.4 waarin lijnen zijn getrokken van constante spanning in y-richting, σ_y , de voor de beide belastingsgevallen in de schacht wel meest interessante spanningsgrootte.

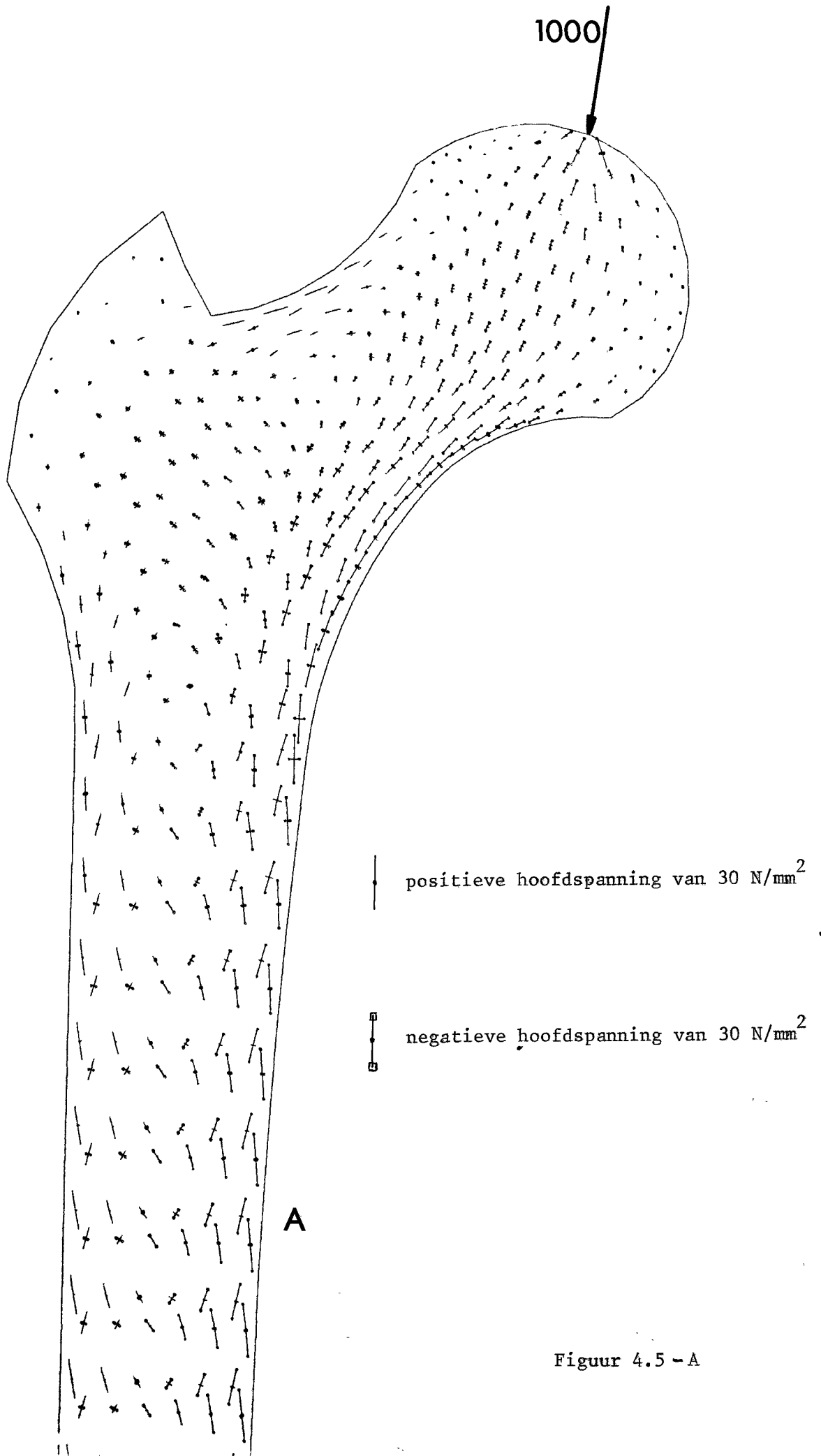
Voor het tekenen van dergelijke (continue) lijnen is het noodzakelijk dat het spanningsveld continu is of desnoods kunstmatig continu wordt gemaakt. Dat is hier gebeurd door aan elk knooppunt de gemiddelde waarde toe te kennen van de betreffende spanningsgrootte in de elementen, die rond dat knooppunt liggen en daarna per element het spanningsveld lineair te kiezen. Deze werkwijze kan langs de randen grote afwijkingen veroorzaken, vooral wanneer de spanningsgradient in een richting loodrecht op rand groot is. De bijgeschreven getallen geven de waarden van σ_y op elke lijn in N/mm^2 .

Aan de spanningen in de buurt van de inklemming moeten wij minder waarde hechten daar die een gevolg zijn van de gekozen wijze van fixatie van het bot aan de vaste wereld.

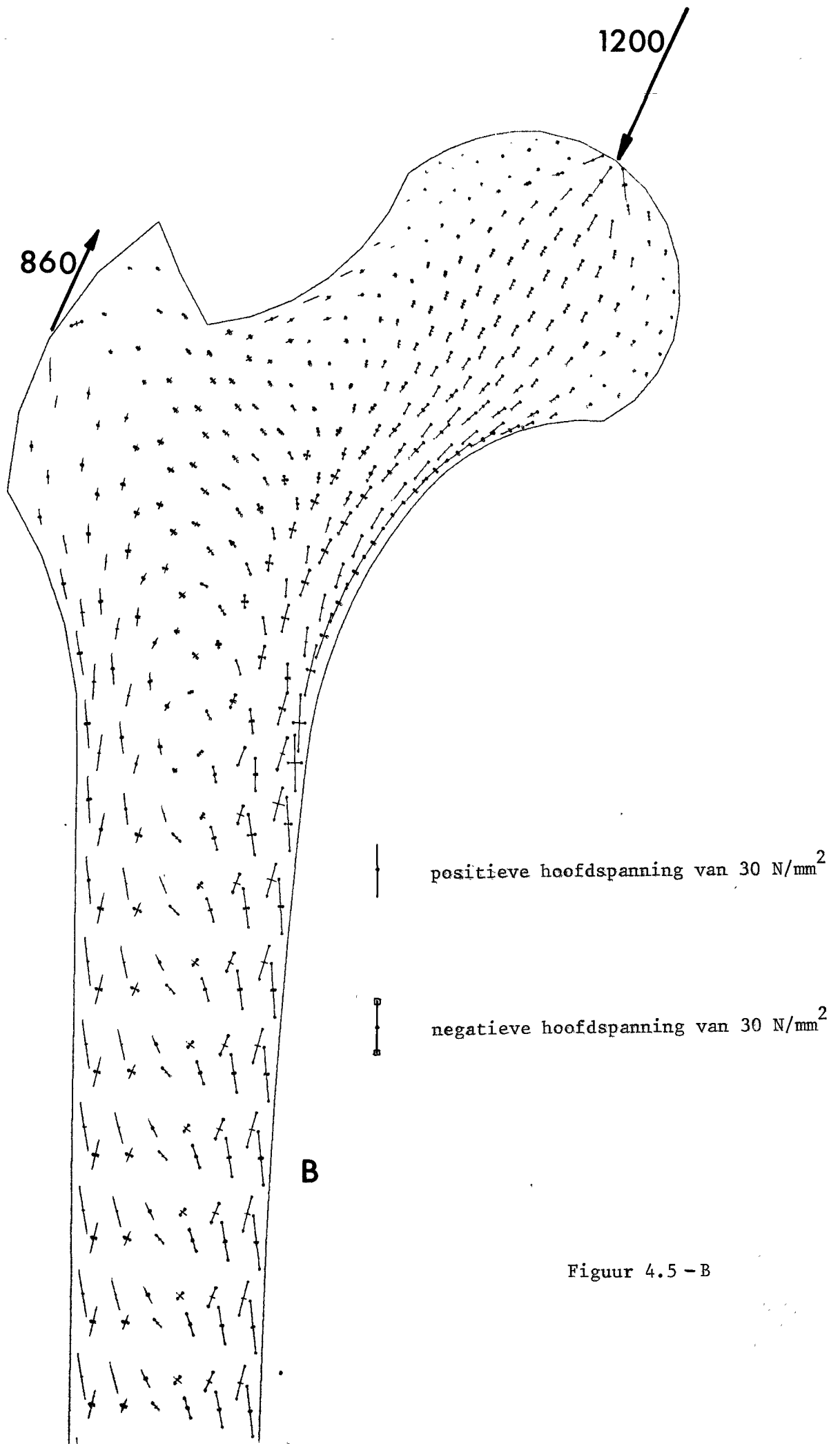
Uit het gelijkmatige spanningsverloop in de schacht voor beide belastingsgevallen kunnen wij concluderen, dat de belastingstoestand daar wel erg nauw verwant is aan een toestand van zuivere buiging. Voor beide belastingsgevallen blijkt niet in de hals de grootste waarde van σ_y op te treden, maar in het bovenste gedeelte van de schacht aan de mediale zijde.

Bij het aangrijpingspunt van de puntkrachten vinden wij nauwelijks spanningsconcentraties, die fysisch gezien onder een puntkracht wel degelijk zouden moeten optreden. Bij een berekening met de elementenmethode worden deze spanningsconcentraties meer en meer vervaagd, naarmate de elementenverdeling grover is. Aan dit fenomeen zal geheel geen aandacht worden besteed, daar een belasting in de vorm van een puntkracht toch niet met de realiteit in overeenstemming is.

Om een beeld te geven van de totale spanningstoestand zijn in fig. 4.5 de hoofdspansingen en de bijbehorende hoofdspansingsrichtingen aangegeven, om praktische redenen echter alleen van het bovenste gedeelte van het bot.

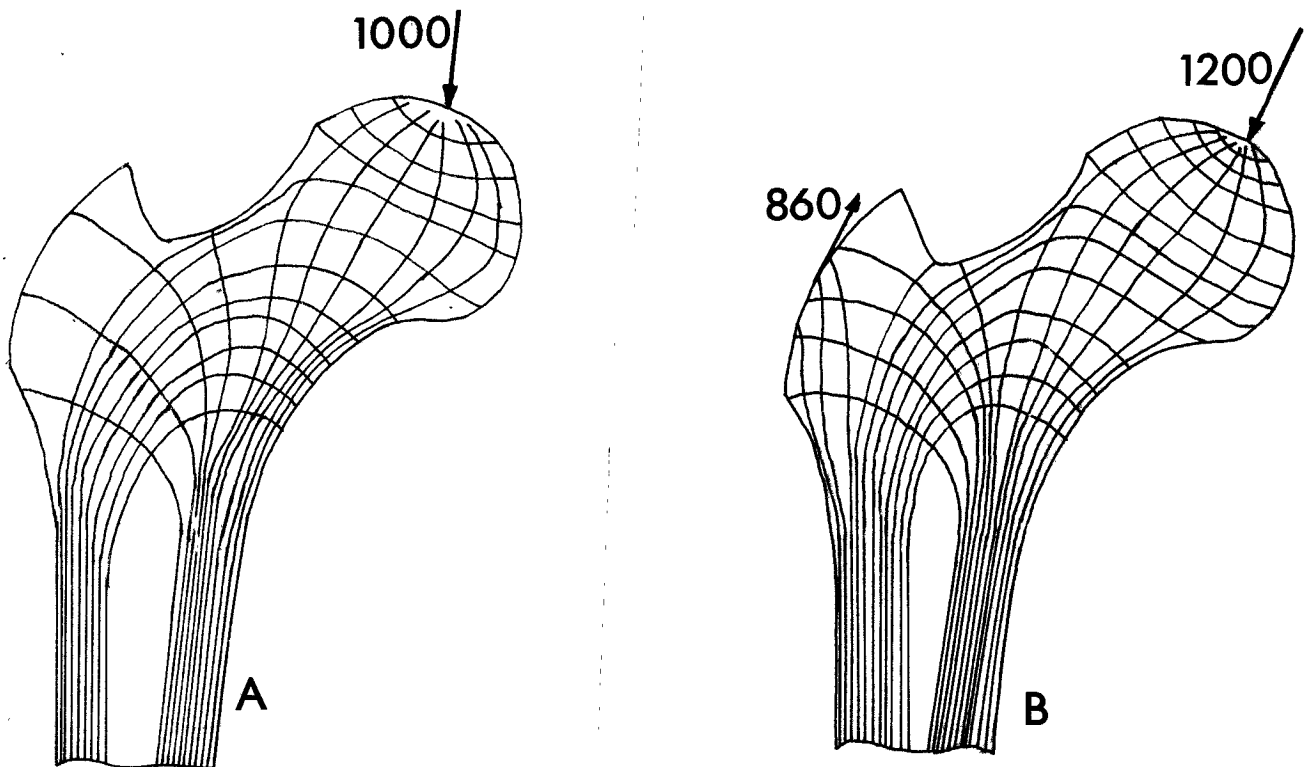


Figuur 4.5 - A



Figuur 4.5 - B

Uit het beeld van de hoofdspanningen, fig. 4.5, kunnen wij ons een idee vormen over het verloop van de spanningstrajectoriën. Wij hebben getracht deze lijnen te schetsen in de kop en in de hals van het femur, zie fig. 4.6



Figuur 4.6

Het patroon van de spanningstrajectoriën vertoont, zoals reeds door o.a. Pauwels [12] ook is opgemerkt, enige overeenkomst met de structuur van het spongieuze bot. Dit kan in verband worden gebracht met de wet van Wolff [20], die zegt, dat de structuur van het bot zich aanpast aan de belastingssituatie.

Een uitspraak over de grens van de toelaatbare materiaalbelasting kan alleen worden gedaan op grond van materiaalproeven. Een eventueel criterium moet uit een spanningstoestand iets essentieels naar voren halen, wat voor een bepaald materiaal een maat kan zijn voor de gevaarlijkheid van zo'n spanningstoestand.

Bij in de techniek gebruikelijke werkwijzen komt men vaak het begrip "vergelijkspanning" tegen. Hieronder verstaat men dan een zuivere lijnspanning, die volgens een als juist erkend criterium een even gevaarlijke situatie schept als de gegeven spanningstoestand.

Een criterium dat in de mechanica vaak voor homogene en isotrope constructie-materialen wordt gebruikt is dat volgens Maxwell, Huber, Hencky [17]. Hierbij wordt verondersteld dat de specifieke gedaanteveranderingsenergie een bepaalde maximumwaarde niet mag overschrijden.

