

## Appendices bij: Optimaal schatten van parameters in niet-lineaire modellen van dynamische systemen

**Citation for published version (APA):**

Vaassen, W. M. H. (1988). *Appendices bij: Optimaal schatten van parameters in niet-lineaire modellen van dynamische systemen*. (DCT rapporten; Vol. 1988.029). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1988

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Appendices bij:  
**Optimaal schatten van parameters in niet-  
lineaire modellen van dynamische systemen**

W.M.H. Vaassen

WFW—rapport 88.029

Afstudeerhoogleraar: Prof. dr. ir. J.J. Kok

Afstudeerbegeleider: Ir. M.J.G. van de Molengraft

juni 1988

Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit der Werktuigbouwkunde  
Vakgroep Fundamentele Werktuigbouwkunde

**Appendices** bij WFW rapport 88.027

- A Een eenvoudig voorbeeld
- B Schatten van een viskeuze dempingsparameter
- C Schatten van een viskeuze en een Coulombse dempingsparameter
- D Een massa-veersysteem
- E De bewegingsvergelijking van de elastische simulatie-robot
- F De bewegingsvergelijking voor het schattingsmodel van de robot
- G Structuur en eigenwaarden van de Jacobiaan van het stelsel differentiaalvergelijkingen

## Appendix A; een eenvoudig voorbeeld

Bij het optimaliseren van modelparameters wordt gebruik gemaakt van een zogenaamde augmented state; een toestandsvektor waarin modelparameters zijn opgenomen. In dit voorbeeld bestaat die toestandsvektor uit slechts één element. Er wordt uitgegaan van een gegeven in- en uitgang van een systeem, aangegeven met respectievelijk  $u(\tau)$  en  $y(\tau)$ .

De gegevens voor het schattingsprobleem zijn:

$$\text{metingen:} \quad u(\tau) \equiv 1, \quad y(\tau) \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \text{model:} \quad \dot{x}_{\text{mod}}(\tau) &= u(\tau) \\ y_{\text{mod}}(\tau) &= x_{\text{mod}}(\tau) \end{aligned}$$

$$\text{integraalkriterium:} \quad J = \int_{\tau=0}^1 [ \{x(\tau) - y(\tau)\}^2 + W \{ \dot{x}(\tau) - u(\tau) \}^2 ] d\tau$$

Als schatting voor de modeltoestand moet  $x(\tau)$  zodanig gekozen worden dat  $J$  minimaal is. Dit probleem heeft dan, en slechts dan, een eenduidige oplossing als  $W > 0$ . Als  $W = 0$  bestaan er meerdere oplossingen. Als  $W < 0$  heeft het probleem geen oplossing. Wij nemen verder  $W > 0$ .

Voor het oplossen van het schattingsprobleem kan gebruik gemaakt worden van een eigenschap van de oplossing  $x(\tau)$ . De toestandsschatting moet voldoen aan een stelsel differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden dat volgt uit het gelijk aan nul stellen van de infinitesimale variatie van  $J$  bij variatie van  $x(\tau)$ :

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau) + \frac{1}{W} \lambda(\tau)$$

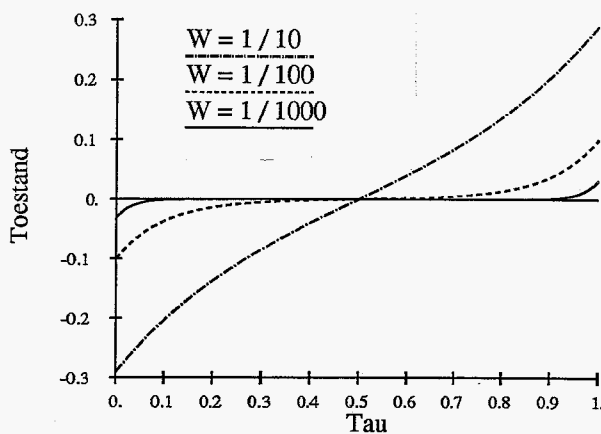
$$\dot{\lambda}(\tau) = x(\tau) - y(\tau)$$

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda(1) = 0$$

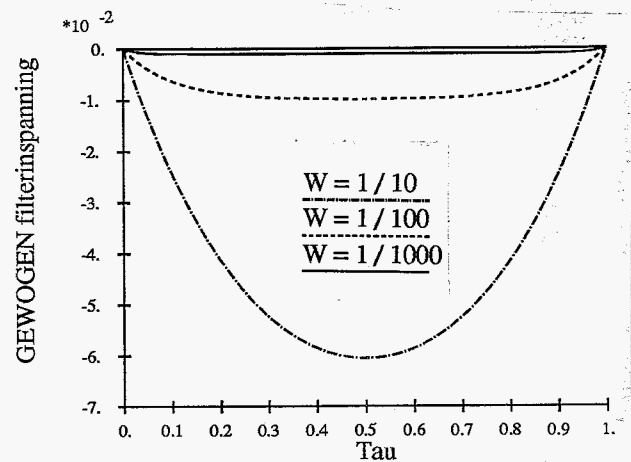
De oplossing van dit stelsel is eenduidig. Dit impliceert dat de oplossing  $\mathbf{x}(\tau)$  optimaal is t.a.v. het minimaliseren van  $J$ . Met de gegeven  $\mathbf{u}(\tau)$  en  $\mathbf{y}(\tau)$  luidt de oplossing:

$$\mathbf{x}(\tau) = \frac{2\sqrt{W} \sinh\left[\frac{1}{2\sqrt{W}}\right]}{\sinh\left[\frac{1}{\sqrt{W}}\right]} \sinh\left[\frac{\tau-\frac{1}{2}}{\sqrt{W}}\right]$$

$$\lambda(\tau) = W \left[ \frac{2 \sinh\left[\frac{1}{2\sqrt{W}}\right]}{\sinh\left[\frac{1}{\sqrt{W}}\right]} \cosh\left[\frac{\tau-\frac{1}{2}}{\sqrt{W}}\right] - 1 \right]$$



figuur A.1  $\mathbf{x}(\tau)$



figuur A.2  $\lambda(\tau)$

Merk op:  $\lim_{W \downarrow 0} \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}(\tau) \quad \forall \tau \in [0,1]$

$\lim_{W \downarrow 0} \lambda(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0,1]$

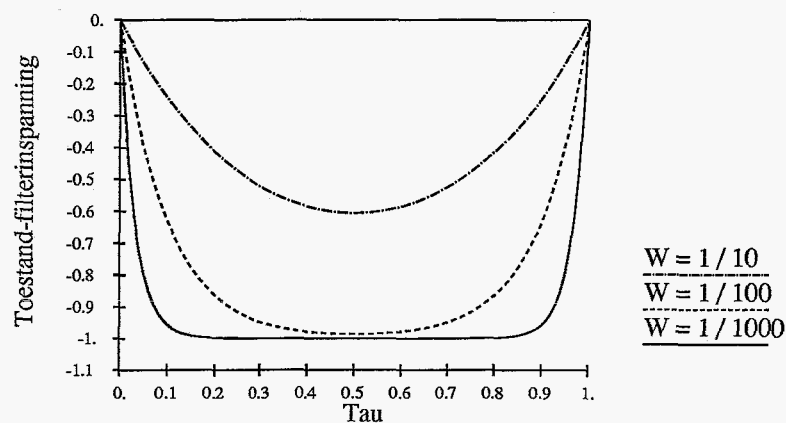
Het numeriek oplossen van het randwaardeprobleem kost meer rekentijd naarmate  $W$  kleiner is. Dit vindt zijn oorzaak in de toenemende stijfheid van het stelsel differentiaalvergelijkingen als  $W$  naar 0 nadert. De Jacobiaan van het stelsel heeft de volgende vorm:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{W} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenwaarden: } \frac{-1}{\sqrt{W}} \text{ en } \frac{1}{\sqrt{W}}$$

