De ideeën achter Automath

702611

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Memorandum 1985-12

december 1985

DE IDEEËN ACHTER AUTOMATH

R.P. Nederpelt

Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde en Informatica
Postbus 513 - 5600 MB Eindhoven
Nederland.

DE IDEEËN ACHTER AUTOMATH

R.P. Nederpelt

(Tekst van een voordracht gehouden bij de uitreiking van de Snelliusmedaille door het Genootschap ter bevordering van natuur-, genees-, en heelkunde te Amsterdam aan prof.dr. N.G. de Bruijn, op 29 november 1985).

1. De wiskunde : constructief en deductief.

Vóórdat N.G. de Bruijn hoogleraar werd aan de Technische Hogeschool in Eindhoven, was hij dat al geweest aan de T.H. Delft en aan de Universiteit van Amsterdam. Een van zijn studenten in Amsterdam was Hugo Brandt Corstius. In een column in een Nederlands weekblad heeft deze eens vermeld dat het professor De Bruijn was, die zijn belangstelling wekte voor wiskunde en logica. Dat gebeurde door de volgende redenering, die de hoogleraar als aardigheid in een van zijn colleges verweven had.
Àlle getallen zijn interessant, zei De Bruijn daar, en dat kan ik als volgt bewijzen. Neem maar eens aan dat er òninteressante getallen zouden bestaan. Dan zou er ook een kleinste oninteressant getal zijn. Maar vanzelfsprekend zou iedereen graag willen weten welk getal dat dan wel was. Kortom: dat kleinste oninteressante getal zou buitengewoon interessant zijn; waarmee maar bewezen is dat er geen oninteressante getallen kunnen bestaan.
Deze anecdote vertelt meer dan dat De Bruijn zijn studenten graag eens uit hun studiesleur wou wakker schudden. Ze laat ook zien dat hij een fundamentele belangstelling had in de aard van het redeneren, en ook in het verschil tussen wat je ìn de taal zegt en wat je óver de taal kunt zeggen. Over dat laatste verschil, dat tussen taal en meta-taal, zal ik het straks nog hebben.
Die belangstelling voor het pure redeneren, zoals De Bruijn die altijd heeft gehad, zal door velen filosofisch genoemd worden. Want wie zich afvraagt wat een wiskundige redenering is, wil eigenlijk weten wat de wiskunde zèlf is. Immers, de wiskunde is de wetenschap die bij uitstek gebaseerd is op verifieerbare kennis. En alles wat geverifieerd of bewezen wordt, gaat via een redenering - een gedachtengang die aan strenge wetten moet voldoen.

Hiermee is meteen het verschil aangegeven tussen de wiskunde en de andere exacte wetenschappen. Immers, terwijl de natuurkundige, de scheikundige of de werktuigkundige experimenten doet met een stukje van de realiteit, doet de wiskundige zijn onderzoekingen voornamelijk in gedachten. Geen proefopstellingen, metingen of waarnemingen, maar alleen een heldere geest, en een stukje papier om het een en ander op te kunnen schrijven.

De wiskundige werkt met fictieve objecten, die hij in structuren inbedt om nieuwe objecten en structuren te maken. Denk maar aan de getallen, de meest concrete objecten waar de wiskundige zich mee bezig houdt, maar desondanks fictief.

Het getal 'drie', bijvoorbeeld, is maar een bedenksel, het bestaat niet echt als stoffelijk object; niemand is op straat ooit een drie tegengekomen.

Toch kunnen we van alles met die 'drie' doen. We kunnen er 'vier' bij optellen, en krijgen 'zeven'. We kunnen het door 'vijf' delen, wat een breuk oplevert : drie-vijfde. Zo voorzien we de telgetallen (een, twee, drie ...) van een structuur: de optelling, en we breiden ze uit tot nieuwe objecten: breuken, met nieuwe structuren. En zo gaat het al maar verder, tot er een machtig bouwwerk verrijst : 'de' wiskunde. Nog lang niet af, dat bouwsel, en gelukkig maar; anders zou er in de wiskunde niet meer zoveel interessants te bedenken zijn.