Voor de ~~hierbij behorende~~ vergelijkspanning geldt dan in geval van vlakspanningstoestand:

$$\sigma_{\text{verg.}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} \quad (4.1)$$

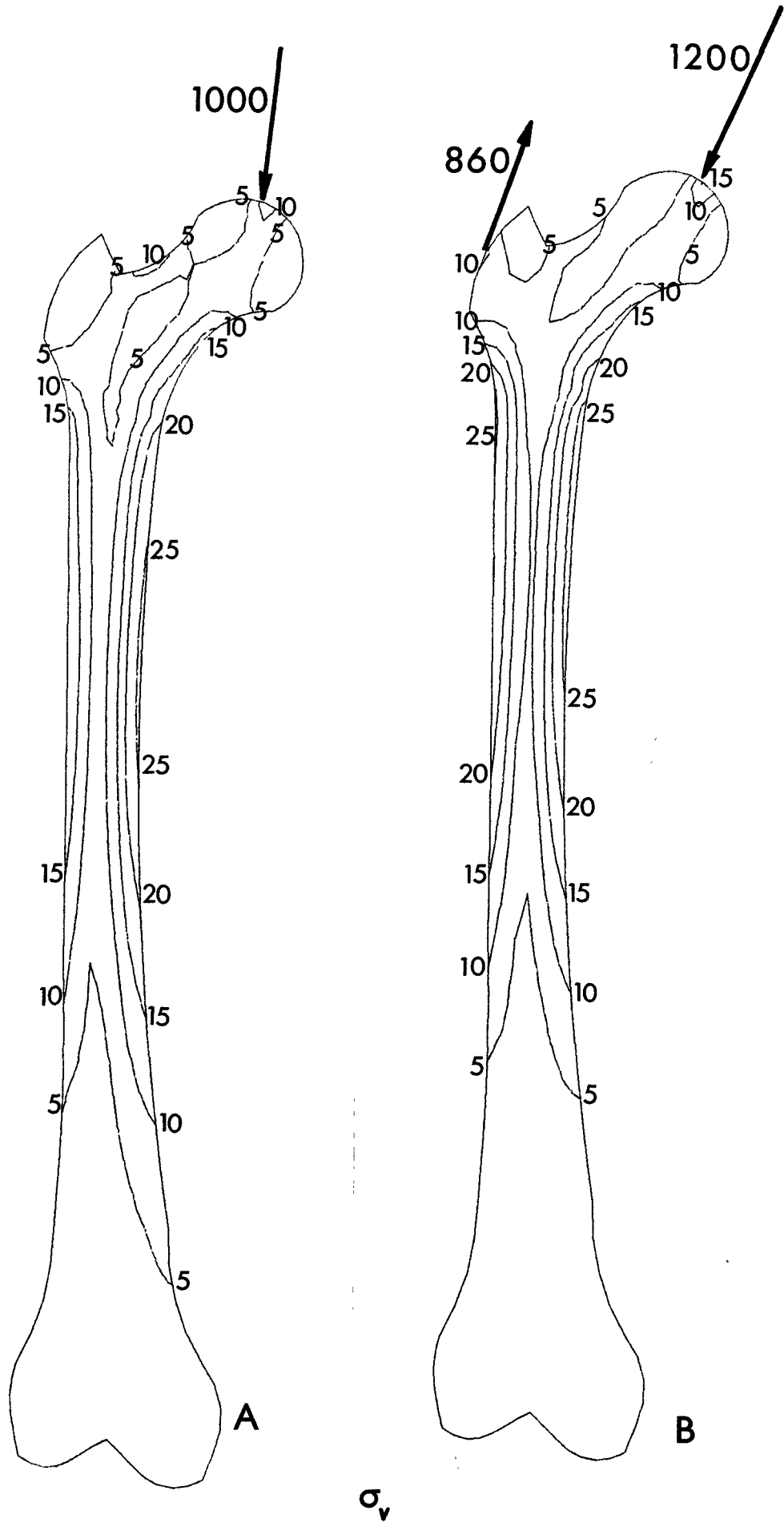
Fig. 4.7 geeft de lijnen met constante vergelijkspanning voor beide belastingssituaties. De getalwaarden zijn uitgedrukt in N/mm².

In de hals van het bot zien wij vaag een gebied tevoorschijn komen, dat relatief erg weinig lijkt te merken van de belasting.

In de literatuur komt dit gebied voor als de driehoek van Ward [12].

De in figuur 4.7 getekende lijnen vertonen veel overeenkomst met de isochromaten, die bij foto-elastisch onderzoek [8,12] met dezelfde belastingsomstandigheden worden verkregen.

Vergelijk hiertoe bijvoorbeeld figuur 4.7-A met figuur 1.1. De theoretische verklaring hiervoor is dat het verschil van de hoofdspanningen (constant op de isochromaten) voor de bij het bot gekozen belastingssituaties vrijwel voor alle punten van het bot erg weinig afwijkt van de waarde van de vergelijkspanning volgens Maxwell, Huber en Hencky.

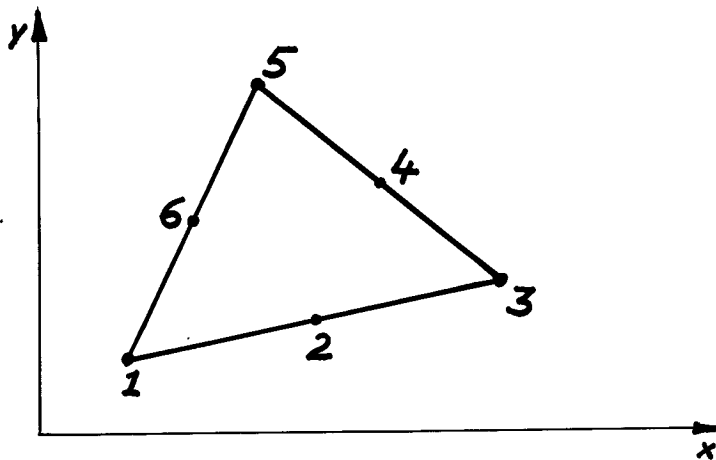


σ_v

Figuur 4.7

5. Vergelijking met de resultaten, waarbij een meer geavanceerd element werd gebruikt

De gepresenteerde resultaten, berekend met een driehoekig element met een lineair verplaatsingsveld, zullen ten dele worden vergeleken met de resultaten bij gebruikmaking van een driehoekig element met een kwadratisch verplaatsingsveld. In tegenstelling tot het eerder gebruikte element (zie fig. 3.2) heeft dit element zes knooppunten, namelijk behalve de hoekpunten van de driehoek ook de middens van de zijden, zie fig. 5.1.



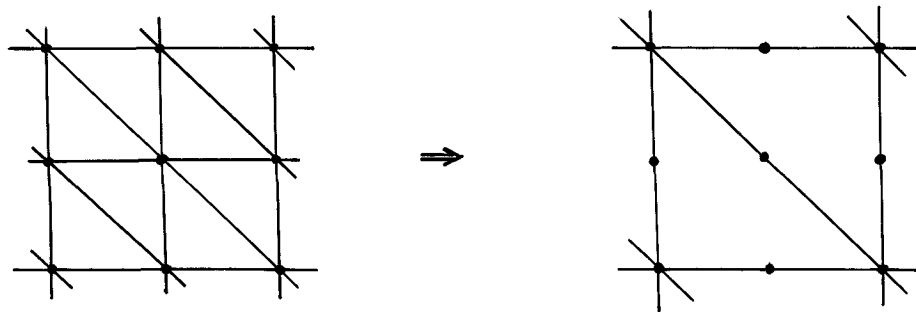
Figuur 5.1

De werkwijze is geheel analoog met de werkwijze zoals die in hoofdstuk 3 is behandeld, echter de uitwerking van een aantal formules wordt aanzienlijk gecompliceerder. We zullen daarom niet dieper ingaan op de te volgen methode. Als enige verschil dient opgemerkt te worden dat wegens het bij dit element aangenomen kwadratische verplaatsingsveld, het rek- veld en wegens de direkte samenhang dus ook het spanningsveld per element niet konstant maar lineair zullen zijn. Dit impliceert dat we uit- spraken als "een bepaalde spanning in een element" hier niet kunnen han- teren, maar dat we het lineaire verloop van een spanning per element

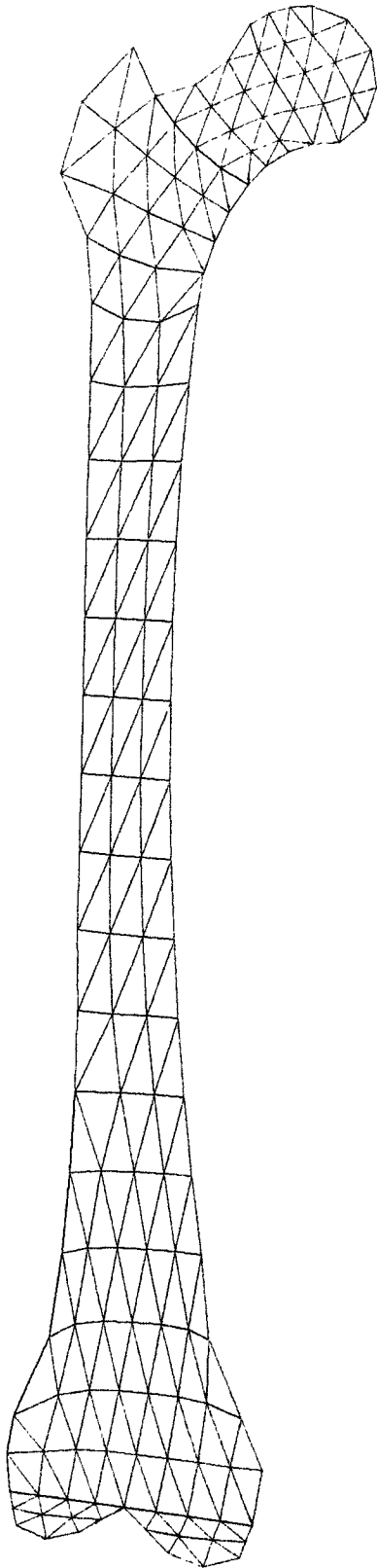
bijvoorbeeld moeten karakteriseren door de waarde van die spanning in de drie bij dat element behorende hoekpunten. Evenals bij een berekening met gebruikmaking van het element met drie knooppunten zal bij het geavanceerde element voor het gehele bot een continu spanningsveld niet gevonden worden. Omdat we voor elk element afzonderlijk in de hoekpunten een bepaalde waarde voor een spanningsgrootte vinden, zal voor een bepaald knooppunt, waarin een aantal hoekpunten van elementen samenkomen, voor diezelfde spanningsgrootte een aantal verschillende waarden worden gevonden. Een veel gevolgde procedure is dan deze verschillende waarden te middelen en het resultaat te beschouwen als het uiteindelijke resultaat voor die spanningsgrootte in dat knooppunt.

Het voor het tekenen van lijnen met konstante spanning benodigde continu spanningsveld wordt dan gecreeërd door per element het spanningsveld lineair te kiezen en daarvoor uitsluitend de waarden van de spanning in de hoekpunten van dat element in de beschouwing te betrekken en niet de waarden in de knooppunten op de middens van de zijden. Behalve deze zijn een aantal andere procedures mogelijk om tot een continu spanningsveld te komen. We zullen daar echter niet dieper op ingaan. De afwijkingen die we introduceren op deze wijze zullen belangrijk kleiner zijn dan die, welke ontstaan bij de voor het element met drie knooppunten in hoofdstuk 4 voorgestelde werkwijze.

Teneinde een eerlijke vergelijking van beide elementtypen te verkrijgen, zorgen we ervoor dat het totaal aantal knooppunten en dus bij gelijkblijvende ondersteuning het totaal aantal vrijheidsgraden (niet-voorgescreven verplaatsingen) hetzelfde wordt gehouden. We doen dit door van vier elementen met drie knooppunten één element met zes knooppunten te maken, zoals fig. 5.2 dit aangeeft.



Figuur 5.2



Figuur 5.3

Voor elke willekeurige elementenverdeling zal dit niet mogelijk zijn. Bij de elementverdeling van fig. 4.2 is echter vooraf met deze modifikatie rekening gehouden. Fig. 5.3 geeft de elementenverdeling voor de elementen met zes knooppunten. Het aantal knooppunten bedraagt eveneens 537, het aantal elementen 234.

Voor de verplaatsingen wordt kwalitatief vrijwel hetzelfde beeld gevonden als in fig. 4.3 met dien verstande dat wel het patroon van de verplaatsingen ongeveer overeenstemt, maar niet de grootte.

We zullen de resultaten voor beide elementtypen vergelijken door gebruik te maken van het principe van de minimale potentiële energie (zie hoofdstuk 2).

Door substitutie van formule (3.25) in formule (3.24) kunnen we, bedenkend dat alle componenten van w_2 nul zijn de getalwaarde van de potentiële energie schrijven als:

$$V = \frac{1}{2} \dot{w}_1 f_1 - \dot{w}_1 f_1 = - \frac{1}{2} \dot{w}_1 f_1 \quad (5.1)$$

Daar in belastingsgeval A respectievelijk B slechts 2 respectievelijk 4 componenten van f_1 van nul verschillen, kan bij bekende knooppuntenverplaatsingen, de getalwaarde van V eenvoudig met de hand berekend worden.

Voor het element met drie knooppunten geldt:

$$\text{Belastingsgeval A : } V = - 0,86 \text{ Nm}$$

$$\text{Belastingsgeval B : } V = - 0,96 \text{ Nm}$$

Voor het element met zes knooppunten geldt:

$$\text{Belastingsgeval A : } V = - 1,01 \text{ Nm}$$

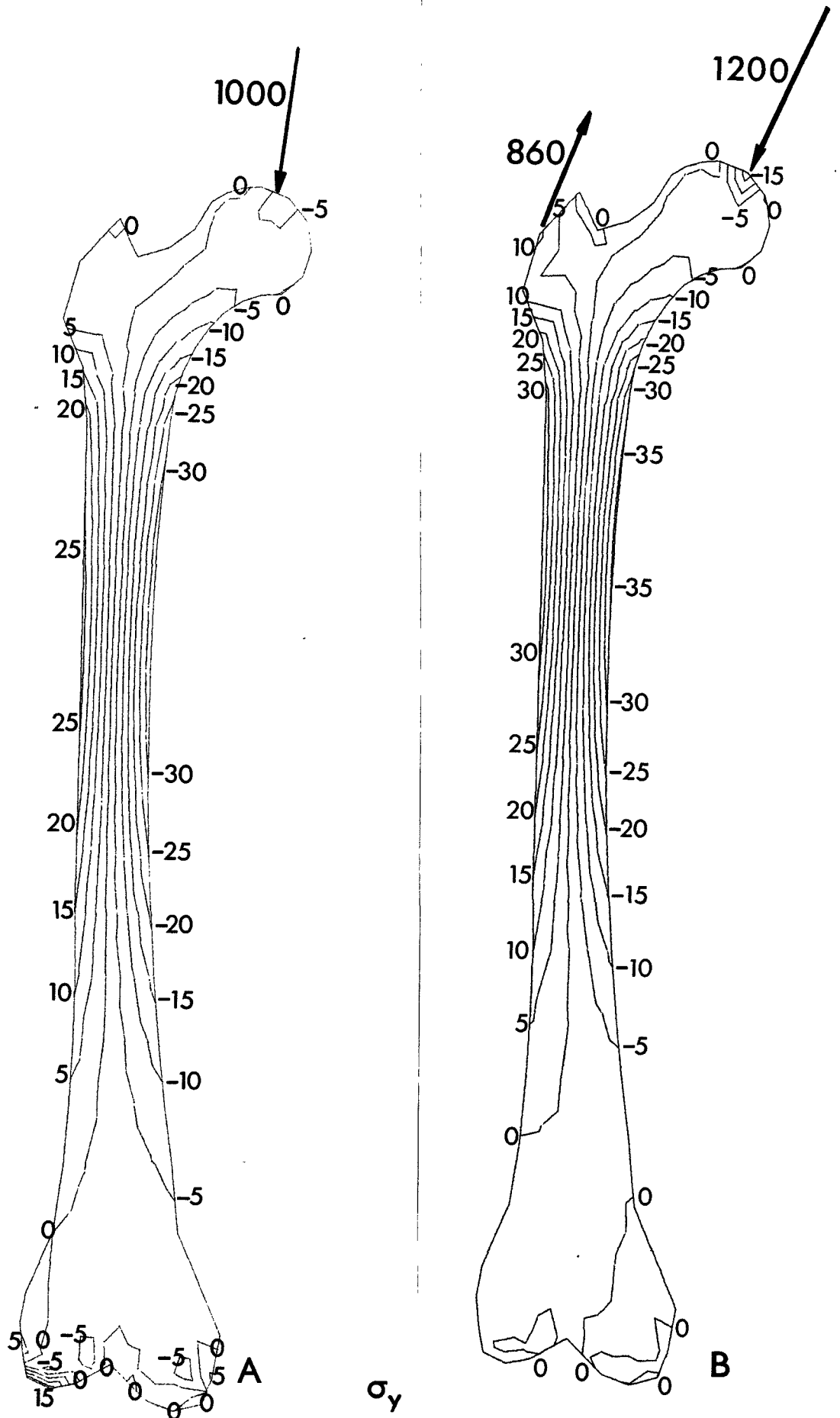
$$\text{Belastingsgeval B : } V = - 1,15 \text{ Nm}$$

Aangezien voor beide belastingsgevallen de potentiële energie bij een berekening met het element met zes knooppunten aanzienlijk kleiner is dan bij de berekening met het element met drie knooppunten, kunnen we, op grond van het streven naar een minimum waarde van de potentiële energie, concluderen dat globaal gezien de realiteit beter wordt beschreven wanneer gebruik wordt gemaakt van het element met zes knooppunten. Lokaal kunnen we echter geen uitspraak doen over de kwaliteit van de gevonden resultaten bij beide elementtypen. Een bevestiging van deze beweringen vinden we ook in de literatuur terug, waar men aan de hand van meer technische constructies tot dezelfde uitspraken komt [6].