De eigenwaarden zijn reëel en hun onderling verschil neemt toe als  $W$  naar 0 nadert. Dit uit zich o.a. in het verloop van de filterinspanning  $\xi(\tau)$  dat met afnemende  $W$  naar een diskontinue functie gaat;

$$\lim_{W \downarrow 0} \xi(\tau) = \lim_{W \downarrow 0} \frac{1}{W} \lambda(\tau) = \begin{cases} -1 & \forall \tau \in < 0,1 > \\ 0 & \text{voor } \tau = 0 \vee \tau = 1 \end{cases}$$



figuur A.3  $\xi(\tau)$

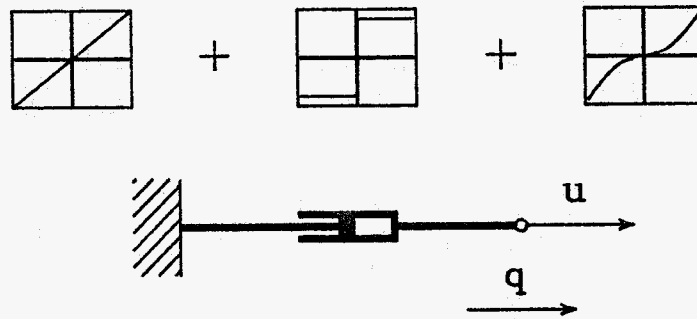
We kunnen konkluderen dat het gegeven model niet goed is. Als  $W$  groot is, dan is het residu  $\rho(\tau) = \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)$  groot. Als  $W$  klein is dan is de filterinspanning  $\xi(\tau)$  groot.

## Appendix B; Schatten van een viskeuze dempingsparameter

Gegeven is het in figuur B.1 geschetste systeem met de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} \dot{q}(\tau) + 4 + \frac{1}{5}\dot{q}^2(\tau) &= u(\tau) & \text{als } u(\tau) > 4, \\ \dot{q}(\tau) - 4 - \frac{1}{5}\dot{q}^2(\tau) &= u(\tau) & \text{als } u(\tau) < -4, \\ \dot{q}(\tau) &= 0 & \text{anders.} \end{aligned}$$

### SYSTEEM



figuur B.1

De volgende signalen zijn vastgelegd:  $u(\tau)$  en  $\mathbf{y}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} q(\tau) \\ \dot{q}(\tau) \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [0,1]$ .

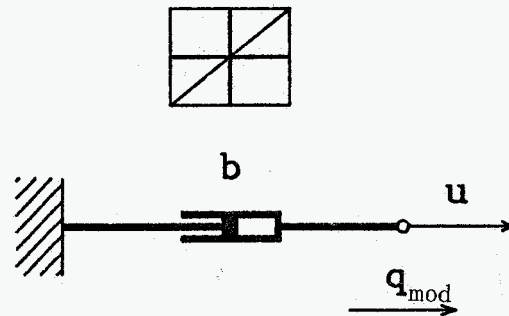
Het systeem kan bij benadering beschreven worden door het in figuur B.2 gegeven model. Het model, dat een nog onbekende parameter  $b$  bevat, is gebaseerd op de volgende bewegingsvergelijking:

$$b\dot{q}_{\text{mod}}(\tau) = u(\tau).$$

Het model kan weergegeven worden met een systeem- en een uitgangsvergelijking met behulp van de volgende definitie voor de toestandsvector:

$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ x_{\text{mod}2}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\text{mod}}(\tau) \\ \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

## SCHATTINGSMODEL 1



figuur B.2

stelsysteemvergelijking:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{\text{mod}1}(\tau) \\ \dot{x}_{\text{mod}2}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}2}(\tau)u(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}$$

uitgangsvergelijking:

$$\mathbf{y}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ \dot{x}_{\text{mod}1}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ x_{\text{mod}2}(\tau)u(\tau) \end{bmatrix}$$

De funktionaal  $J$  moet minimaal zijn t.a.v.  $\mathbf{x}(\tau)$ :

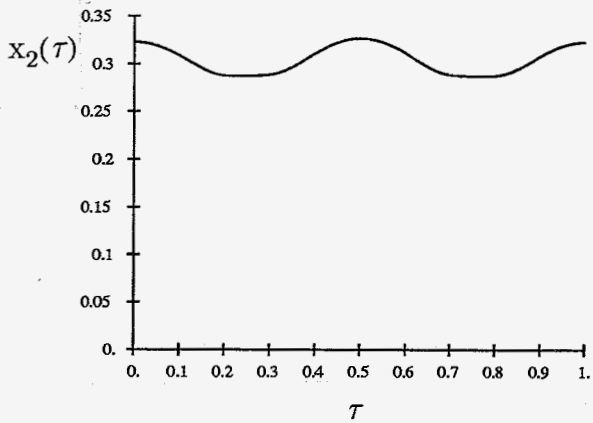
$$J = \int_{\tau=0}^1 [ 100(x_1(\tau)-q(\tau))^2 + (x_2(\tau)u(\tau)-\dot{q}(\tau))^2 + (\dot{x}_1(\tau)-x_2(\tau)u(\tau))^2 + (\dot{x}_2(\tau))^2 ] d\tau$$

$\Rightarrow$

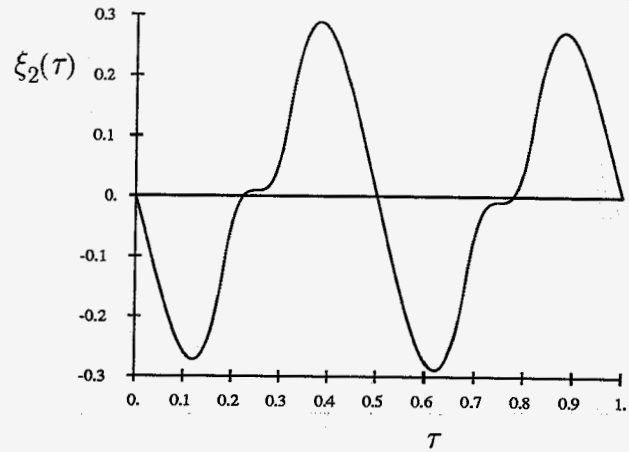
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) &= x_2(\tau)u(\tau) + \xi_1(\tau), & \dot{\xi}_1(\tau) &= 100(x_1(\tau)-q(\tau)), \\ \dot{x}_2(\tau) &= \xi_2(\tau), & \dot{\xi}_2(\tau) &= u(\tau)(x_2(\tau)u(\tau)-\dot{q}(\tau)-\xi_1(\tau)), \\ \xi_1(0) &= \xi_1(1) = \xi_2(0) = \xi_2(1) = 0. \end{aligned}$$



