

Modelreductie met behulp van phase matching

Citation for published version (APA):

Tieland, J. M. (1992). *Modelreductie met behulp van phase matching*. (DCT rapporten; Vol. 1992.003). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

**Modelreductie met behulp van
phase matching**
WFW rapport 92.003

J.M. Tieland
Jan 1992

Inhoudsopgave

Samenvatting	1
Symbolenlijst	2
Inleiding	4
1. Het SISO-geval	6
2. De Grammian	10
3. Hankel singuliere waarden	14
4. Wiener Hopf factorisatie	15
5. Factorisatie van het spectrum	15
6. All pass matrices	17
7. Phase matching paradigma	20
8. Balanced stochastic truncation	24
9. One step Hankelnorm benadering	26
10. Relative error methode	28
11. Voorbeelden	33
Conclusie	36
Literatuurlijst	37
Bijlagen	38

Samenvatting

Dit stageverslag behandelt de modelreductiemethode phase matching. Het blijkt een zeer algemene methode te zijn om de orde van een overdrachtsfunctie te verlagen. In tegenstelling tot andere reductiemethoden wordt in plaats van de amplitude de fase van het systeem benadert.

De inhoud van het verslag is in een aantal delen op te splitsen. Allereerst wordt de reductiemethode besproken aan de hand van het SISO-geval. Daaruit blijkt dat er een aantal knelpunten zijn die uitbreiding naar het MIMO-geval verhinderen. Om tot een phase matching algoritme te komen dat bruikbaar is in een MIMO-situatie worden er vervolgens een aantal wiskundige definities en stellingen behandeld. Gewapend met dit gereedschap is het mogelijk om ook voor het MIMO-geval phase matching te definiëren. Het blijkt dat een aantal in de literatuur voorgestelde algoritmen op te vatten zijn als phase matching. Dit wordt in het laatste deel besproken. Het prettige van phase matching is dat onder- en bovengrenzen bepaald kunnen worden voor de fout die geïntroduceerd wordt. Hierdoor kan er op voorhand een uitspraak gedaan worden over de nauwkeurigheid. Aan de afleiding van die grenzen wordt in dit verslag echter geen aandacht besteed.

Symbolenlijst

Begrippen

All-pass	Een $p \times p$ matrix E is all-pass als deze voldoet aan de relatie $EE^* = I$.
Spectrum	Een $p \times p$ matrix functie Φ is een spectrum als $\Phi = \Phi^*$; $\Phi(s) \geq 0$, $s \in \Pi_+ \cap \Pi_-$.
Proper	Een overdrachtsfunctie is proper als het aantal polen groter of gelijk is aan het aantal nulpunten.
Biproper	Het aantal polen van een overdrachtsfunctie is gelijk aan het aantal nulpunten.
Strictly proper	In dit geval is het aantal polen van de overdrachtsfunctie groter dan het aantal nulpunten.
McMillan degree	De dimensie van de toestandsvector x .
Min	Minimum fase. Alle nulpunten van het systeem liggen in het linker halfvlak.
Nmf	Niet minimum fase. Het systeem heeft nulpunten die in het rechter halfvlak liggen.
Siso	Single input single output.
Mimo	Multiple input multiple output.
Minimaal	Een minimale realisatie is zodanig geconstrueerd dat er in de toestandsbeschrijving geen toestanden meegenomen worden die niet nodig zijn om het probleem te beschrijven.
Analytisch	Een analytische functie is een functie die gerepresenteerd kan worden door een convergente Taylor reeks.
Rationeel	Een rationale functie is een functie die het quotiënt is van polynomen.

Ruimtes

\mathbb{R}, \mathbb{C}	Reële/complexen getallen.
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	n -dimensionale reële/complexen ruimten.
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Ruimte van $n \times m$ reële/complexen matrices.
$L_2(-\infty, \infty)$	Lebesgue ruimte, deze bevat alle functies $x(t)$

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ waarbij voldaan wordt aan:

$$\|x\|_{L_2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Π_+	Rechter halfvlak in het s-domein ($\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$).
Π_-	Linker halfvlak in het s-domein ($\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) < 0\}$).
H_∞	Ruimte van matrixfuncties die begrensd zijn in Π_+ .
H_∞^-	Ruimte van matrixfuncties die begrensd zijn in Π_- .
H_∞^0	Ruimte van strictly proper functies in H_∞ .
RH_∞	Ruimte van rationale functies in H_∞ .

Symbolen

A^T	Getransponeerde van matrix A.
A^{-1}	Inverse van matrix A.
$A^*(s)$	Complex geconjugeerde transponent van matrix A.
$\lambda_i(A)$	i^{de} eigenwaarde van matrix A.
$\Phi(s), \varphi(s)$	Power spectrum.
$V(S)$	Linker spectrale factor.
$W(S)$	Rechter spectrale factor.
$f(s), F(s)$	Fase functie/matrix.
F_+	Het stabiele deel van de fase matrix F.
t_0	Begintijdstip.
t_e	Eindtijdstip.
$\Phi(t_0, t_e)$	Overgangsmatrix van $t = t_0$ naar $t = t_e$.
$G(s)$	Overdrachtsfunctie
$u(t)$	Ingangssignaal.
$x(t)$	Toestandsvector.
σ	(Hankel) singuliere waarde.
$\bar{\sigma}$	Grootste singuliere waarde.
$\underline{\sigma}$	Kleinste singuliere waarde.
$\ \cdot\ _2$	Twee norm.
$\ \cdot\ _\infty$	Oneindig norm.
$\ \cdot\ _H$	Hankel norm.

Inleiding

Voor veel dynamische systemen kunnen lineaire toestandsvergelijkingen opgesteld worden om het gedrag ervan te modelleren. Vaak is het noodzakelijk deze te vervangen door modellen van lagere orde zonder een al te grote fout te introduceren. De redenen om van een gereduceerd model uit te gaan kunnen zoal zijn:

- * Het verbeteren van de efficiëntie en numerieke betrouwbaarheid.
- * Het verkrijgen van een eenvoudigere regelaar. Als het model minder complex is kan de bijbehorende regelaar ook simpeler worden uitgevoerd. Dit resulteert in een snellere en wellicht nauwkeurigere regelaar.
- * Het verwijderen van niet-minimaliteiten die in een model kunnen optreden doordat dit samengesteld is uit modellen van verschillende componenten.

Modelreductie is dus het vinden van een lagere orde model met behoud van essentiële informatie. Tijdens de reductie moet er een afweging plaatsvinden tussen de orde van het gereduceerde model en de mate waarin dit model het oorspronkelijke model nog beschrijft. Wil men de essentiële informatie behouden dan kan men op twee manieren gaan reduceren namelijk:

- * Ad hoc. De essentiële informatie uit het oorspronkelijke model wordt omschreven en wordt vervolgens gebruikt als criterium om het model te reduceren. Er wordt een afweging gemaakt tussen reductie en informatieverlies. Dit levert een niet algemeen toepasbaar modelreductie-algoritme op.
- * Systematisch. Op deze manier kan in principe elk willekeurig model gereduceerd worden. De methoden zijn gebaseerd op begrippen uit de systeem- en functietheorie. De kracht van deze aanpak berust op een theoretische basis die het mogelijk maakt (sub)optimale oplossingen te bepalen met een begrenzing van de te verwachten fout tussen de frequentieresponsie van het originele en het gereduceerde model. Bij systematische methoden moet men bijvoorbeeld denken aan balanced realization of one step/optimal Hankelnorm approximation.

Beoordeling van de reductie vindt plaats door de een of andere norm van het foutstelsel te bepalen, met andere woorden van het verschil tussen het originele model en het gereduceerde model. Meestal wil men dat dit verschil in de een of andere norm zo klein mogelijk is.

Twee ontwikkelingen, die de status van systematische modelreductie sterk veranderd hebben, zijn de theorieën achter balanced realization en optimal Hankelnorm approximation. Voor deze methoden worden in de theorie grenzen afgeleid waaraan de fout voldoet. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen upper-bounds (bovengrenzen) en lower-bounds (ondergrenzen). Met deze grenzen is het mogelijk om op voorhand uitspraken te doen over de nauwkeurigheid. De error-bounds zijn uitgedrukt als L^∞ normen, dit omdat op die manier de 'worst case' beschouwd wordt (de hoogste piek). Een systematische methode, die in dit verslag nader wordt bekeken, is phase matching. Het onderzoek is nog steeds in volle gang en volgens verschillende auteurs zal het belang van modelreductie in de loop der tijd alleen maar toenemen.

1. Het SISO-geval

De omschrijving van het phase matching algoritme voor het SISO-geval is ontwikkeld door Jonckheere en anderen [10,11]. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat een stochastisch proces wordt gekarakteriseerd door zijn powerspectrum $\varphi(s)$. Dit is de fourier-getransformeerde van de autocorrelatie. Aangezien de autocorrelatie mede afhankelijk is van het ingangssignaal kan de autocorrelatie, en dus het powerspectrum, alleen een karakteristieke maat zijn voor een systeem als het ingangssignaal $u(t)$ hierop geen invloed heeft. Deze invloed valt weg als het ingangssignaal witte ruis is, wat als volgt duidelijk gemaakt kan worden. In het collegedictaat regelen 1 (formule 7.34) wordt er voor de autocorrelatie van $y(t)$ afgeleid:

$$R_{yy}(\tau) = R_{uu}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

Wordt het systeem nu geëxciteerd met witte ruis dat een gemiddelde $\mu=0$ heeft dan wordt de autocorrelatie R_{uu} gegeven door:

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= a\delta(\tau) \\ R_{uu}(\tau) * h(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\sigma) h(\tau - \sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a\delta(\sigma) h(\tau - \sigma) d\sigma \\ &= ah(\tau) \end{aligned}$$

$$R_{yy}(\tau) = ah(\tau) * h(-\tau)$$

De autocorrelatie R_{yy} is, bij het exciteren met witte ruis, een karakteristieke maat van het systeem die afhankelijk is van de intensiteit van de ruis, op te vatten als een constante, en de impulsresponsie. Het powerspectrum $\varphi(s)$ laat de volgende factorisatie toe:

$$\varphi(s) = v(s)v(s)^*$$

waarbij $\varphi(s)$ wordt vastgelegd door de stabiele minimum fase overdrachtsfunctie $v(s)$ die aangeduid wordt als de spectrale factor. Om het algoritme te kunnen bespreken worden er een aantal aannamen gedaan:

- * $\varphi(s)$ is strictly proper.
- * $\varphi(s)$ bezit geen nulpunten op de $j\omega$ -as.
- * We beschouwen alleen spectrale factoren $v(s)$ van $\varphi(s)$ die analytisch zijn in Π_+ en nonzero in $\text{Re}(s) \geq 0$.

