

## Rechtgeleidingen met stangenvierzijden (1)

**Citation for published version (APA):**

Dijksman, E. A. (1966). Rechtgeleidingen met stangenvierzijden (1). *Polytechnisch tijdschrift. Uitgave A, Werktuigbouw, staalconstructies, scheepsbouwkunde, luchtvaarttechniek, chemische techniek en aanverwante vakken*, 21(6), 247A-254A.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1966

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

# Rechtgeleidingen met stangenvierzijden

DR. E. A. DIJKSMAN\*

## Inleiding

In dit artikel worden verscheidene constructies behandeld, die betrekking hebben op het ontwerpen van stangenmechanismen, waarvan bepaalde punten zekere krommen beschrijven, die voor een deel benaderd rechtlijnig verlopen. Alleen de stangenvierzijde en de van haar afgeleide vormen, zoals het krukdrijfstang-, het kruksleuf- en het dubbel schuifscharniermechanisme zullen in de beschouwing worden opgenomen. Door verregaande analysering van één bepaalde positie van het mechanisme, is het mogelijk tot eenvoudige voorschriften te komen voor de afmetingen van het mechanisme en voor de juiste positie van het koppelstuk, dat de benaderd rechte baan dient te doorlopen. Naar gelang men hogere eisen stelt aan de door het koppelstuk beschreven rechtgeleiding, blijven voor de constructeur minder „ontwerpvrijheidsgraden” over voor het construeren van het mechanisme: het wordt aan de constructeur zelf overgelaten de hem ter beschikking staande ontwerpvrijheidsgraden op de meest geschikte wijze te gebruiken.

Wegens de omvang van het artikel is de afleiding van de stelling van Euler-Savary, van de drie-polenstelling en van de stelling van Roberts, achterwege gelaten. Enige basis-kennis omtrent de bewegingsleer van het platte vlak is dus wel vereist.

Voorts kan bij sommige figuren worden opgemerkt, dat zij meer informatie over de stof geven, dan uit de tekst alleen naar voren komt. Zulke figuren zijn dus meer dan illustraties van het gebodene.

## 1. De kinematica van de vlakke beweging

Het verband tussen de poolcoördinaten van een baanpunt  $X(r, \varphi)$  en van het bijbehorende kromtemiddelpunt  $X_0(r_0, \varphi)$  wordt gegeven door de vergelijking van Euler-Savary

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\delta \sin \varphi} \quad (1)$$

Hierbij is de pool  $P$  de oorsprong van het assenstelsel, en  $\delta$  de diameter van de buigcirkel, die in  $P$  aan de poolraaklijn  $p$  raakt (zie figuur 1).  $\delta$  wordt steeds positief genomen. Noemt men  $X_w$  het snijpunt ( $\neq P$ ) van de poolstraal  $PX$  met de buigcirkel, dan wordt  $\varphi$  zo gemeten, dat  $\angle X_w P p = \varphi > 0$ .

Het verband tussen de kromtestralen van de poolbaan ( $R_0$ ) en van de poolkromme  $R$  wordt weergegeven door de betrekking

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{\delta} \quad (2)$$

In figuur 2 is de situatie op het beschouwde moment zonder accent en die na  $dt$  sec, met een accent aangeduid. Het bewegende vlak draait op het beschouwde ogenblik om de pool  $P$  met een hoeksnelheid van  $\omega$  rad/sec, zodat  $\overline{XX'} = \omega r dt$ .  $dt$  sec later valt de pool samen met  $P'$ .

Men stelt  $\overline{PP'} = ds$ . Projectie van  $\overline{P'X'}$  op  $\overline{PX}$  geeft nu de betrekking

$$dr = -ds \cos \varphi \quad (3)$$

Projectie van  $\overline{P'X'}$  op  $\overline{XX'}$  geeft de betrekking

$$(r + dr) \sin(\varphi + d\psi) = r\omega dt + ds \sin \varphi \quad (4)$$

Bedenkt men, dat de diameter van de buigcirkel per definitie voldoet aan de betrekking

$$\delta = -\frac{ds/dt}{\omega} \quad (5)$$

en dat  $R_0 d\psi = ds$ ,

dan kan (4) met (2) geschreven worden als

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{1}{R} \quad (7)$$

Uit (1) volgt de betrekking

$$\rho = r_0 - r = \frac{r^2}{\delta \sin \varphi - r} \quad (8)$$

zodat met (3) en (7)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{3\delta^2 \rho^2 \omega \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \left( -\frac{1}{r} + \frac{1}{l \sin \varphi} + \frac{1}{m \cos \varphi} \right) \quad (9)$$

waarin

$$\frac{3}{l} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\delta} \quad (10)$$

en  $m = -\frac{3\delta}{d\delta/ds}$ . (11)

De meetkundige plaats van die baanpunten, waar de kromtestraal  $\rho$  stationair is, wordt de *cirkelloopkromme* genoemd en met  $k_u$  aangeduid.

Zij wordt gevonden met de conditie  $d\rho/dt = 0$ .

Men heeft dus

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l \sin \varphi} + \frac{1}{m \cos \varphi} \quad (k_u) \quad (12)$$

In cartesische coördinaten wordt dit

$$(x^2 + y^2)(mx + ly) - lmy = 0 \quad (k_u) \quad (13)$$

In parametervorm kan dit geschreven worden als

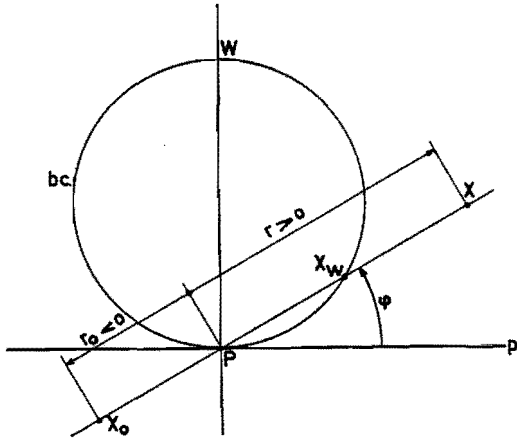
$$\left. \begin{aligned} K_x &= x^2 + y^2 - \mu x = 0 \\ K_y &= x^2 + y^2 - \lambda y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

waarbij de parameters  $\mu$  en  $\lambda$  voldoen aan de betrekking

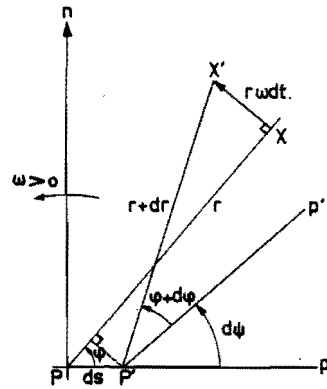
$$\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} - 1 = 0 \quad (14a)$$

