

Een notitie bij vraagstuk 370

Citation for published version (APA):

Meiden, van der, W. (1975). *Een notitie bij vraagstuk 370: (N.w. Arch. v. Wis. (3) 22(1) maart 1974, p. 81, en idem (3) nov. 1974, p. 277-278)*. (Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum; Vol. 7505). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1975

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

696539

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1975-05

mei 1975

Een notitie bij vraagstuk 370

(N.w. Arch. v. Wis. (3) 22(1) maart 1974, p. 81,
en idem (3) nov. 1974, p. 277-278)

door

W. van der Meiden

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

370. Zij K een gesloten convexe kromme in het platte vlak, met continue kromming k , en zij overal $k \leq 1$. Zij C een cirkel met straal 1 die K van binnen raakt. Dan ligt C geheel binnen K . Bewijs dit. (J.W. Nienhuys)

Oplossing.

We noemen een convexe gesloten kromme met continue kromming een toegelaten kromme. Zij Γ een toegelaten kromme, $X \in \Gamma$, de kromming in X zij $k(X) \geq 0$, het Frenettweebest in X zij $(\underline{n}(X), \underline{t}(X))$ met naar buiten wijzende \underline{n} en positief georiënteerd, zodat $\underline{t}' = -k\underline{n}$ en $\underline{n}' = k\underline{t}$ (differentiatie naar de booglengte s van Γ). k heeft een positief maximum op Γ zodat

$$\rho(\Gamma) := (\max_{X \in \Gamma} k(X))^{-1} = \min_{X \in \Gamma} k(X)^{-1} > 0.$$

Definitie. $\Gamma_p := \{X + p\underline{n}(X) \mid X \in \Gamma\}$ voor $p \geq -\rho(\Gamma)$.

Als Γ een cirkel is met straal R dan is $\rho(\Gamma) = R$ en Γ_p is een met Γ concentrische cirkel met straal $p + R$; dit leidt ertoe ook een punt M op te vatten als een toegelaten kromme, met $\rho(M) = 0$.

Lemma 1. Als Γ een toegelaten kromme is dan is Γ_p een convexe gesloten kromme. Als bovendien Γ een punt is of als $p > -\rho(\Gamma)$ dan is Γ_p een toegelaten kromme met $\rho(\Gamma_p) = p + \rho(\Gamma)$; in dit geval is $(\Gamma_p)_{-p} = \Gamma$.

Bij een convexe gesloten kromme Γ zij $\eta(\Gamma)$ het convex omhulsel van Γ , dat is precies Γ verenigd met zijn binnengebied.

Lemma 2. Voor een punt M , een toegelaten kromme Γ en $p > 0$ geldt: als $M \in \eta(\Gamma)$ dan is $M_p \subset \eta(\Gamma_p)$.

Beschouw nu de kromme K van vraagstuk 370. $\rho(K) \geq 1$. Zij $N \in K$ en zij $M(p)$ het middelpunt van de cirkel $C(p)$ met straal p ($0 < p < 1$) die K in N inwendig raakt. Dan is $M(p) \in \Gamma_{-p}$ zodat

$$C(p) = M(p)_p \subset \eta((\Gamma_{-p})_p) = \eta(\Gamma).$$

Dit geldt voor alle $p < 1$ zodat, daar $\eta(\Gamma)$ gesloten is, ook

$$C(1) = \text{afsluiting van } \bigcup_{0 < p < 1} C(p) \subset \eta(\Gamma) .$$

Appendix.

Bewijs van lemma 1. Als Γ één punt is, is de bewering triviaal. Zij Γ dus niet

één punt. Voor Γ_p is $Y = X + p\underline{n}$ ($X \in \Gamma$) zodat

$$Y' = x' + pk\underline{t} = (1 + pk)\underline{t}.$$

Voor $p < 0$ volgt uit $k \leq \rho(\Gamma)^{-1}$ dat $1 + pk \geq 1 + p\rho(\Gamma)^{-1} \geq 0$ (als $p > -\rho(\Gamma)$ geldt zelfs $1 + pk > 0$), hetgeen voor $p \geq 0$ vanzelfsprekend is. Γ_p bestaat dan uit convexe bogen en is convex (en gesloten).

Als $p > -\rho(\Gamma)$ dan is op Γ_p de booglengte

$$s^* = \int_0^s (1 + pk(\sigma)) d\sigma$$

een differentieerbare stijgende functie, waarvan ook de inverse deze eigenschap heeft. Uit

$$\frac{dx}{ds^*} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = (1 + pk)^{-1} \underline{x}'$$

volgt

$$\frac{dt}{ds^*} = -\frac{k}{1 + pk} \underline{n} \quad \text{en} \quad \frac{dn}{ds} = \frac{k}{1 + pk} \underline{t}$$

zodat Γ_p toegelaten is met kromming $k^* = \frac{k}{1 + pk} = \frac{1}{p + k^{-1}}$ en

$$\rho(\Gamma_p) = \min_{Y \in \Gamma_p} k^*(Y)^{-1} = \min_{X \in \Gamma} \{p + k(X)^{-1}\} = p + \rho(\Gamma).$$

De laatste uitspraak, $(\Gamma_p)_{-p} = \Gamma$, is nu vanzelfsprekend.

Bewijs van lemma 2. Dat $M \in n(\Gamma)$ betekent dat voor ieder punt $X \in \Gamma$ in de ontbinding

$$X - M = h(X)\underline{n}(X) + g(X)\underline{t}(X)$$

geldt

$$h(X) \geq 0,$$

zodat (met $p > 0$),

$$Y - M = X + p\underline{n} - M = (h + p)\underline{n} + g\underline{t}$$

en

$$|Y - M|^2 = (h + p)^2 + g^2 = h^2 + g^2 + 2hp + p^2 \geq p^2 ,$$

waaruit

$$M_p \subset \eta(\Gamma_p) .$$