$V(s)$ kan gereduceerd worden door gebruik te maken van modelreductie-methoden wat $\tilde{v}(s)$ oplevert. Er is echter geen garantie dat $\tilde{v}(s)$ een stabiele, minimum-fase functie is waarmee een benaderd spectrum bepaald kan worden. Bij het benaderen van stabiele scalaire minimum-fase overdrachtsfuncties is phase matching aantrekkelijk omdat kennis van de fase de overdrachtsfunctie op een constante na vastlegt. Als de fase functie van twee overdrachtsfuncties dicht bij elkaar liggen dan liggen de amplitude-karakteristieken ook dicht bij elkaar (mits er de juiste keuze gedaan wordt voor de constante schalingsfactor). De amplitude en fase van een stabiele minimum fase overdrachtsfunctie zijn aan elkaar te relateren met de amplitude-fase relatie van Bode [10].

Om tot een algoritme te komen waarmee de fase van een overdrachtsfunctie te benaderen is worden er eerst een aantal begrippen behandeld. Het eerste begrip dat nader omschreven moet worden is all-pass functie. $F(s)$ is een all-pass functie als voldaan wordt aan:

$$f(s)f(s)^* = I$$

In het scalaire geval kan de eenheidsmatrix vervangen worden door het getal één. De fase functie $f(s)$ wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$f(s) = \frac{v(s)}{v(-s)}$$

Met behulp van een voorbeeld kan duidelijk gemaakt worden waar de benaming fase functie vandaan komt. Een overdrachtsfunctie is een complex getal dat de amplitude-verhouding en de fase van een bepaald systeem vastlegt. $V(s)$ kan als volgt gedefinieerd worden ($s = j\omega$):

$$v(s) = re^{j\varphi}$$

$$v(-s) = re^{-j\varphi}$$

$$f(s) = \frac{re^{j\varphi}}{re^{-j\varphi}} = e^{2j\varphi}$$

$$f(s)f(s)^* = e^{2j\varphi}e^{-2j\varphi} = 1$$

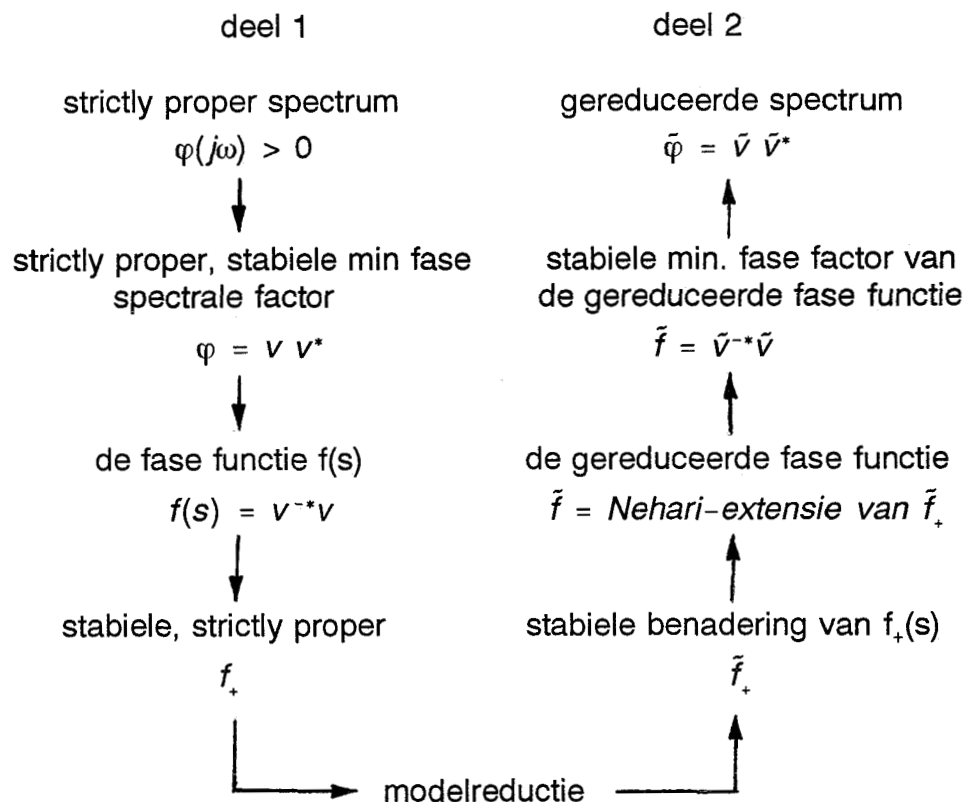
$F(s)$ is een overdrachtsfunctie waarvan de amplitude één is en de fase gelijk is aan twee maal de fase van $v(s)$. Een nadeel van deze definitie van de fase functie is dat nulpunten die op de $j\omega$ -as liggen vervallen. Dat blijkt duidelijk uit de volgende voorbeelden:

$$v(s) = \frac{s^2 + 1}{(s + 1)^2} \quad v(-s) = \frac{s^2 + 1}{(-s + 1)^2} \Rightarrow f(s) = \frac{(-s + 1)^2}{(s + 1)^2}$$

$$v(s) = \frac{1}{(s + 1)^2} \quad v(-s) = \frac{1}{(-s + 1)^2} \Rightarrow f(s) = \frac{(-s + 1)^2}{(s + 1)^2}$$

In dit geval is er, om het probleem te omzeilen, gesteld dat $\varphi(s)$ geen nulpunten bezit op de $j\omega$ -as. Later zal blijken dat een andere oplossing het expliciet bepalen van deze nulpunten is. Hiermee wordt dan vervolgens rekening gehouden tijdens de reductie. Het is nu mogelijk $f(s)$ te benaderen waaruit een benadering voor $v(s)$ bepaald kan worden. Hierbij komt een ander probleem boven water: de reductie methoden (balanced truncation, Hankelnorm benaderingen) kunnen alleen toegepast worden op stabiele overdrachtsfuncties. Alleen $f_+(s)$, het stabiele deel van $f(s)$, kan gereduceerd worden. De vraag is nu of het mogelijk is om $f(s)$ uit $f_+(s)$ te bepalen. Dit blijkt met Nehari-extensie te kunnen in het geval dat het spectrum $\varphi(s)$ strictly proper is [10]. Deze extensie is uniek en levert de fase $f(s)$ op als $f_+(s)$ bekend is. Al deze handelingen kunnen nu in het volgende schema samengevoegd worden:

Het scalaire algoritme



- 1:
 - * Bepaal de spectrale factor van het powerspectrum.
 - * Bepaal de fase functie.
 - * Neem het stabiel deel van de fase functie.
 - * Benader het stabiele deel van de fase functie met standaard modelreductiemethoden.

- 2:
 - * Bepaal uit \tilde{f}_+ de benaderde fase functie \tilde{f} .
 - * Bepaal de benaderde spectrale factor \tilde{v} .
 - * De benaderde spectrale factor is uniek op een constante factor na die als volgt bepaald kan worden, stel $\tilde{v}(0) = v(0)$.
Andere criteria zijn echter ook mogelijk.

Merk op dat deel 2 de inverse handeling van deel 1 is. Wordt er nu overwogen om de aanname $\varphi(\infty) = 0$ achterwege te laten ($\varphi(s)$ is dan niet strictly proper) dan kan $f_+(s)$ niet meer met behulp van Nehari-extensie gekoppeld worden aan $f(s)$. Deel 2 is dan niet meer het inverse proces van deel 1. Het probleem in het geval dat $\varphi(\infty) \neq 0$, en dus uitbreiding naar een algemeen toepasbaar algoritme, is de Nehari-extensie. Er moet een andere manier gezocht worden om $f_+(s)$ aan $f(s)$ te relateren, dat blijkt minimal all-pass extensie te zijn. Deze laatste extensie is de Nehari-extensie als $\|f_+\|_H = 1$. Aangezien Nehari-extensie geen algemeen gereedschap is wordt de wiskundige achtergrond achterwege gelaten.

Omwerken van het phase matching algoritme naar een multivariabel systeem levert ook een aantal moeilijkheden op:

- * Hoe definieer je de fase matrix.
- * En in tegenstelling tot het eendimensionale geval is in het meerdimensionale geval de extensie F van F_+ niet uniek.

Om deze problemen op te lossen wordt er in de volgende hoofdstukken eerst een aantal gereedschappen besproken die nodig zijn om tot een oplossing te komen.

2. De grammian

Met behulp van een grammian of gram-matrix kan worden nagegaan of een verzameling functies lineair onafhankelijk is.