De wiskunde zoals die nu bestaat, is dus sterk constructief van aard. Het een voert tot het ander, uitgangspunten leiden tot conclusies, een berekening lokt een andere uit. En als een stuk wiskunde eenmaal geconstrueerd is, kan de juistheid ervan worden aangetoond door redeneringen en bewijzen. Wiskunde is in tweede instantie dus ook deductief. Een wiskundige bedient zich daarom herhaaldelijk van het simpele woordje 'dus', en hij is misschien wel de enige die dat woord heel vaak gebruikt, en toch maar zelden als stopwoord.

Waar komt die basisfilosofie van de wiskunde vandaan ? Getallen en berekeningen hebben natuurlijk al heel vroeg, vanaf de prehistorie, met bezit en handel te maken gehad. Ik ruil vijf schapen voor één rund. Hoeveel schapen moet ik dan hebben om twéé runderen te kunnen bemachtigen ?

Omdat het om zulke elementaire handelingen ging, van groot belang voor het dagelijks leven, vaak zelfs van levenbelang, is al van oudsher de drang naar precisie ontstaan. Niemand wil te kort gedaan worden, dus berekeningen moeten kloppen.

Het belangrijkste was dus oorsponkelijk: het 'hoe' van de wiskunde, het juiste gebruik van een systeem dat een zekere eerlijkheid en betrouwbaarheid garandeerde.

Pas in de Griekse tijd werd voor het eerst de vraag naar het 'waarom' gesteld.

De basisprincipes van tellen, rekenen en redeneren werden onderwerp van studie.

De Griekse filosofen systematiseerden het redeneren in zijn pure vorm, en gaven daar een nieuwe naam aan: de logica.

In de eeuwen daarna trad het 'hoe' weer op de voorgrond. Men was tevreden met de eenvoudige logica zoals Aristoteles en de zijnen die hadden vastgelegd. Desondanks was er vooruitgang in de wiskunde.
Zo gebruikte Willebrord Snell van Royen, die zich Snellius noemde, in het begin van onze zeventiende eeuw de klassieke meetkunde heel concreet op de bol - de aarde in dit geval. Hij mat de afstand tussen Alkmaar en Bergen op Zoom, met behulp van die wiskunde die we nu boldriehoeksmeting noemen, en bepaalde daarmee de omtrek van de aarde. Ook zijn beroemde wetten over de breking van een lichtstraal op de grens van twee oppervlakken is een toepassing van oude wiskundige theorieën.
We zien tijdens die lange ontwikkeling van de wiskunde, van de oudheid tot op heden, wèl dat de nauwkeurigheid toeneemt. Men stelt zich niet meer tevreden met vage begrippen, omdat daar niet goed mee te werken valt. Vooral in de achttiende en negentiende eeuw neemt de precisie toe, totdat er omstreeks de laatste eeuwwisseling, als resultaat van die grondiger aanpak, groot alarm werd geslagen : de wiskunde bleek in zijn fundamenten een constructiefout te hebben. Een hele stoet van paradoxen bezoedelde het wiskundige blazoen, waarop altijd 'juistheid' en 'betrouwbaarheid' had gestaan.
Nu waren er al sinds de oudheid regelmatig paradoxen opgedoken in de wiskunde en de logica. Maar hun invloed was beperkt gebleven, omdat men er met enige inspanning steeds in geslaagd was om ze onschadelijk te maken. Met deze nieuwe paradoxen ging dat echter veel moeilijker.
De wiskunde schudde decennia lang op haar grondvesten. Als gevolg daarvan beijverde men zich om nóg nauwkeuriger naar de basisprincipes te gaan kijken. Grote namen in dit verband zijn Hilbert en Gödel. Deze en andere wiskundigen van deze eeuw zorgden voor een herijking van de fundamentele wiskundige denkbeelden, waarvan de consequenties pas langzamerhand goed zichtbaar werden. In Nederland, en vooral in Amsterdam, ontstonden nieuwe stromingen in de logische grondslagen, waar de namen van Brouwer, Heyting en Beth aan verbonden zijn. We kunnen De Bruijn in dit verband heel goed vergelijken met Brouwer, de eeuwig zoekende vernieuwer. Ook De Bruijn stelde zich nooit tevreden met wat hem door overlevering geleerd werd.