Het punt  $X^*$  met de coördinaten  $(\mu, \lambda)$  ligt dus op een rechte, die de  $x$ -as in  $M$  en de  $y$ -as in  $L$  snijdt en waarbij  $\overline{PM} = m$  en  $\overline{PL} = l$ .  $\mu$  en  $\lambda$  zijn de respectieve middellijnen van de cirkels  $K_x$  en  $K_y$ , die elkaar buiten  $P$  in een

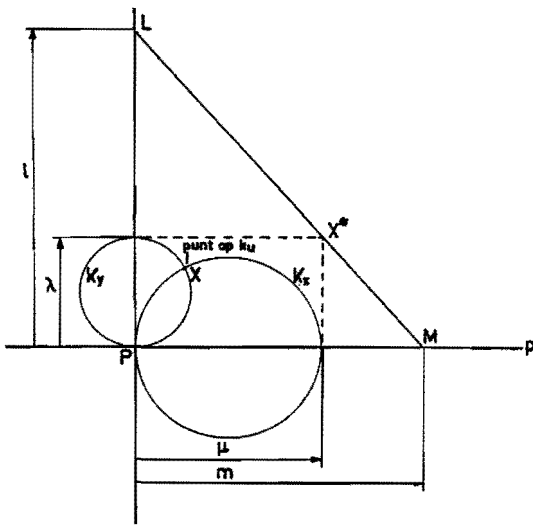
\* Wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de T.H. te Eindhoven. De tekeningen zijn verzorgd door de heer H. A. Buiten.



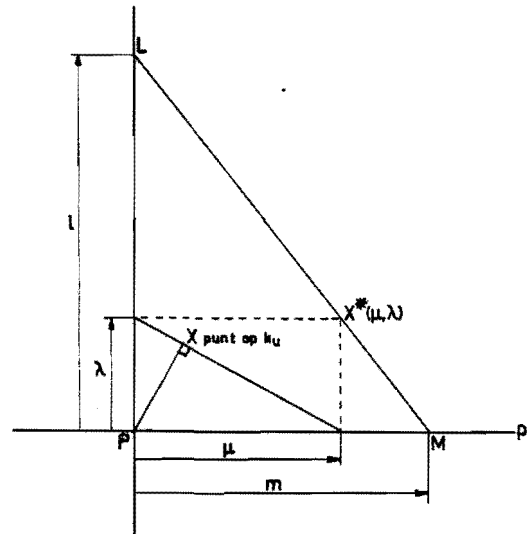
1.



2.



3.



4.

punt van  $k_u$  snijden (zie figuur 3). Hieruit is een constructie van punten op  $k_u$  af te leiden (zie figuur 4). Het voetpunt  $X$  van de loodlijn vanuit de pool op een diagonaal van die rechthoek neergelaten, waarvan twee der zijden resp. samenvallen met de abscis en de ordinaat van het punt  $X^*(\mu, \lambda)$ , ligt op  $k_u$ . Een mogelijke vorm van  $k_u$  is weergegeven in figuur 5.

De meetkundige plaats van de kromtemiddelpunten, die aan de baanpunten van  $k_u$  zijn toegevoegd, wordt de *middelpuntskromme* genoemd en met  $k_a$  aangeduid. Haar vergelijking wordt gevonden door eliminatie van  $1/r$  uit (1) en (12)

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{l_0 \sin \varphi} + \frac{1}{m \cos \varphi} \quad (k_a) \quad (15)$$

waarbij 
$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0} = \frac{1}{\delta} \quad (16)$$

Evenals voor  $k_u$  met de rechte  $ML$ , heeft men voor  $k_a$  een soortgelijke constructie met behulp van de rechte  $ML_0$  (waarbij  $PL_0 = l_0$  en  $PM = m$ ). De middelpuntskromme heeft eenzelfde gedaante als de cirkelloopkromme; beide krommen zijn weergegeven in figuur 6.

Het baanpunt, waar de raaklijn aan de baan een vierpuntsaanraking met de baan heeft, wordt *punt van Ball* genoemd. Dit punt ligt zowel op de buigcirkel als op de cirkelloopkromme. In het algemeen is dit één enkel punt dat niet samenvalt met de pool. Het wordt ook wel *undulatiepunt* genoemd en met de letter  $U$  aangeduid.

$U$  ligt op  $k_u$ . Het overeenkomstige kromtemiddelpunt  $U_0$  ligt dus op  $k_a$ . Het punt van Ball is tevens een punt van de buigcirkel, zodat  $U_0$  een oneindig ver weg gelegen punt is van  $k_a$ . Daar  $U$ ,  $U_0$  en  $P$  op één rechte liggen, betekent dit, dat het punt van Ball gevonden wordt in het snijpunt van de lijn door de pool in de asymptotische richting van  $k_a$  met de buigcirkel. De asymptotische richting wordt gevonden door nulstelling van de term  $(x^2 + y^2)(mx + l_0y)$ , d.i. de hoogste graads term van de vergelijking voor  $k_a$  in cartesische coördinaten.

Men vindt voor deze richting een richtingscoëfficiënt van  $-m/l_0$ .

## 2. Bepaling van het punt van Ball in een willekeurige stand van een stangenvierzijde

Gaat men uit van een willekeurige stangenvierzijde ( $A_0ABB_0$ ), dan zijn in een gegeven positie daarvan met

behelp van de stelling van Bobillier de poolraaklijn en de poolnormaal te construeren (zie figuur 7). Daar de punten A en B cirkellooppunten zijn en op  $k_u$  zijn gelegen, liggen de overeenkomstige kromtemiddelpunten  $A_o$  en  $B_o$  op  $k_s$ .