Lineair onafhankelijk

Een verzameling functies $f_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ is lineair onafhankelijk op het tijdsinterval $[t_0, t_e]$ als:

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_e] \text{ inhoud dat } c_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Grammian

De grammian $G(t_0, t_e)$ van de complexe functies $f_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ wordt gegeven door:

$$G(t_0, t_e) = \int_{t_0}^{t_e} f(t) f^*(t) dt \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

De functies f_1, f_2, \dots, f_n zijn lineair onafhankelijk in het tijdsinterval $[t_0, t_e]$ als de bijbehorende grammian $G(t_0, t_e)$ regulier is. Dit kan bewezen worden door aan te tonen dat $\det[G(t_0, t_e)] = 0$ als en alleen als de functies lineair afhankelijk zijn. Uit de definitie van onafhankelijkheid volgt dat een stelsel functies lineair afhankelijk is als er een constante vector λ bestaat die voldoet aan:

$$\lambda^* f(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_e]$$

$$\lambda^* = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$$\lambda^* G(t_0, t_e) = \int_{t_0}^{t_e} \lambda^* f(t) f^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_e} 0 f^*(t) dt = 0$$

$\det[G(t_0, t_e)] = 0$ als de functies afhankelijk zijn. Een set complexe functies is lineair onafhankelijk op het tijdsinterval $[t_0, t_e]$ als en alleen als $\det[G(t_0, t_e)] \neq 0$. Als gevolg van de definitie bezit G de volgende eigenschappen:

- * G is hermitisch ($G^* = G$)
- * G is semi positief definit (eigenwaarden niet negatief)

Bij het regelen is het van belang om te weten of een gegeven systeem al dan niet de eigenschap heeft dat het vanuit een willekeurige begintoestand naar een willekeurige eindtoestand gestuurd kan worden.

Deze vraagstelling leidt tot het begrip regelbaarheid dat als volgt gedefinieerd wordt:

- * Een lineair constant systeem dat beschreven wordt door de toestandsbeschrijving $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ wordt volledig regelbaar genoemd als de toestand van het systeem vanuit de nultoestand $x(t_0) = 0$ naar iedere willekeurige eindtoestand $x(t_e)$ gestuurd kan worden in een eindige tijdsinterval $t_0 - t_e$. Onder sturing van het systeem wordt verstaan het aanbieden van een zeker ingangssignaal $u(t)$ in het tijdsinterval $t_0 - t_e$.

Uit de theorie van regelen 2 volgt dat:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad \Phi(t) = e^{At}$$

Dit systeem is regelbaar op het tijdsinterval $[t_0, t_e]$ als de rijen van de matrix $\Phi(t, \tau)B$ onafhankelijk zijn. Dat kunnen we nagaan met de volgende grammian:

$$G(t_0, t_e) = \int_{t_0}^{t_e} \Phi(t_e, \tau)BB^*\Phi^*(t_e, \tau) d\tau$$

De regelbaarheidsgrammian wordt nu gedefinieerd als:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} G(0, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{A(T-\tau)}BB^*e^{A^*(T-\tau)}d\tau \quad t = T-\tau \Rightarrow$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{At}BB^*e^{A^*t}dt$$

Met behulp van de onderstaande vergelijkingen kan de afgeleide van de regelbaarheidsgrammian bepaald worden.

$$P = \int_0^{\infty} \Phi(t)BB^*\Phi^*(t)dt$$

$$\Phi(t) = e^{At} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = Ae^{At}$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b I dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} I dt + I|_b \frac{db}{dt} - I|_a \frac{da}{dt}$$

$$\dot{P} = A \int_0^t \Phi(t, \tau) B B^* \Phi^*(t, \tau) d\tau + \int_0^t \Phi(t, \tau) B B^* \Phi^*(t, \tau) d\tau A^* + B B^*$$

$$\dot{P} = A P + P A^* + B B^*$$

Is A stabiel dan is $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P} = 0$ waardoor de Lyapunov vergelijking ontstaat waaraan P voldoet:

$$A P + P A^* + B B^* = 0$$

Bij reconstrueerbaarheid ga je na of uit het uitgangssignaal de toestand van het systeem gereconstrueerd kan worden. Nauwkeuriger geformuleerd gaat het om de vraag of uit het verloop in de tijd van de uitgang het verloop in de tijd van de toestand bepaald kan worden. Reconstrueerbaarheid houdt dus in dat de toestand op t_e bepaald kan worden uit het verloop van het uitgangssignaal over het voorgaande tijdsinterval.

De uitgangsrelatie wordt gegeven door:

$$y(t) = C \Phi(t, t_0) x(t_0) + C \int_0^t \Phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

Aangezien de gedwongen responsie (de termen die u bevatten) te berekenen is wordt de observeerbaarheid in het tijdsinterval $[t_0, t_e]$ bepaald door de matrix $\Phi(t_0, t_e) C$. Door de grammian van deze matrix te bepalen kan worden nagegaan of de kolommen van $\Phi(t_0, t_e) C$ onafhankelijk zijn.

$$G(t_0, t_e) = \int_{t_0}^{t_e} \Phi(t_e, \tau)^* C^* C \Phi(t_e, \tau) d\tau$$

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} G(0, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{A^* t} C^* C e^{A t} dt$$

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^* t} C^* C e^{A t} dt$$

Op dezelfde manier als bij de regelbaarheidsgrammian kan de Lyapunov vergelijking worden afgeleid waaraan Q moet voldoen. Deze luidt:

$$A^* Q + Q A + C^* C = 0$$

Het is mogelijk om een fysische interpretatie van de regelbaarheidsgrammian en de observeerbaarheidsgrammian te geven. Willen we een systeem in een toestand $x(t=0) = x_0$ brengen met minimale energie dan is dat equivalent met het minimaliseren van het volgende criterium:

$$\min J(u) = \int_{-\infty}^0 u^*(t)u(t)dt$$

De optimale u wordt nu gegeven door [6]:

$$\begin{aligned} u_{opt}(t) &= B^*e^{-A^*t}P^{-1}x_0 \\ \int_{-\infty}^0 u^*(t)u(t)dt &= \int_{-\infty}^0 x_0^*P^{-*}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}P^{-1}x_0dt \\ &= x_0^*P^{-*} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt \right]^* P^{-1}x_0 \\ &= x_0^*P^{-1}x_0 \end{aligned}$$

Als P^{-1} groot is dan zijn er sommige toestanden die alleen bereikt kunnen worden als er een grote input energie gebruikt wordt, het systeem is dan slecht regelbaar.

Laat men het systeem los uit de toestand $x(t_0) = x_0$ met $u(t) = 0 \quad t \geq 0$ dan volgt daaruit:

$$\begin{aligned} y(t) &= C\Phi(t,t_0)x_0 \\ \int_0^{\infty} y^*(t)y(t)dt &= \int_0^{\infty} x_0^*\Phi(t,t_0)C^*C\Phi(t,t_0)x_0dt \\ &= x_0^* \int_0^{\infty} e^{A^*t}C^*Ce^{At}dt x_0 \\ &= x_0^*Qx_0 \end{aligned}$$

Als Q bijna singulier is dan volgt daaruit dat sommige begincondities weinig invloed hebben op de uitgang, het systeem is dan slecht reconstrueerbaar.

3. Hankel singuliere waarden

Een realisatie (A,B,C,D) representeert het volgende lineair constante systeem:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

De overdracht $G(s)$ en de impulsresponsie van dit systeem worden gegeven door:

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ h(t) &= Ce^{At}B\end{aligned}$$

De Hankel operator wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$(\Gamma_G)u = \int_{-\infty}^0 h(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Het blijkt dat de Hankel-operator gelijk is aan de Hankel singuliere waarden. Deze singuliere waarden van een stabiele overdrachtsfunctie $G(s)$ van de orde n worden gedefinieerd als:

$$\begin{aligned}\sigma_i(G(s)) &= \sqrt{\lambda_i(PQ)} \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n-1} \geq \sigma_n \geq 0\end{aligned}$$

P en Q zijn de regelbaarheids en observeerbaarheidsgrammian van de realisatie, de gehele afleiding is in bijlage 1 uitgewerkt. De Hankel norm wordt nu gegeven door:

$$\|G(s)\|_H = \bar{\sigma}(\Gamma_G) = \sqrt{\lambda_{\max}(PQ)}$$

Reductie van het systeem is het achterwege laten van de kleinste singuliere waarden. Dit is hetzelfde als het verwaarlozen van de slecht regelbare en tevens slecht observeerbare toestanden.

4. Wiener Hopf factorisatie

Een $p \times p$ matrix functie $H \in RL_\infty$, zodanig dat $H(s)$ regulier is voor $s \in \Pi_+ \cap \Pi_-$, heeft een Wiener Hopf factorisatie. Dit houdt in dat H als volgt te schrijven is:

$$H = H_- D H_+$$

$$D(s) = \text{diag} \left[\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^{k_j} \quad j = 1, \dots, p \right]$$

$$H_+, H_+^{-1} \in RH_\infty$$

$$H_-, H_-^{-1} \in RH_\infty^-$$

$k_j, j = 1, \dots, p$ zijn integers die de partial indices van H genoemd worden.

5. Factorisatie van het spectrum

Als $\Phi(s)$ een spectrum is dan is de matrix functie $V(s)$ (resp. $W(s)$) de linker (resp. rechter) spectrale factor van $\Phi(s)$ als:

$$\Phi(s) = V(s)V(s)^* = W(s)^*W(s)$$

Definieer nu de minimale realisatie van $Z(s)$ als:

$$Z(s) = J + H(sI - A)^{-1}G$$

Alle linker spectrale factoren $V(s)$ van $\Phi(s) = Z(s) + Z(s)^*$ worden gegeven door:

$$V(s) = V_\infty + H(sI - A)^{-1}B$$

Waarbij $V_\infty, B, P = P^* > 0$ voldoen aan de positieve real vergelijking:

$$AP + PA^* + BB^* = 0$$

$$PH^* = G - BV_\infty^*$$

$$V_\infty V_\infty^* = J + J^*$$

Hoe deze relatie tot stand komt wordt in duidelijk gemaakt in bijlage 2. De matrix P ligt op een constante matrix U na vast ($UU^* = I$).