2. Gangbare ideeën en de praktijk van het wiskundig schrift.

Wat zijn op het moment de gangbare ideeën over de aard van de wiskunde ? Zoals al eerder gezegd, men ziet wiskunde nu over het algemeen als een constructief opgebouwd systeem, dat deductief te rechtvaardigen is.

Het geheel berust op een aantal axioma's en primitieve begrippen, waarvan we aannemen dat ze 'waar' zijn, respectievelijk 'bestaan' zonder dat we dat hoeven te verantwoorden. De complete verzameling van de telgetallen: 1, 2, 3..., is zo een primitief begrip. En een axioma is, dat er in die rij van getallen steeds weer nieuwe voorkomen en nooit een die al geweest is.
Met die axioma's en die grondbegrippen moeten we ook iets kunnen dóén.
In eerste instantie zijn daarvoor de deductieregels, die ons toestaan om redeneringen op te bouwen. Als a een deler is van b en als b op zijn beurt een deler is van c, dan is a ook een deler van c. Dat is 'nogal logisch', zult u zeggen, en inderdaad, hier hebben we een van die weinige gevallen die nogal logisch zijn en bovendien op de logica berusten.
Niet alléén op de logica, overigens, maar ook op een andere handigheid die het ons in de wiskunde zo makkelijk maakt: de mogelijkheid om definities te geven. Om te weten wannéér a een deler van b is, moeten we immers eerst weten wat de definitie van 'deler' is. Zo een definitie dient natuurlijk even nauwkeurig geformuleerd te worden als de rest van de wiskunde. Het is bijvoorbeeld nogal onvoorzichtig om te zeggen: 'a een deler van b ? 0, dat betekent dat b door a gedeeld kan worden'. Want essentieel is, dat die deling een geheel getal oplevert: 3 is een deler van 15, want 15:3 is het gehele getal 5, maar 3 is geen deler van 16, want 16:3 is $5\frac{1}{3}$, en daar zit een breuk bij.
Dat werken met definities is een machtig hulpmiddel. Zodra de wiskundige iets tegenkomt dat hij misschien nòg wel eens zal tegenkomen, wijdt hij er een definitie aan. Zo zegt hij: 'π is de verhouding tussen de omtrek en de middellijn van een cirkel'. Het is immers veel gemakkelijker om over π te spreken, dan steeds weer die hele mondvol over verhouding, omtrek, middellijn en cirkel te moeten herhalen.
Veel wetenschapsmensen weten dat uit eigen ervaring: geef er een nieuwe naam aan en je praat er makkelijker over, zij het dan wèl: alleen met je vakbroeders.
Zo ontstaan de verschillende vaktalen; niet alleen de taal van de wiskundige, maar ook de dokterstaal, de advocatentaal, de stadhuistaal en zelfs de dieventaal.
De wiskundige vaktaal is ook zo een soort geheimtaal, alleen voor ingewijden leesbaar. De aanduidingen 'stelling', 'bewijs' en 'definitie' zien we steeds weer terug in elk respectabel wiskundeboek. Snobs zetten er nog wat 'lemmata' (hulpstellingen) tussen, of 'corollaria' (gevolgen), en wie het helemaal mooi wil maken, sluit zijn 'bewijs' af met de tekst: 'quod erat demonstrandum'.
Toch zijn alle wiskundigen zeer tevreden met de stijl van hun wiskundeboeken.
Ze zijn ervan overtuigd, dat het allemaal goed is wat daarin staat, om de doodeenvoudige reden dat ze het aan een ander kunnen uitleggen net zo lang tot die zegt: 'Nu begrijp ik het'.