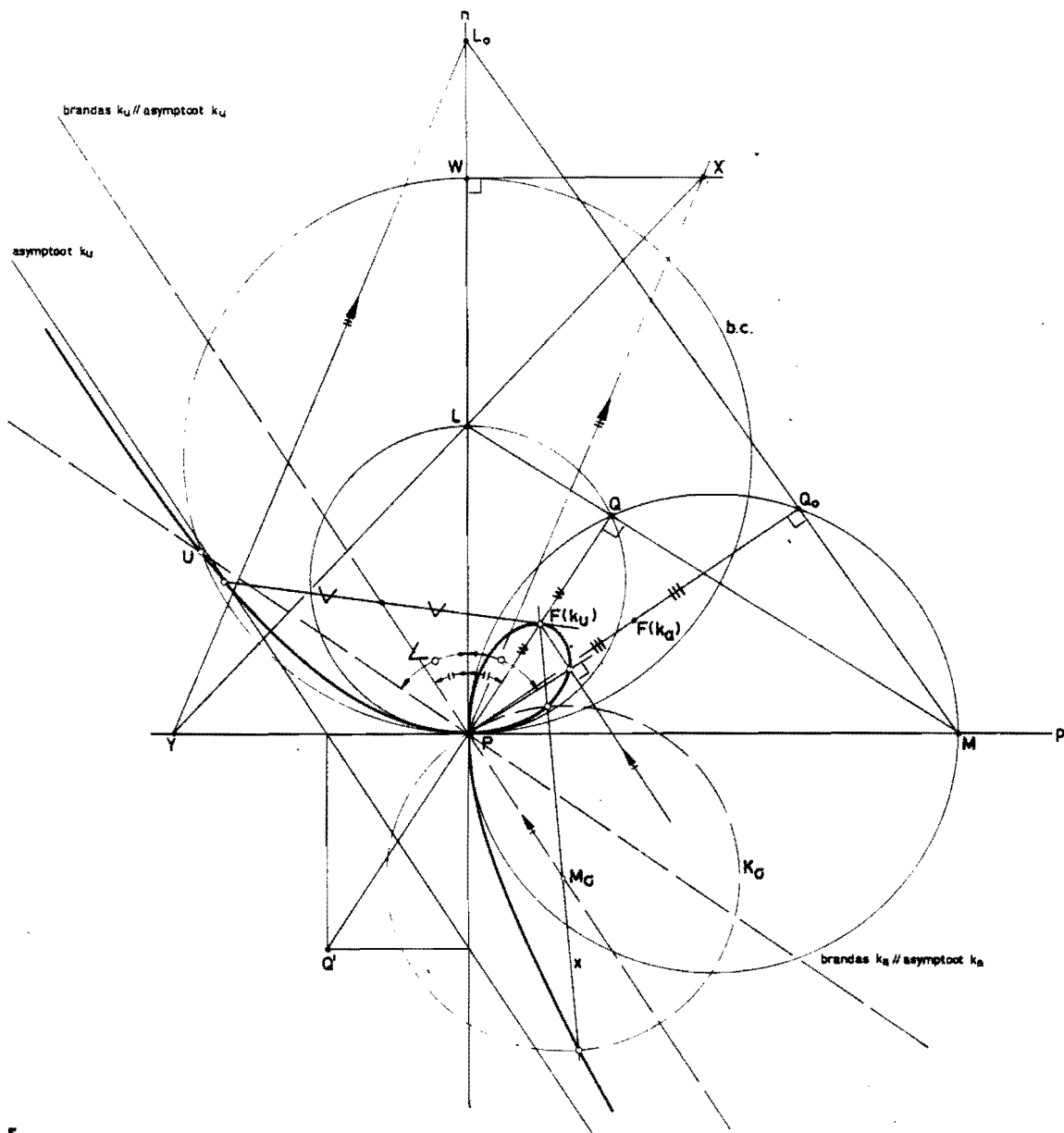
Het punt  $A_o$  wordt nu genomen als het voetpunt van de hoogtelijn  $PA_o$  op de hypotenus van een rechthoekige driehoek, waarvan de rechthoekszijden resp. langs p en n vallen. Het tegenover P gelegen hoekpunt  $A_o^*$  van een rechthoek, waarvan twee zijden samenvallen met de eerdergenoemde rechthoekszijden, kan nu worden bepaald. Het punt  $B_o^*$  wordt op analoge wijze vastgesteld. Zoals reeds bekend, snijdt dan de lijn  $A_o^*B_o^*$  de poolnormaal in  $L_o$  en de poolraaklijn in M. Daarbij is  $\overline{PM} = m$  en  $\overline{PL_o} = l_o$ .

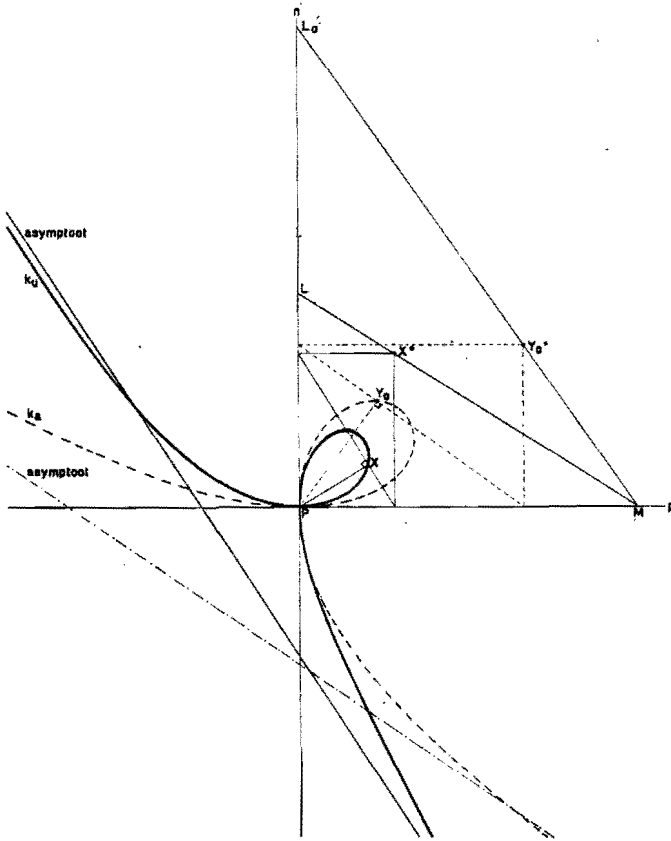
De hoogtelijn  $PQ_o$  in  $\triangle PML_o$  heeft dus de richtingscoëfficiënt  $+m/l_o$ . Spiegeling van  $PQ_o$  t.o.v. de poolnormaal geeft een lijn met richtingscoëfficiënt  $-m/l_o$ , welke de buigcirkel dus in het punt van Ball snijdt. De punten  $A_w$ ,  $B_w$  en P liggen op de buigcirkel, waarbij  $\overline{PA^2} = \overline{AA_o} \cdot \overline{AA_w}$

en  $\overline{PB^2} = \overline{BB_o} \cdot \overline{BB_w}$ , zodat ook de buigcirkel geconstrueerd kan worden en daarmee het punt van Ball U. Kiest men het koppelpunt K in het punt van Ball en realiseert men de koppeldriehoek ABK, dan bezit de door het punt K doorlopen koppelkromme minstens één punt van Ball en is door beweging van de stangenvierzijde een behoorlijke rechtgeleiding verkregen.