Alle rechter spectrale factoren worden nu gegeven door:

$$W(s) = W_{\infty} + C(sI - A)^{-1}G$$

Hierbij voldoen W_{∞} , C , $Q = Q^* > 0$ aan de dual positive real vergelijking:

$$QA + A^*Q + C^*C = 0$$

$$QG = H^* - C^*W_{\infty}$$

$$W_{\infty}^*W_{\infty} = J + J^*$$

De afleiding van dit resultaat verloopt op dezelfde wijze als de afleiding van de positive real vergelijking (vervang $V(s)$ door $W(s)$)

Er zijn meerdere oplossingen voor P en Q mogelijk waarbij:

$$\begin{aligned} P_{\min} &\leq P \leq P_{\max} \\ Q_{\min} &\leq Q \leq Q_{\max} \end{aligned}$$

P_{\min} en Q_{\min} zijn de minimale oplossingen voor P en Q , deze bezitten geen nulpunten in het vlak $\text{Re}(s) \geq 0$ (en zijn daarom minimum fase). P_{\max} en Q_{\max} zijn de maximale oplossingen, deze bezitten geen nulpunten in het vlak $\text{Re}(s) \leq 0$ (en zijn dus nmf). Een linker en rechter spectrale factor V, W wordt ordered genoemd als de bijbehorende matrices P en Q voldoen aan:

$$Q^{-1} - P \geq 0$$

Is er aan deze vergelijking voldaan dan blijkt het mogelijk te zijn een toestandstransformatie op Z, V, W uit te voeren zodanig dat:

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}(\sigma_i) \quad \sigma_i \leq 1$$

De dan verkregen realisatie noemt men de balanced stochastic realization [9].

6. All-pass matrices

Hoe definiëren we nu in het matrix geval de fase functie. H. Akaike heeft dit uitgezocht en aangetoond dat de matrix functie $F(s) = W^{-*}(s)V(s)$ de geschikte keuze is. Dat deze functie all-pass is kan als volgt worden aangetoond:

$$\begin{aligned} FF^* &= W^{-*}V V^*W^{-1} = I \Rightarrow \\ VV^* &= W^*W \end{aligned}$$

Een ander begrip dat nog niet gedefinieerd is is minimal all-pass matrix. Als E een all-pass matrix is dan bezit deze n_1 stabiele en n_2 instabiele polen en r singuliere waarden gelijk aan 1. Er kan aangetoond worden dat de volgende relatie geldt [6]:

$$n_2 \geq n_1 - r$$

Op het moment dat $n_2 = n_1 - r$ noemen we de matrix E een minimal all-pass matrix. De voornaamste eigenschappen van de all-pass fase matrix zijn extensie en factorisatie. Je wilt er voor zorgen dat deel 2 de inverse is van deel 1. In dit gedeelte wordt aangegeven onder welke omstandigheden factorisatie en extensie mogelijk zijn.

Stelling 1

$E(s)$ is een $p \times p$ rationale all-pass matrix met partial indices k_j $j = 1, \dots, p$.

- * Er bestaat een $V, W \in RH_\infty$ zodanig dat $E = W^{-*}V$, als en allen als $k_j \geq 0$ $j = 1, \dots, p$.
- * $k_j \geq 0$ $j = 1, \dots, p$, dan bestaat er een $V, W \in RH_\infty$ die voldoet aan $E = W^{-*}V$ zodanig dat $V(s)$ en $W(s)$ regulier zijn $\text{Re}(s) \geq 0$.
- * Er bestaat $V, W \in RH_\infty$ die regulier is in Π_+ als en alleen als $k_j = 0$ $j = 1, \dots, p$. In dit geval zijn alle mogelijke V, W regulier in Π_+ .

Stelling 2

$E(s)$ is een $p \times p$ rationale all-pass matrix met partial indices $k_j \geq 0$.

$$E = W_1^{-*} V_1$$

$$E = W_2^{-*} V_2$$

$$V_2 = K V_1$$

$$W_2 = W_1 K^*$$

K = constante reguliere matrix

Er kan aangetoond worden dat een all-pass matrix niet negatieve partial indices heeft als en alleen als het een minimal all-pass matrix is [6]. Het resultaat geeft aan hoe we een minimal all-pass matrix kunnen construeren uit een stabiele overdrachtsfunctie.

stelling 3

$G(s) \in RH_\infty^0$ een $p \times p$ matrix, McMillan degree n en $\|G\|_H \leq 1$.

(A,B,C) is de minimale gebalanceerde realisatie van G met regelbaarheids- en observeerbaarheidsgrammian Σ zodanig dat:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0$$

$$A^*\Sigma + \Sigma A + C^*C = 0$$

$$\Sigma = \text{diag}(I_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n) \quad 0 < \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_{r+1} < 1$$

$$\Sigma = \text{diag}(I_r, \Sigma_2)$$

$R \geq 0$, I_r is een $r \times r$ eenheidsmatrix. Partitioneer (A,B,C) conform Σ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

$E(s)$ is all-pass, heeft niet negatieve partial indices ($k_j \geq 0$) en $E_+(s) = G(s)$ als en alleen als:

$$E(s) = U + C(sI - A)^{-1} B - \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B}$$

$$UU^* = I$$

$$C_1^* U + B_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \Gamma^{-1}(A_{22}^* + \Sigma_2 A_{22} \Sigma_2 - C_2^* U B_2^*) \\ \hat{B} &= \Gamma^{-1}(\Sigma_2 B_2 + C_2^* U) \\ \hat{C} &= C_2 \Sigma_2 + U B_2^* \\ \Gamma &= \Sigma_2^2 - I\end{aligned}$$

$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ is minimaal, $-\hat{A}$ asymptotisch stabiel.

stelling 4

V, W zijn analytisch in Π_+ en voldoen aan $E = W^{-1}V$ als en alleen als:

$$\begin{aligned}V(s) &= V_\infty + H(sI - A)^{-1}B \\ W(s) &= W_\infty + C(sI - A)^{-1}G\end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}\Sigma G &= H^* - C^* W_\infty \\ \Sigma H^* &= G - B V_\infty^* \\ W_\infty &= U V_\infty^*\end{aligned}$$

stelling 5

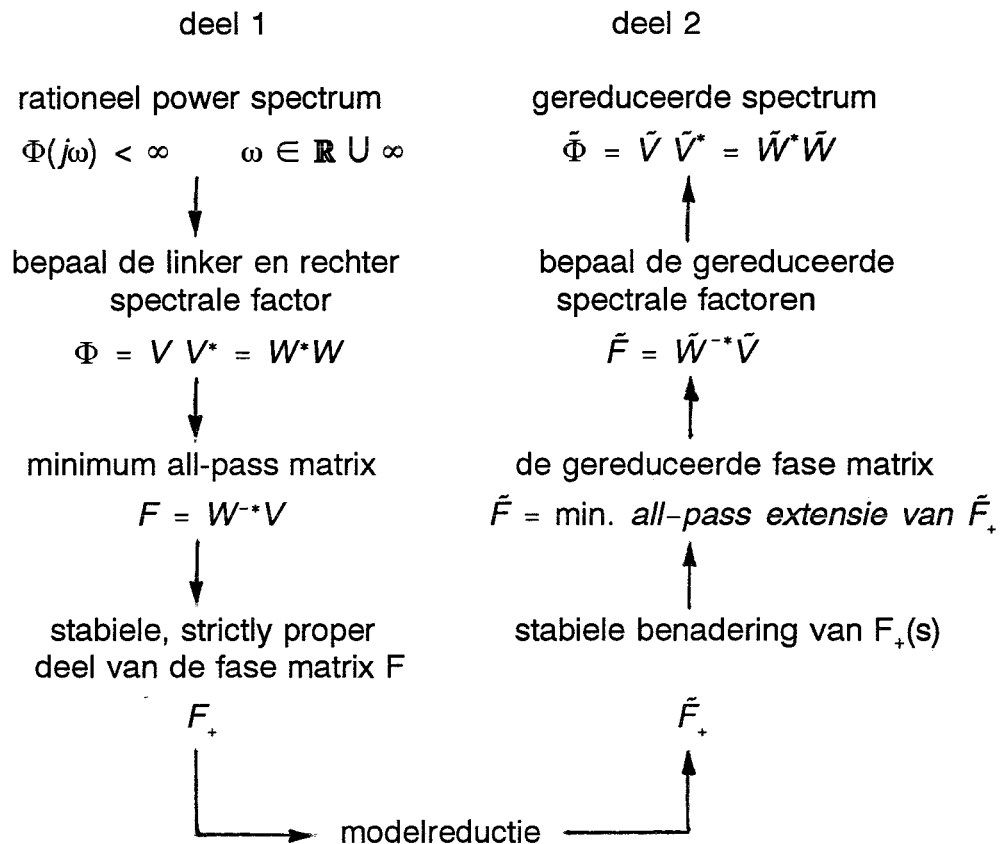
V, W $p \times p$ volgens stelling 3. Partitioneer G, H conform B, C dan:

$$\begin{aligned}V_1(s) &= V_\infty + H_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 \\ W_1(s) &= W_\infty + C_1(sI - A_{11})^{-1}G_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_2(s) &= I - (0, \hat{B}^*)(sI - A)^{-1}B \\ W_2(s) &= I - C(sI - A)^{-1}(0, \hat{C}\Gamma^{-1})^*\end{aligned}$$

- * V_1, W_1 en V_2, W_2 zijn analytisch in Π_+ .
- * V_2, W_2 regulier in Π_+ .
- * $V = V_1 V_2$; $W = W_2 W_1$
- * Nulpunten van $V_1 (W_1)$ zijn nulpunten van $V (W)$.
- * Nulpunten van $V (W)$ zijn nulpunten van $V_1 (W_1)$.
- * V_1 en W_1^* bezitten dezelfde nulpunten.