Figuur 5.4 en 5.5 geven de met de figuren 4.6 en 4.7 overeenkomende resultaten voor de spanning in y-richting respectievelijk de vergelijkspanning bij een berekening op basis van het element met zes knooppunten voor beide belastingsgevallen. Wanneer we niet kijken in de directe omgeving van de randen kunnen we spreken van een goede overeenstemming.

Om de in het vorige hoofdstuk genoemde redenen treden bij de gekozen procedure voor het tekenen van lijnen van constante spanning, uit de resultaten verkregen met behulp van het element met drie knooppunten vooral langs de randen van het object aanzienlijke afwijkingen op, die des te groter zijn naarmate de spanningsgradiënt in een richting loodrecht op rand groter is. Vergelijking van de in dit hoofdstuk gepresenteerde resultaten met die uit het vorige hoofdstuk geven daarvan een duidelijke demonstratie. We zullen daarom de meeste waarde hechten aan de berekening op basis van het element met zes knooppunten, temeer daar we na een beschouwing van de potentiële energie tot dezelfde voorkeur kwamen.

Nauwkeuriger resultaten kunnen verkregen worden door de gekozen elementenverdeling, zie fig. 5.3, verder te verfijnen. Bewezen kan worden dat we de exacte oplossing door middel van verfijnen steeds beter kunnen benaderen. We gaan hier verder niet op in.



Figur 5.4

6. Veranderingen van de geometrie

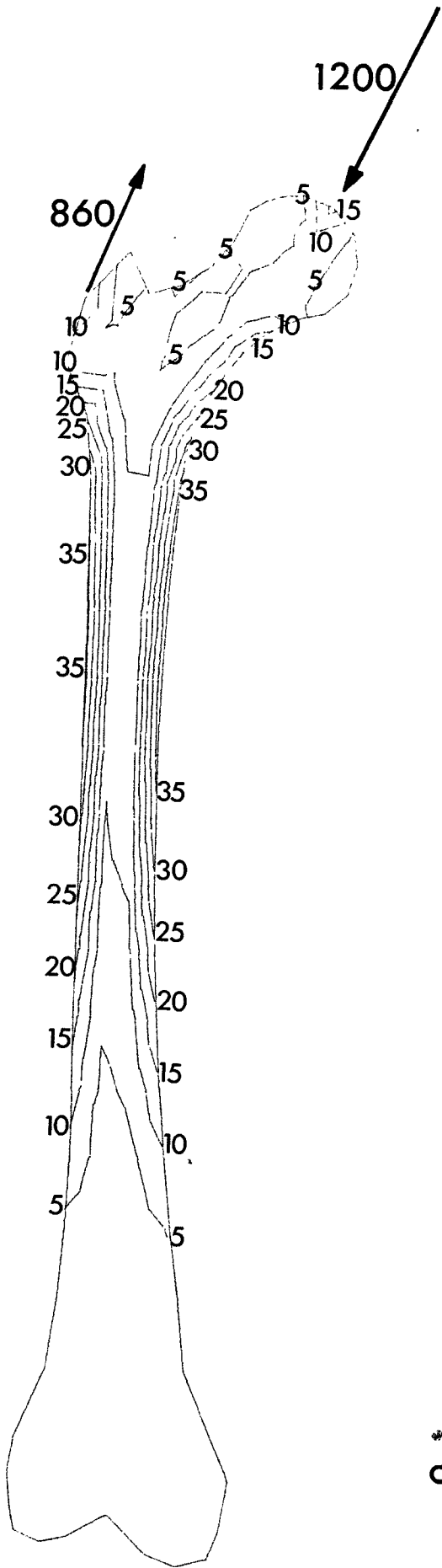
Wanneer we na willen gaan wat de invloed is van de grootte van de inclinatie hoek of de lengte van de hals op de spanningstoestand, behoeven we van de voor de rekenprogramma's benodigde invoergegevens slechts een zeer beperkt aantal getallen te vervangen, namelijk bij een analoog elementenpatroon als in figuur 5.3 uitsluitend die getallen, die zorgen dat de coördinaten van de knooppunten in de hals en in de kop van het femur een getalwaarde wordt toegekend.

De invloed op de vergelijkspanning van dit soort wijzigingen zal tenslotte voor twee voorbeelden in figuur 6.1 worden aangegeven. De gekozen belasting is die volgens Rydell (belastingsgeval B). De figuur dient te worden vergeleken met figuur 5.5 voor hetzelfde belastingsgeval.

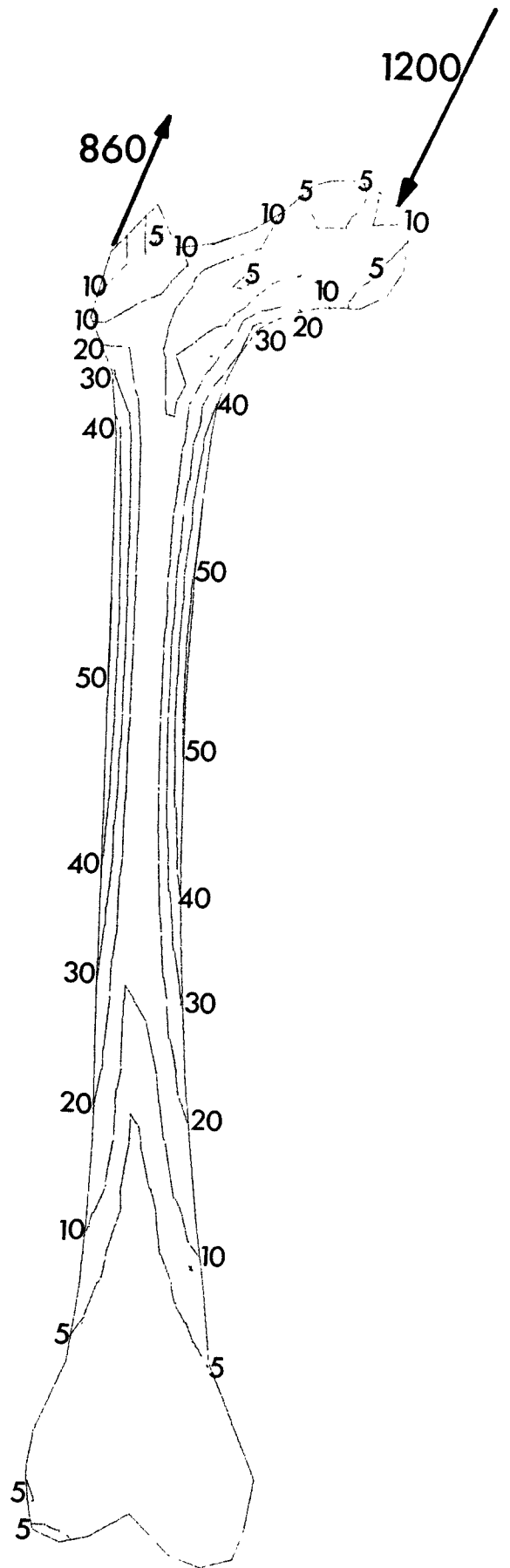
De invloed van de wijziging van de lengte van de hals op de spanningstoestand bij belastingsgeval B blijkt erg gering te zijn. De verkleining van de inclinatie-hoek blijkt duidelijk ongunstige gevolgen voor de spanningstoestand in het bot te hebben, zoals uit fig. 6.1 mag blijken.

Figuur 6.1.a bot met langere hals

Figuur 6.1.b bot met kleinere inclinatiehoek



Figuur 6.1.a



Figuur 6.1.b

q_v^*

7. Nabeschuwing en slotwoord

Deze bijdrage aan de rek- en spanningsanalyse van een skeletdeel is gebaseerd op de methode der eindige elementen. Getracht is om aan te tonen, dat deze methode uitermate geschikt is om ingewikkelde constructies, zoals een femur, te analyseren.

De werkwijze met deze methode is uiteengezet, waarbij ook de theoretische achtergronden aan de orde zijn geweest.

Een eenvoudig tweedimensionaal model van een femur is nader uitgewerkt. De resultaten van enige belastingsgevallen zijn op verschillende manieren weergegeven. Twee typen elementen zijn gebruikt en tegen elkaar afgewogen, waarbij de mogelijkheden en beperkingen van de elementenmethode geïllustreerd zijn.

Duidelijk moet zijn geworden dat het anisotrope en inhomogene karakter van het botmateriaal, de ingewikkelde geometrie en de verscheidenheid in belastingssituaties bij de analyse met deze methode principieel geen moeilijkheden opleveren.

Dit artikel is tot stand gekomen in samenwerking met een werkgroep biomechanica. De participanten in deze werkgroep zijn: H.M. Berntsen en O.S. Ingwersen (Diaconessenziekenhuis, Eindhoven); G. Chapchal, A.H.M. Lohman, T.J.J.H. Slooff, L.M.D. Suda en H. Visser (Katholieke Universiteit, Nijmegen); W.A.M. Brekelmans, J.D. Janssen, H.W. Poort, P.P.T.G. van Rens, A.G. Sanders, L.B.M. Tomesen en S.D. Zorge (Technische Hogeschool, Eindhoven).

De werkgroep heeft zich ten doel gesteld vanuit verschillende disciplines, zoals uit de samenstelling van de groep mag blijken, fundamenteel onderzoek te doen op biomechanica gebied.

De samenstellers van dit artikel zijn de deelnemers aan deze werkgroep dank verschuldigd voor de vruchtbare samenwerking, die mede heeft geleid tot het tot stand komen van dit artikel.

Appendix

Een rij getallen: $a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$ kunnen wij zien als de componenten van een vector a . Per definitie stellen wij dat deze vector een kolomvector is:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

De getransponeerde van deze vector geven wij aan met a' :

$$a' = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \quad (2)$$

Een blok van getallen:

$$\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{array} \quad (3)$$

kunnen wij beschouwen als de componenten van een matrix B met m rijen en n kolommen:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

De getransponeerde van deze matrix is een matrix met n rijen en m kolommen en wordt aangegeven met het symbool B.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

De kolomvector a kan worden beschouwd als een matrix met n rijen en 1 kolom, de rijvector a als een matrix met 1 rij en n kolommen.

Een lineair stelsel van l vergelijkingen is bijvoorbeeld:

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1k}y_k \quad (6)$$

$$x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2k}y_k$$

$$x_l = c_{l1}y_1 + c_{l2}y_2 + \dots + c_{lk}y_k$$

Dit stelsel vergelijkingen kan als volgt in matrixnotatie worden geschreven:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{lk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

ofwel: $x = C y$

Hiermede is geïntroduceerd de vermenigvuldiging van een matrix met een vector.

Vermenigvuldiging van twee matrices met elkaar kan in het algemeen slechts onder bepaalde condities.

Definiëren wij:

a_{ij} als de componenten van A met $i = 1 \dots\dots k$
 $j = 1 \dots\dots \ell$

b_{ij} als de componenten van B met $i = 1 \dots\dots m$
 $j = 1 \dots\dots n$

dan is het matrixproduct AB gedefinieerd onder de voorwaarde dat $\ell = m$. Dit matrixproduct is weer een matrix, $C = AB$ met componenten die als volgt zijn te berekenen:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{\ell} a_{ip} \cdot b_{pj} \quad (9)$$

De matrix C heeft k rijen en n kolommen. Wanneer voor C geldt: $C = AB$, dan kan eenvoudig worden bewezen dat eveneens geldt:

$$\overset{!}{C} = \overset{!}{B} \cdot \overset{!}{A} \quad (10)$$

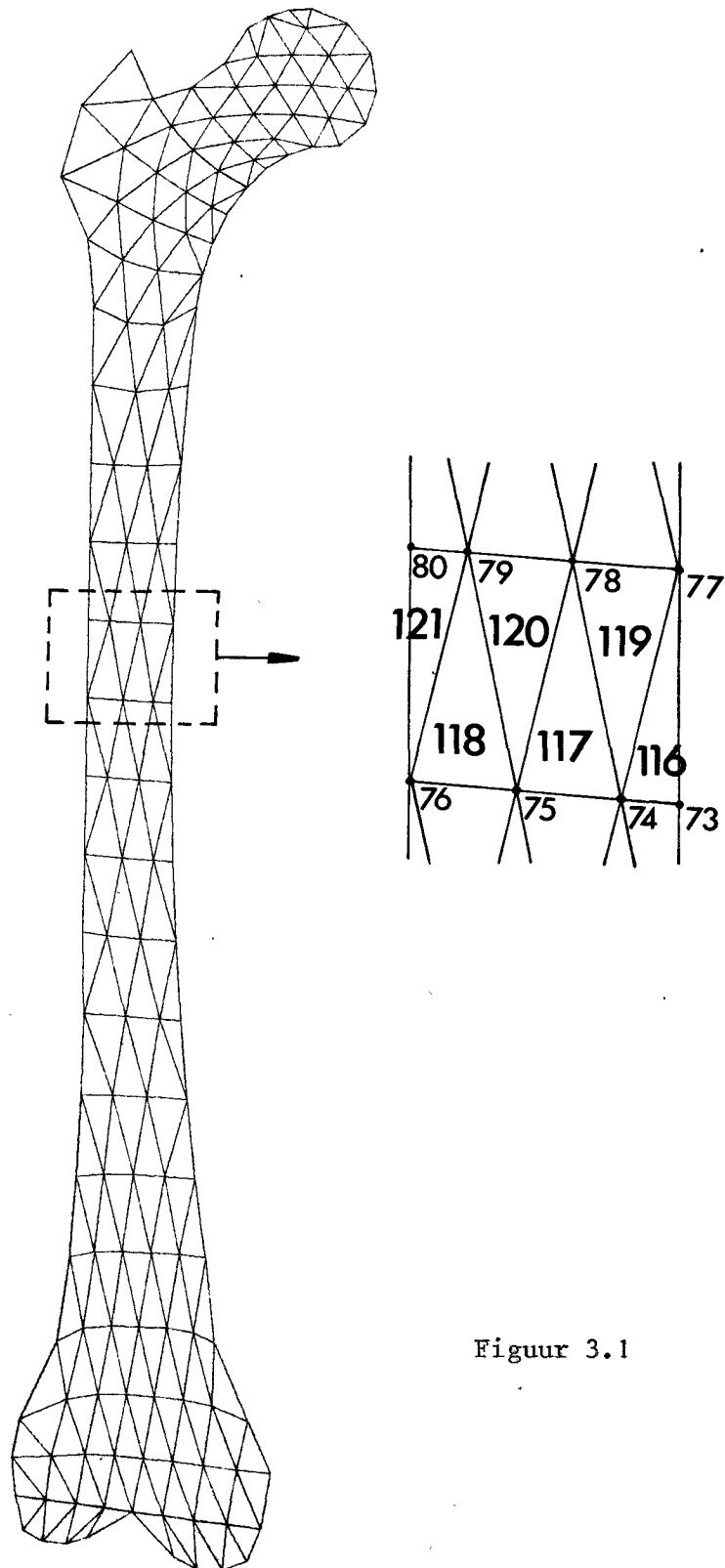
Een onafhankelijk lineair stelsel vergelijkingen $x = Cy$ waarin de componenten van x bekend verondersteld worden en waarin voor y een oplossing wordt gevraagd, is alleen oplosbaar wanneer de matrix C evenveel rijen als kolommen heeft, ofwel wanneer het aantal vergelijkingen even groot is als het aantal onbekenden. De oplossing kan dan worden geschreven als:

$$y = C^{-1} x \quad (11)$$

Hierin is C^{-1} de inverse van de matrix C. Er bestaan allerlei methoden om C^{-1} te berekenen wanneer C bekend is.