De schatting voor  $\frac{1}{b}$  is niet konstant (figuur B.7). Dit duidt op een onvolledigheid in het model. De bij  $x_2(\tau)$  behorende filter-inspanning  $\xi_2(\tau)$  is weergegeven in figuur B.8.



figuur B.7



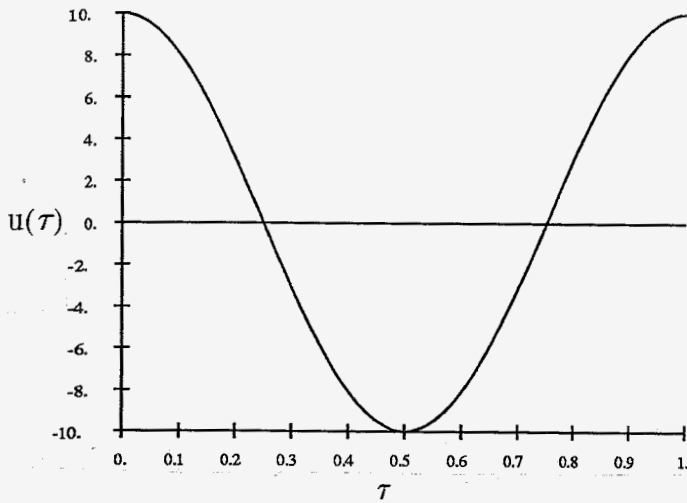
figuur B.8

De grote filter-inspanning  $\xi_2(\tau)$  is het gevolg van de slechte schatting voor de snelheid  $\dot{q}(\tau)$ .

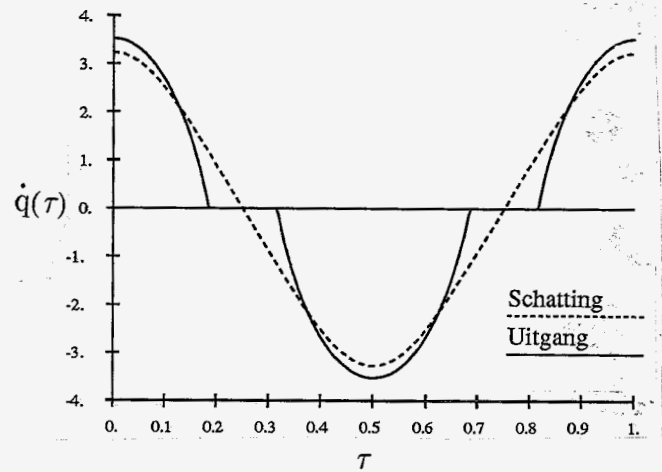
Konklusie:

De modelstructuur is niet goed voor het beschrijven van het gegeven systeem. De reden is duidelijk; in het model is  $\dot{q}_{\text{mod}}(\tau)$  rechtevenredig met  $u(\tau)$ , terwijl  $|u(\tau)|$  voor het systeem groter moet zijn dan een bepaalde positieve waarde, opdat  $|\dot{q}(\tau)|$  groter dan nul is.

Het ingangssignaal, dat weergegeven is in figuur B.3, is van ordegraote 10, waardoor de drie verschillende wrijvingstermen een even grote rol spelen.

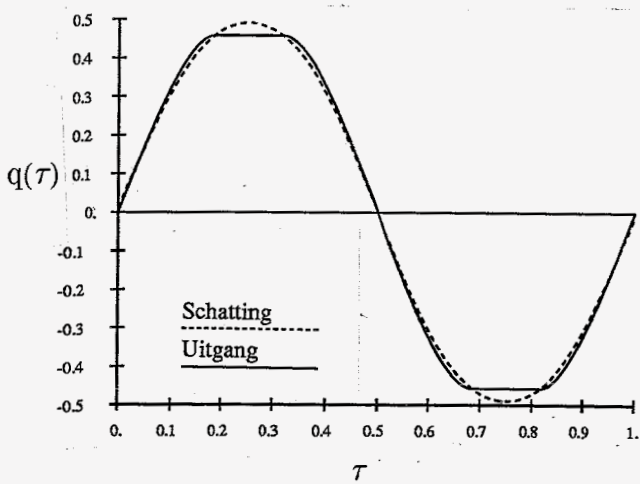


figuur B.3

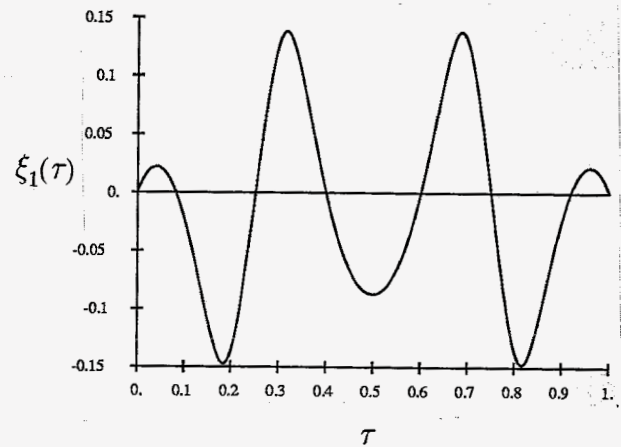


figuur B.4

De schatting voor  $q(\tau)$  is weergegeven in figuur B.5. De filter-inspanning  $\xi_1(\tau)$  die hoort bij deze schatting, is relatief klein t.o.v.  $x_2(\tau)u(\tau)$  (figuur B.4).



figuur B.5



figuur B.6

### Appendix C; Schatten van een viskeuze en een Coulombse dempingsparameter

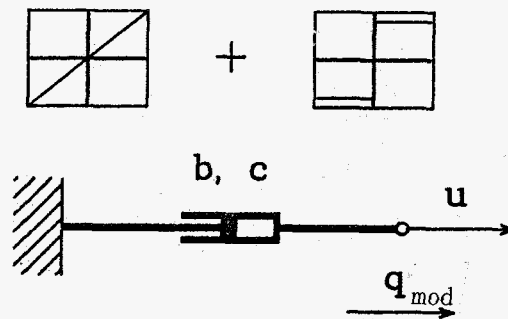
Er wordt uitgegaan van het in Appendix B gegeven systeem. Er wordt nu een uitgebreider model beschouwd. Het model, dat twee, nog onbekende, parameters  $b$  en  $c$  bevat, is gebaseerd op de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} b\dot{q}_{\text{mod}}(\tau) + c &= u(\tau) && \text{als } u(\tau) > c, \\ b\dot{q}_{\text{mod}}(\tau) - c &= u(\tau) && \text{als } u(\tau) < -c, \\ \dot{q}_{\text{mod}}(\tau) &= 0 && \text{anders.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{q}_{\text{mod}}(\tau) = \frac{1}{b} \{ (u(\tau) - c)\varepsilon(u(\tau) - c) + (u(\tau) + c)\varepsilon(-u(\tau) - c) \}$$

## SCHATTINGSMODEL 2



figuur C.1

Het model kan weergegeven worden met een systeem- en een uitgangsvergelijking met behulp van de volgende definitie voor de toestandsvektor:

$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ x_{\text{mod}2}(\tau) \\ x_{\text{mod}3}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\text{mod}}(\tau) \\ \frac{1}{b} \\ c \end{bmatrix}$$

systeemvergelijking: 
$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{\text{mod}1}(\tau) \\ \dot{x}_{\text{mod}2}(\tau) \\ \dot{x}_{\text{mod}3}(\tau) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{\text{mod}2}(\tau) \{ (u(\tau) - x_{\text{mod}3}(\tau)) \varepsilon(u(\tau) - x_{\text{mod}3}(\tau)) + (u(\tau) + x_{\text{mod}3}(\tau)) \varepsilon(-u(\tau) - x_{\text{mod}3}(\tau)) \} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

uitgangsvergelijking: 
$$\mathbf{y}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ \dot{x}_{\text{mod}1}(\tau) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ x_{\text{mod}2}(\tau) \{ (u(\tau) - x_{\text{mod}3}(\tau)) \varepsilon(u(\tau) - x_{\text{mod}3}(\tau)) + (u(\tau) + x_{\text{mod}3}(\tau)) \varepsilon(-u(\tau) - x_{\text{mod}3}(\tau)) \} \end{bmatrix}$$

De funktionaal J moet minimaal zijn t.a.v.  $\mathbf{x}(\tau)$ :

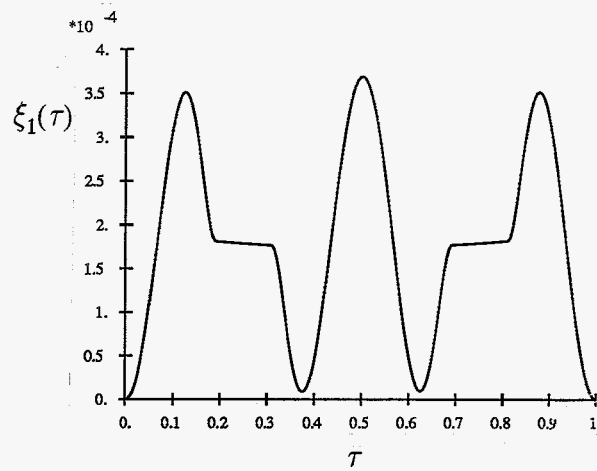
$$J = \int_{\tau=0}^1 [ 100(x_1(\tau) - q(\tau))^2 + (x_2(\tau) \{ (u(\tau) - x_3(\tau)) \varepsilon(u(\tau) - x_3(\tau)) + (u(\tau) + x_3(\tau)) \varepsilon(-u(\tau) - x_3(\tau)) \} - \dot{q}(\tau))^2 + (x_1(\tau) - x_2(\tau) \{ (u(\tau) - x_3(\tau)) \varepsilon(u(\tau) - x_3(\tau)) + (u(\tau) + x_3(\tau)) \varepsilon(-u(\tau) - x_3(\tau)) \})^2 + (\dot{x}_2(\tau))^2 + (\dot{x}_3(\tau))^2 ] d\tau$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau) \{ (u(\tau) - x_3(\tau)) \varepsilon(u(\tau) - x_3(\tau)) + (u(\tau) + x_3(\tau)) \varepsilon(-u(\tau) - x_3(\tau)) \} + \xi_1(\tau),$$

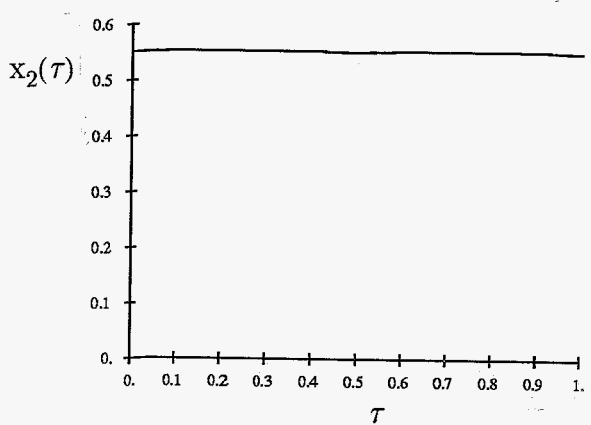
$$\dot{x}_2(\tau) = \xi_2(\tau),$$

$$\dot{x}_3(\tau) = \xi_3(\tau),$$

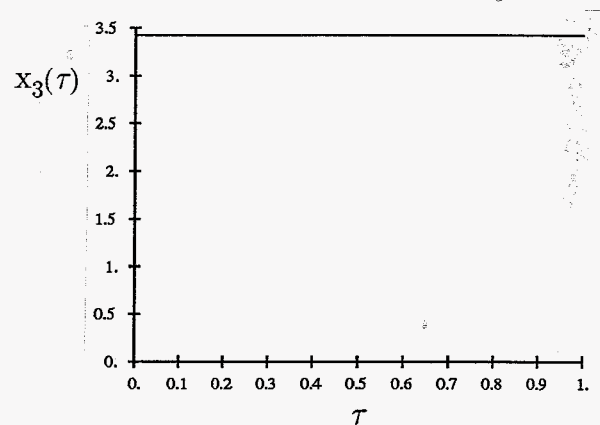


figuur C.4

De schattingen voor  $\frac{1}{b}$  en  $c$  zijn nagenoeg konstant (figuren C.5 en C.6).



figuur C.5



figuur C.6

Konklusies:

- 1) De uitgangsiduen zijn, evenals de filter-inspanningen, klein. Het model is dus een goede beschrijving voor het systeem, althans vooringangssignalen die steeds variëren tussen 10 en -10.

- 2) Optimale modelparameters hoeven niet gelijk te zijn aan overeenkomstige grootheden van het systeem;

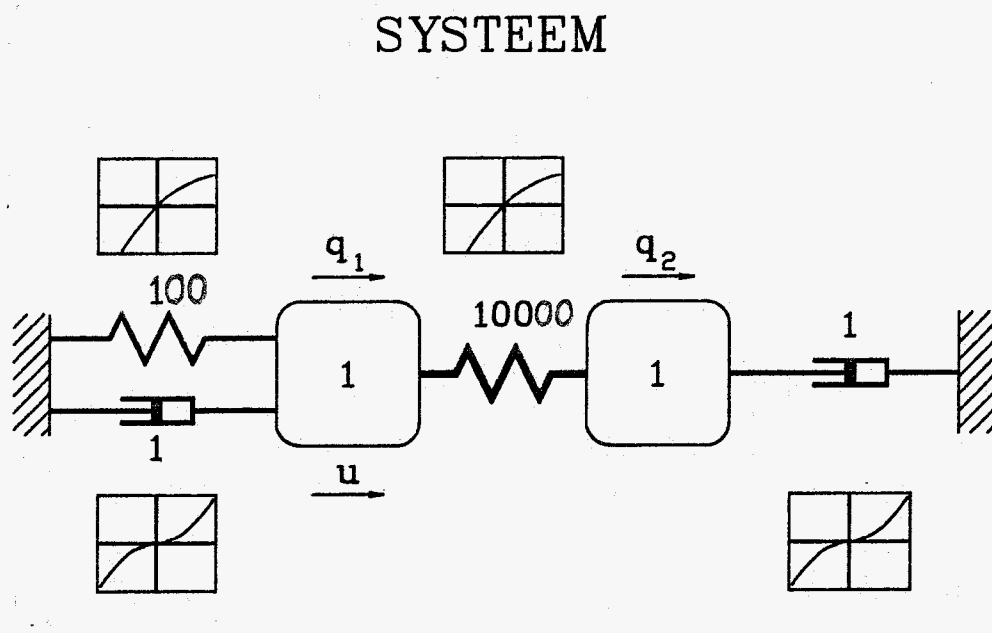
Systeem:  $\frac{1}{b} = 1$        $c = 4$       kwadratische term:  $\frac{1}{5}$