7. Phase matching paradigma



Het bovenstaande figuur geeft het phase matching paradigma weer. Er wordt gesproken over een paradigma omdat het niet één reductie methode is, binnen het raamwerk kunnen namelijk een aantal keuzes gemaakt worden. We gaan er vanaf nu vanuit dat:

- * Het spectrum Φ $p \times p$ volle rang bezit.
- * De spectrale factoren V, W van Φ zijn minimaal, ordered, analytisch in Π_+ en vierkant.

Deze twee aannames zijn gedaan om het een en ander te versimpelen en gelden steeds tenzij anders wordt aangegeven.

De keuzes die binnen het paradigma gemaakt kunnen worden zijn:

- * De spectrale factoren V, W .
- * De modelreductiemethode.
- * De all-pass extensie, \tilde{F} uit \tilde{F}_+ .
- * De spectrale factoren van de all-pass extensie.

1 De spectrale factoren V, W

Φ kan in principe vastgelegd worden door elke spectrale factor V, W . In praktijk willen we echter modelreductie toepassen en is het onzin om onnodige informatie mee te nemen, vandaar dat er voor V en W de minimale realisatie gekozen wordt (met bijbehorende P_{\min} en Q_{\min}). Andere mogelijkheden zijn niet uitgesloten, als V al bekend is dan kan W bepaald worden met behulp van de dual positive real vergelijking.

2 De modelreductiemethode

Er zijn twee eigenschappen die hierbij van belang zijn, de modelreductie methode moet de stabiliteit waarborgen (F stabiel dan \tilde{F} ook stabiel) en als $\|F_+\|_H \leq 1$ dan moet dat inhouden dat $\|\tilde{F}_+\|_H \leq 1$. Deze eisen blijken voor balanced truncation en one step/optimal Hankelnorm methoden stand te houden. Een andere voorwaarde die aan de reductie methode gesteld wordt is het handhaven van alle singuliere waarden die één zijn. De reden hiervoor is tweeledig.

- * Als we minimum fase spectrale factoren gebruiken dan zijn er r nulpunten van Φ die op de $j\omega$ -as liggen. Het is gewenst dat je in ieder geval het aantal nulpunten op de $j\omega$ -as behoud (liefst de exacte punten). Net als in het scalaire geval komen deze punten namelijk niet tot uitdrukking in de fase matrix.
- * Een andere reden is dat de Hankel singuliere waarden van F overeenkomen met de canonical correlation coefficients. Hankel singuliere waarden die één zijn houden in dat de bijbehorende toestanden maximale informatie bezitten over de toekomstige uitgang. Neemt de waarde van r af dan zijn er sommige aspecten van de toekomst die in de zin van de canonical correlation coefficients perfect voorspelbaar zijn dat niet meer zijn na de benadering.

Het blijkt dat optimal Hankelnorm methoden hieraan niet voldoen zodat balanced truncation en one step Hankelnorm methoden overblijven.

3 All-pass extensie

Als \tilde{F}_+ bepaald is dan willen we hieruit z'n extensie \tilde{F} bepalen. Stel dat \tilde{F}_+ een gebalanceerde realisatie is:

$$F_+(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

$$\tilde{\Sigma} = \text{diag}(I_r, \tilde{\Sigma}_2) \quad r \geq 0, \quad 0 < \tilde{\Sigma}_2 \leq I$$

We kunnen dan met behulp van stelling 3 \tilde{F} bepalen waarbij we \tilde{U} zodanig kiezen dat:

$$\tilde{C}_1^* \tilde{U} + \tilde{B}_1 = 0$$

$$\tilde{U} \tilde{U}^* = I$$

De keuze van \tilde{U} beïnvloedt de ligging van de polen van \tilde{F} in Π_- en daardoor de nulpunten van \tilde{V}, \tilde{W} in Π_- . Verder wordt ook de fase fout in oneindig vastgelegd door \tilde{U} :

$$F(\infty) - \tilde{F}(\infty) = U - \tilde{U}$$

U kan nu op twee manieren gekozen worden:

- * Normalisatie aanpak. Hierbij wordt $F(\infty) = I$ en $\tilde{F}(\infty) = I$ gekozen. Dit heeft tot gevolg dat $C_1^* + B_1 = 0$ en $\tilde{C}_1^* + \tilde{B}_1 = 0$ moeten zijn. Balanced truncation voldoet aan deze voorwaarde, one step Hankelnorm meestal niet.
- * Niet normalisatie aanpak. $F(\infty) = U$ waarbij U arbitrair gekozen wordt.

Normalisatie is eigenlijk een keuze maken voor de parameter \tilde{U} ten gevolge van het afwezig zijn van een ander goed gemotiveerd criterium. De eis dat $F(\infty) = \tilde{F}(\infty) = I$ heeft als resultaat dat de fase fout in oneindig nul is maar dit kan ten koste gaan van de totale fase fout tussen F en \tilde{F} (over het hele traject bekeken).

4 De spectrale factoren van \tilde{F}

Als \tilde{F} beschikbaar is dan is de laatste keuze die gemaakt kan worden de keuze van de linker en rechter spectrale factor.

$$\tilde{F} = \tilde{W}^{-*} \tilde{V}$$

Voldoen de factoren aan stelling 4 en zijn G en H conform B en C gepartitioneerd dan kan er aangetoond worden dat [9]:

$$\begin{aligned} H_2 &= -V_\infty \hat{B}^* \\ G_2 &= -\Gamma^{-1} \hat{C}^* W_\infty \end{aligned}$$

H_1 en V_∞ kunnen vrij gekozen worden, G_1 en W_∞ liggen dan vast door:

$$\begin{aligned} G_1 &= H_1^* - C_1^* W_\infty \\ W_\infty &= U V_\infty^* \end{aligned}$$

Vice versa is natuurlijk ook mogelijk.

8. Balanced stochastic truncation

$Z(s)$ is een positive real met een balanced stochastic realization (A, G, H, J) met $0 \leq \Sigma \leq I$ die voldoet aan:

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0$$

$$\Sigma H^* = G - BV_\infty^*$$

$$V_\infty V_\infty^* = J + J^*$$

$$\Sigma A + A^* \Sigma + C^* C = 0$$

$$\Sigma G = H^* - C^* W_\infty$$

$$W_\infty^* W_\infty = J + J^*$$

$V(s)$ en $W(s)$ zijn de bijbehorende gebalanceerde spectrale factoren zodanig dat:

$$Z + Z^* = VV^* = W^*W$$

$$V(s) = V_\infty + H(sI - A)^{-1}B$$

$$W(s) = W_\infty + C(sI - A)^{-1}G$$

Partitioneer Σ als:

$$\Sigma = \text{diag}(I_r, \Sigma_{21}, \Sigma_{22})$$

$$\Sigma_{21} = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_k)$$

$$\Sigma_{22} = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

Met $\Sigma_{21}, \Sigma_{22} < I$, verder hebben Σ_{21}, Σ_{22} geen diagonaal elementen die overeen komen. Vervolgens partitioneren we A, B, C, G en H op dezelfde manier als Σ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_{21} \\ G_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_{21} \quad C_{22}], \quad H = [H_1 \quad H_{21} \quad H_{22}]$$

definieer nu:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_{21} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [C_1 \quad C_{21}], \quad \bar{H} = [H_1 \quad H_{21}]$$

$$\tilde{Z}(s) = J + \bar{H}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{G}$$

$$\tilde{V}(s) = V_\infty + \bar{H}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$$

$$\tilde{W}(s) = W_\infty + \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{G}$$

Met error-bound:

$$\|F(j\omega) - \tilde{F}(j\omega)\|_\infty \leq 4(\sigma_{k+1} + \dots + \sigma_n)$$

We noemen $\tilde{Z}(s)$, $\tilde{V}(s)$ en $\tilde{W}(s)$ de (Σ, k) balanced stochastic truncation (BST) van $Z(s)$, $V(s)$ en $W(s)$. Het label (Σ, k) wordt meegegeven om aan te geven welke gebalanceerde realisatie we gereduceerd hebben (Σ), de orde van de reductie wordt weergegeven door k . Er wordt wel aangenomen dat $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ en sluit het vormen van een k^{de} orde benadering uit als $\sigma_k = \sigma_{k+1}$.

BST is het simpelste phase matching algoritme waarbij de volgende keuzes gedaan zijn:

- 1 Voor de spectrale factoren kiest men voor een willekeurige ordered minimale factoren
- 2 De modelreductie-methode is internally balanced truncation
- 3 Voor de all-pass extensie kiest men $\tilde{U} = U$, BST heeft dus geen fase fout in oneindig.
- 4 De keuze van de all-pass factor is $\tilde{H}_1 = H_1$ en $\tilde{V}_\infty = V_\infty$ hieruit volgt dat $\tilde{G}_1 = G_1$ en $\tilde{W}_\infty = W_\infty$.

Er wordt in [3] ook aangetoond dat $j\omega$ -as en nmf-nulpunten behouden blijven waardoor de karakteristiek van het systeem gehandhaafd blijft. Voor een gedetailleerdere beschrijving van BST wordt verwezen naar [9].

9. One step Hankelnorm benadering

In dit gedeelte bekijken we in welke situaties BST aangepast kan worden zodat one step Hankelnorm benadering kan worden toegepast.

A asymptotisch stabiel, (A,B,C) intern gebalanceerd met regelbaarheids en observeerbaarheidsgrammian $0 < \Sigma \leq I$. Partitioneer (A,B,C) op dezelfde manier als bij BST is gedaan alleen nu is $\Sigma_{22} = \sigma_n I$ ($\sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_n$).

\bar{A} , \bar{B} , \bar{C} zijn de k^{de} orde intern gebalanceerde benaderingen van A, B, C die in het vorige hoofdstuk bepaald zijn.