**3. Eenvoudige relaties tussen de hoeken van de volledige vierzijde en de grootheden m, l, l<sub>o</sub>, R, R<sub>o</sub> en δ**

De vierzijde is behalve door de lengte der zijden en de positiehoek van één daarvan ook volledig vast te leggen door het geven van het lijnstuk PQ en de 4 hoeken, die de zijden met dat lijnstuk maken. De draaizin wordt steeds linksom draaiend positief gerekend en wel voor de hoeken  $\beta_o$  en  $\beta_2$  van de zijden naar de collineaties PQ en voor de hoeken  $\beta_1$  en  $\beta_3$  van de collineaties naar de zijden (zie figuur 8). De hoeken  $\varphi_A$  en  $\varphi_B$  zijn eveneens in dezelfde





6.

figuur weergegeven. Voor de cirkellooppunten A en B is in figuur 9 de bepaling van de lijn ML te zien. Op grond van de stelling van Bobillier is  $\sphericalangle QPA = \sphericalangle BPP$  zodat

$$\begin{aligned} \varphi_B + \beta_1 = \pi & \text{ en } \tan \varphi_A = -\tan \beta_3 = -\tau_3 \\ \text{en } \varphi_A + \beta_3 = \pi & \left| \begin{aligned} \tan \varphi_B = -\tan \beta_1 = -\tau_1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (17)$$

Met behulp van figuur 9 is te zien, dat

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\overline{PA}}{\cos \varphi_A}, & y_1 &= \frac{\overline{PA}}{\sin \varphi_A} \\ x_2 &= \frac{\overline{PB}}{\cos \varphi_B}, & y_2 &= \frac{\overline{PB}}{\sin \varphi_B} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

terwijl ook

$$\frac{m}{l} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (19)$$

Met behulp van figuur 8 leidt men af, dat

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PA} \cos \varphi_B}{\overline{PB} \cos \varphi_A} &= \frac{\overline{PA} \cos \beta_1}{\overline{PB} \cos \beta_3} = \frac{\overline{EP}}{\overline{DP}} \\ &= \frac{\overline{EA} / \tan \beta_1}{\overline{DB} / \tan \beta_3} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{\overline{QA} / \overline{QP}}{\overline{QB} / \overline{QP}} = \\ &= \frac{\tau_3 \sin \beta_1}{\tau_1 \sin (\beta_1 + \beta_2)} \cdot \frac{\sin (\beta_2 + \beta_3)}{\sin \beta_3} = \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_2 + \tau_1} \end{aligned}$$

zodat met (18) en (19)

$$\frac{m}{l} = -\frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_2} \quad (20)$$

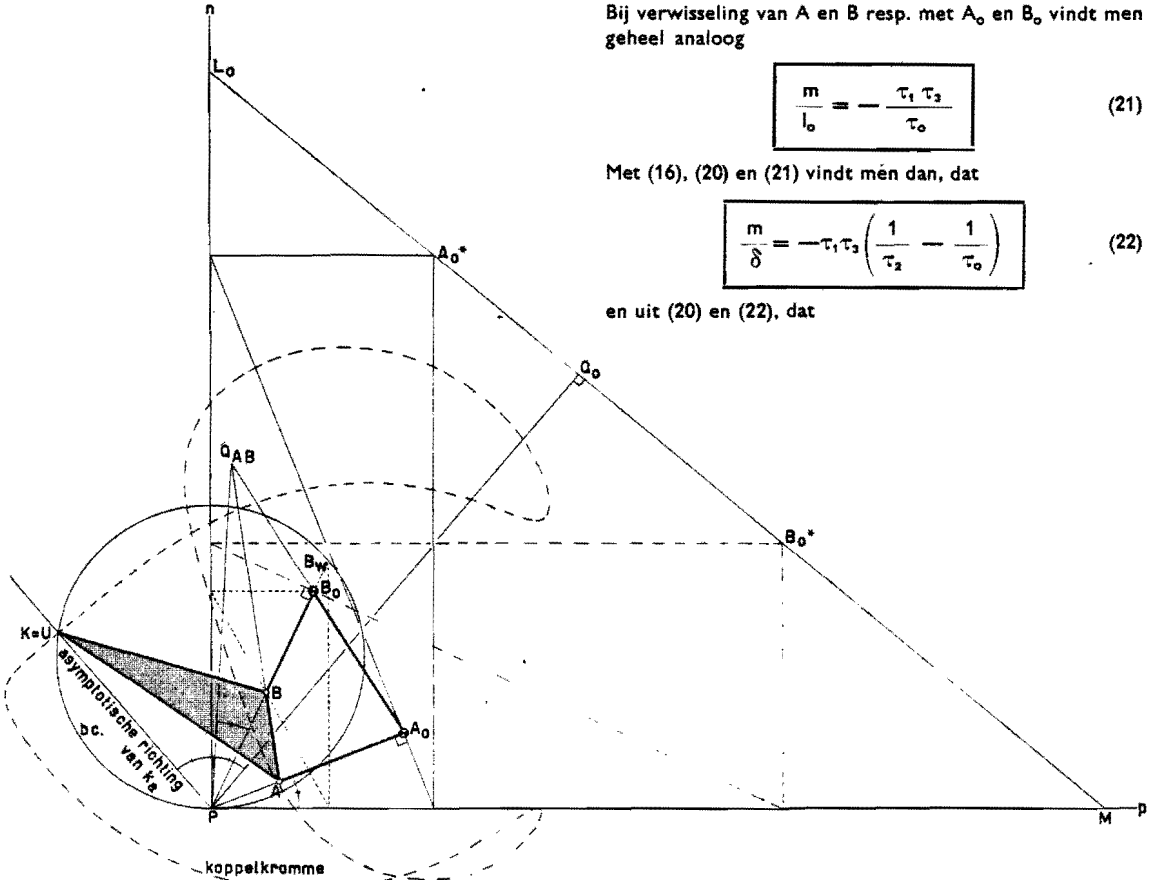
Bij verwisseling van A en B resp. met  $A_0$  en  $B_0$  vindt men geheel analoog

$$\frac{m}{l_0} = -\frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_0} \quad (21)$$

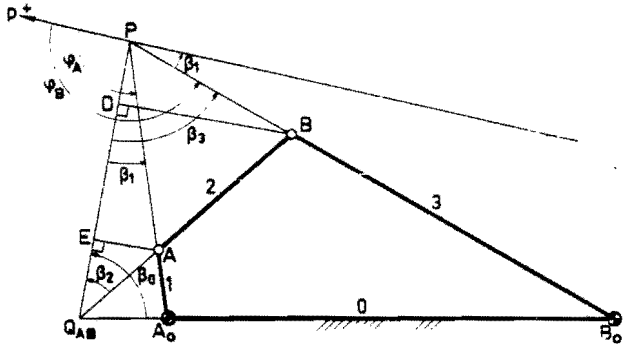
Met (16), (20) en (21) vindt men dan, dat

$$\frac{m}{\delta} = -\tau_1 \tau_3 \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_0} \right) \quad (22)$$

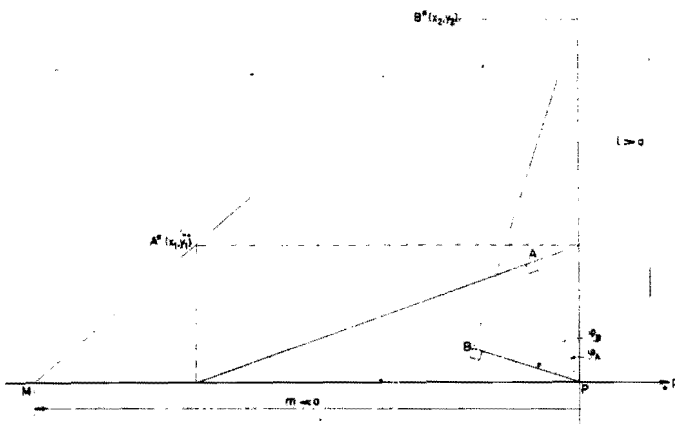
en uit (20) en (22), dat



7.