Model:  $\frac{1}{b} \simeq 0.55$        $c \simeq 3.4$       kwadratische term: geen

— . —

## Appendix D; Een massa-veersysteem

Gegeven is het systeem in figuur D.1. Het bestaat uit twee massa's, die zijn verbonden door een relatief stijve veer. Eén massa is met de vaste wereld verbonden middels een slappe veer. Beide veren hebben een degressieve karakteristiek. De bewegingen van de massa's t.o.v. de vaste wereld ondervinden een relatief zwakke demping met een kwadratisch karakter.



figuur D.1

De bewegingsvergelijkingen van dit systeem luiden:

$$m_1 \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 |\dot{q}_1| + k_1 \ln(1+q_1) - k_2 \ln(1+q_2-q_1) = u(\tau)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 |\dot{q}_2| + k_2 \ln(1+q_2-q_1) = 0$$

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 1$$

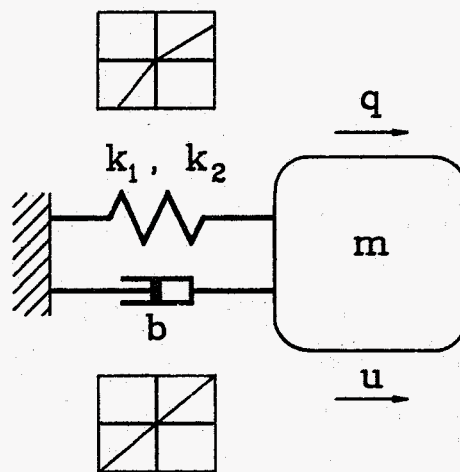
$$k_1 = 100 \quad k_2 = 10000$$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 1$$

De volgende signalen liggen vast:  $u(\tau)$  en  $\mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ \ddot{q}_2(\tau) \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [0,1]$ .

Het gegeven systeem kan bij benadering beschreven worden door het model dat is weergegeven in figuur D.2. Dit model bestaat uit een enkelvoudig massa-veersysteem. De veer levert bij indrukken een andere weerstand dan bij uitrekken. De dempingskracht op de massa wordt lineair in de snelheid verondersteld.

## SCHATTINGSMODEL



*figuur D.2*

Het model bevat vier, nog onbekende, parameters; de massa  $m$ , de dempingsconstante  $b$  en de twee veerstijfheden  $k_1$  en  $k_2$ . De bewegingsvergelijking van het model luidt:

$$m\ddot{q}(\tau) + b\dot{q}(\tau) + (k_1\varepsilon(q(\tau)) + k_2\varepsilon(-q(\tau)))q(\tau) = u(\tau)$$

Met behulp van deze bewegingsvergelijking wordt een systeem- en een uitgangsvergelijking opgesteld (zie Hoofdstuk 1). Hierbij wordt uitgegaan van een modeltoestand  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\tau)$ , waarin de genoemde parameters zijn opgenomen. Als modeluitgang  $\mathbf{y}_{\text{mod}}(\tau)$  wordt een bij het systeem passende vektor gekozen:



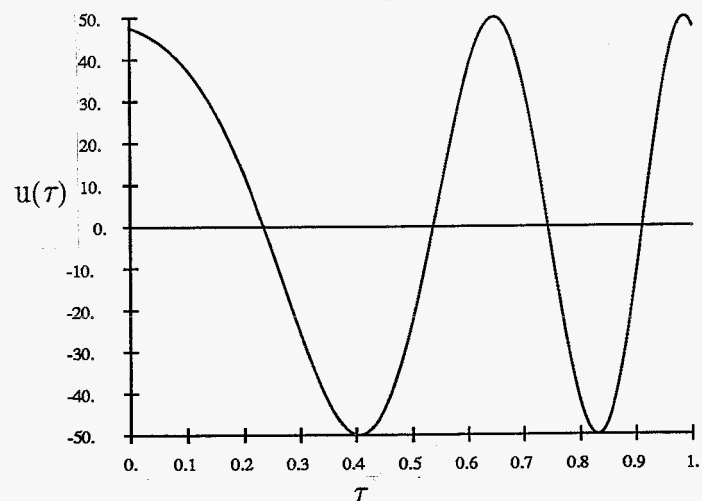
$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ x_{\text{mod}2}(\tau) \\ x_{\text{mod}3}(\tau) \\ x_{\text{mod}4}(\tau) \\ x_{\text{mod}5}(\tau) \\ x_{\text{mod}6}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(\tau) \\ \dot{q}(\tau) \\ ln(m) \\ k_1/100 \\ k_2/100 \\ b/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{\text{mod}}(\tau) = \begin{bmatrix} x_{\text{mod}1}(\tau) \\ \dot{x}_{\text{mod}2}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(\tau) \\ \ddot{q}(\tau) \end{bmatrix}.$$

De systeem- en uitgangsvergelijking worden niet uitgeschreven, daar deze op overeenkomstige manier tot stand komen als in het voorbeeld in § 1.3.

Voor het optimaliseren van de modelparameters wordt een criterium opgesteld, zoals beschreven in Hoofdstuk 3. De weegmatrix  $\mathbf{W}$  wordt gelijk aan de eenheidsmatrix. In de weegmatrix  $\mathbf{V}$  zijn de termen  $V_1$  en  $V_2$  nog in te vullen:

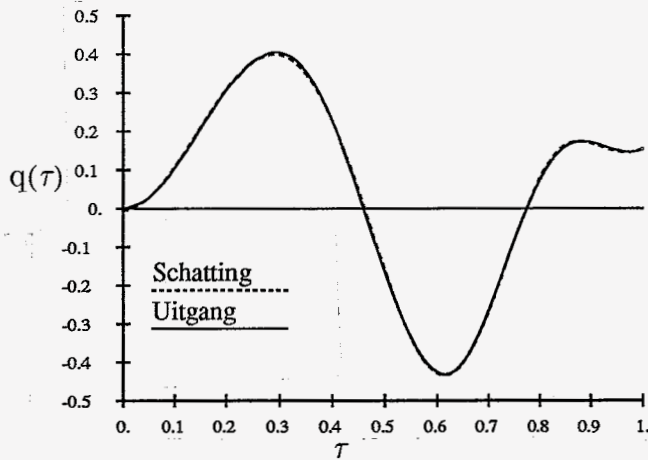
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

Het op het systeem werkende ingangssignaal  $u(\tau)$  is weergegeven in figuur D.3.