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \Omega^{-1}(\sigma_n^2 \bar{A}^* + \bar{\Sigma} \bar{A} \bar{\Sigma} - \sigma_n \bar{C}^* U_h \bar{B}^*) \\ \bar{B} &= \Omega^{-1}(\bar{\Sigma} \bar{B} + \sigma_n \bar{C}^* U_h) \\ \bar{C} &= (\bar{C} \bar{\Sigma} + \sigma_n U_h \bar{B}^*) \\ \bar{D} &= D - \sigma_n U_h \\ \bar{\Sigma} &= \text{diag}[I_r, \Sigma_{21}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \bar{\Sigma}^2 - \sigma_n^2 I \\ B_{22} + C_{22}^* U_h &= 0 \quad ; \quad U_h U_h^* = I\end{aligned}$$

$\bar{D} + \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}$ is nu de one step Hankelnorm benadering van $D + C(sI - A)^{-1} B$ met de graad k. One-step-at-a-time Hankelnorm approximation is deze procedure steeds weer opnieuw toepassen. De observeerbaarheidsgrammian van (\bar{A}, \bar{C}) is $\bar{\Sigma} \Omega$ en de regelbaarheidsgrammian van (\bar{A}, \bar{B}) is $\bar{\Sigma} \Omega^{-1}$. De benadering is dus niet meer gebalanceerd, er is een schalingsfout $\Omega^{-1/2}$. Dit leidt alleen tot een extra vermenigvuldiging met $\Omega^{\pm 1/2}$ of $\Omega^{\pm 1}$ in de berekeningen. De error bound van dit algoritme wordt gegeven door:

$$\|F(j\omega) - \bar{F}(j\omega)\|_{\infty} \leq 2(\sigma_{k+1} + \dots + \sigma_n)$$

Als we Hankelnorm benadering toepassen tijdens phase matching dan willen we F_+ reduceren.

$$F_+(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

Aangezien BST gebruik maakt van de normalisatie aanpak moet er nu

nagegaan worden in welke situaties $F(\infty) - \tilde{F}(\infty) = 0$ voor Hankelnorm benaderingen. Dit blijkt zo te zijn als:

$$\begin{aligned} C_{22}^* U_h + B_{22} &= 0 \\ B_1(U_h^* U - U^* U_h) &= 0 \end{aligned}$$

Dat aan deze relaties voldaan moet worden is als volgt in te zien:

$$A_{11} + A_{11}^* = -B_1 B_1^* = -C_1^* C_1$$

Als de bovenstaande relatie geldt dan bestaat er volgens [6] een orthonormale matrix U die voldoet aan:

$$\begin{aligned} C_1^* U + B_1 &= 0 \\ U^* U &= I \end{aligned}$$

De benaderingen van B_1 en C_1 zijn:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= (1 - \sigma_n^2)^{-1} [B_1 + \sigma_n C_1^* U_h] = B_1 [I - \sigma_n U^* U_h] (1 - \sigma_n^2)^{-1} \\ \tilde{C}_1 &= C_1 + \sigma_n U_h B_1^* \end{aligned}$$

We willen nu dat $F(\infty) - \tilde{F}(\infty) = 0$ daaruit volgt dat U en \tilde{U} aan elkaar moeten zijn. Er moet dus een matrix U gevonden worden die voldoet aan:

$$\tilde{C}_1^* U + \tilde{B}_1 = 0 \quad \{U = F(\infty)\}$$

\tilde{B}_1 en \tilde{C}_1 ingevuld in de volgende relatie levert:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^* U + \tilde{B}_1 (1 - \sigma_n^2) &= [C_1^* U + \sigma_n B_1 U_h^* U + B_1 - \sigma_n B_1 U^* U_h] \\ &= \sigma_n B_1 (U_h^* U - U^* U_h) \end{aligned}$$

Is σ_n nu klein dan is de fasefout in oneindig bij benadering gelijk aan 0 als er een matrix U_h bestaat zodanig dat $B_1(U_h^* U - U^* U_h) = 0$. In een aantal gevallen, bijvoorbeeld $B_1 = 0$ en het scalaire geval, zijn er oplossingen voor U_h (zie [3]). Uit de afleiding blijkt echter dat de one-step-at-a-time methode eigenlijk niet geschikt is bij het toepassen van phase matching met een normalisatie aanpak.

10. Relative error methode

Deze methode om tot modelreductie te komen is ontwikkeld door Glover [7] en de toepassing voor het benaderen van spectra wordt behandeld in [8]. De overeenkomst tussen de relative error methode (REM) en phase matching is dat beide het stabiele deel van de fase matrix benaderen. Voor het scalaire geval, $\varphi(s)$ strictly proper $\varphi(s) > 0$, geldt dat het gereduceerde spectrum op een constante na vast ligt. De voorgestelde keuze om deze parameter te bepalen is $v(0) = \tilde{v}(0) \Rightarrow \varphi(0) = \tilde{\varphi}(0)$. REM is in dit geval een alternatieve methode om de schalingsfactor te bepalen. Wat is nu echter de overeenkomst tussen phase matching en REM in het algemene geval? Met de resultaten uit [7] kan er aangetoond worden dat REM een phase matching algoritme is volgens het schema dat het phase matching paradigma weergeeft. Wat minder duidelijk uit de verf komt is welke specifieke keuzes er gemaakt zijn. Om dat duidelijker te maken wordt eerst in het kort de methode behandeld zoals deze afgeleid is in [7].

P1 Het 'relative error' probleem

Gegeven $V(s)$ analytisch in Π_+ van de graad n , vind \tilde{V} analytisch in Π_+ van de graad k zodanig dat:

- * $\tilde{V} = V(I - \Delta)$
- * minimaliseer $\|\Delta\|_\infty$

Voor REM zoals het voorgesteld wordt door Glover hoeven V en \tilde{V} niet analytisch in Π_+ te zijn. Aangezien we geïnteresseerd zijn in de overeenkomst met phase matching, waarbij alleen stabiele V beschouwd worden, nemen we deze eis van het begin af aan mee. In [7] wordt nu aangetoond dat P1 het zelfde is met het volgende probleem.

P2 Het equivalente 'relative error' probleem

V, W analytisch in Π_+ , V van de graad n , $VV^* = W^*W$. Bepaal nu \tilde{V} , analytisch in Π_+ met graad k zodanig dat $\|W^*(V - \tilde{V})\|_\infty$ geminimaliseerd wordt.

Constructie van \tilde{V}

V, W analytisch in Π_+ , V van de graad n , W regulier in als $\text{Re}(s) > 0$ zodanig dat $VV^* = W^*W$. Definieer nu:

$$\begin{aligned} F &= W^{-*}V \\ F_c &= F_+ + F(\infty) \end{aligned}$$

Definieer k nu als $k = n - \text{multipliciteit } \sigma_n(F)$ en \tilde{F}_c als de one step Hankelnorm benadering van F_c van de graad k .

$$\begin{aligned} E &= F_c - \tilde{F}_c \\ \tilde{V} &= V - W^*E \end{aligned}$$

\tilde{V} is dan analytisch in Π_+ en heeft graad k .

Constructie van \tilde{W}

V, W, E zoals hierboven gedefinieerd dan wordt \tilde{W} gegeven door:

$$\tilde{W} = W - EV^*$$

\tilde{W} is dan analytisch in Π_+ , regulier in $\text{Re}(s) > 0$ en voldoet aan:

$$\tilde{W}^*\tilde{W} = \tilde{V}\tilde{V}^*$$

Met $\tilde{F} = \tilde{W}^{-*}\tilde{V}$ geldt er dat $\tilde{F}_+ \equiv [\tilde{W}^{-*}\tilde{V}]_+ = \tilde{F}_c - \tilde{F}_c(\infty)$. Dit houdt in dat $\sigma_i(\tilde{F}) = \sigma_i(F) \quad i = 1, \dots, k$. Aangezien $\tilde{F}_+ \equiv [\tilde{W}^{-*}\tilde{V}]_+ = \tilde{F}_c - \tilde{F}_c(\infty)$ kan de one-step-at-a-time methode iteratief toegepast worden zonder dat bij elke stap de spectrale factorisatie van \tilde{F}_c te berekenen. Verder zijn de Hankel singuliere waarden van \tilde{F} gelijk aan de eerste k singuliere waarden van F . Er is een duidelijke overeenkomst tussen REM en phase matching aangezien beide gebaseerd zijn op benadering van het stabiele deel van $W^{-*}V$ waarbij $VV^* = W^*W$.

De keuzes die binnen het phase matching paradigma gemaakt kunnen worden zijn:

- * De spectrale factoren V, W .
- * De modelreductiemethode.
- * De all-pass extensie, \tilde{F} uit \tilde{F}_+ .
- * De spectrale factoren van de all-pass extensie.

Welke keuzes er bij REM gemaakt zijn wordt hieronder duidelijk gemaakt.

Laat Φ, V, W voldoen aan de aannames uit hoofdstuk 7:

- * Het spectrum Φ $p \times p$ volle rang bezit.
- * De spectrale factoren V, W van Φ zijn minimaal, ordered, analytisch in Π_+ en vierkant.

en laat V, W de balanced stochastic realizations zijn.

$$\begin{aligned} V(s) &= V_\infty + H(sI - A)^{-1}B \\ W(s) &= W_\infty + C(sI - A)^{-1}G \\ F &= W^{-*}V \quad ; \quad U = F(\infty) \end{aligned}$$

Merk op dat in dit geval F_+ gegeven wordt door:

$$F_+ = C(sI - A)^{-1}B$$

L is de k^{de} orde benadering van F_+ , L_+ wordt dan gegeven door:

$$L_+ = L - L(\infty) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

Het foutstelsel wordt nu gedefinieerd als:

$$E = \sigma_n U_h + F_+ - L_+$$

Het meenemen van de term $\sigma_n U_h$ is als volgt te verklaren. We benaderen $C(sI - A)^{-1}B$ met Hankelnorm approximation. $D = 0$ waaruit volgt dat $\tilde{D} = D - \sigma_n U_h$. De Hankelnorm benadering van $C(sI - A)^{-1}B$ is $\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} - \sigma_n U_h$.