En begrijpen brengt meteen vertrouwen met zich mee, een essentieel element van het wiskunde-bedrijven.
Over de deductieve stijl waarin wiskundeboeken geschreven moeten worden, bestaat grote overeenstemming. Je moet duidelijk zijn, systematisch en vooral verifieerbaar, dus correct. Maar 'duidelijk' wil beslist niet zeggen: 'volledig', want geen sterveling die er dan meer wat van begrijpt. Een wiskundige tekst geeft een afgewogen overzicht van het onderwerp waar het over gaat en de redenering of berekening die erbij hoort, maar zelden of nooit zal elk detail erin staan.
Dat twee plus twee vier is, wéten we zo langzamerhand wel. Wie dat elke keer weer gaat bewijzen, is niet wijs, of in ieder geval een tikkeltje wereldvreemd.
Het is aardig om te zien hoe de precisie van een wiskundige tekst afhangt van het verwachte lezerspubliek. Een leerboek is nog het nauwkeurigst, hoewel ook daar in elke tekst grote hiaten zitten, die aan het invulvermogen van de lezer wordt overgelaten. Een handboek gaat met wat grotere stappen door de stof, een wetenschappelijk boek laat nòg meer ongezegd en in een wetenschappelijk artikel wordt zo ongeveer een op de honderd noodzakelijke gedachten werkelijk opgeschreven.
Een kwestie van efficiëntie, zullen we maar zeggen.
Toch heerst de algemene gedachte, dat al die wiskundige wetenschappelijke werken nuttig, bruikbaar en zelfs correct zijn. Men twijfelt zelden meer, zodra men eenmaal overtuigd is. Een vertrouwde redeneertrant geeft de lezer een ijzeren geloof in wat er allemaal beweerd wordt.
Dit komt ten dele door de hechte deductieve structuur die door de wiskunde heen geweven is. Hierover had ik het al eerder. Maar ook gewenning doet een heleboel.
Wie tienmaal een bepaalde bewijstrant in zijn gedachten gevolgd en geverifieerd heeft, gelooft het de elfde keer zó wel, ook al gaat het weer over een ander onderwerp. Dat heet dan: hij maakt gebruik van zijn wiskundige intuïtie.
En inderdaad, meestal gaat dat goed.
De beschreven gang van zaken is trouwens voor een beroepswiskundige de enige praktische manier om met zijn vakliteratuur om te gaan. Als hij alles tot in de puntjes zou moeten nagaan, elke keer weer, zou hij in zijn leven als wiskundige maar aan een heel klein stukje van zijn vak kunnen toekomen. En in de praktijk zou niemand zo een wiskundige willen gebruiken.
Waarom kleven er nu toch bezwaren aan deze algemeen aanvaarde beschrijvingswijze ?
Waarom is het soms moeilijk om te kunnen leven met een fragmentarische redenering, waarin nog heel veel ongezegd is gebleven ? Het zal duidelijk zijn, dat we vooral behoefte hebben aan een preciezere taal, als we geconfronteerd worden hetzij met uiterst ongewone, hetzij met uiterst gecompliceerde wiskundige teksten.
In beide gevallen is onze normale wiskundige intuïtie onvoldoende.

We geloven sommige onderdelen nog wel, maar in het geheel hebben we geen rotsvast vertrouwen meer. Temeer niet, omdat één klein foutje een heel wiskundig bewijs kan ondermijnen. Als we halverwege een redenering een verkeerde gevolgtrekking maken, kan het hele bewijs de prullenbak in.
Wie enigszins op de hoogte is met de huidige technologische ontwikkelingen weet, dat er tegenwoordig in de wiskunde, maar vooral in de informatica veel van zulke ongewone en ingewikkelde bewijzen nodig zijn. Een programma voor een computer rekent op commando heel gecompliceerde zaken uit. Maar hoe weten we dat alles goed gaat ? Eén klein foutje tussen die miljoenen computerinstructies kan al het werk in één klap teniet doen. En dat kost tijd, geld en misschien, als het erop aankomt, mensenlevens.
Jonkers zal ná mij uitvoeriger ingaan op de problemen bij de verificatie van programma's. Ik zal me nu beperken tot een beschrijving van een van De Bruijn's grote onderzoekprogramma's, dat direct hiermee in verband staat. Daarmee doe ik in zekere zin onrecht aan De Bruijn's wetenschappelijke werk, omdat ik al die andere gebieden waarop hij voortreffelijk werk heeft verricht, buiten beschouwing laat. Ik heb het dus bijvoorbeeld niet over zijn onderzoek op het gebied van de analyse, de combinatoriek, de getaltheorie of de mathematische fysica. Misschien komt De Bruijn daar straks zelf nog op terug. Ik zal hier alleen één welomschreven project van De Bruijn voor u toelichten, het zogenaamde Automath-project.