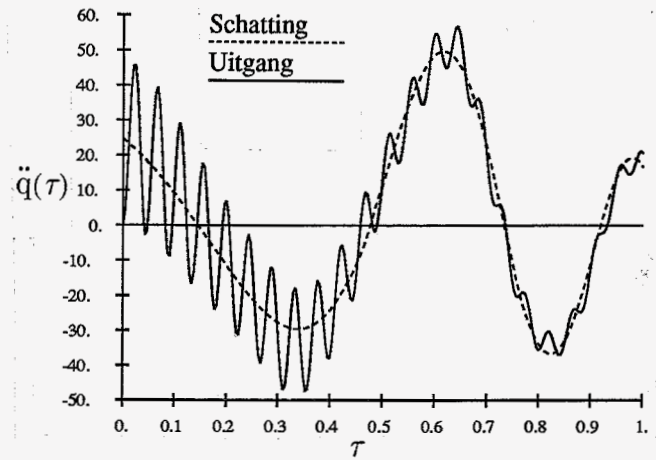


*figuur D.3*

Als eerste voorbeeld kiezen we de weegparameters  $V_1 = 1$  en  $V_2 = 0$ . Alleen het verschil tussen de geschatte- en de gemeten **verplaatsing** wordt dus verdisconteerd in het optimaliteitskriterium. De schattingen voor  $q(\tau)$  en  $\ddot{q}(\tau)$  worden respectievelijk weergegeven in de figuren D.4 en D.5.



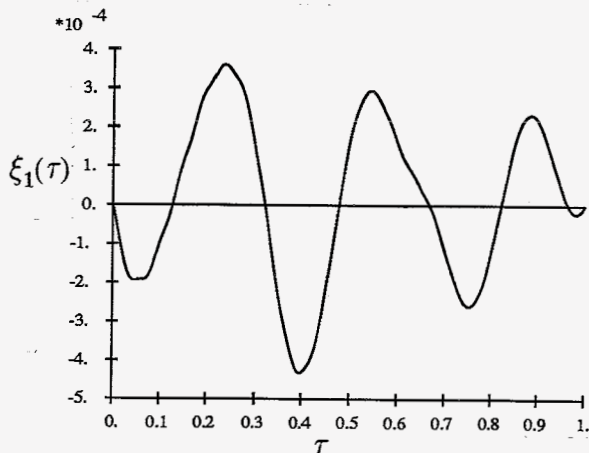
figuur D.4



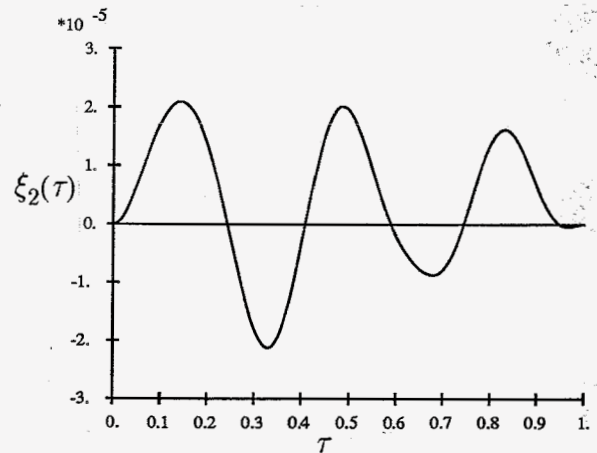
figuur D.5

De schatting voor  $q(\tau)$  wijkt slechts weinig af van  $q(\tau)$  zelf. In de schatting voor  $\ddot{q}(\tau)$  komt echter het sterk oscillerende karakter van de systeemuitgang niet tot uiting, hetgeen, de verschillen tussen systeem en model in aanmerking genomen, te verwachten was.

De filter-*in*spanningen  $\xi_1(\tau)$  en  $\xi_2(\tau)$  die horen bij  $x_1(\tau)$  en  $x_2(\tau)$  zijn relatief klein (figuren D.6 en D.7).

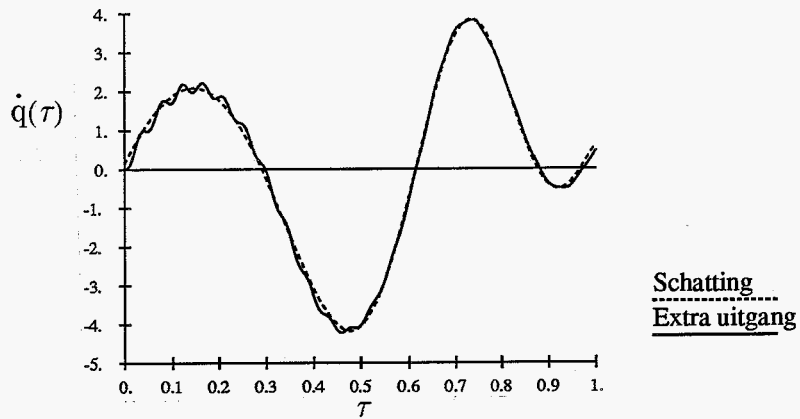


figuur D.6



figuur D.7

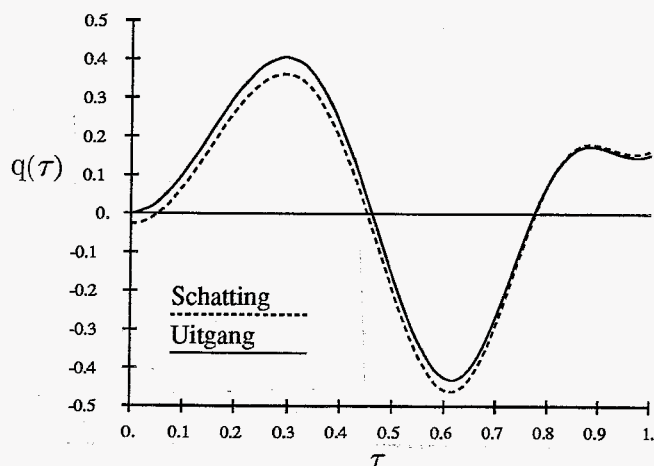
De schattingen voor de parameters zijn nagenoeg konstant  $m \simeq 1.9$ ,  $k_1 \simeq 75$ ,  $k_2 \simeq 118$ ,  $b \simeq 6.5$ . De schattingen zijn eenvoudig te verklaren;  $m$  komt overeen met de totale massa van het systeem, de stijfheid van de veer in het systeem is voor indrukking groter dan voor uitrekking. De dempingskrachten zijn, de snelheid in beschouwing genomen, voor systeem en model van dezelfde orde van grootte. (figuur D.8).



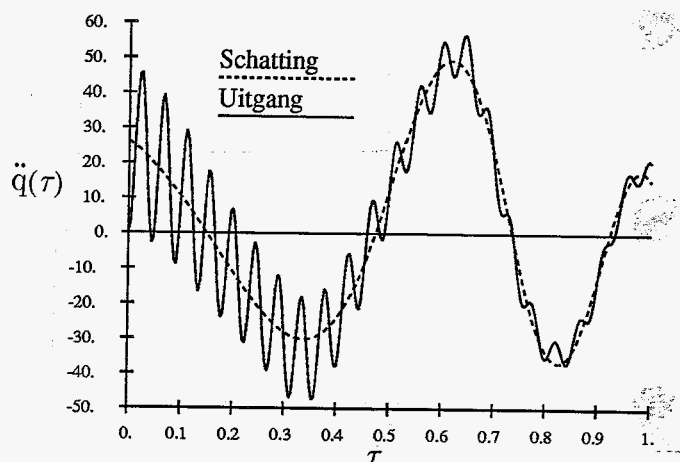
figuur D.8

We kiezen nu  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = \frac{1}{100}$ , hetgeen wil zeggen dat alleen het verschil tussen de geschatte- en de gemeten **versnelling** verdiskonteerd wordt in het optimaliteitskriterium. De schatting voor  $q(\tau)$  wordt minder goed dan in het vorige geval (figuur D.9). De schatting voor  $\ddot{q}(\tau)$  verandert niet noemenswaardig (figuur D.10).