1 Definieer:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\infty &= V_\infty(I - \sigma_n U^* U_h) \\ \tilde{W}_\infty &= (I - \sigma_n U_h U^*) W_\infty\end{aligned}$$

2 \tilde{U} is een orthonormale matrix zodanig dat:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1^* \tilde{U} + \tilde{B}_1(1 - \sigma_n^2) &= 0 \\ \tilde{W}_\infty^* &= \tilde{V}_\infty \tilde{U}^*\end{aligned}$$

Een oplossing voor \tilde{U} wordt gegeven door:

$$\tilde{U} = (I - \sigma_n U_h U^*)^{-*} (I - \sigma_n U_h U^*) U$$

3 \tilde{F} is de unieke all-pass matrix zodanig dat $\tilde{F}_+ = \tilde{F}_c - \tilde{F}(\infty)$; $\tilde{F}(\infty) = \tilde{U}$.

4 Definieer of G_1 of H_1 als volgt:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 &= W_\infty^* \tilde{C}_1 + G_1^*(1 - \sigma_n^2) \\ \tilde{G}_1 &= \tilde{B}_1 V_\infty^* + H_1\end{aligned}$$

Waarbij \tilde{G} , \tilde{H} de oplossingen van de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma} \Omega \tilde{G} &= \tilde{H}^* - \tilde{C}^* \tilde{W}_\infty \Rightarrow \tilde{H} = W_\infty^* \tilde{C} + \tilde{G}^* \Omega \\ \tilde{\Sigma} \Omega^{-1} \tilde{H}^* &= \tilde{G} - \tilde{B} \tilde{V}_\infty^* \Rightarrow \tilde{G} = \tilde{B} V_\infty^* + \tilde{H}^*\end{aligned}$$

5 Definieer \tilde{V} , \tilde{W} door:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(s) &= \tilde{V}_\infty + \tilde{H}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \\ \tilde{W}(s) &= \tilde{W}_\infty + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{G}\end{aligned}$$

De relatieve foutvergelijking luidt:

$$\begin{aligned}\|W^{-*}(V - \tilde{V})\|_\infty &= \sigma_n(F) \\ \|(W - \tilde{W})V^{-*}\|_\infty &= \sigma_n(F)\end{aligned}$$

Net als voor BST wordt er voor REM aangetoond dat $j\omega$ -as en nmf-nulpunten behouden blijven. Het algoritme dat net beschreven is heeft een opvallende eigenschap, \tilde{V}_∞ en \tilde{W}_∞ worden gedefinieerd en daarna gebruikt om \tilde{U} vast te leggen. Bij de 'normale' aanpak kiezen we \tilde{V}_∞ en \tilde{U} en definiëren daarmee \tilde{W} . Feitelijk hoeven \tilde{U} en de fase matrix \tilde{F} niet berekend te worden, maar zijn vermeld om de connectie met phase matching aan te tonen.

11. Voorbeelden

We bekijken twee problemen met dezelfde fasefunctie $f(s)$:

$$f(s) = \frac{(s-1)(s-3)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s-2)}$$

Voorbeeld 1 We beschouwen de stabiele, min. fase overdrachtsfunctie $v(s)$:

$$v(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

Deze voldoet aan de relatie $v^{-*}v = f(s)$. Het systeem heeft een nulpunt op de imaginaire as en kan dus niet met het algoritme van Jonckheere en anderen, dat in hoofdstuk 1 beschreven is, gereduceerd worden. Met behulp van balanced truncation (BT), BST en REM worden de eerste orde benaderingen bepaald. BT is een algoritme dat niet op phase matching gebaseerd is. BST levert de volgende benadering:

$$\tilde{v}_{BST} = \frac{s}{s+1.714}$$

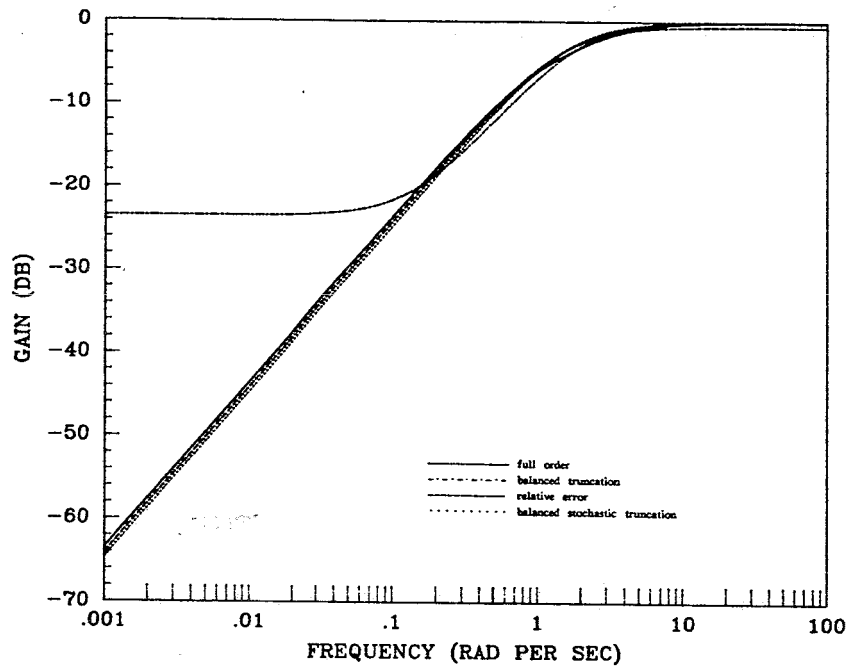
REM resulteert in:

$$\tilde{v}_{REM} = \frac{0.9333s}{s+1.5}$$

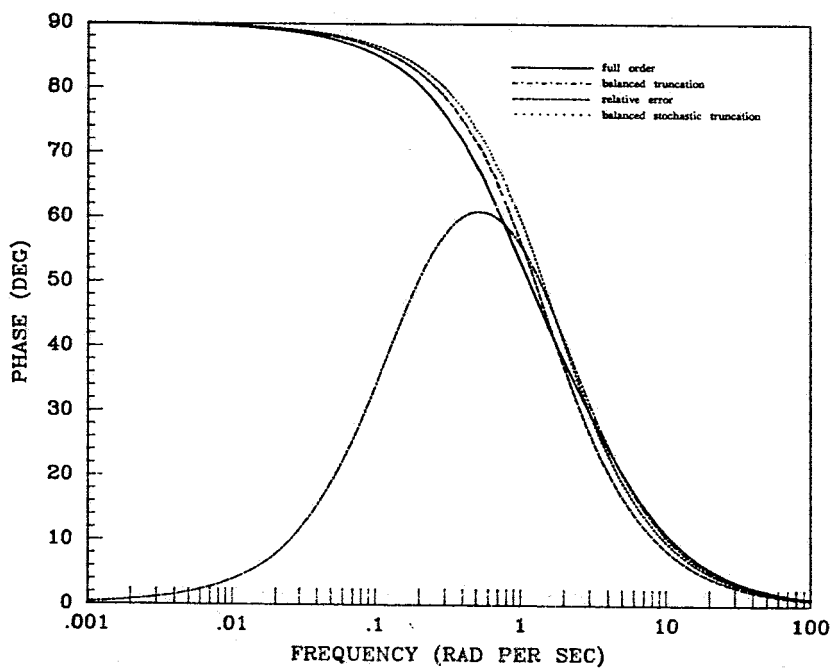
BT geeft:

$$\tilde{v}_{BT} = \frac{s+0.134}{s+2}$$

Het Bode-diagram is weergegeven in figuur 1. Wat hieruit opgemaakt kan worden is BST en REM nauwelijks verschillen van het originele systeem. BT wijkt echter duidelijk af bij de lage frequenties. Dit is het gevolg van het feit dat de op phase-matching georiënteerde algoritmen het nulpunt $s = 0$ handhaven en BT niet. Hieruit blijkt nogmaals waarom het van belang is dat de nulpunten die op de imaginaire as liggen, en daardoor niet tot uitdrukking komen in de fase matrix, mee worden genomen tijdens de reductie.



(a)



