Drukberekening bij magnaform

technische hogeschool eindhoven laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek	blz. 1 van 12 blz. rapport nr. 0131
rapport van de sectie: Werkplaatstechniek	codering: magnaform.
titel: Drukberekening bij magnaform	
auteur(s): D.C. Kerstens	trefwoord: P.6.b
sectieleider: ir. E.T.W. Zweekhorst	
hoogleraar: Prof.dr. P.C. Veenstra	
samenvatting	
prognose	datum: 22.3.1965
	aantal blz. 12 + bijl.1 t/m 5
	geschikt voor publicatie in:

samenvatting

Toepassing van de wetten van Biot en Savart, Maxwell, Ohm en Lorenz leidt tot een uitdrukking voor de druk op een in een cylindrische schroefvormige spoel geplaatste cylinder.
De gevonden uitdrukking is met numerieke methoden te berekenen.

Met een benaderende berekening worden bij een stroom van 10.000A met een stijgtijd van 1 μ sec. drukken van 2,67 x 10^{10} Newton/m^2 gevonden.

prognose

Deze berekening kan leiden tot een juiste spoelconstructie bij het "magnaform" proces.

Inhoud.

Lijst van gebruikte symbolen en eenheden.

1. Berekening van de magnetische inductie bij stroomdoorgang door de spoel in een willekeurig punt binnen de spoel.

   1.1. Berekening aan een enkele winding.

   1.2. Beschouwing van een cylindrisch schroefvormige spoel met lengte l en N windingen.

2. Berekening van de kracht op een in een cylindrisch schroefvormige spoel geplaatste metalen cylinder, bij stroomdoorgang door de spoel.

   2.1. Berekening van de magnetische flux door de cylinder.

3. Bijlage.
   Benaderende berekening van de druk welke door een cylindrische schroefvormige spoel, waardoorheen een stroom i loopt, op een in de spoel geplaatste cylinder wordt uitgeoefend.

Lijst van gebruikte symbolen.

symbool	benaming	dimensie
B	magnetische inductie	Weber
	magnetische permeabiliteit	Henry meter^{-1}
i	stroom door de spoel	Ampère
Ø	magnetische flux	Weber meter^{2}
E	Electrisch veld	Volt meter^{-1}
	specifieke ohmse weerstand	Ohm meter
F	Lorenzkracht	Newton
a	straal van de spoel	meter
l	lengte van de spoel	meter
Ru	uitwendige straal van de cylinder	meter
Ri	inwendige straal van de cylinder	meter
s	wanddikte van de cylinder	meter
h	hoogte van de cylinder	meter
x, y, z	cartesiaanse coördinaten	
y, z, v	cylindercoördinaten	

Berekening van de druk op een in een cylindrisch schroefvormige spoel geplaatste cylinder bij stroomdoorgang door de spoel.

1. Berekening van de magnetische inductie bij stroomdoorgang door de spoel in een willekeurig punt binnen de spoel.

1.1. Berekening aan een enkele winding.

Volgens Biot en Savart geldt voor de magnetische inductie in een punt P tengevolge van stroomdoorgang door een geleider dl :

$$dB = \frac{\mu}{4} \; \frac{i \; dl \times \bar{r}}{r^3}$$

Hierin is:

dB : de magnetische inductie; [B] : Weber

u : de magnetische permeabiliteit; [u] : Henry/meter

$u = uo \; u_r$

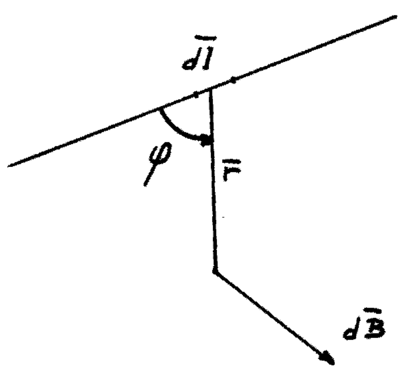
uo = de magnetische permeabiliteit in vacuum