8.



9.

$$\frac{l}{\delta} = 1 - \frac{\tau_2}{\tau_0} \quad (23)$$

terwijl (21) en (22) de relatie oplevert

$$\frac{l_0}{\delta} = \frac{\tau_0}{\tau_2} - 1 \quad (24)$$

Met de betrekkingen (22) en (23) zijn de momentane invarianten van de linkerleden op direct meetbare wijze te bepalen uit het gegeven stel punten A, B, B<sub>0</sub> en A<sub>0</sub>. Tenslotte vindt men met (10) en (23) nog de betrekking

$$\frac{R}{\delta} = \frac{\tau_0 - \tau_2}{2\tau_0 + \tau_2} \quad (25)$$

en ook

$$\frac{R_0}{\delta} = \frac{\tau_0 - \tau_2}{2\tau_2 + \tau_0} \quad (26)$$

**4. Bepaling van de punten van Burmester bij de stangenvierzijde**

De punten van Burmester voldoen aan de betrekkingen

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2} = 0$$

Hieruit volgt, dat de door zulk een punt doorlopen baan-kromme een vijfpuntsaanraking heeft met de bijbehorende kromtecirkel van het beschouwde ogenblik.

De laatste betrekking geeft met behulp van de betrekkingen (3) en (7) een vergelijking die na substitutie van de waarde voor  $r$  uit (12) neerkomt op een vierde-graads-vergelijking in  $\tan \varphi$ .

$$\tan^4 \varphi + \left(\frac{m}{l} - \frac{m}{R}\right) \tan^3 \varphi + \left(2 - \delta \frac{d}{ds} \left(\frac{m}{\delta}\right)\right) \tan^2 \varphi - \frac{m^2}{3R^2} \delta \frac{d}{ds} \left(\frac{R}{\delta}\right) \tan \varphi + \frac{m^2}{l_0} = 0 \quad (27)$$

De vier punten van Burmester liggen dus op poolstralen, waarvan de richtingscoëfficiënten aan deze vergelijking voldoen.

Zijn A en B twee punten van Burmester, dan voldoen  $\tan \varphi_A = -\tau_3$  en  $\tan \varphi_B = -\tau_1$ , aan (27), zodat (27) met de verkorting  $\tau = \tan \varphi$  de gedaante

$$(\tau + \tau_1)(\tau + \tau_3)(\tau^2 + A\tau + B) = 0 \quad (28a)$$

of

$$\tau^2 + (A + \tau_1 + \tau_3) \tau + (\tau_1 \tau_3 + A\tau_1 + A\tau_3 + B) \tau^2 + (A\tau_1 \tau_3 + B\tau_1 + B\tau_3) \tau + B\tau_1 \tau_3 = 0 \quad (28b)$$

aanneemt.

Vergelijking met (27) geeft met (20), (21) en (25) de betrekkingen

$$A = \tau_1 \tau_3 \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1} \right) \quad (29)$$

en

$$B = \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_0 \tau_2} \quad (30)$$

Buiten de draaipunten A en B kunnen dus nog 2 punten van Burmester gevonden worden met behulp van de vierkantsvergelijking

$$\tan^2 \varphi + \tau_1 \tau_3 \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1} \right) \tan \varphi + \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_0 \tau_2} = 0$$

(31)

De twee snijpunten van de door deze vergelijking bepaalde poolstralen met de punt voor punt construeerbare cirkelloopkromme, zijn juist de gezochte punten van Burmester. Door vergelijking van (28b) met (27) en substitutie van de waarden voor A en B vindt men nog, dat

$$\delta \frac{d}{ds} \left(\frac{m}{\delta}\right) = 2 - \tau_1 \tau_3 \left\{ 1 + (\tau_1 + \tau_3) \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{1}{\tau_0 \tau_2} \right\} \quad (32)$$

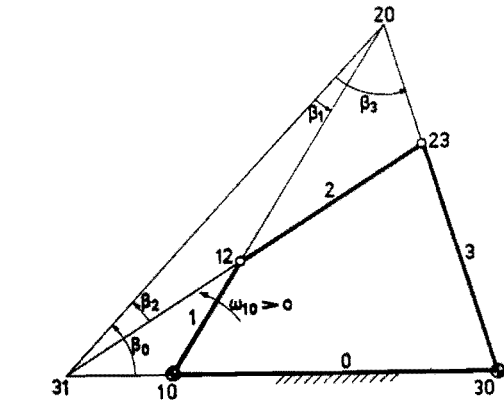
Met behulp van (22) en (25) vindt men tenslotte op dezelfde wijze,

$$\delta \frac{d}{ds} \left(\frac{l}{\delta}\right) = -\tau_2^2 \left\{ \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{1}{\tau_0 \tau_2} \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_3} \right) \right\} \quad (33)$$

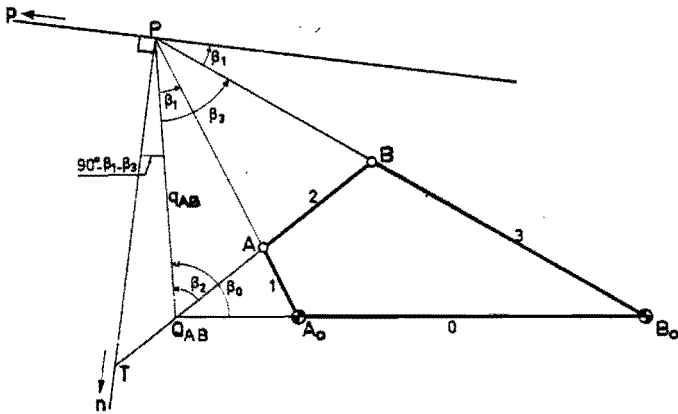
**5. De hoekveranderingen ( $\dot{\beta}_i$ ) als functie van de hoeken ( $\beta_i$ )**

Het linkerlid van (33) kan geschreven worden als:

$$\delta \frac{d}{ds} \left(\frac{l}{\delta}\right) = -\frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \frac{d}{ds} \left(\frac{l}{\delta}\right) = + \frac{d}{d\varphi_{20}} \left(\frac{\tau_2}{\tau_0}\right) =$$



10.



