Een notitie bij vraagstuk 370

69653q

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1975-05

mei 1975

Een notitie bij vraagstuk 370

(N.w. Arch. v. Wis. (3) 22(1) maart 1974, p. 81,
en idem (3) nov. 1974, p. 277-278)

door

W. van der Meiden

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

370. *Zij* K *een gesloten convexe kromme in het platte vlak, met continue kromming* k, *en zij overal* $k \leq 1$. *Zij* C *een cirkel met straal* 1 *die* K *van binnen raakt. Dan ligt* C *geheel binnen* K. *Bewijs dit.* *(J.W. Nienhuys)*

Oplossing.

We noemen een convexe gesloten kromme met continue kromming een toegelaten kromme. Zij Γ een toegelaten kromme, $X \in \Gamma$, de kromming in X zij $k(X) \geq 0$, het Frenettweebeen in X zij $(\underline{n}(X), \underline{t}(X))$ met naar buiten wijzende $\underline{n}$ en positief georienteerd, zodat $\underline{t}' = -k\underline{n}$ en $\underline{n}' = k\underline{t}$ (differentiatie naar de booglengte s van Γ). k heeft een positief maximum op Γ zodat

$$\rho(\Gamma) := (\max_{X\in\Gamma} k(X))^{-1} = \min_{X\in\Gamma} k(X)^{-1} > 0 .$$

Definitie. $\Gamma_p := \{X + p\underline{n}(X) \mid X \in \Gamma\}$ voor $p \geq -\rho(\Gamma)$.

Als Γ een cirkel is met straal R dan is $\rho(\Gamma) = R$ en Γ_p is een met Γ concentrische cirkel met straal p + R; dit leidt ertoe ook een punt M op te vatten als een toegelaten kromme, met $\rho(M) = 0$.

Lemma 1. Als Γ een toegelaten kromme is dan is Γ_p een convexe gesloten kromme. Als bovendien Γ een punt is of als $p > -\rho(\Gamma)$ dan is Γ_p een toegelaten kromme met $\rho(\Gamma_p) = p + \rho(\Gamma)$; in dit geval is $(\Gamma_p)_{-p} = \Gamma$.

Bij een convexe gesloten kromme Γ zij $\eta(\Gamma)$ het convex omhulsel van Γ, dat is precies Γ verenigd met zijn binnengebied.

Lemma 2. Voor een punt M, een toegelaten kromme Γ en $p > 0$ geldt: als $M \in \eta(\Gamma)$ dan is $M_p \subset \eta(\Gamma_p)$.

Beschouw nu de kromme K van vraagstuk 370. $\rho(K) \geq 1$. Zij $N \in K$ en zij M(p) het middelpunt van de cirkel C(p) met straal p ($0 < p < 1$) die K in N inwendig raakt. Dan is $M(p) \in \Gamma_{-p}$ zodat

$$C(p) = M(p)_p \subset \eta((\Gamma_{-p})_p) = \eta(\Gamma) .$$

Dit geldt voor alle $p < 1$ zodat, daar $\eta(\Gamma)$ gesloten is, ook

$$C(1) = \text{afsluiting van } \bigcup_{0<p<1} C(p) \subset \eta(\Gamma) .$$

Appendix.

Bewijs van lemma 1. Als Γ één punt is, is de bewering triviaal. Zij Γ dus niet één punt. Voor Γ_p is $Y = X + p\underline{n}$ $(X \in \Gamma)$ zodat

$$Y' = x' + pk\underline{t} = (1 + pk)\underline{t} \, .$$

Voor $p < 0$ volgt uit $k \leq \rho(\Gamma)^{-1}$ dat $1 + pk \geq 1 + p\rho(\Gamma)^{-1} \geq 0$ (als $p > -\rho(\Gamma)$ geldt zelfs $1 + pk > 0$), hetgeen voor $p \geq 0$ vanzelfsprekend is. Γ_p bestaat dan uit convexe bogen en is convex (en gesloten).
Als $p > -\rho(\Gamma)$ dan is op Γ_p de booglengte

$$s^* = \int_0^s (1 + pk(\sigma))\,d\sigma$$

een differentieerbare stijgende functie, waarvan ook de inverse deze eigenschap heeft. Uit

$$\frac{d\underline{x}}{ds^*} = \frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = (1 + pk)^{-1}\underline{x}'$$

volgt

$$\frac{d\underline{t}}{ds^*} = -\frac{k}{1 + pk}\underline{n} \quad \text{en} \quad \frac{d\underline{n}}{ds} = \frac{k}{1 + pk}\underline{t}$$

zodat Γ_p toegelaten is met kromming $k^* = \dfrac{k}{1 + pk} = \dfrac{1}{p + k^{-1}}$ en

$$\rho(\Gamma_p) = \min_{Y \in \Gamma_p} k^*(Y)^{-1} = \min_{X \in \Gamma} \{p + k(X)^{-1}\} = p + \rho(\Gamma) \, .$$

De laatste uitspraak, $(\Gamma_p)_{-p} = \Gamma$, is nu vanzelfsprekend.

Bewijs van lemma 2. Dat $M \in \eta(\Gamma)$ betekent dat voor ieder punt $X \in \Gamma$ in de ontbinding

$$X - M = h(X)\underline{n}(X) + g(X)\underline{t}(X)$$

geldt

$$h(X) \geq 0 \, ,$$

zodat (met $p > 0$),

$$Y - M = X + p\underline{n} - M = (h + p)\underline{n} + g\underline{t}$$

en

$$|Y - M|^2 = (h + p)^2 + g^2 = h^2 + g^2 + 2hp + p^2 \geq p^2 ,$$

waaruit

$$M_p \subset \eta(\Gamma_p) .$$