3. De elementenmethode als gereedschap

Een twee-dimensionaal model van een femur wordt verdeeld in een aantal bijvoorbeeld driehoekige elementen, die van 1 tot M worden genummerd.



Figuur 3.1

Hoewel niet essentieel voor de methode maken wij de volgende beperkingen:

1. Wij veronderstellen op dit ogenblik het materiaal homogeen, isotroop en lineair met
$$E = 20.000 \text{ N/mm}^2$$
$$\nu = 0,37$$
2. Wij nemen aan dat de dikte van het model constant is. De getalwaarde die wij aan deze dikte toekennen is niet belangrijk, omdat de voor de verplaatsingen, rekken en spanningen te verkrijgen resultaten wegens de lineariteit van de theorie omgekeerd evenredig zijn met de dikte.

Gekozen is:

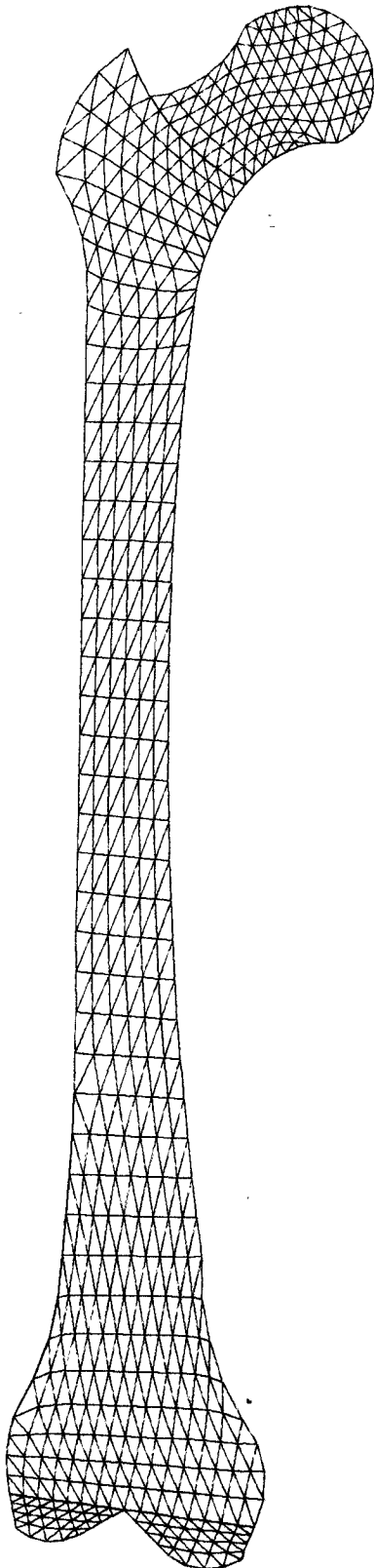
$$t = 10 \text{ mm}$$

De afmetingen in het vlak van fig. 4.1 nemen wij identiek met die van Koch en dus op ware grootte. Het model wordt verdeeld in 936 elementen, waarbij 537 knooppunten worden gecreëerd. Fig. 4.2 geeft een beeld van deze verdeling.

Voor het maken van een dergelijke verdeling en de hierbij behorende geometrische en topologische gegevens is een elementgenerator ontwikkeld, zodat de hierbij behorende hoeveelheid handwerk tamelijk gering is.

Na verwerking met de computer verkrijgen wij primair de verplaatsingen van de knooppunten. Van de buitenomtrek is in fig. 4.3 zowel de onvervormde als de vervormde contour weergegeven, waarbij voor de duidelijkheid een vergrotingsfactor voor de verplaatsingen is toegepast. Gebruikt werden:

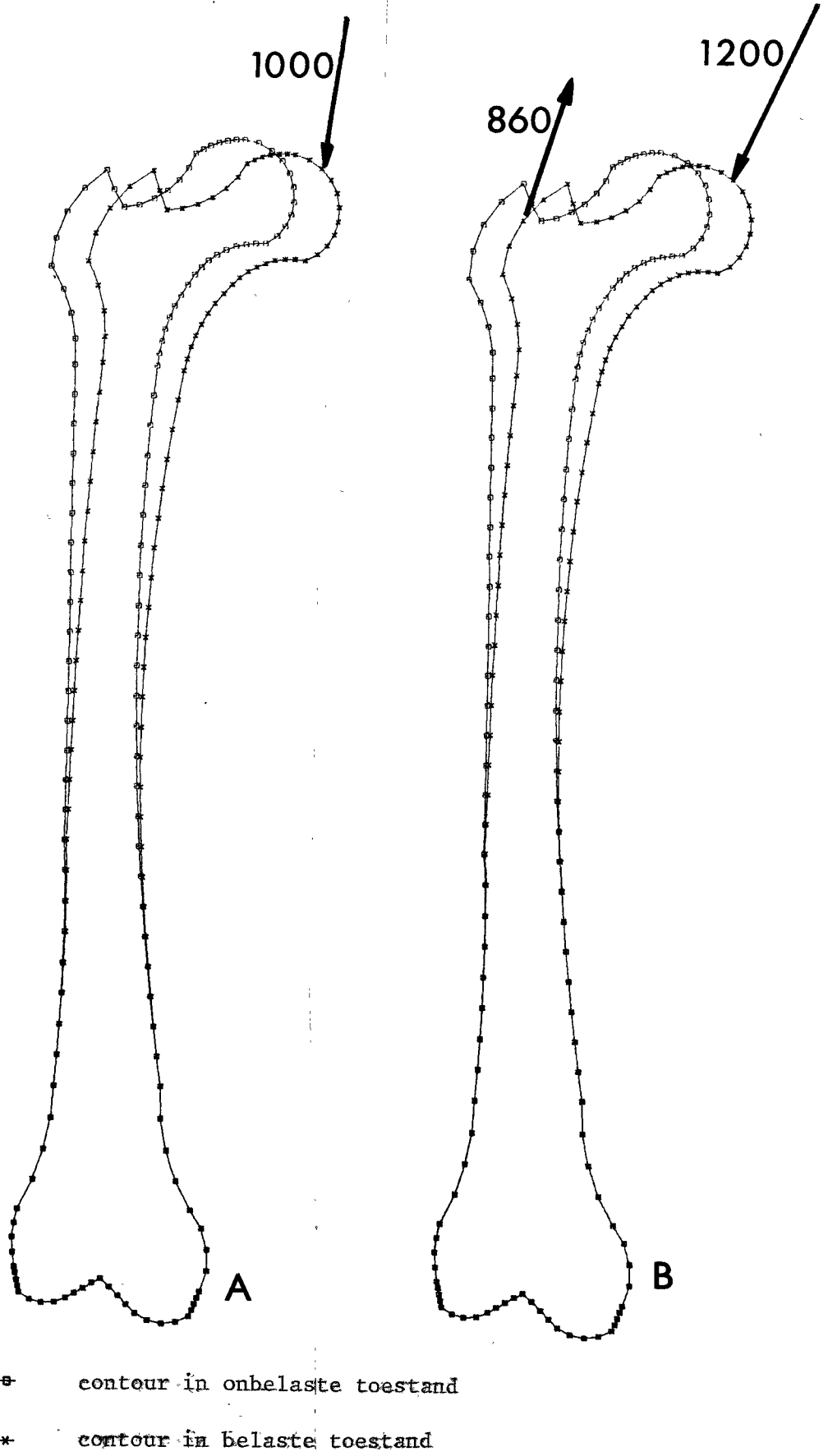
- schaal voor de buitenomtrek: 1 : 2,5
- schaal voor de verplaatsingen: 1 : 0.5



Figuur 4.2

De toegepaste vergrotingsfactor voor de verplaatsingen had dus de waarde 5.

De verplaatsingsvelden voor beide belastingsituaties blijken nauwelijks onderling te verschillen.



Figuur 4.3

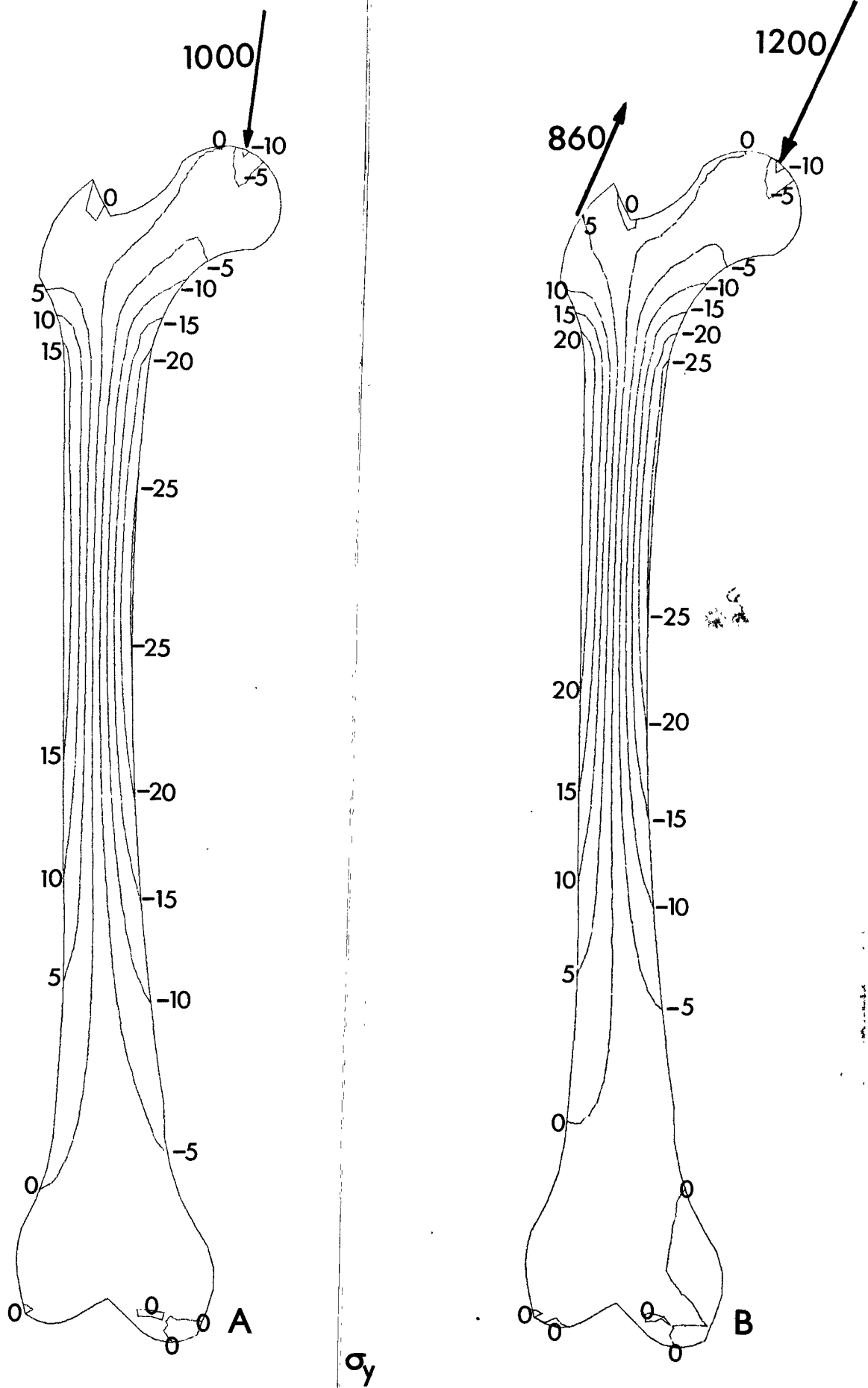
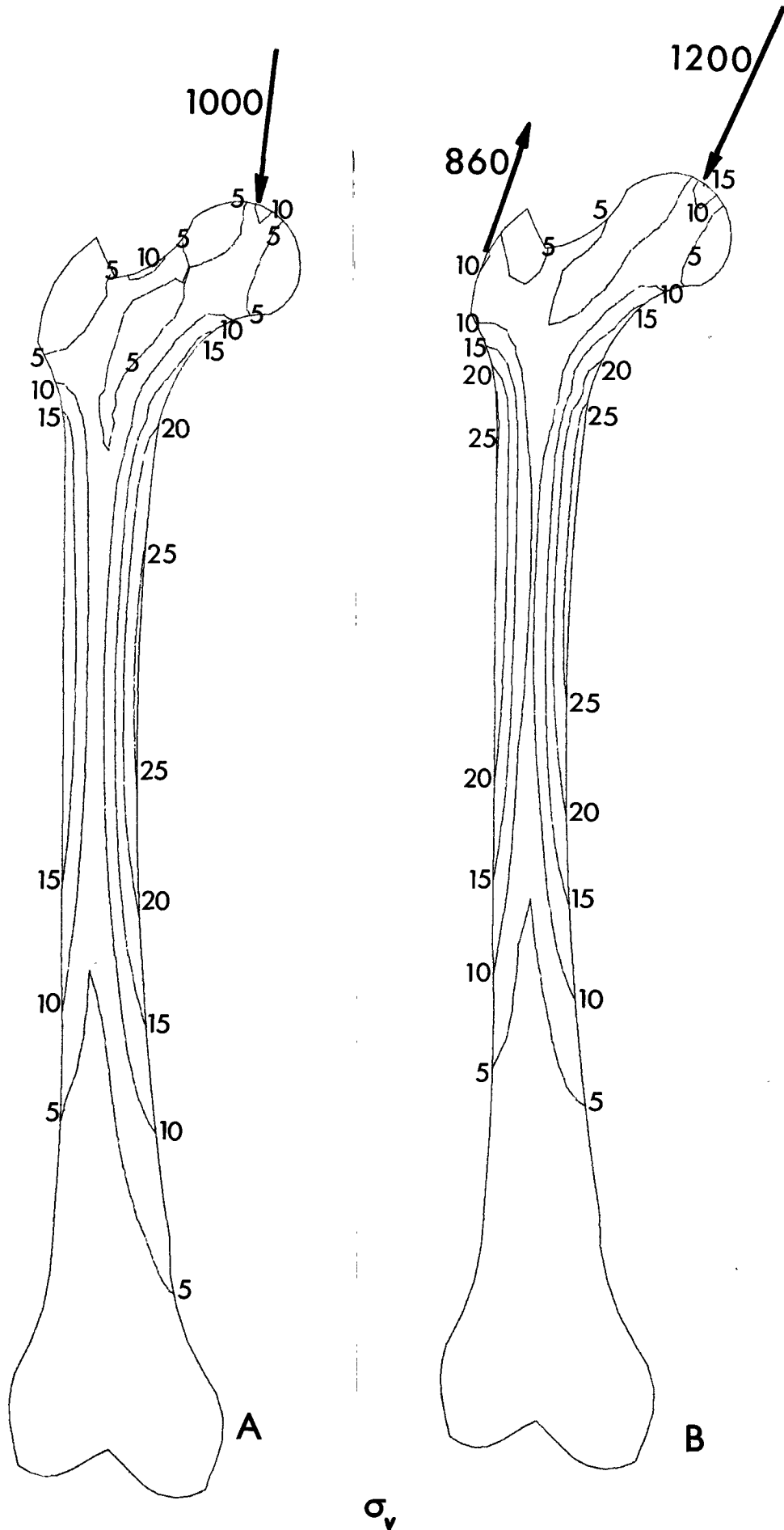
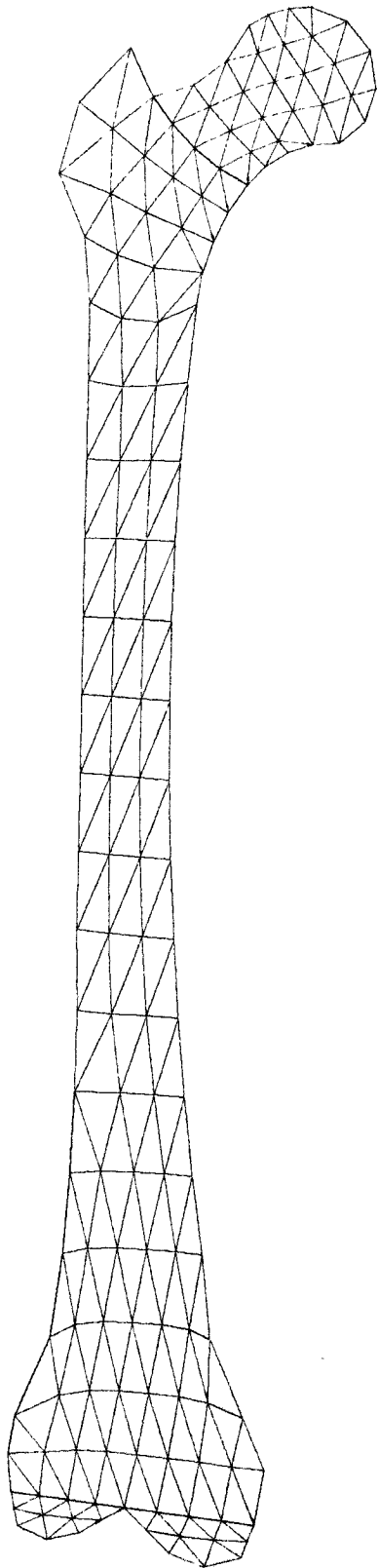