u_r = de relatieve permeabiliteit

i : de stroom door draadelement dl; [i] = Ampère

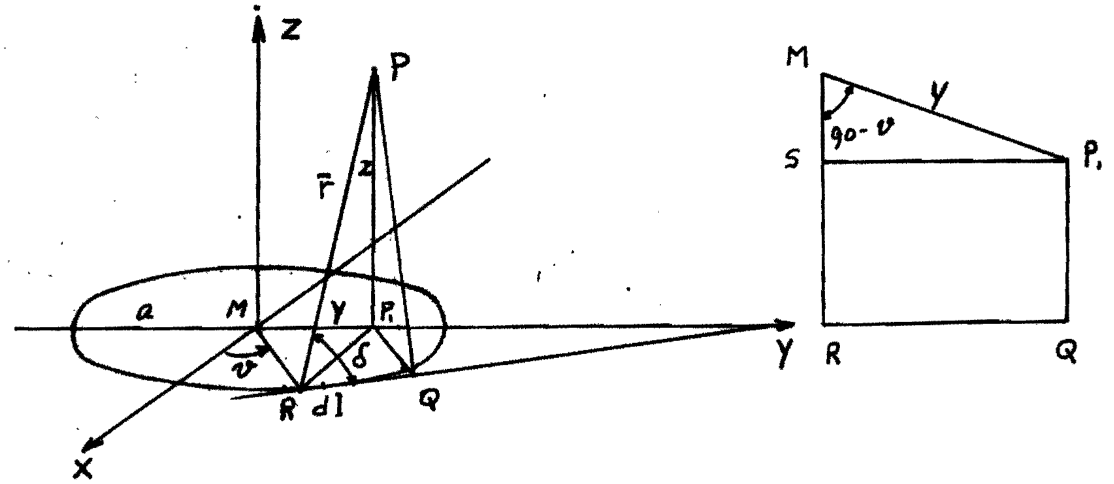
dl : de grootte van het draadelement; [l] : meter

r : de grootte van de verbindingslijn van punt P met het draadelement dl; [r] : meter



Figuur 1: De wet van Biot en Savart, toegepast op een draadelement.

De wet van Biot en Savart toegepast op een enkele winding van de spoel, waarbij deze winding door een cirkel wordt benaderd, geeft de volgende situatie:



Figuur 2: De wet van Biot en Savart, toegepast op een enkele winding.

$$d\bar{B} = \frac{\mu}{4\pi}\, i\, \frac{dl}{r^2} \sin\delta \qquad (1)$$

Als gegeneraliseerde coordinaten zijn ingevoerd

$$y, \quad Z \quad \text{en} \quad \vartheta$$

Het is nu zaak, de grootheden

$$dl, \; r \quad \text{en} \quad \sin\delta$$

in de gegeneraliseerde coordinaten uit te drukken.

Berekening van $\sin\delta$

In MP_1S is :

$$P_1S = y\cos\vartheta \qquad (2)$$

In P_1QR is:

$$P_1Q = a - y\sin\vartheta \qquad (3)$$

$$P_1R = \sqrt{(a - y\sin\vartheta)^2 + y^2\cos^2\vartheta} \qquad (4)$$

of

$$P_1R = \sqrt{a^2 + y^2 - 2ay\sin\vartheta} \qquad (5)$$

In $\Delta\, PP_1Q$ is

$$PQ = \sqrt{z^2 + (a - y\sin\vartheta)^2} \qquad (6)$$

of

$$PQ = \sqrt{z^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta + y^2\sin^2\vartheta} \qquad (7)$$

In $\Delta\, PP_1R$ is

$$r = PR = \sqrt{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta} \qquad (8)$$

In $\Delta\, PQR$ is

$$\sin\delta = \frac{PQ}{PR} \qquad (9)$$

of

$$\sin\delta = \sqrt{\frac{z^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta + y^2\sin^2\vartheta}{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta}} \qquad (10)$$