11.

$$\frac{\tau_o \frac{d\tau_2}{d\varphi_{20}} - \tau_2 \frac{d\tau_o}{d\varphi_{20}}}{\tau_o^2} \quad (34)$$

waarbij

$$\frac{d\tau_2}{d\varphi_{20}} = (1 + \tau_2^2) \frac{d\beta_2}{d\beta_o - d\beta_2} = (1 + \tau_2^2) \frac{(d\beta_2/d\beta_o)}{1 - (d\beta_2/d\beta_o)} \quad (35)$$

$$\text{en} \quad \frac{d\tau_o}{d\varphi_{20}} = (1 + \tau_o^2) \frac{1}{1 - (d\beta_2/d\beta_o)} \quad (36)$$

Eliminatie van  $(d\beta_2/d\beta_o)$  uit (35) en (36) geeft

$$\frac{1}{1 + \tau_2^2} \frac{d\tau_2}{d\varphi_{20}} = \frac{1}{1 + \tau_o^2} \frac{d\tau_o}{d\varphi_{20}} - 1 \quad (37)$$

(37) geeft in combinatie met (33) en (34) de betrekkingen

$$\frac{d\tau_o}{d\varphi_{20}} = -(1 + \tau_o^2) \frac{\tau_o \tau_2}{\tau_o - \tau_2} \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) \quad (38)$$

en

$$\frac{d\tau_2}{d\varphi_{20}} = -(1 + \tau_2^2) \frac{\tau_o \tau_2}{\tau_o - \tau_2} \left( \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_o} + \frac{1}{\tau_1} \right) \quad (39)$$

De laatste betrekking is ook door kinematische inversie uit de voorgaande af te leiden.

Aangezien

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{20}}{d\varphi_{31}} &= \frac{\omega_{20}}{\omega_{31}} = \frac{\omega_{20}/\omega_{10}}{(\omega_{30}/\omega_{10}) - 1} = \\ &= \frac{\frac{P_{21}P_{10}}{P_{21}P_{20}}}{\frac{P_{31}P_{10}}{P_{31}P_{30}} - 1} = - \frac{1 - \frac{P_{10}P_{20}}{P_{21}P_{20}}}{1 - \frac{P_{31}P_{10}/P_{31}P_{20}}{P_{31}P_{30}/P_{31}P_{20}}} = \\ &= - \frac{1 - \frac{\sin \beta_o / \sin(\beta_o + \beta_1)}{\sin \beta_2 / \sin(\beta_2 + \beta_1)}}{1 - \frac{\sin \beta_1 / \sin(\beta_1 + \beta_o)}{\sin \beta_2 / \sin(\beta_2 + \beta_o)}} = - \frac{1 - \frac{\tau_o}{\tau_2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_o}}{1 - \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{\tau_2 + \tau_o}{\tau_1 + \tau_o}} = \\ &= - \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_o \tau_2} \frac{\tau_2 - \tau_o}{\tau_3 - \tau_1} \quad (40) \end{aligned}$$

(zie figuur 10)

krijgt na cyclische verwisseling in de nummering van de 4 schakels betrekking (39) de gedaante

$$\frac{d\tau_3}{d\varphi_{20}} = -(1 + \tau_3^2) \frac{\tau_o \tau_2}{\tau_o - \tau_2} \left( \frac{1}{\tau_o} - \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (41)$$

terwijl (38) overgaat in

$$\frac{d\tau_1}{d\varphi_{20}} = -(1 + \tau_1^2) \frac{\tau_o \tau_2}{\tau_o - \tau_2} \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} + \frac{1}{\tau_o} \right) \quad (42)$$

Met de gemaakte tekenafspraken voor de hoeken  $\beta_m$  gaat bij de cyclische verwisseling de hoek  $\beta_2$  over in  $\pi - \beta_3$ ;  $\beta_o$  in  $\pi - \beta_1$ ;  $\beta_1$  in  $\pi - \beta_2$  en  $\beta_3$  in  $\pi - \beta_o$ , zodat  $\tau_2$  overgaat in  $-\tau_3$ ;  $\tau_o$  in  $-\tau_1$ ;  $\tau_1$  in  $-\tau_2$  en  $\tau_3$  in  $-\tau_o$  enz.

### 6. Het punt van Ball als punt van Burmester

Wanneer de koppelkromme in een koppelpunt een vijf-puntsaanraking met de raaklijn in dat punt heeft, is zulk een koppelpunt niet alleen een punt van Ball maar ook een punt van Burmester.

Dit is het geval, als  $-\frac{m}{l_o} \left( = \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_o} \right)$  een wortel is van de vierkantsvergelijking (31). Deze vierkantsvergelijking krijgt dus de volgende gedaante:

$$\left( \tan \varphi - \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_o} \right) \left( \tan \varphi - \frac{1}{\tau_2} \right) = 0 \quad (43)$$

Vergelijking van (43) met (31) leidt dan tot de conditie

$$-\frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_o} - \frac{1}{\tau_2} = \tau_1 \tau_2 \left( \frac{1}{\tau_o} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1} \right)$$

of

$$-\tau_1 - \tau_3 + \frac{1}{\tau_2} + \tau_1 \tau_2 \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{2}{\tau_o} \right) = 0 \quad (B1), (44)$$

Voldoen de hoeken van de vierzijde aan deze voorwaarde, dan is het punt van Ball een punt van Burmester. We spreken van een punt van Ball met excès 1. [2].

*Stelling: Het punt van Ball is tevens een punt van Burmester, indien de koppelstang de poolnormaal snijdt in een punt T waarvoor*

$$\frac{1}{PL} + \frac{1}{PL_0} = \frac{1}{2 \cdot PT} \quad (45)$$

Het bewijs van deze stelling wordt gegeven aan de hand van figuur 11. Op grond van de sinusregel in  $\Delta PTA$  is

$$\frac{PT}{PA} = - \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\cos(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}$$

Daar A een cirkellooppunt is, geldt, dat

$$\frac{1}{PA} = \frac{1}{l \sin(180^\circ - \beta_3)} + \frac{1}{m \cos(180^\circ - \beta_3)}$$

zodat

$$\frac{PT}{l} = - \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\cos(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} \cdot \frac{\sin \beta_3 \cos \beta_3}{\cos \beta_3 - (l/m) \sin \beta_3}$$

Substitutie van de waarde  $-\tau_2/\tau_1\tau_3$  voor  $l/m$  geeft na enige omwerking de betrekking

$$\frac{PT}{l} = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 - 1}$$

Op grond van de  $(Bl_1)$ -conditie kan dit geschreven worden als

$$\frac{PT}{l} = \frac{1/2}{1 + (\tau_2/\tau_0)}$$

zodat met  $\tau_2/\tau_0 = l/l_0$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_0} = \frac{1}{2 PT} \quad (45)$$

hetgeen bewezen moest worden.