3. De Bruijn's uitgangspunten.

Wat wilde De Bruijn met zijn Automath, of in gewoon Nederlands: Automaat.
In het woord vinden we 'auto', dat iets van 'zelfstandig' betekent, en 'math', wat duidelijk naar de mathematica, de wiskunde dus, verwijst. Bovendien ziet er iets 'automatisch' in het woord, iets robotachtigs, iets mechanisch.
Laten we eens kijken wat De Bruijn er zelf van zei. In 1967, bij zijn eerste voordracht over het onderwerp, in Eindhoven, zei hij :

> 'De AUTOMATH kan een automaat worden die wiskundige stellingen in perfecte vorm met bewijs en al aflevert, mits voortdurend gesouffleerd door een wiskundige. De mate van samenwerking tussen mens en machine die daarbij vereist is laat zich het beste aanvoelen door een vergelijking te maken met de automobiel'.

Een automaat voor de wiskunde, kortom, die door de mens bestuurd moet worden.
Een jaar later, in een rapport van de T.H. Eindhoven, formuleert hij het zo :

'Automath can be used to express a large part of mathematics, and admits many ways for laying the foundations. The rules are such that a computer can be instructed to check whether texts written in the language are correct. These texts are not restricted to proofs of single theorems; they can contain entire mathematical theories'.

en :

'Every text written according to its rules is claimed to correspond to correct mathematics'.

Automath moet dus een taal voor de wiskunde zijn, die helpen kan om wiskunde te verifiëren, op correctheid te testen. Het idee is, dat een in Automath geschreven stuk wiskunde voor eens en voor al correct verklaard wordt, en wel absolúút correct: niet alleen door consensus onder de deskundigen, maar door de onbeïnvloedbare beoordeling van een objectieve, mechanisch werkende automaat.
De Bruijn zelf was overigens de eerste om de begrenzingen van zijn onderzoeksproject in te zien. In een voordracht voor de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen in Amsterdam, in 1969, zei hij het volgende :

'Men moet in het oog blijven houden dat het raamwerk der geformaliseerde wiskundige redeneringen niet hetzelfde is als 'de wiskunde'. De machine die de geformaliseerde redeneringen heeft doorgewerkt en beaamd, heeft er nog bitter weinig van begrepen. Hij zal misschien in staat zijn het gelezene te onthouden en later te gebruiken om nieuwe teksten te keuren, maar hij heeft niets begrepen van motiveringen en interpretaties. Men zal hem misschien met enige moeite wat creatief vermogen kunnen geven, maar hij zal daarbij niet geleid worden door ideeën uit de aanschouwingswereld, en evenmin door smaak of gevoel voor waarde'.

En ook de volgende passage is behartigenswaard :

'Ook nog in een ander opzicht kan men zeggen dat volledig geformaliseerde wiskunde een beperking inhoudt. Herhaaldelijk doet het zich voor dat wiskundigen die in een bepaalde taal redeneringen houden, uitspraken gaan doen over de wijze waarop zulke redeneringen in die taal worden uitgedrukt; daarmee komen ze tot resultaten die in de oorspronkelijke taal niet, of minder gemakkelijk konden worden verkregen. Het spreken *over* een taal kan niet in die taal zèlf geschieden, maar in een z.g. *metataal*.