<u>Berekening van r^2</u>

In $\Delta\, PP_1R$ is

$$r^2 = PR^2 = z^2 + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta \qquad (11)$$

<u>Berekening van dl</u>

$$dl = a\,d\vartheta \qquad (12)$$

Met de uitdrukkingen (9), (10) en (11), gaat uitdrukking (1) voor de magnetische inductie in P over in:

$$d\bar{B} = \frac{\mu\, i\, a}{4\pi} \frac{\left[z^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta + y^2\sin^2\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[z^2 + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\vartheta \qquad (13)$$

De magnetische inductie tengevolge van de hele winding wordt nu:

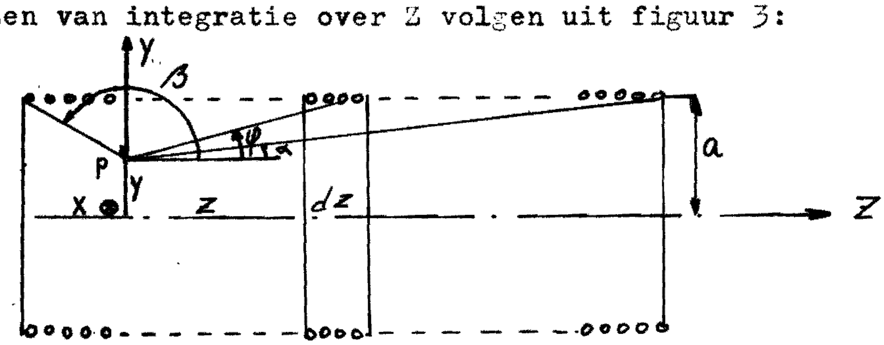
$$\bar{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu\, i\, a}{4\pi} \frac{\left[z^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta + y^2\sin^2\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[z^2 + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\vartheta \qquad (14)$$

1.2. Beschouwing van een cylindrisch schroefvormige spoel met lengte l en N windingen.

Indien aangenomen wordt dat de windingen van de spoel zeer dicht bij elkaar liggen, dan kan de magnetische inductie in P tengevolge van het spoel element dz, gevonden worden, door uitdrukking (13) te vermenigvuldigen met $\frac{N}{l}$ dz en over Z te integreren:

$$\bar{B} = \frac{N}{l} \int dz \int_0^{2\pi} \frac{\mu\, i\, a}{4\pi} \frac{\left[z^2 + (a - y\sin\vartheta)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[z^2 + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\vartheta \qquad (15)$$

De grenzen van integratie over Z volgen uit figuur 3:



Figuur 3: Biot en Savart, toegepast op een schroefvormige spoel.

Uit figuur 3 blijkt, dat:

$$z = (a - y)\cot\varphi \tag{16}$$

en

$$dz = -\frac{a-y}{\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{17}$$

De hoek φ loopt van α tot β

Uitdrukking (14) gaat hiermee over in:

$$\bar{B} = \frac{\mu\, i\, a\, N}{4\pi l}\int_{\alpha}^{\beta}(y-a)\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\left[(a-y)^2\cot^2\varphi + (a - y\sin\vartheta)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(a-y)^2\cot^2\varphi + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta \tag{18}$$

2. Berekening van de kracht op een in een cylindrisch schroefvormige spoel geplaatste metalen cylinder, bij stroom doorgang door de spoel.

2.1. Berekening van de magnetische flux ϕ door de cylinder.

Volgens de tweede wet van Maxwell geldt:

$$\phi = \int_A \bar{B}\cdot\bar{n}\,dA \tag{19}$$

Hierin zijn:

B de magnetische inductie in grootte en richting door het oppervlak dA

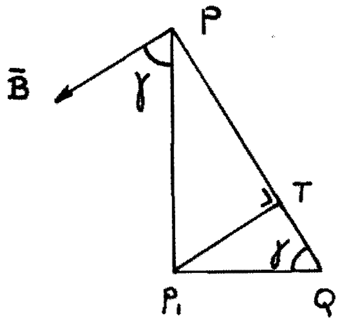
A het beschouwde oppervlak

n de normaal op dit oppervlak

De richting van B valt samen met de richting van de normaal uit P_1 op PQ in $\Delta\, P P_1 Q$ in figuur 1.