### 7. Het punt van Ball met excès 2

Er is sprake van een zespuntsaanraking van de koppelkromme met de baantangente in het punt van Ball, als het linkerlid van (44) in de waarde nul een extremum bezit. Dit betekent, dat ook de afgeleide van dat linkerlid naar de tijd gelijk aan nul is. We krijgen zo naast (44) de conditie

$$-\tau_1' - \tau_3' - \frac{\tau_2'}{\tau_2^2} + \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{2}{\tau_0} \right) \left( \tau_1'\tau_3 + \tau_1\tau_3' \right) - \tau_1\tau_3 \left( \frac{\tau_2'}{\tau_2^2} + \frac{2\tau_0'}{\tau_0^2} \right) = 0$$

Op grond van de betrekkingen (38), (39), (41) en (42) geeft dit na deling door  $\tau_0\tau_2/(\tau_0 - \tau_2)$  de relatie

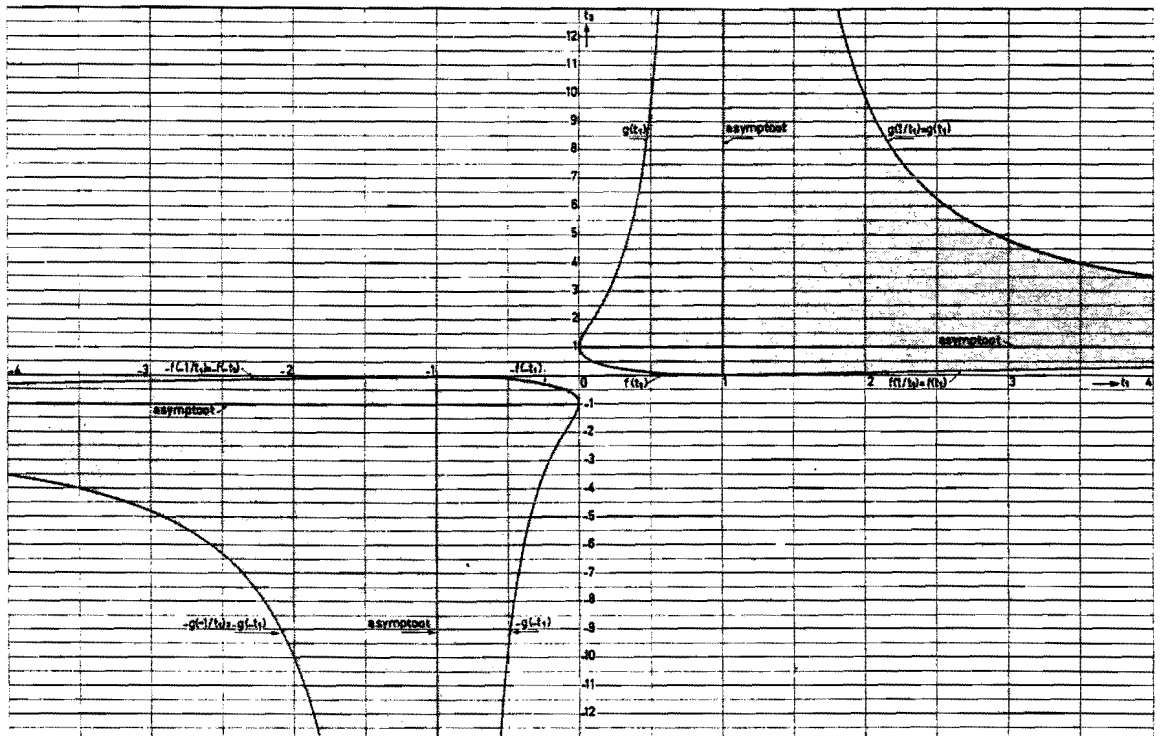
$$\begin{aligned} & (1 + \tau_1^2) \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_3} + \frac{1}{\tau_0} \right) \left( 1 - \frac{\tau_3}{\tau_2} - \frac{2\tau_3}{\tau_0} \right) + \\ & + (1 + \tau_3^2) \left( \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} - \frac{2\tau_1}{\tau_0} \right) + \\ & + \left( 1 + \frac{1}{\tau_2^2} \right) \left( \frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} \right) (1 + \tau_1\tau_3) + \\ & + 2\tau_1\tau_3 \left( 1 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) = 0 \end{aligned}$$

....  $(Bl_2)$  (46)

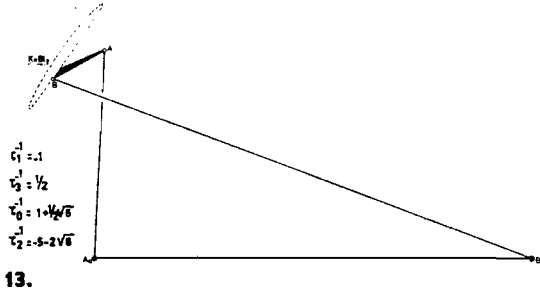
(44) en (46) zijn dus de voorwaarden, opdat het punt van Ball het excès 2 heeft. [2].

Meer dan een zespuntige aanraking is niet mogelijk, omdat de koppelkromme van de graad zes is en een zesdegraadskromme een rechte lijn in ten hoogste zes reële punten snijdt.

12.







De twee relaties (44) en (46) tussen de hoeken  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  en  $\beta_3$ , die nodig en voldoende zijn, opdat het punt van Ball het excès 2 heeft, laten slechts een vrije keuze van één der hoeken  $\beta_m$  toe. De keuze van een tweede hoek is namelijk beperkt, omdat alleen reële waarden voor de hoeken  $\beta_m$ , die voldoen aan de relaties (44) en (46), bruikbaar zijn. In het volgende zal de beperking opgelegd aan deze hoek, waarvoor  $\beta_3$  zal worden genomen, nader worden gepreciseerd. Voor de vrij te kiezen hoek zal de hoek  $\beta_1$  worden aangehouden.