Figure 4.4



σ_v

Figuur 4.7



Figuur 5.3

Voor elke willekeurige elementenverdeling zal dit niet mogelijk zijn. Bij de elementverdeling van fig. 4.2 is echter vooraf met deze modifikatie rekening gehouden. Fig. 5.3 geeft de elementenverdeling voor de elementen met zes knooppunten. Het aantal knooppunten bedraagt eveneens 537, het aantal elementen 234.

Voor de verplaatsingen wordt kwalitatief vrijwel hetzelfde beeld gevonden als in fig. 4.3 met dien verstande dat wel het patroon van de verplaatsingen ongeveer overeenstemt, maar niet de grootte.

We zullen de resultaten voor beide elementtypen vergelijken door gebruik te maken van het principe van de minimale potentiële energie (zie hoofdstuk 2).

Door substitutie van formule (3.25) in formule (3.24) kunnen we, bedenkend dat alle componenten van w_2 nul zijn de getalwaarde van de potentiële energie schrijven als:

$$V = \frac{1}{2} \dot{w}_1^T f_1 - \dot{w}_1^T f_1 = - \frac{1}{2} \dot{w}_1^T f_1 \quad (5.1)$$

Daar in belastingsgeval A respectievelijk B slechts 2 respectievelijk 4 componenten van f_1 van nul verschillen, kan bij bekende knooppuntsverplaatsingen, de getalwaarde van V eenvoudig met de hand berekend worden.

Voor het element met drie knooppunten geldt:

Belastingsgeval A : $V = - 0,86 \text{ Nm}$

Belastingsgeval B : $V = - 0,96 \text{ Nm}$

Voor het element met zes knooppunten geldt:

Belastingsgeval A : $V = - 1,01 \text{ Nm}$

Belastingsgeval B : $V = - 1,15 \text{ Nm}$

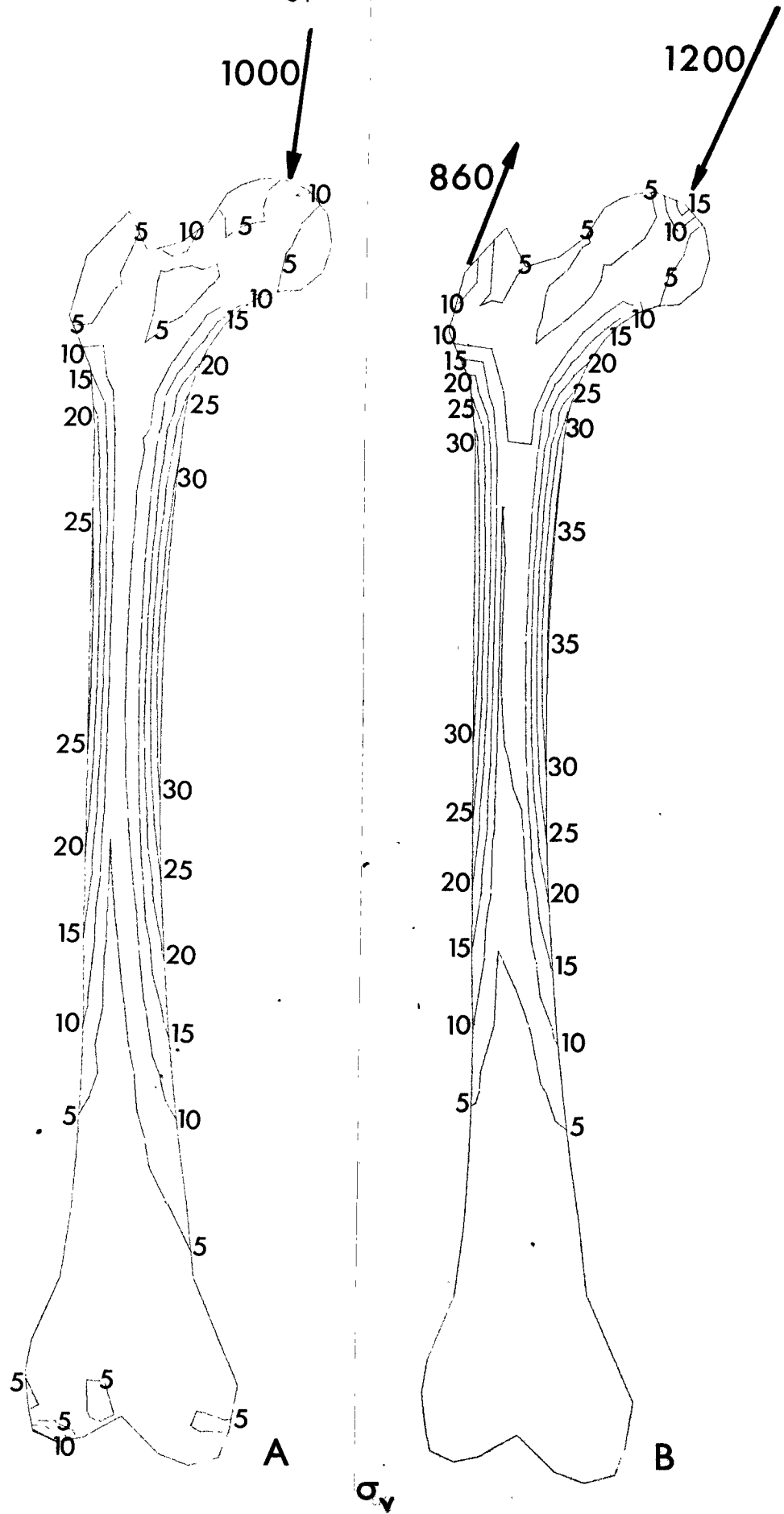
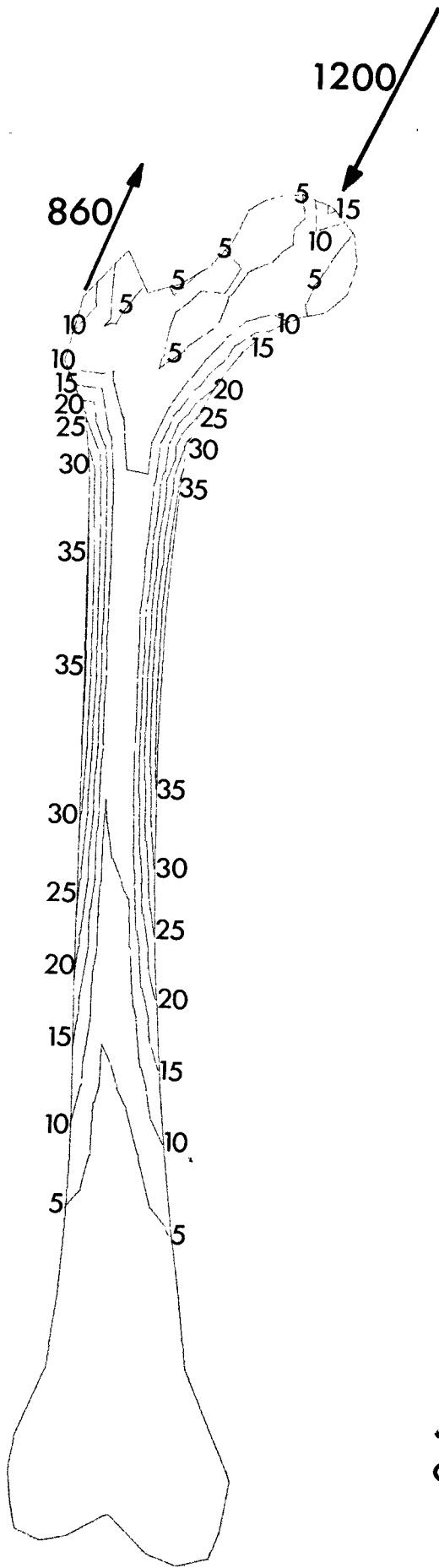
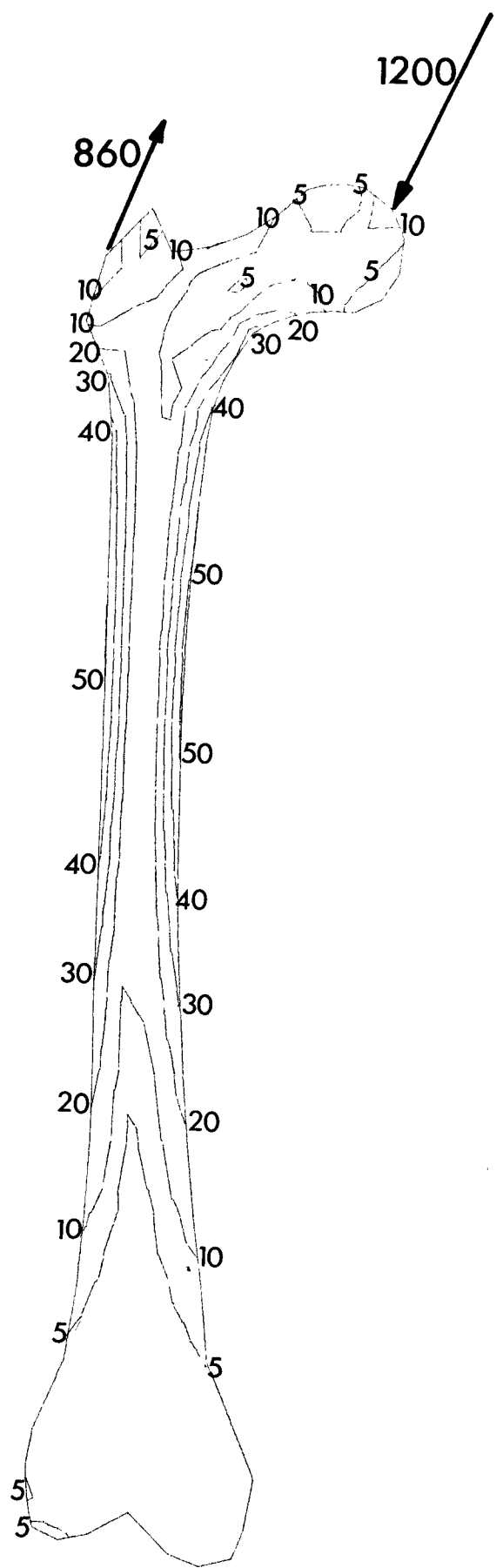


Figure 5.5



Figuur 6.1.a



Figuur 6.1.b

q_v

Erratum bij: T.H. Rapport WE 71 - 27

Numerieke analyse van de spannings- en vervormingstoestand
in het femur met behulp van de methode der eindige elementen

- In figuur 4.4, 5.4, 5.5 en 6.1 dienen de lijnen van konstante spanning in de onmiddellijke nabijheid van de bevestiging van het femur aan de vaste wereld, in concreto in de onderste 2 cm. van het distale uiteinde, geheel te vervallen.
In figuur 4.4 - B en 5.4 - B dient echter de lijn met een konstante waarde 0 voor σ_y , die begint aan de mediale zijde op ongeveer 3 cm. van de onderkant, vrijwel volgens een rechte te lopen naar het midden van de condylis medialis.
Deze helaas benodigde correctie is een gevolg van een fout in de invoergegevens voor de computerprogramma's. Deze maakt echter, zoals na verbetering werd geverifieerd, uitsluitend de aangegeven wijzigingen noodzakelijk.
- Wegens het niet in rekening brengen van de faktor $\frac{1}{2}$ uit formule (5.1) dienen de numerieke waarden voor de potentiële energie, V, onderaan op blz. 31 allen met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd te worden.

W.A.M. Brekelmans

H.W. Poort

Notities n.a.v.

"Bespreking Bio-mechanica

16 oktober 1970 T.H. Eindhoven".

J. Janssen

Notities n.a.v.

"Bespreking Bio-mechanica 16 oktober 1970 T.H. Eindhoven".

1. Deelnemers

dr. H.M. Berntsen. , orthop. chirurg Diaconessenziekenhuis Eindhoven
ir. W.A.M. Brekelmans , wet. med. techn. mech. T.H.E.
prof.dr. G. Chapchal , hoogl. orthopaedie K.U.N.
prof.ir. W.L. Esmeijer, hoogl. techn. mech. T.H.E.
dr. I.J. Holotcheff , wet. med. Universiteit Amsterdam
dr. O.S. Ingwersen , orthop. chirurg Diaconessenziekenhuis Eindhoven
dr.ir. J.D. Janssen , lector techn. mech. T.H.E.
ir. J. Jol , wet. med. Universiteit Utrecht
H.W. Poort , student-med. techn. mech. T.H.E.
P.P.T.G. van Rens , student-med. techn. mech. T.H.E.
dr. L.M.D. Suda , med. orthopaedie K.U.N.
L.B.M. Tomesen , student-med. techn. mech. T.H.E.
dr. H. Visser , anatoom K.U.N.
S.D. Zorge , techn. med. techn. mech. T.H.E.

Verhinderd

A.J. Sanders , student-med. techn. mech. T.H.E.
dr. T.J.J.H. Slooff , orth. chirurg K.U.N.

Janssen leidt de discussie.

2. Algemeen

a. Voorgeschiedenis

Naar aanleiding van gesprekken en ervaringen tijdens het "Seminar on biomechanics" te Leuven (begin september 1970) is door de werkgroep Bio-mechanica van de groep Technische Mechanica, afd. Werktuigbouwkunde het initiatief genomen om uitgaande van de deelnemerslijst van dit seminar een bijeenkomst te arrangeren om te onderzoeken of samenwerking tussen medici en technici nuttig, zinvol en mogelijk is en hoe deze samenwerking eventueel geconcretiseerd kan worden.