In figuur D.9 is te zien dat de geschatte uitrekking van de veer te klein is, terwijl de indrukking te groot geschat wordt. De parameters  $k_1$  en  $k_2$  worden daarom respectievelijk groter en kleiner geschat dan in het vorige geval;  $k_1 \simeq 85$  en  $k_2 \simeq 115$ . De andere parameters:  $m \simeq 1.95$ ,  $b \simeq 6.1$ .

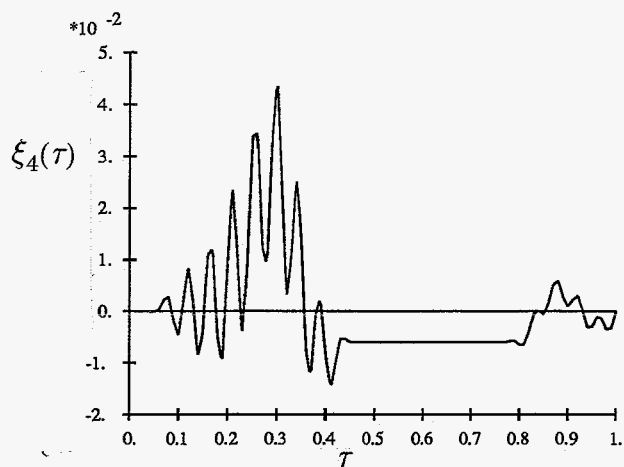


figuur D.9

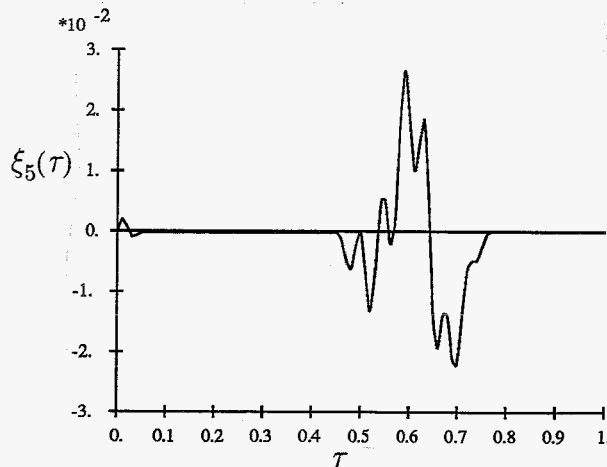


figuur D.10

Opmerkelijk is het verloop van de, overigens relatief kleine, filter-*in*spanningen  $\xi_4(\tau)$  en  $\xi_5(\tau)$ . Deze hebben betrekking op de schattingen voor  $k_1$  en  $k_2$ . In de figuren D.11 en D.12 is te zien dat  $\xi_4(\tau)$  alleen verandert met  $\tau$ , als  $q(\tau) > 0$ . Dit is te verklaren uit het feit dat de functie  $f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)$ , nog de functie  $g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)$ , afhankelijk zijn van  $x_4(\tau)$  als  $x_1(\tau) < 0$ . Zie ook de tweede differentiaalvergelijking van het randwaardeprobleem in § 4.1. Voor  $\xi_5(\tau)$  geldt dit overeenkomstig als  $x_1(\tau) > 0$ .



figuur D.11



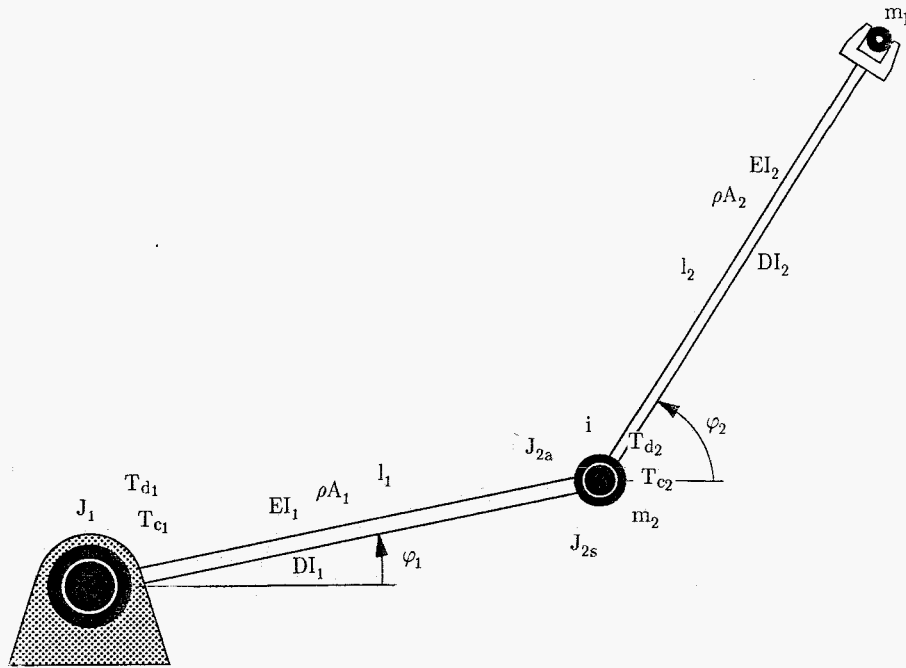
figuur D.12

Konklusies:

- 1) De uitgangsignalen en de filter- spanningen zijn klein. Het model is dus een goede beschrijving voor het systeem, althans voor ingangsignalen met een laagfrequent karakter.
- 2) Versnellingsmetingen zijn bruikbaar bij het schatten van parameters. Versnellingen kunnen immers gemodelleerd worden als uitgangen, die informatie geven over modelgrootheden.

— • —

## Appendix E; De bewegingsvergelijking van de elastische simulatie-robot



figuur E.1 elastische robot

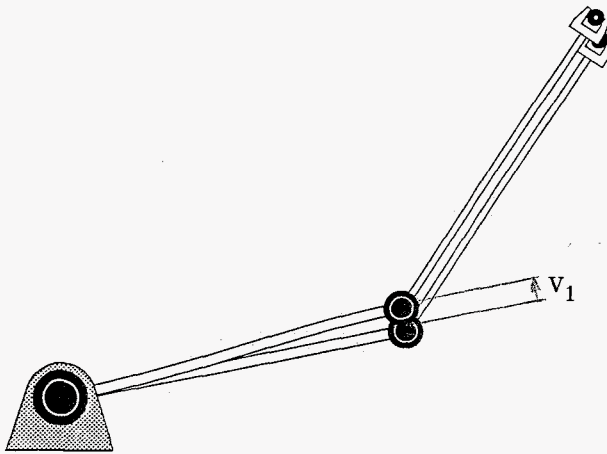
De waarden van de konstanten:

$$\begin{array}{llll}
 l_1 = 1, & l_2 = 1, & & \\
 EI_1 = 18000, & EI_2 = 9000, & & \\
 DI_1 = 10, & DI_2 = 5, & & \\
 \rho A_1 = 1, & \rho A_2 = 0.25, & & \\
 J_1 = 20, & J_{2s} = 0.002, & J_{2a} = 0.001, & i = 40, \\
 m_2 = 1, & m_1 = 1, & & \\
 T_{c1} = 500, & T_{c2} = 50, & \omega_c = 0.01, & \\
 T_{d1} = 50, & T_{d2} = 5. & & 
 \end{array}$$