Vaak zullen de uitspraken in de metataal erg lijken op uitspraken in de taal zèlf; dan is bijzondere oplettendheid geboden, want men mag ze niet met elkaar verwarren. Verschillende 'paradoxen' kunnen daaraan worden toegeschreven'.

4. De realisering en de waarde van Automath.

Wat is er nu concreet gebeurd ?
De Bruijn heeft om te beginnen de Automath-taal ontworpen, een taal die buitengewoon zuinig en efficiënt is. Sommige van de ideeën die hij daarbij omstreeks 1970 ontwikkelde, worden pas op dit moment ten volle op hun waarde geschat.
Zo bedacht De Bruijn bijvoorbeeld, dat wiskundige objecten en wiskundige bewijzen, hoe verschillend ook, gemeenschappelijke trekken hebben. Een bewijs is bij De Bruijn niet een redenering óver een stukje wiskundige tekst, uit de metataal dus, maar een object uit de taal zelf. Een bewijs is in Automath een wiskundige formule geworden, die net zo te behandelen is als alle andere formules.
De drang om het Automath-systeem zo algemeen mogelijk op te zetten, leidde tot een grote eenvoud in het uiteindelijke ontwerp. Onderstellingen, conclusies, definities en de introductie van nieuwe variabelen passen allemaal in één weloverwogen patroon. De taal Automath is uiterst formeel, maar niet ingewikkeld. Bovendien laat de taal een grote vrijheid aan de gebruiker. Wie in Automath wil schrijven, kan zelfs zijn eigen logica kiezen. Sommige logici hebben bijvoorbeeld twijfels over het principe van het uitgesloten derde, dat inhoudt dat altijd iets òf zijn tegendeel waar is. Anderen willen niet met het keuzeaxioma werken, een wiskundig nogal verreikend stuk gereedschap dat weliswaar geen rampen kan veroorzaken, maar er voor sommigen toch verdacht uitziet. De Bruijn kan hen allemaal op hun wenken bedienen.
De taal Automath, met een serie varianten, is in de periode 1970-1978 beproefd op vele gebieden van de wiskunde, van makkelijk tot moeilijk en van theoretisch tot praktisch. De Bruijn kreeg hulp van een aantal medewerkers, die bij elkaar een dertigtal manjaren werk leverden, voor een groot deel gefinancierd door Z.W.O. Afgeleverd werden uiteindelijk een groot computerprogramma, drie dissertaties en bijna honderd artikelen en rapporten. Bovendien waren er nog een stuk of 40 voordrachten op congressen, en cursussen in onder meer Montreal en Pasadena, door De Bruijn zelf verzorgd.
De conclusie is geweest, dat de twintigsteëeuwse wiskunde er goed in beschreven kan worden.

Een uitgebreid computerprogramma van 30.004 regels, om precies te zijn, zorgt ervoor, dat een tekst in Automath ook werkelijk geverifieerd wordt. Daarnaast is onderzoek gedaan over de theorie van Automath, om te zien in hoeverre die taal beantwoordt aan de verwachtingen. Ook op dat gebied bleek Automath aan de eisen te voldoen.

De computer heeft een belangrijke bijdrage geleverd. Want hoe eenvoudig de taal Automath ook is - als wiskundige teksten helemaal volledig en precies gemaakt worden, dan is daar een gigantische hoeveelheid administratie bij nodig. Mensen kunnen dat niet meer aan, computers gelukkig wel. Bovendien is de computer razendsnel, zodat een Automath-gebruiker kan wachten op het antwoord: goed of fout.

Wetenschappelijk gesproken heeft het project Automath veel nieuwe gezichtspunten geleverd. Ik had het eerder al over de verregaande vereenvoudigingen van de wiskundige begrippenwereld. Stellingen met bewijzen, veronderstellingen, axioma's en definities worden globaal gesproken op dezelfde manier behandeld. Daarnaast is Automath in zekere zin normstellend gebleken: wat zich in Automath laat uitdrukken is aanvaardbare wiskunde, wat de rest betreft moeten we dat nog maar afwachten.