Voorheen was er reeds een samenwerking tussen dr. Slooff en de groep technische mechanica met betrekking tot een vergelijkend experimenteel spanningsonderzoek bij heupprothesen. Verder bestond reeds contact tussen de werkgroep Bio-mechanica en ir. Jol.

b. Technische Mechanica

Opgemerkt wordt dat de deelnemende technici qua opleiding en interesse voornamelijk gericht zijn op onderzoek van fundamentele aard. Zij kunnen zeker niet als "constructeurs" gekarakteriseerd worden. Evenmin zijn zij ingesteld op het realiseren van ad hoc oplossingen.

Hun specialisme werkt voornamelijk met begrippen als: belasting, sterkte (spanning), stijfheid (vervormingen), stabiliteit en bewegingen (snelheid, versnelling).

Zij zien de mogelijkheid om ook andere technische specialismen bij (deel)problemen in te schakelen.

3. Geambieerd onderzoek

Tijdens de discussie kwamen talrijke onderzoekobjecten ter sprake. Verder werden een aantal gedachtengangen ontwikkeld over de aard van uit te voeren onderzoekingen.

Er werd vrijwel uitsluitend aandacht besteed aan problemen die op het menselijk skelet betrekking hebben.

a. Een belangrijk, op snelle toepasbaarheid gericht, werkgebied is het onderzoek en ontwerp van vervangingsmogelijkheden voor skeletdelen. Uitgaande van bestaande mogelijkheden kan in een samenwerking tussen medici en technici gemikt worden op een betere vervangingsmogelijkheid.

b. Een andere manier is een onderzoek te starten dat meer inzicht in de eigenschappen bij de werking van (delen van) het skelet (mechanische anatomie) verschaft. Wanneer een goed inzicht bestaat kan veel beter het effect van ingrepen of vervangingen worden nagegaan. Dan bestaat ook de mogelijkheid om het gedrag

onder extreme condities te voorspellen.

Het onder a. genoemde onderzoek wordt te weinig fundamenteel geacht.

Een onderzoek zoals onder b. aangegeven, is tamelijk ambitieus. Successen op korte termijn moeten niet verwacht worden.

Gestart moet worden met een niet al te complex probleem, waarvan de medici duidelijk kunnen maken dat fundamenteel inzicht belangrijk is.

Als mogelijke onderzoekgebieden werden genoemd:

- a. wervelkolom; belasting, toelaatbare belasting, criteria voor "pijn in de rug".
Dit probleem is waarschijnlijk in de startfase te gecompliceerd vanwege de ingewikkelde bewegingsmogelijkheden van de vele delen.
- b. dynamische en kinematische problemen; ganganalyse, belastingsanalyse t.g.v. versnellingen.
- c. gewrichten; smering, slijtage, beweeglijkheid.
Geen der aanwezige technici is gespecialiseerd in smeringstheorieën. Dit is een wezenlijke handicap bij het betreden van dit probleemgebied. Bovendien is in Nederland onder auspiciën van de "Bond voor materialen" een studiekern opgericht die zich bezig wil houden met "gewrichten". Janssen is bestuurslid van deze studiekern.
- d. dijbeenbot; belasting, optredende spanningen en rekken.
Op dit gebied is een fundamenteel onderzoek in de groep technische mechanica gestart.
Zowel het betreffende deel van het heupgewricht als van het kniegewricht zal worden bestudeerd.
Uitbreiding is mogelijk door het hele heupgewricht en/of het kniegewricht mee te nemen.

Besloten wordt om in eerste instantie te trachten een goed mechanisch inzicht te verkrijgen in de spanningstoestand bij een dijbeenbot.

Problemen die optreden zullen o.a. betrekking hebben op het vastleggen van de geometrie, de belasting (spierkrachten) en de materiaaleigenschappen. De technici zullen zich delen van de anatomie en de hystologie eigen dienen te maken.

4. Afspraken

- a. Door de werkgroep Bio-mechanica T.H.E. zal getracht worden voortgang te maken met het onderzoek naar het mechanisch gedrag van het dijbeenbot. In eerste instantie zal alleen gelet worden op statische belastingssituaties.
 - b. Formele samenwerkingsvormen zijn (nog) niet realiseerbaar, mede doordat te weinig inzicht bestaat in optredende problemen.
 - c. Een bijeenkomst als deze zal over enige tijd opnieuw plaats vinden met als voornaamste doel: brainstorming.
Uitgangspunt zal zijn de intussen verkregen resultaten of gerezen problemen.
 - d. Door prof. Chapchal zal een weg gezocht worden om toegang te krijgen tot de afdeling Anatomie van de K.U.N.
 - e. Ieder zal zoveel mogelijk meewerken wanneer een ander een beroep op hem doet voor gegevens of als discussie-partner voor een bepaald probleem.
-

Notities n.a.v.

"Bespreking Bio-mechanica

16 oktober 1970 T.H. Eindhoven".

J. Janssen

Notities n.a.v.

"Bespreking Bio-mechanica 16 oktober 1970 T.H. Eindhoven".

1. Deelnemers

dr. H.M. Berntsen, , orthop. chirurg Diaconessenziekenhuis Eindhoven
ir. W.A.M. Brekelmans , wet. med. techn. mech. T.H.E.
prof.dr. G. Chapchal , hoogl. orthopaedie K.U.N.
prof.ir. W.L. Esméijer, hoogl. techn. mech. T.H.E.
dr. I.J. Holotcheff , wet. med. Universiteit Amsterdam
dr. O.S. Ingwersen , orthop. chirurg Diaconessenziekenhuis Eindhoven
dr.ir. J.D. Janssen , lector techn. mech. T.H.E.
ir. J. Jol , wet. med. Universiteit Utrecht
H.W. Poort , student-med. techn. mech. T.H.E.
P.P.T.G. van Rens , student-med. techn. mech. T.H.E.
dr. L.M.D. Suda , med. orthopaedie K.U.N.
L.B.M. Tomesen , student-med. techn. mech. T.H.E.
dr. H. Visser , anatoom K.U.N.
S.D. Zorge , techn. med. techn. mech. T.H.E.

Verhinderd

A.J. Sanders , student-med. techn. mech. T.H.E.
dr. T.J.J.H. Slooff , orth. chirurg K.U.N.

Janssen leidt de discussie.

2. Algemeen

a. Voorgeschiedenis

Naar aanleiding van gesprekken en ervaringen tijdens het "Seminar on biomechanics" te Leuven (begin september 1970) is door de werkgroep Bio-mechanica van de groep Technische Mechanica, afd. Werktuigbouwkunde het initiatief genomen om uitgaande van de deelnemerslijst van dit seminar een bijeenkomst te arrangeren om te onderzoeken of samenwerking tussen medici en technici nuttig, zinvol en mogelijk is en hoe deze samenwerking eventueel geconcretiseerd kan worden.

Voorheen was er reeds een samenwerking tussen dr. Slooff en de groep technische mechanica met betrekking tot een vergelijkend experimenteel spanningsonderzoek bij heupprothesen. Verder bestond reeds contact tussen de werkgroep Bio-mechanica en ir. Jol.

b. Technische Mechanica

Opgemerkt wordt dat de deelnemende technici qua opleiding en interesse voornamelijk gericht zijn op onderzoek van fundamentele aard. Zij kunnen zeker niet als "constructeurs" gekarakteriseerd worden. Evenmin zijn zij ingesteld op het realiseren van ad hoc oplossingen.

Hun specialisme werkt voornamelijk met begrippen als: belasting, sterkte, (spanning), stijfheid (vervormingen), stabiliteit en bewegingen (snelheid, versnelling).

Zij zien de mogelijkheid om ook andere technische specialismen bij (deel)problemen in te schakelen.

3. Geambieerd onderzoek

Tijdens de discussie kwamen talrijke onderzoekobjecten ter sprake. Verder werden een aantal gedachtengangen ontwikkeld over de aard van uit te voeren onderzoekingen.

Er werd vrijwel uitsluitend aandacht besteed aan problemen die op het menselijk skelet betrekking hebben.

a. Een belangrijk, op snelle toepasbaarheid gericht, werkgebied is het onderzoek en ontwerp van vervangingsmogelijkheden voor skeletdelen. Uitgaande van bestaande mogelijkheden kan in een samenwerking tussen medici en technici gemikt worden op een betere vervangingsmogelijkheid.

b. Een andere manier is een onderzoek te starten dat meer inzicht in de eigenschappen bij de werking van (delen van) het skelet (mechanische anatomie) verschaft. Wanneer een goed inzicht bestaat kan veel beter het effect van ingrepen of vervangingen worden nagegaan. Dan bestaat ook de mogelijkheid om het gedrag

onder extreme condities te voorspellen.

Het onder a. genoemde onderzoek wordt te weinig fundamenteel geacht.

Een onderzoek zoals onder b. aangegeven, is tamelijk ambitieus. Successen op korte termijn moeten niet verwacht worden.

Gestart moet worden met een niet al te complex probleem, waarvan de medici duidelijk kunnen maken dat fundamenteel inzicht belangrijk is.

Als mogelijke onderzoekgebieden werden genoemd:

- a. wervelkolom; belasting, toelaatbare belasting, criteria voor "pijn in de rug".
Dit probleem is waarschijnlijk in de startfase te gecompliceerd vanwege de ingewikkelde bewegingsmogelijkheden van de vele delen.
- b. dynamische en kinematische problemen; ganganalyse, belastingsanalyse t.g.v. versnellingen.
- c. gewrichten; smering, slijtage, beweeglijkheid.
Geen der aanwezige technici is gespecialiseerd in smeringstheorieën. Dit is een wezenlijke handicap bij het betreden van dit probleemgebied. Bovendien is in Nederland onder auspiciën van de "Bond voor materialen" een studiekern opgericht die zich bezig wil houden met "gewrichten". Janssen is bestuurslid van deze studiekern.
- d. dijbeenbot; belasting, optredende spanningen en rekken.
Op dit gebied is een fundamenteel onderzoek in de groep technische mechanica gestart.
Zowel het betreffende deel van het heupgewricht als van het kniegewricht zal worden bestudeerd.
Uitbreiding is mogelijk door het hele heupgewricht en/of het kniegewricht mee te nemen.

Besloten wordt om in eerste instantie te trachten een goed mechanisch inzicht te verkrijgen in de spanningstoestand bij een dijbeenbot.

Problemen die optreden zullen o.a. betrekking hebben op het vastleggen van de geometrie, de belasting (spierkrachten) en de materiaaleigenschappen. De technici zullen zich delen van de anatomie en de hystologie eigen dienen te maken.

4. Afspraken

- a. Door de werkgroep Bio-mechanica T.H.E. zal getracht worden voortgang te maken met het onderzoek naar het mechanisch gedrag van het dijbeenbot. In eerste instantie zal alleen gelet worden op statische belastingssituaties.
- b. Formele samenwerkingsvormen zijn (nog) niet realiseerbaar, mede doordat te weinig inzicht bestaat in optredende problemen.
- c. Een bijeenkomst als deze zal over enige tijd opnieuw plaats vinden met als voornaamste doel: brainstorming.
Uitgangspunt zal zijn de intussen verkregen resultaten of gerezen problemen.
- d. Door prof. Chapchal zal een weg gezocht worden om toegang te krijgen tot de afdeling Anatomie van de K.U.N.
- e. Ieder zal zoveel mogelijk meewerken wanneer een ander een beroep op hem doet voor gegevens of als discussie-partner voor een bepaald probleem.

Erratum bij: T.H. Rapport WE 71 - 27

Numerieke analyse van de spannings- en vervormingstoestand
in het femur met behulp van de methode der eindige elementen

- In figuur 4.4, 5.4, 5.5 en 6.1 dienen de lijnen van konstante spanning in de onmiddellijke nabijheid van de bevestiging van het femur aan de vaste wereld, in concreto in de onderste 2 cm. van het distale uiteinde, geheel te vervallen.

In figuur 4.4 - B en 5.4 - B dient echter de lijn met een konstante waarde 0 voor σ_y , die begint aan de mediale zijde op ongeveer 3 cm. van de onderkant, vrijwel volgens een rechte te lopen naar het midden van de condylis medialis.

Deze helaas benodigde correctie is een gevolg van een fout in de invoergegevens voor de computerprogramma's. Deze maakt echter, zoals na verbetering werd geverifieerd, uitsluitend de aangegeven wijzigingen noodzakelijk.

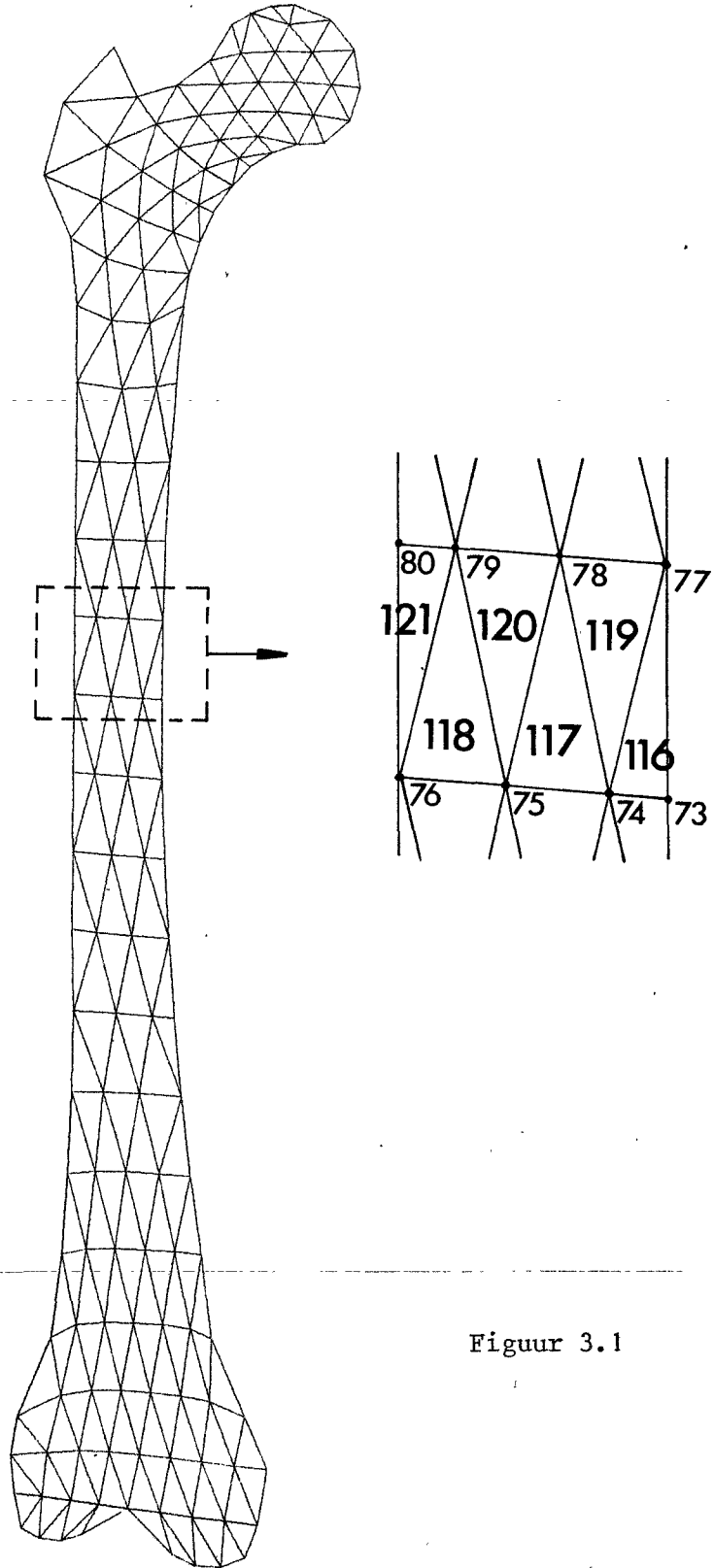
- Wegens het niet in rekening brengen van de faktor $\frac{1}{2}$ uit formule (5.1) dienen de numerieke waarden voor de potentiële energie, V, onderaan op blz. 31 allen met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd te worden.