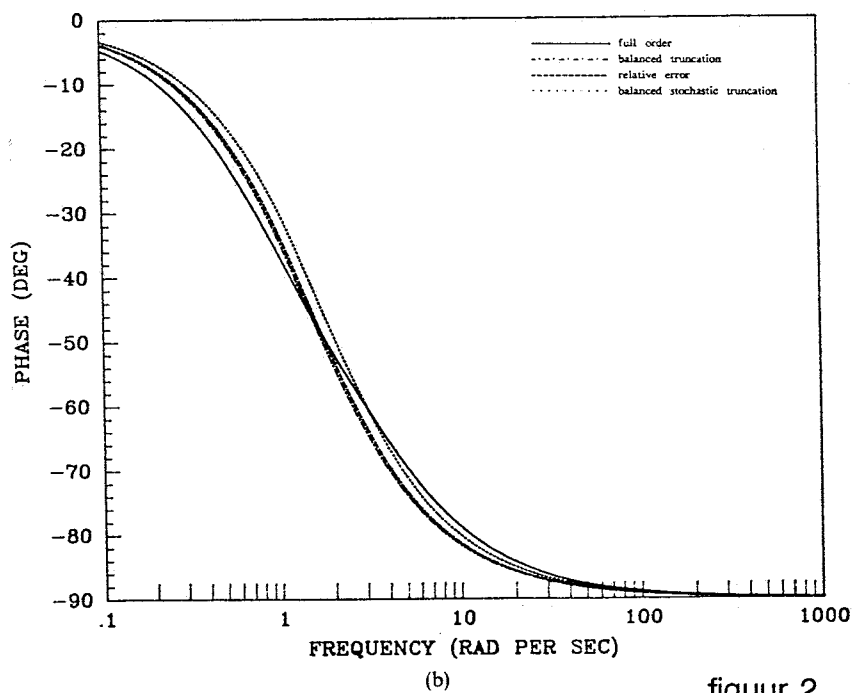
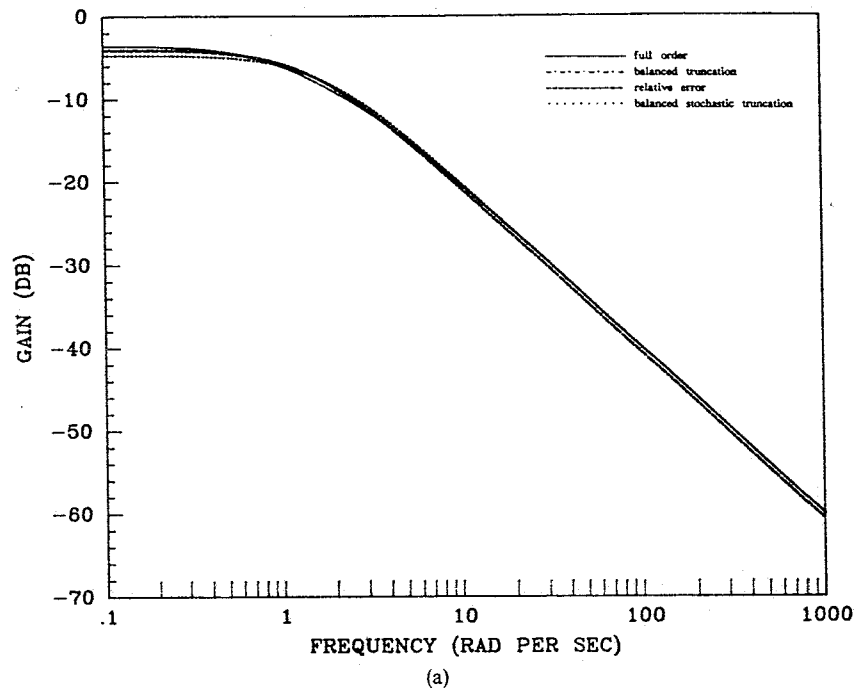
(b)

figuur 1

Voorbeeld 2 Het probleem van BT in het vorige voorbeeld is dat nulpunten op de imaginaire as niet behouden blijven. In sommige situaties behoudt BT wel nulpunten in oneindig zoals bij de volgende stabiele, min. fase overdrachtsfunctie $v(s)$:

$$v(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$v^{-*}v = -f(s)$. Het Bode-diagram van de eerste orde benaderingen berekend met behulp van respectievelijk BT, BST en REM staan in figuur 2. Wat nu opvalt is dat alle methoden een goede benadering leveren en aan elkaar gewaagd zijn.



figuur 2

Conclusie

Het multivariabele phase matching algoritme laat veel keuzes toe, daarom kan er beter gesproken worden over een paradigma voor het benaderen van spectra dan van een algoritme. BST behoudt nmf-nulpunten en nulpunten op de imaginaire as, verder blijft minimaliteit van het gereduceerde model gehandhaafd. Voor REM is verder bewezen dat dit een op phase matching gebaseerd algoritme is. Ook deze methode zorgt ervoor dat imaginaire as en nmf-nulpunten van het originele systeem behouden blijven. BT, BST en REM zijn in twee voorbeelden met elkaar vergeleken. In het geval dat er een nulpunt in $s = \infty$ ligt voldoen alle de gereduceerde modellen goed. Ligt er echter een nulpunt op de imaginaire as dan levert BT een slechte benadering op bij lage frequenties. Beide phase matching algoritmen voldoen nog steeds goed en zijn bijna identiek. Samengevat is phase matching zeer bruikbaar als het te reduceren systeem nulpunten dichtbij of op de imaginaire as heeft (en daardoor grote verschillen in de amplitudeverhouding bij verschillende frequenties). De 'relative error' methode lijkt het best onderbouwd en levert een betere performance. BST resulteert in vergelijkbare resultaten waarvan de performance minder is maar daar staat tegenover dat deze methode makkelijker te berekenen is. In dit verslag is geen aandacht besteed aan de afleiding van de error-bounds (=performance), dit om het geheel overzichtelijk te houden. Is men hierin geïnteresseerd dan verwijs ik onder andere naar [3] en [6] waarin deze voor de verschillende algoritmen met afleiding worden gegeven. Bij het schrijven van het verslag ben ik uitgegaan van artikel [3] en heb gepoogd dit verhaal met behulp van aanvullingen duidelijk te maken. Compleet wiskundig onderbouwd is het verhaal zeker niet maar het geeft wel goed weer hoe het reduceren van een model met behulp van phase matching verloopt en welke problemen en begrippen er in de literatuur ter sprake komen.

Literatuurlijst

- [1] B.D.O. Anderson and M. Green, **The approximation of powerspectra by phase matching**, Proceedings of 25th IEEE Conference on decision and control, Athens, 1986, pp 1085-1090.
- [2] B.D.O. Anderson and M. Green, **Factorization of all-pass matrix functions**, Int. journal of control, 1987, deel 45 nr. 1, pp 215-235.
- [3] B.D.O. Anderson and M. Green, **Model reduction by phase matching**, Mathematics of Control, Signals and Systems, Vol 2, No 3, 1989, pp 221-263.
- [4] H. van Essen, **Een literatuurstudie naar modelreductie methoden**, WFW rapport 91.033, 1991.
- [5] B.A. Francis, **A course in H_∞ control theory**, Lecture notes in control and information sciences, vol. 88, Springer, New York, 1987.
- [6] K. Glover, **All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds**, Int. journal of control, 1984, deel 39 nr. 6, pp 1115-1193.
- [7] K. Glover, **Multiplicative approximation of linear multivariable systems with L^∞ -error bounds**, Proceedings American Control Conference, Seattle, juni 1986, deel 3, pp 1705-1709.
- [8] K. Glover, E.A. Jonckheere, **A comparison of two Hankel-norm methodes for approximating spectra**, Modeling, identification and robust control, Elsevier, 1986, pp 297-306.
- [9] M. Green, **Balanced stochastic realizations**, Journal of Linear Algebra and its Applications, vol 98, 1988, pp. 211-247.
- [10] P. Harshavardhana and E.A. Jonckheere, **Spectral factor reduction by phase matching: the continuous-time single-input single-output case**, Int. journal of control, 1985, deel 42 nr. 1, pp 43-63.
- [11] Ph. C. Opendacker, E.A. Jonckheere, **A state space approach to approximation by phase matching**, Modeling, identification and robust control, Elsevier, 1986, pp 349-363.

Bijlage 1

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_G) u &= \int_{-\infty}^0 h(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\
 &= C e^{At} \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = C e^{At} x_0
 \end{aligned}$$

We definiëren nu $v(\tau) = u(-\tau)$.

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_G) u &= \int_0^{\infty} C e^{A(t-\tau)} B v(\tau) d\tau \\
 (\Gamma_G) y &= \int_0^{\infty} B^* e^{A^*(t-\tau)} C^* y(\tau) d\tau \quad [C e^{At} B]^* = B^* e^{A^*t} C^*
 \end{aligned}$$

Om nu de singuliere waarden van Γ_G te bepalen nemen we aan dat σ_i een singuliere waarde is met v de corresponderende eigenvector van $\Gamma_G^* \Gamma_G$.

$$(\Gamma_G^* \Gamma_G) v = \sigma_i^2 v ; y = (\Gamma_G) v = C e^{At} x_0 ; x_0 = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B v(\tau) d\tau$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_G^* \Gamma_G) v &= (\Gamma_G^*) y = B^* e^{A^*t} \int_0^{\infty} e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} x_0 d\tau \\
 &= B^* e^{A^*t} \int_0^{\infty} e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} d\tau x_0 = B^* e^{A^*t} Q x_0 = \sigma_i^2 V \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$V = B^* e^{A^*t} Q x_0 \sigma_i^{-2}$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \int_0^{\infty} e^{A\tau} B v(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} Q x_0 \sigma_i^{-2} d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau Q x_0 \sigma_i^{-2} = P Q x_0 \sigma_i^{-2} \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma_i^2 x_0 = P Q x_0}$$

Bijlage 2

$$\begin{aligned}\Phi &= Z + Z^* = V V^* \\ Z(s) &= J + H (sI - A)^{-1}G \\ V(s) &= V_\infty + H (sI - A)^{-1}B\end{aligned}$$

Z en V ingevuld:

$$\begin{aligned}J + J^* + H (sI - A)^{-1}G + G^*(-sI - A^*)^{-1}H^* &= V_\infty V_\infty^* + \\ V_\infty B^*(-sI - A^*)^{-1}H^* + H(sI - A)^{-1}B V_\infty^* + \\ H(sI - A)^{-1}B B^*(-sI - A^*)^{-1}H^*\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}(G - B V_\infty^*) H^* (sI + A^*) + (-sI - A) H^{-1} (G^* - B^* V_\infty) + B B^* &= 0 \\ J + J^* &= V_\infty V_\infty^*\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}(G - B V_\infty^*) H^* A^* + A H^{-1} (G^* - B^* V_\infty) + B B^* &= 0 \\ (G - B V_\infty^*) H^* sI &= sI (G^* - B^* V_\infty) \\ J + J^* &= V_\infty V_\infty^*\end{aligned}$$

Wat in het volgende stelsel resulteert:

$$\begin{aligned}AP + PA^* + BB^* &= 0 \\ P &= (G - B V_\infty^*) H^* \\ J + J^* &= V_\infty V_\infty^* \\ P &= P^*\end{aligned}$$