Ook het onderscheid tussen taal en metataal komt heel helder naar voren bij het formuleren in Automath. Wat in Automath komt, is taal; wat daarbuiten blijft is in het algemeen metataal. Vermenging van die twee, wat uiteindelijk tot paradoxen kan leiden, is met behulp van zo een Automath-systeem onmogelijk.

5. De wiskundige taal.

Tenslotte wil ik nog één onderwerp vermelden waarop Automath invloed heeft gehad, namelijk dat van de gangbare wiskundige taal, zoals we die in boeken en tijdschriften aantreffen die over wiskunde gaan. Doordat Automath als een soort standaard kan fungeren, zijn hier vele zaken duidelijk geworden, wat onder meer voor de didaktiek van de wiskunde zijn vruchten kan afwerpen.

Het was bijvoorbeeld noodzakelijk om de structuur van wiskundige formules, bewijzen en redeneringen te onderzoeken, voordat die in Automath vertaald konden worden. Daarbij kwam ook de rol van variabelen helder aan het licht. En bepaalde taalcategorieën, algemeen gebruikt in de wiskunde, kregen een eigen plaats.

Wat is bijvoorbeeld 'een driehoek' ? We zeggen in de wiskunde: 'Laat ABC een driehoek zijn'. Maar wat bedoelen we dan ? Wat weten we van dat object ABC ? Het enige dat we kunnen zeggen is, dat ABC de gemeenschappelijke eigenschappen van alle driehoeken heeft. Bijvoorbeeld: dat hij drie hoeken heeft, die samen 180 graden zijn.

Maar geen enkele specifieke eigenschap geldt voor ABC, zolang we dat er niet uitdrukkelijk bijzeggen. Kortom: ABC is een 'willekeurige' driehoek, die verre van concreet is, alleen een gedachtenspinsel, nuttig voor bepaalde algemene redeneringen.
En wat vindt u van: 'Stel x groter dan 10' ? Welk getal x bedoelt u daarmee ? Twaalf ? Maar dan hoeft u niets meer te stellen. Zeven dan ? Dan levert u meteen een tegenspraak, als u x groter dan 10 stelt. Kortom, ook hier is weer een willekeurig object bedoeld, net als bij die ABC van daarnet.
Op deze manier voortdenkend en voortbouwend op de ideeën van Automath, is De Bruijn in staat gebleken om een belangrijk deel van de wiskundige taal in een net, overzichtelijk kader te plaatsen. Dat hij het ook hierbij niet kon laten om voor verrassingen te zorgen, zal u duidelijk zijn. Zo gaf hij in zijn bijbehorende college het volgende puzzeltje op: 'A en B verdelen honderd gulden zo eerlijk mogelijk. Hoeveel krijgt A' ? Het voor de hand liggende antwoord: '50 gulden' kreeg van De Bruijn de volgende kanttekening: 'Het antwoord is inderdaad '50 gulden' als A en B verschillend zijn. Maar als A gelijk is aan B, krijgt A honderd gulden'!
Spijkers op laag water ? Niet voor een wiskundige, die dit soort zaken uit zijn dagelijkse praktijk herkent. Voor hem kan er de juistheid van een bewijs van afhangen, en daarom wordt hij wel gedwongen om voorzichtig te zijn ook op die gebieden, waar een ander zijn schouders voor ophaalt.
Maar met voorzichtigheid en nauwkeurigheid alléén bereik je geen resultaten in de wiskunde. Dat heeft De Bruijn wel aangetoond met zijn Automath-project. Want hoe precies en hoe formeel die taal ook is, zonder de brede visie, de creatieve geest en de onvermoeide arbeid van zijn ontwerper was het project nooit van de grond gekomen.
We kunnen ons gelukkig prijzen dat we in Nederland in de persoon van De Bruijn een geleerde hebben van zo groot formaat, die zich intensief en hartstochtelijk heeft ingezet voor deze unieke wetenschappelijke opgave, nuttig voor de logica, de wiskunde, de informatica en ook nog een beetje voor de taalwetenschap.
Met deze constatering wil ik mijn voordracht over Automath besluiten.

o-o-o