W.A.M. Brekelmans

H.W. Poort

3. De elementenmethode als gereedschap

Een twee-dimensionaal model van een femur wordt verdeeld in een aantal bijvoorbeeld driehoekige elementen, die van 1 tot M worden genummerd.



Figuur 3.1

Hoewel niet essentieel voor de methode maken wij de volgende beperkingen:

1. Wij veronderstellen op dit ogenblik het materiaal homogeen, isotroop en lineair met

$$E = 20.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,37$$

2. Wij nemen aan dat de dikte van het model constant is. De getalwaarde die wij aan deze dikte toekennen is niet belangrijk, omdat de voor de verplaatsingen, rekken en spanningen te verkrijgen resultaten wegens de lineariteit van de theorie omgekeerd evenredig zijn met de dikte.

Gekozen is:

$$t = 10 \text{ mm}$$

De afmetingen in het vlak van fig. 4.1 nemen wij identiek met die van Koch en dus op ware grootte. Het model wordt verdeeld in 936 elementen, waarbij 537 knooppunten worden gecreëerd. Fig. 4.2 geeft een beeld van deze verdeling.

Voor het maken van een dergelijke verdeling en de hierbij behorende geometrische en topologische gegevens is een elementgenerator ontwikkeld, zodat de hierbij behorende hoeveelheid handwerk tamelijk gering is.

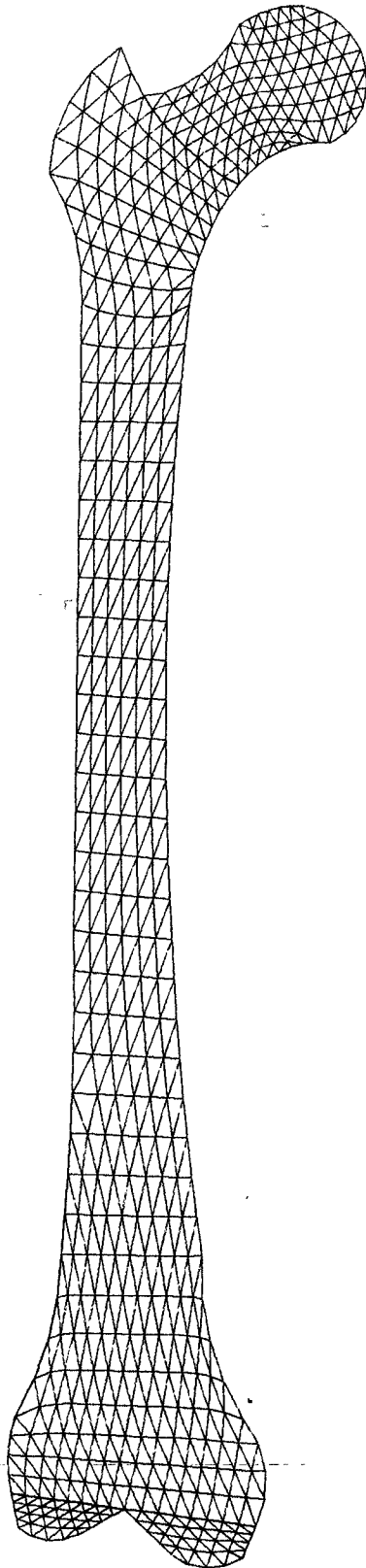
Na verwerking met de computer verkrijgen wij primair de verplaatsingen van de knooppunten. Van de buitenomtrek is in fig. 4.3 zowel de onvervormde als de vervormde contour weergegeven waarbij voor de duidelijkheid een vergrotingsfactor voor de verplaatsingen is toegepast. Gebruikt werden:

- schaal voor de buitenomtrek: 1 : 2,5

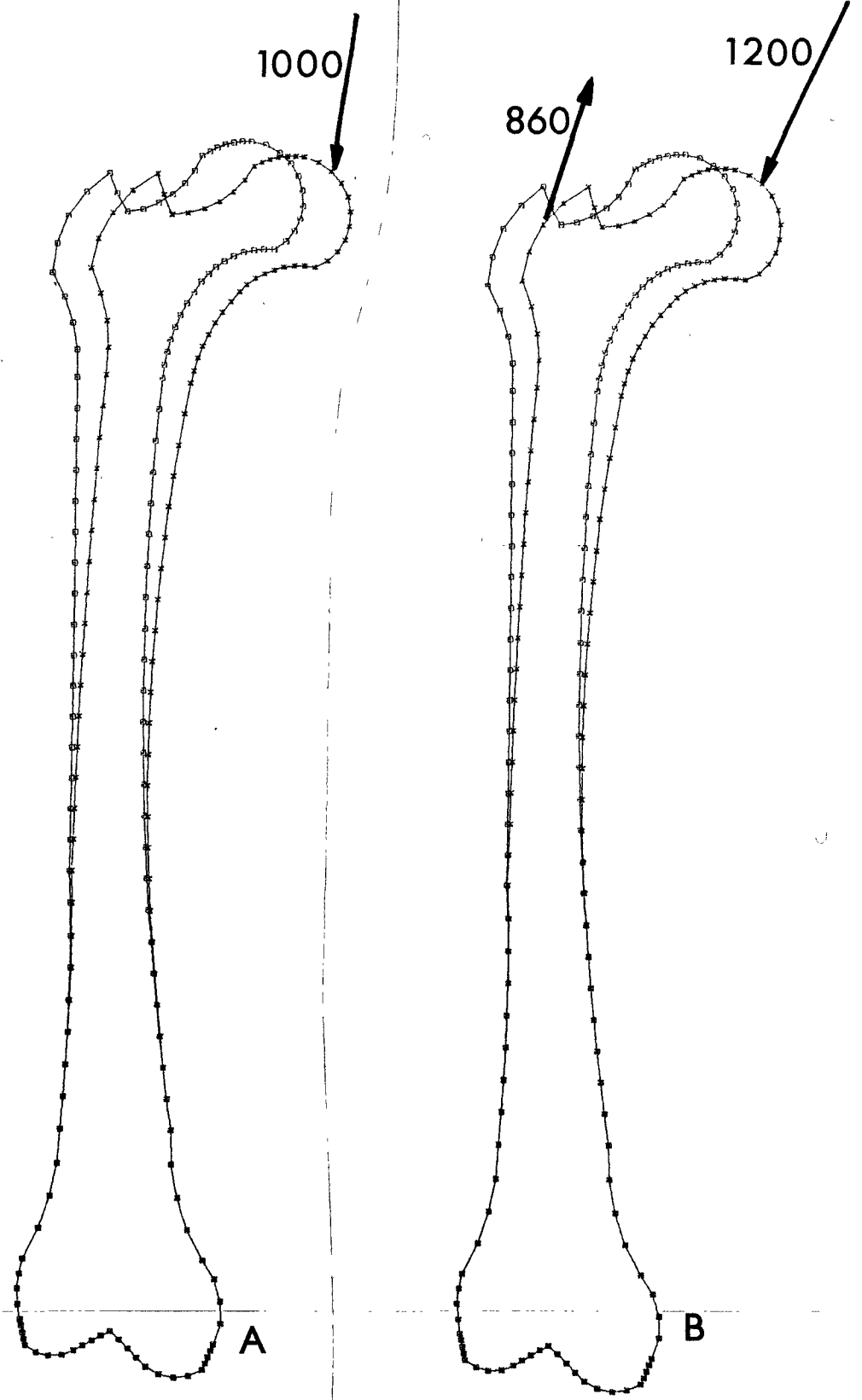
- schaal voor de verplaatsingen: 1 : 0,5

De toegepaste vergrotingsfactor voor de verplaatsingen had dus de waarde 5.

De verplaatsingsvelden voor beide belastingsituaties blijken nauwelijks onderling te verschillen.

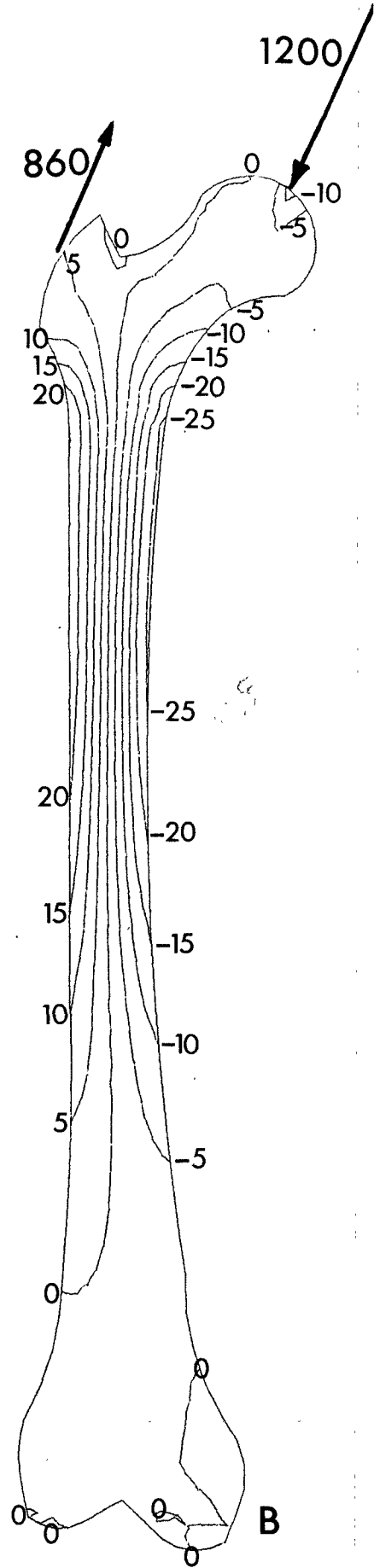
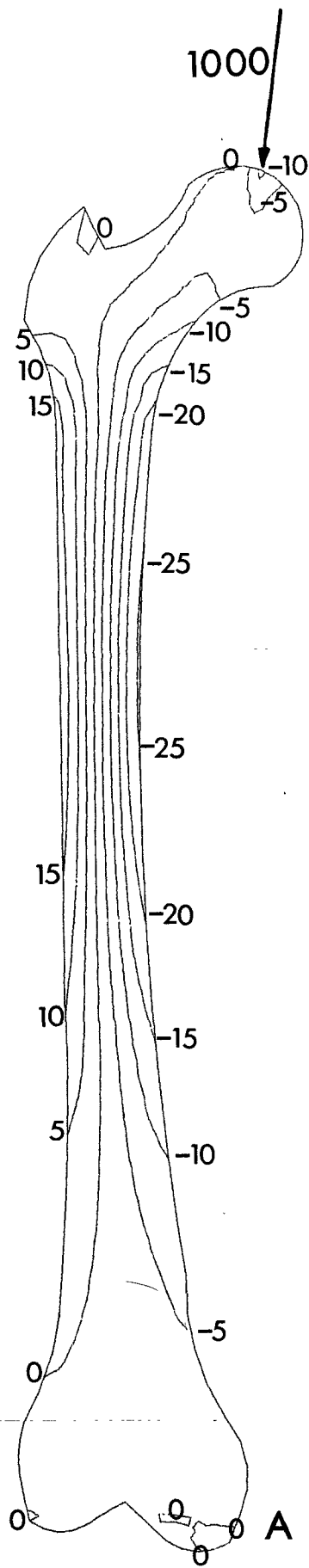


Figuur 4.2



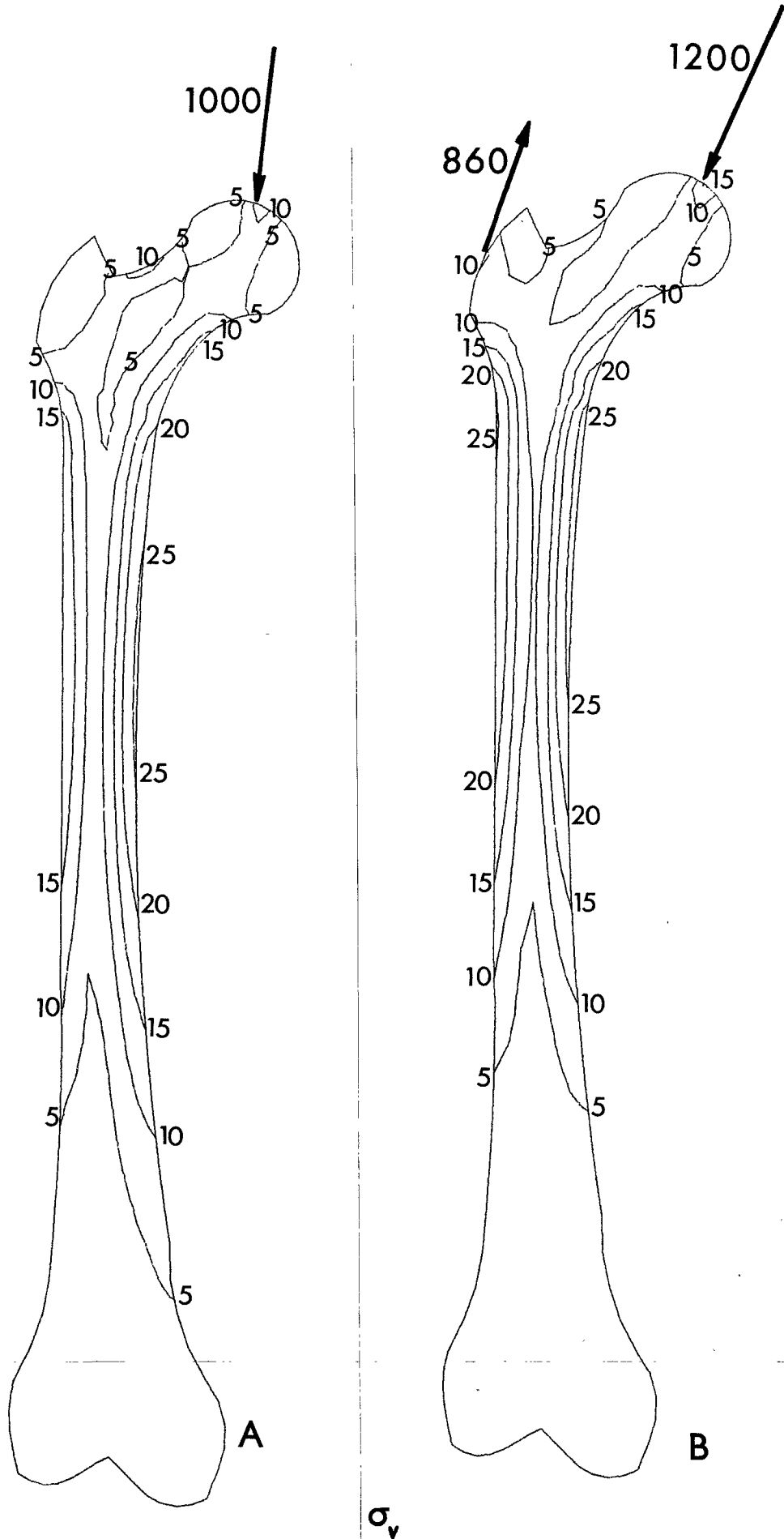
—□—□—□— contour in onbelaste toestand
—×—×—×— contour in belaste toestand

Figuur 4.3



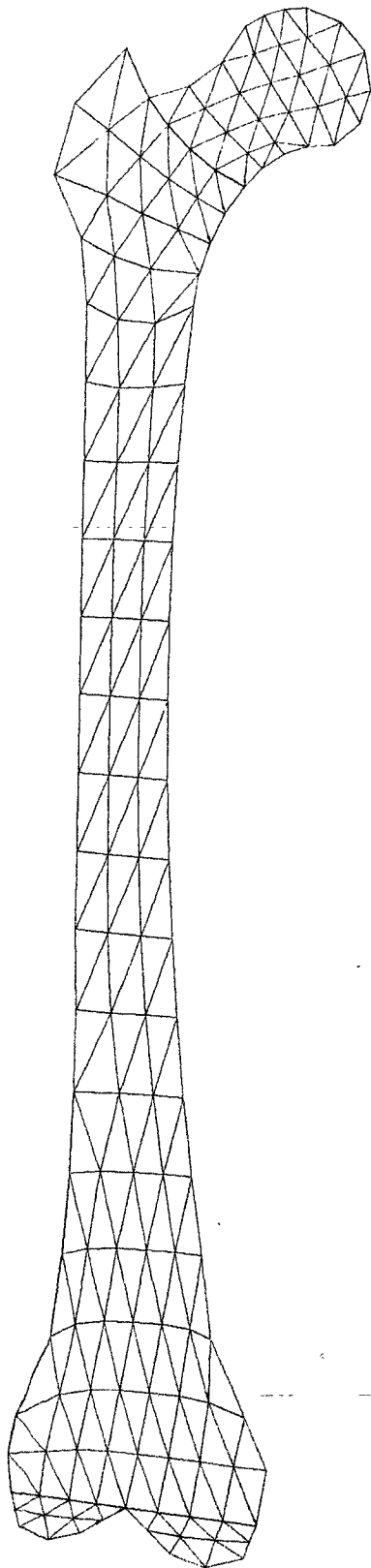
σ_y

Figure 4.4



σ_v

Figuur 4.7



Figuur 5.3

Voor elke willekeurige elementenverdeling zal dit niet mogelijk zijn. Bij de elementverdeling van fig. 4.2 is echter vooraf met deze modifikatie rekening gehouden. Fig. 5.3 geeft de elementenverdeling voor de elementen met zes knooppunten. Het aantal knooppunten bedraagt eveneens 537, het aantal elementen 234.