De richting van $\bar{n}$ valt samen met de richting van de z - as.

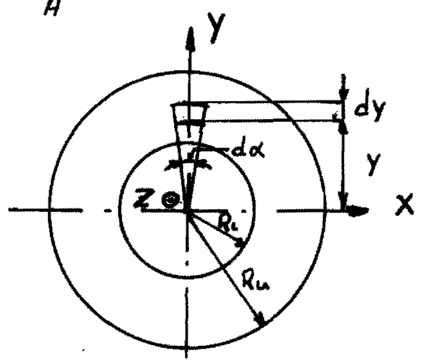
Indien in figuur 4 γ de hoek voorstelt tussen de richtingen van $\underline{B}$ en $\underline{n}$,



Figuur 4. Berekening van de magnetische flux in een punt in het veld van een schroefvormige spoel.

dan kan uitdrukking (18) geschreven worden als

$$\phi = \int_A B \cos\gamma \, dA \tag{20}$$



Figuur 5: Bepaling van de magnetische flux door een metalen cylinder.

In figuur 5 is een doorsnede getekend van de coaxiale metalen cylinder, die in de schroefvormige spoel wordt geplaatst.
Voor de flux door de cylinder geldt nu :

$$\phi = \int_{R_i}^{R_u} 2\pi \cos\gamma \cdot B \, y \, dy \tag{21}$$

In ΔPP_1Q is

$$\cos\gamma = \frac{P_1Q}{PQ} \tag{22}$$

of

$$\cos\gamma = \frac{a - y\sin\vartheta}{\sqrt{\left[z^2 + (a - y\sin\vartheta)\right]^2}} \tag{23}$$

Uitdrukking (21) gaat over in

$$\phi = \frac{\mu i a N}{2l}\int_{R_l}^{R_u} y\,dy\int_{\alpha}^{\beta}(y-a)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_0^{2\pi}\frac{\left[(a-y)^2\cot^2\varphi + (a-y\sin\vartheta)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[a-y\sin\vartheta\right]d\vartheta}{\left[(a-y)^2\cot^2\varphi + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta\right]^{\frac{3}{2}}\left[z^2+(a-y\sin\vartheta)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{24}$$

Volgens de tweede wet van Maxwell geldt:

$$\oint \bar{E}\cdot\bar{dl} = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{25}$$

Hierin is:

$\bar{E}$ het geinduceerde electrische veld.

Volgens de wet van Ohm geldt:

$$\bar{E} = \rho\,\bar{J} \tag{26}$$

of

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \rho\,\bar{J}\,2\pi R_u \tag{27}$$

De stroomdichtheid J hierin, wordt gegeven door:

$$\bar{J} = \frac{i_g}{S\ h} \tag{28}$$

Hierin is:

S = Ru - Ri : de wanddikte van de cylinder

i_g : de door de fluxverandering geinduceerde wervelstroom.

h : de hoogte van de cylinder.

Voor i_g geldt de betrekking:

$$i_g = - \frac{s\,h}{\rho} \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{2\pi R_u} \tag{29}$$

of

$$i_g = - \frac{s\,h\,\mu\,a\,N\,l\,\frac{di}{dt}}{4\pi R_u \rho\, l} \int_{R_i}^{R_u} y\,dy \int_{\alpha}^{\beta} (y-a) \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[(a-y)^2\cot^2\varphi + (a-y\sin\vartheta)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[a - y\sin\vartheta\right] d\vartheta}{\left[(a-y)^2\cot^2\varphi + y^2 + a^2 - 2ay\sin\vartheta\right]^{\frac{3}{2}} \left[z^2 - (a-y\sin\vartheta)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{30}$$