Maakt men de afspraak, dat

$$t_i = \tau_i^{-1} = \cot \beta_i, \text{ waarbij } i = 0, 1, 2 \text{ of } 3.$$

dan krijgt (44) de gedaante

$$2 t_0 = (t_1 + t_2) - (1 + t_1 t_2) t_2 \quad (B1), (47)$$

terwijl mede op grond hiervan (46) geschreven kan worden als

$$(1 + t_1^2) (t_2 - t_3 + t_0) (t_2 t_2 - 1) + (1 + t_2^2) (t_0 - t_1 + t_2) (t_1 t_2 - 1) + (1 + t_2^2) (t_3 - t_0 + t_1) \cdot (1 + t_1 t_2) + 2 (1 + t_0^2) (t_1 + t_3 - t_2) = 0$$

$$\dots (B2) \quad (48)$$

Eliminatie van  $t_0$  uit (B1) en (B2) geeft dan

$$\begin{aligned} & (1 + t_1^2) \left\{ t_1 - t_3 - (t_1 t_3 - 1) t_2 \right\} (t_2 t_2 - 1) + \\ & + (1 + t_2^2) \left\{ t_3 - t_1 - (t_1 t_3 - 1) t_2 \right\} (t_1 t_2 - 1) + \\ & + (1 + t_1 t_2) (1 + t_2^2) \left\{ t_1 + t_3 + (t_1 t_3 + 1) t_2 \right\} + \\ & + \left\{ 4 + (t_1 + t_3)^2 + (t_1 t_3 + 1)^2 t_2^2 - 2(t_1 + \right. \\ & \left. + t_3) (t_1 t_3 + 1) t_2 \right\} (t_1 + t_3 - t_2) = 0. \end{aligned}$$

In deze betrekking is de coëfficiënt van  $t_2^3$  identiek nul, zodat een vierkantsvergelijking in  $t_2$  overblijft. Na uitwerking van de opeenvolgende coëfficiënten van deze vierkantsvergelijking en na deling door de gemeenschappelijke factor 5, krijgt men

$$(t_1 + t_2) (t_1 t_3 + 1) t_2^2 - (t_1^2 + 1) (t_2^2 + 1) t_2 + (t_1 + t_3) (t_1 t_3 + 1) = 0 \quad (B2) \quad (49)$$

Aangezien alleen reële wortels voor  $t_2$  realiseerbaar zijn, dienen  $t_1$  en  $t_3$  zo te worden gekozen, dat de discriminant van deze vierkantsvergelijking  $\geq 0$  is. Dit is het geval, indien

$$\begin{aligned} & 1/4) \rightarrow \varepsilon_1 (1 + t_1^2) / (1 + t_3^2) - t_2 (1 + t_3^2) / (1 + t_1^2) + t_3 (1 + t_1^2) / (1 + t_3^2) = 0 \\ & \text{of } \sin 2\beta_1 - \sin 2\beta_2 + \sin 2\beta_3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Zie R. Müllers} \\ \text{§ 9.2 Veldkämpfe} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\left\{ (t_1^2 + 1) (t_3^2 + 1) \right\}^2 \geq 4 (t_1 + t_3)^2 (t_1 t_3 + 1)^2$$

of als

$$2 (t_1 + t_3) (t_1 t_3 + 1) \leq (t_1^2 + 1) (t_3^2 + 1) > 0.$$

Dit betekent, dat

$$\begin{aligned} & - (t_1^2 + 1) (t_3^2 + 1) \leq 2 (t_1 + \\ & + t_3) (t_1 t_3 + 1) \leq (t_1^2 + 1) (t_3^2 + 1) \end{aligned} \quad (50)$$

De rechter ongelijkheid kan worden omgeschreven tot

$$\left\{ t_3 - \frac{t_1^2 + 1}{(t_1 - 1)^2} \right\}^2 \geq \frac{4 t_1 (t_1^2 - t_1 + 1)}{(t_1 - 1)^4}.$$

Is  $t_1 < 0$ , dan is hier steeds aan voldaan, omdat in dat geval het rechterlid negatief is.

Is echter  $t_1 > 0$ , dan dient

$$\left| t_3 - \frac{t_1^2 + 1}{(t_1 - 1)^2} \right| \geq \frac{2}{(t_1 - 1)^2} \sqrt{t_1 (t_1^2 - t_1 + 1)}$$

De linker ongelijkheid kan worden omgeschreven tot

$$\left\{ t_3 + \frac{t_1^2 + 1}{(t_1 + 1)^2} \right\}^2 \geq \frac{-4 t_1 (t_1^2 + t_1 + 1)}{(t_1 + 1)^4}$$

Is  $t_1 > 0$ , dan is hier steeds aan voldaan. Is echter  $t_1 < 0$ , dan dient

$$t_3 + \frac{t_1^2 + 1}{(t_1 + 1)^2} \geq \frac{2}{(t_1 + 1)^2} \sqrt{-t_1 (t_1^2 + t_1 + 1)}$$

Samengevat dient dus in het geval  $t_1 < 0$

$$t_3 \geq \frac{1}{(t_1 + 1)^2} \left\{ 2 \sqrt{-t_1 (t_1^2 + t_1 + 1)} - (t_1^2 + 1) \right\} = -f(-t_1) \quad (50a)$$

of

$$t_3 \leq \frac{-1}{(t_1 + 1)^2} \left\{ 2 \sqrt{-t_1 (t_1^2 + t_1 + 1)} + (t_1^2 + 1) \right\} = -g(-t_1) \quad (50b)$$

en in het geval  $t_1 > 0$

$$t_3 \geq \frac{1}{(t_1 - 1)^2} \left\{ t_1^2 + 1 + 2 \sqrt{t_1 (t_1^2 - t_1 + 1)} \right\} = g(t_1) = g(1/t_1) \quad (50c)$$

of

$$t_3 \leq \frac{1}{(t_1 - 1)^2} \left\{ t_1^2 + 1 - 2 \sqrt{t_1 (t_1^2 - t_1 + 1)} \right\} = f(t_1) = f(1/t_1) \quad (50d)$$

In figuur 12 zijn de twee verboden gebieden aangegeven. Daarbij zijn langs de assen de waarden voor  $t_1$  en  $t_3$  uitgezet.

Voor het construeren van de vierzijde gaat men nu als volgt te werk: Men kiest  $t_1 = \tau_1^{-1}$  en  $t_3 = \tau_3^{-1}$  in overeenstemming met de toegestane waarden volgens figuur 12. Vervolgens berekent men  $t_2 = \tau_2^{-1}$  met behulp van de vierkantsvergelijking (B2) in deze grootte. Voor een van deze waarden  $t_2$  bepaalt men de grootte  $t_0 = \tau_0^{-1}$  met de (B1)-conditie. Met behulp van de vier waarden  $t_1, t_2, t_3$  en  $t_0$  is dan de vierzijde te tekenen, waarbij  $U = B1_2$ . (Opgemerkt kan worden, dat elk punt uit het vlak van figuur 12 correspondeert met 2 oplossingen van het probleem). Op deze wijze kunnen weliswaar benaderde, maar toch zeer goede rechtgeleidingen worden gerealiseerd (zie figuur 13). (wordt vervolgd)