Voor de verplaatsingen wordt kwalitatief vrijwel hetzelfde beeld gevonden als in fig. 4.3 met dien verstande dat wel het patroon van de verplaatsingen ongeveer overeenstemt, maar niet de grootte.

We zullen de resultaten voor beide elementtypen vergelijken door gebruik te maken van het principe van de minimale potentiële energie (zie hoofdstuk 2).

Door substitutie van formule (3.25) in formule (3.24) kunnen we, bedenkend dat alle componenten van w_2 nul zijn de getalwaarde van de potentiële energie schrijven als:

$$V = \frac{1}{2} \dot{w}_1 f_1 - \dot{w}_1 f_1 = - \frac{1}{2} \dot{w}_1 f_1 \quad (5.1)$$

Daar in belastingsgeval A respectievelijk B slechts 2 respectievelijk 4 componenten van f_1 van nul verschillen, kan bij bekende knooppuntenverplaatsingen, de getalwaarde van V eenvoudig met de hand berekend worden.

Voor het element met drie knooppunten geldt:

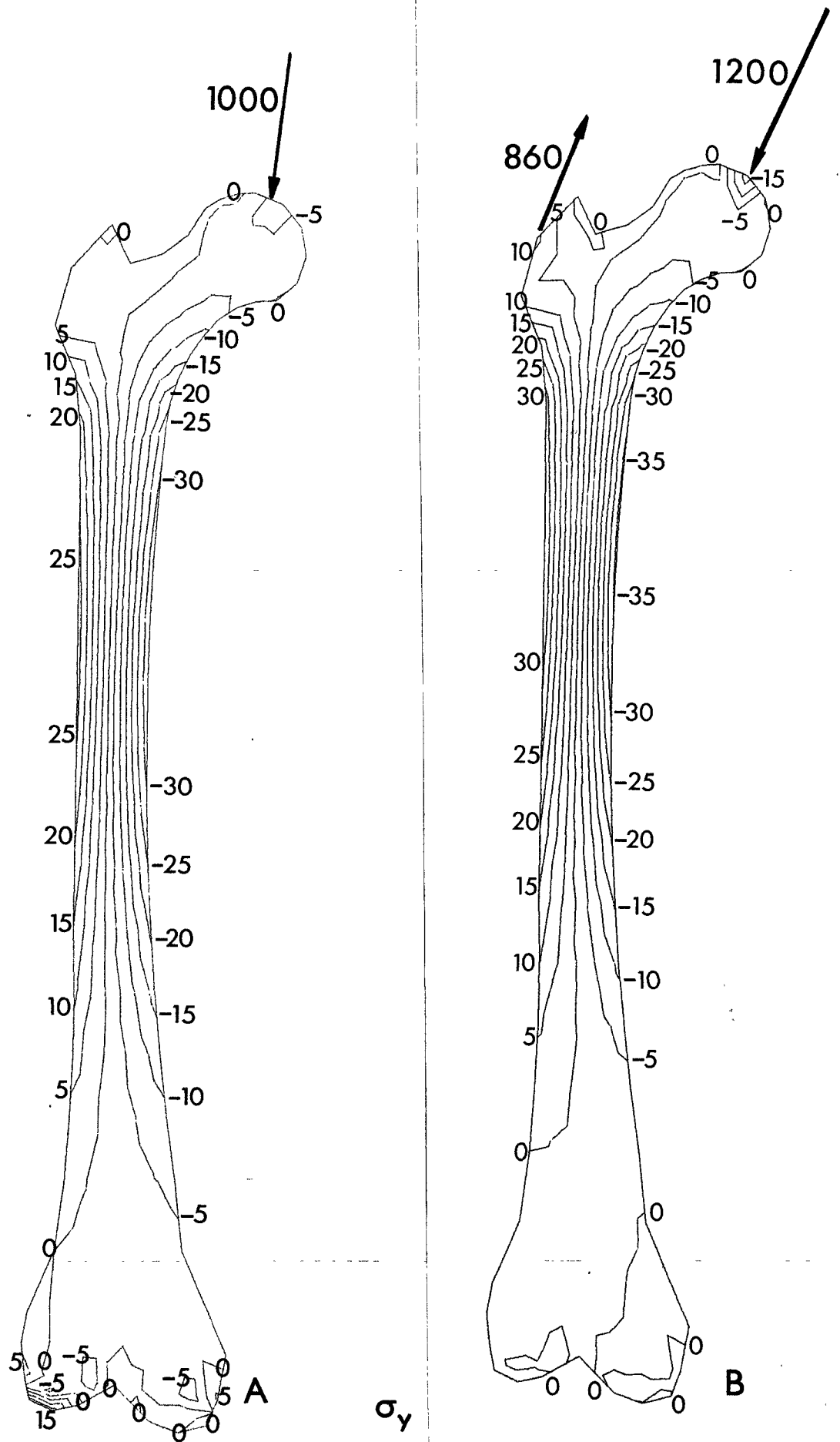
$$\text{Belastingsgeval A : } V = - 0,86 \text{ Nm}$$

$$\text{Belastingsgeval B : } V = - 0,96 \text{ Nm}$$

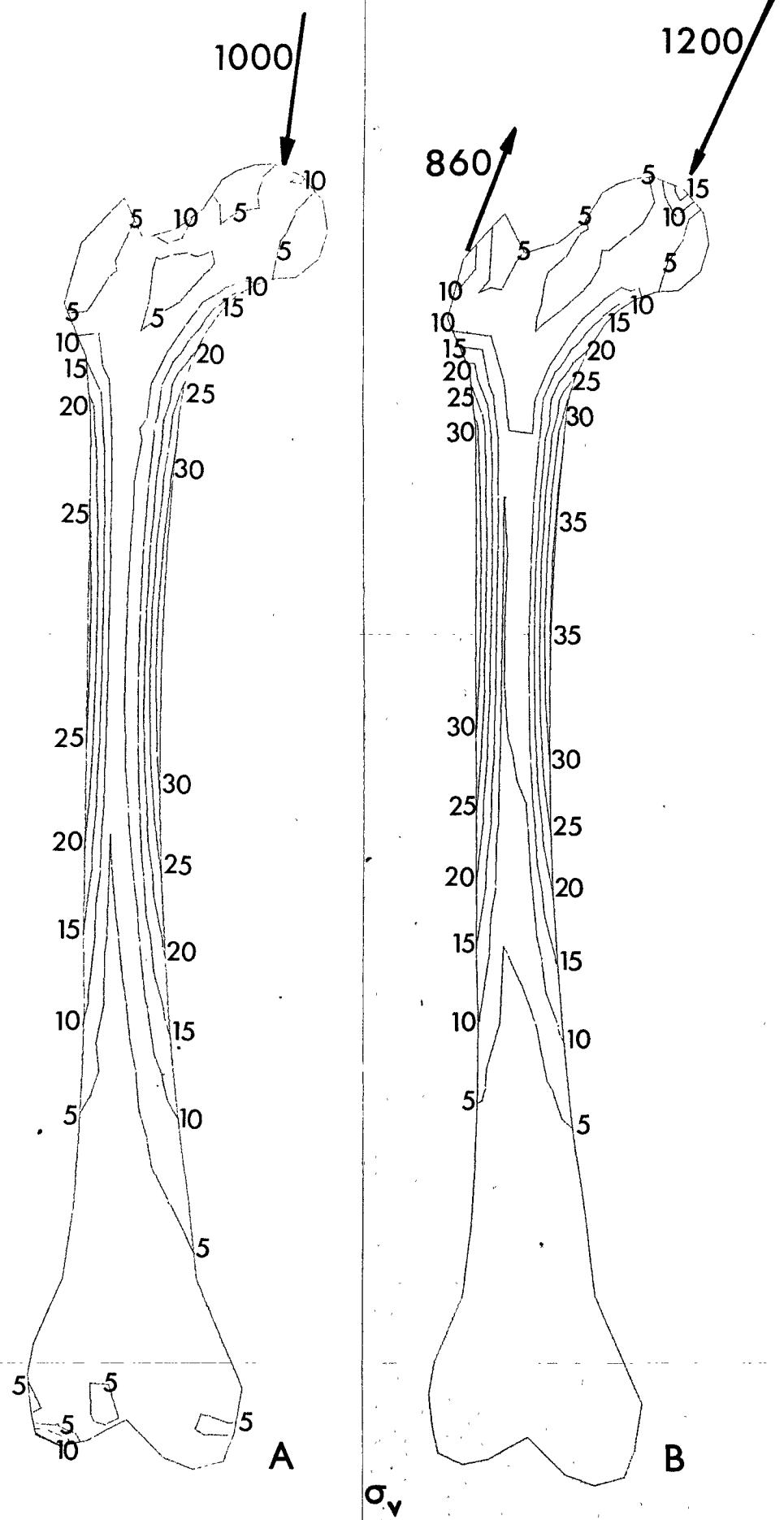
Voor het element met zes knooppunten geldt:

$$\text{Belastingsgeval A : } V = - 1,01 \text{ Nm}$$

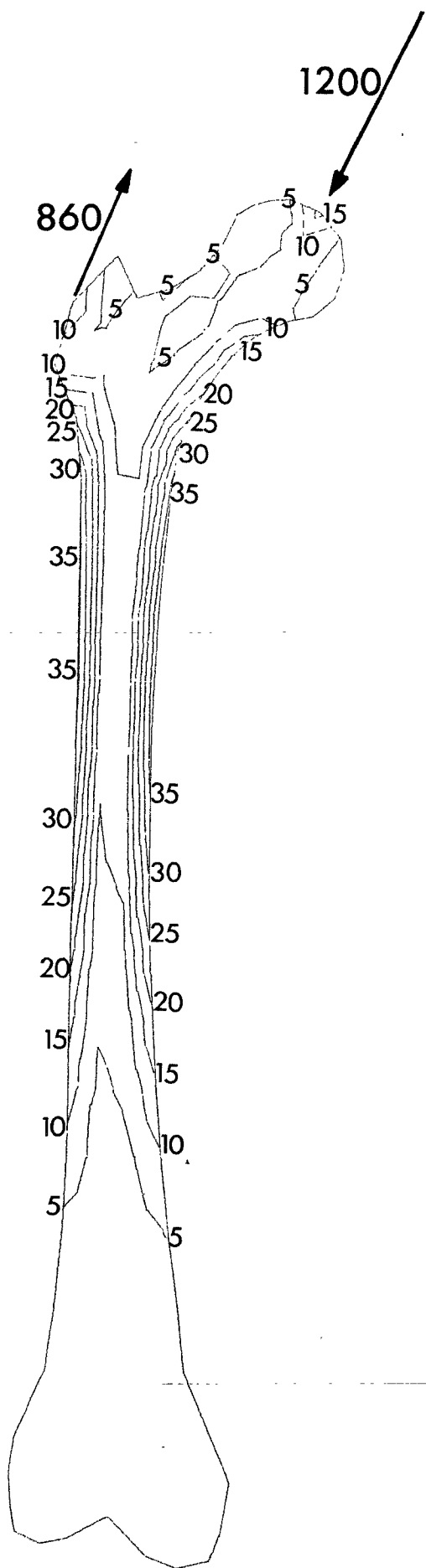
$$\text{Belastingsgeval B : } V = - 1,15 \text{ Nm}$$



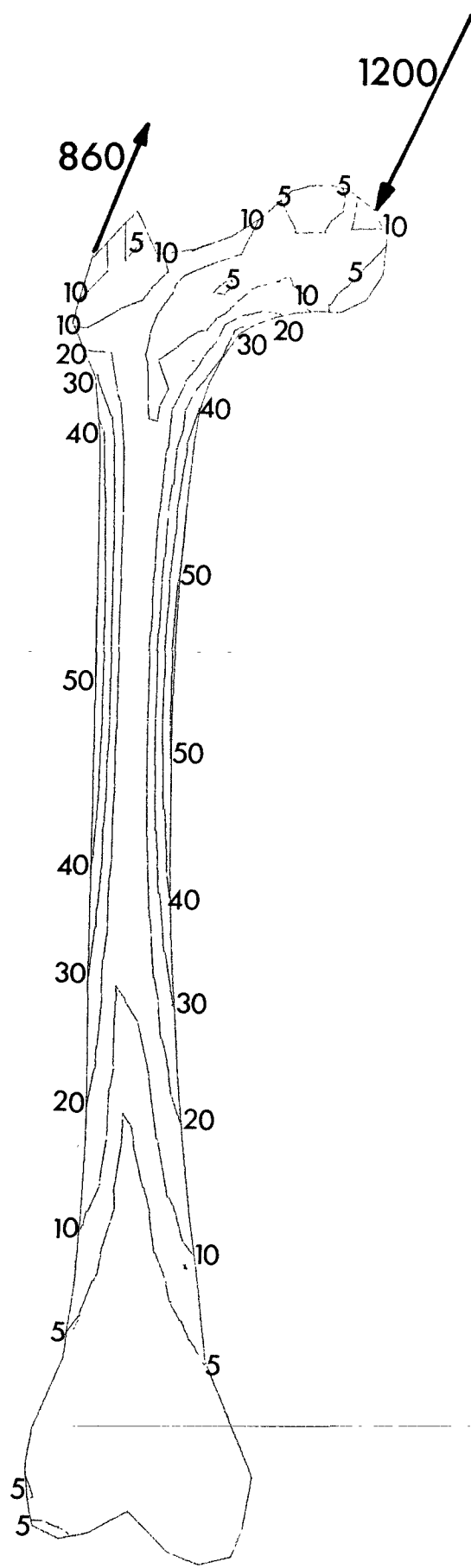
Figuur 5.4



Figuur 5.5



Figuur 6.1.a



Figuur 6.1.b

σ_v