De optredende Lorentzkracht is gelijk aan het uitwendig product van de inductievector en de stroomvector:

$$\bar{F} = \bar{i} \times \bar{B} \tag{31}$$

of

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{matrix} i_y B_z - i_z B_y \\ i_z B_x - i_x B_z \\ i_x B_y - i_y B_x \end{matrix} \tag{32}$$

Formule (31) toegepast op een punt van de beschouwde cylinder levert:

$$\bar{F} = J_y \cdot B_z \tag{33}$$

Berekening van B uit uitdrukking (17) en van Jy uit de uitdrukkingen (26) en (29) levert de kracht in het vlakje dy, dz, of dy, ofwel de spanning in dit punt.

Opmerkingen

- De windingen van de spoel zijn cirkelvormig aangenomen, terwijl de spoel in werkelijkheid een spiraal is.
  De vergelijking van een spiraal in cylindercoordinaten wordt gegeven door

$$x = a \cos \vartheta$$
$$y = a \sin \vartheta$$
$$z = h \varphi \qquad \text{met} \quad h = \frac{s}{2\pi}$$

  Hierdoor ontstaat in de berekening van de hoek   onder 1.1. een kleine wijziging.

- De afgeleide integralen zijn met numerieke methoden uit te rekenen.

Bijlage

Benaderende berekening van de druk welke door een cylindrisch schroefvormige spoel, waardoorheen een stroom i loopt, op een in de spoel geplaatste cylinder wordt uitgeoefend.

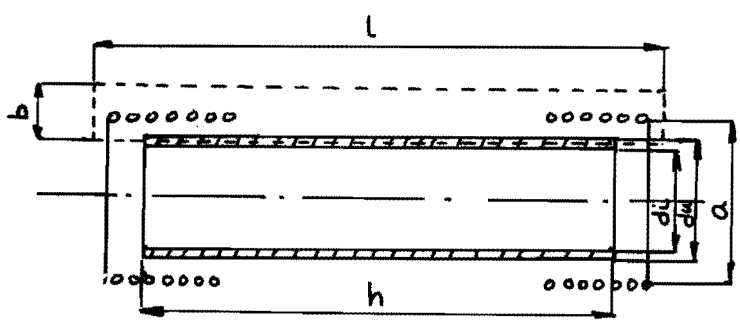
Indien de lengte van de spoel l bedraagt, het aantal windingen N en de diameter a, dan geldt, indien het magnetisch veld H in de spoel homogeen verondersteld wordt, volgens de eerste wet van Maxwell:

$$\oint \bar{H} \cdot \bar{dl} = N i \qquad (1)$$

In deze vergelijking wordt de optredende verplaatsingstroom verwaarloosd.

Bij de door figuur 1 gegeven configuratie kan hiervoor geschreven worden:

$$H\left[2l + 2b\right] = N i \qquad (2)$$



Figuur 1 : cylinder, geplaatst in een spoel.

of

$$H = \frac{N i}{2\left[l + b\right]} \qquad (3)$$

met de betrekking

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \bar{B} \qquad (4)$$

kan voor de magnetische inductie geschreven worden

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2[l + b]} \tag{5}$$

De richting van B valt samen met de asrichting van de spoel.

De magnetische flux ϕ door de cylinder kan worden gevonden met

$$\phi = \int_A \bar{B} \cdot \bar{n} \, dA \tag{6}$$

of

$$\phi = B \frac{\pi}{4} \left[d_u^2 - d_i^2 \right] \tag{7}$$

of

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r N i \pi}{8[l + b]} \left[d_u^2 - d_i^2 \right] \tag{8}$$

De in de cylinder geinduceerde spanning is gelijk aan de verandering van de magnetische flux met de tijd:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r N i \pi}{8[l + b]} \left[d_u^2 - d_i^2 \right] \frac{di}{dt} \tag{9}$$

Volgens de tweede wet van Maxwell geldt:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \frac{d\phi}{dt} \tag{10}$$

of

$$E \pi d_u = - \frac{d\phi}{dt} \tag{11}$$

Volgens de wet van Ohm geldt nu

$$\bar{E} = \rho \bar{J} \tag{12}$$

waarin

ρ de soortelijke weerstand, en
J de stroomdichtheid, geinduceerd in de cylinder
voorstelt.

Voor de stroomdichtheid J wordt gevonden

$$\bar{J} = - \frac{1}{\rho \pi d_u} \frac{d\Phi}{dt} \tag{13}$$

of

$$J = \frac{\mu_o \mu_r N}{8 \rho d_u [l + b]} [d_u^2 - d_i^2] \frac{di}{dt} \tag{14}$$

Volgens de wet van Lenz geldt voor de kracht

$$\bar{F} = \bar{i} \times \bar{B} \tag{16}$$

Voor dit cirkelsymmetrisch geval wordt dit

$$F = J B \tag{17}$$

waarbij $\bar{F}$ dan de kracht op een oppervlak $dx\,dy$ van de cylinder voorstelt, radiaal naar binnen gericht.

Uitdrukking (17) gaat nu over in

$$\bar{F} = \frac{\mu_0^2\,\mu_r^2\,N^2}{16\,\rho\,d_u\,[l + b]^2}\,[d_u + d_i]\,[d_u - d_i]\;i\,\frac{di}{dt} \qquad (18)$$

Rekenvoorbeeld.

Berekening van de kracht op een koperen cylinder met

du = 0,1 m
di = 0,09 m
h = 0,2 m

$\rho = 0{,}0175\ \Omega/m/mm^2$
$\mu = 4\pi \times 0{,}9999912 \times 10^{-7} \approx 4\pi \times 10^{-7}$

terwijl de afmetingen van de spoel

N = 10 windingen
l = 0,2 m
a = 0,12 m.

$$F = -\frac{\mu_0^2\,\mu_r^2\,N^2}{16\,\rho\,d_u\,[l + b]^2}\,[d_u + d_i]\,[d_u - d_i]\;i\,\frac{di}{dt}$$

$$F = -\frac{16\,\pi^2 \times 10^{-14} \times 10^2}{16 \times 0{,}0175 \times 10^{-6} \times 10^{-1} \times 4 \times 10^{-2}} \times 0{,}19 \times 10^{-2}\;i\,\frac{di}{dt}$$

$$F = \frac{10^9 \times \pi^2 \times 10^{-12} \times 0{,}19}{1{,}75 \times 4}\;i\,\frac{di}{dt}$$

$$F = 0{,}267 \times 10^{-3}\;i\,\frac{di}{dt} \quad \text{Newton}$$

Bij een stroom van 10.000 A met een stijgtijd van 1 u sec wordt F:

$$F = 0,267 \times 10^{-3} \times 10^{14} \quad N$$

$$F = 0,267 \times 10^{11} \quad N.$$

$$F = 2,67 \times 10^{10} \quad N.$$

Opmerkingen

1. In het rekenvoorbeeld is uitgegaan van een stroom van 10.000 A met een stijgtijd van 1 u sec. De vraag is of deze waarden bij de aangenomen spoel te halen zijn, in verband met de zelfinductie van de spoel.

2. Bij de berekening van de magnetische inductie is uitgegaan van de veronderstelling, dat het magnetisch veld homogeen is, hetgeen onjuist is.

   Deze beide punten zullen aanleiding geven tot een verlaging van de berekende waarde voor de kracht in het rekenvoorbeeld.

3. De kracht F is te schrijven als een constante vermenigvuldigt met $i \frac{di}{dt}$: $F = C \times i \frac{di}{dt}$

   Daarom is het beter te spreken van een stoot of impuls.

4. De magnetische permeabiliteit van ijzer is geen constante, doch een functie van de magnetische veldsterkte. In de berekening is μ gelijk gesteld aan μ_0, de magnetische permeabiliteit van vacuum.