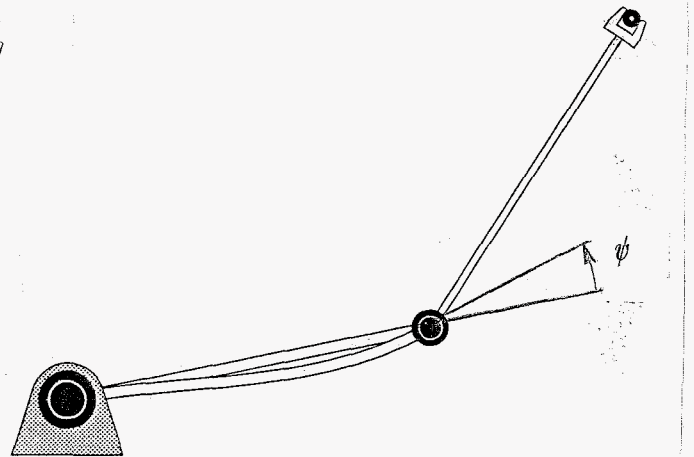
**Balk-element 1:** lengte  $l_1$ , massa per lense-eenheid  $\rho A_1$ , buigstijfheid  $EI_1$  en buigdemping  $DI_1$ . De vervorming van balk 1 wordt gegeven met de dwarse verplaatsing  $v_1$ , uitgedrukt in de grootheden  $v_1$  en  $\psi$ :

$$v_1(\zeta) = (3\zeta^2 - 2\zeta^3)v_1 + (-\zeta^2 + \zeta^3)\psi_1$$

$\zeta$  is een dimensieloze lengtecoördinaat van de balk die loopt van 0 tot 1. De mode van  $v_1$  is gegeven in figuur E.2, die van  $\psi$  in figuur E.3.



figuur E.2



figuur E.3

De deformatie-energie  $V_1$  van balk 1:

$$V_1 = \frac{EI_1}{2l_1^3} \{ 4(3v_1 - \psi l_1)^2 + 12(3v_1 - \psi l_1)(-2v_1 + \psi l_1) + 12(-2v_1 + \psi l_1)^2 \}$$

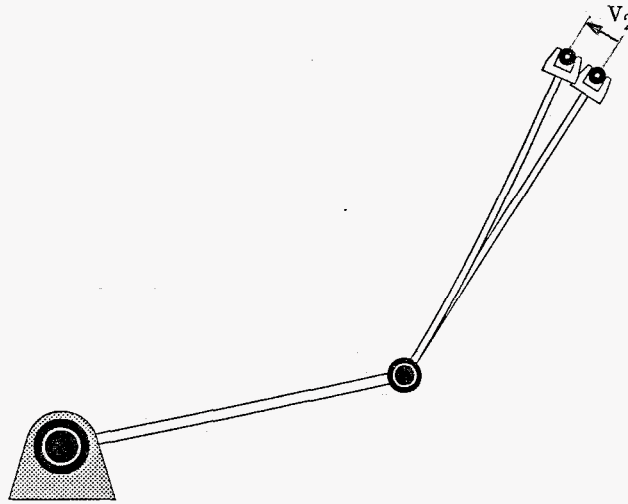
De kinetische energie  $T_1$  van balk 1:

$$T_1 = \frac{1}{2}\rho A_1 l_1 \left\{ \frac{1}{3} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{7}{10} l_1 \dot{\varphi}_1 \dot{v}_1 - \frac{1}{10} l_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\psi} + \frac{1}{105} (39\dot{v}_1^2 - 11\dot{v}_1 l_1 \dot{\psi} + l_1^2 \dot{\psi}^2) + \frac{1}{105} (39v_1^2 - 11v_1 l_1 \psi + l_1^2 \psi^2) \dot{\varphi}_1^2 \right\}$$

**Balk-element 2:** lengte  $l_2$ , massa per lense-eenheid  $\rho A_2$ , buigstijfheid  $EI_2$  en buigdemping  $DI_2$ . De vervorming van balk 2 wordt uitgedrukt in de grootheid  $v_2$ :

$$v_2(\zeta) = \frac{1}{2} (3\zeta^2 - \zeta^3)v_2$$

De mode voor  $v_2$  is gegeven in figuur E.4.



figuur E.4

De deformatie-energie  $V_2$  van balk 2:

$$V_1 = \frac{EI_2}{2l_2^3} 3v_1^2$$

De kinetische energie  $T_2$  van balk 2:

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2}\rho A_2 l_2 [ (l_1 \dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1)^2 + v_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{11}{20} l_2 \dot{v}_2 \dot{\varphi}_2 + \\ & + \frac{33}{140} ( \dot{v}_2^2 + v_2^2 \dot{\varphi}_2^2 ) + \\ & + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \{ (l_1 \dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1) ( l_2 \dot{\varphi}_2 + \frac{3}{4} \dot{v}_2 ) + \frac{3}{4} v_1 \dot{\varphi}_1 v_2 \dot{\varphi}_2 \} + \\ & + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \{ (l_1 \dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1) \frac{3}{4} v_2 \dot{\varphi}_2 - v_1 \dot{\varphi}_1 ( l_2 \dot{\varphi}_2 + \frac{3}{4} \dot{v}_2 ) \} ] \end{aligned}$$



De uitdrukking voor de kinetische energie  $T_3$  van de last  $m_1$  toont overeenkomst met die van balk 2:

$$T_3 = \frac{1}{2}m_1[ (l_1\dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1)^2 + (l_2\dot{\varphi}_2 + \dot{v}_2)^2 + v_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + v_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \\ + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \{ 2(l_1\dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1)(l_2\dot{\varphi}_2 + \dot{v}_2) + 2v_1\dot{\varphi}_1v_2\dot{\varphi}_2 \} + \\ + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \{ 2(l_1\dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1)v_2\dot{\varphi}_2 - 2v_1\dot{\varphi}_1(l_2\dot{\varphi}_2 + \dot{v}_2) \} ]$$

De kinetische energie  $T_4$  van motor 2 is samengesteld uit die van de stator en het anker. De stator is aan schakel 1 bevestigd. Het anker is met een overbrengingsverhouding  $i$  aan schakel 2 verbonden.

$$T_4 = \frac{1}{2}m_2\{ (l_1\dot{\varphi}_1 + \dot{v}_1)^2 + v_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + v_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \} + \frac{1}{2}J_{2s}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi})^2 + \\ + \frac{1}{2}J_{2a}\{ (1-i)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}) + i\dot{\varphi}_2 \}^2$$

De kinetische energie  $T_5$  van motor 1:

$$T_5 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2$$

De totale kinetische energie  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  kan uitgedrukt worden als:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

De vektor  $\mathbf{q}$  bevat de gegeneraliseerde coördinaten:

$$\mathbf{q}^T = [ \varphi_1 ; v_1 ; \psi ; \varphi_2 ; v_2 ]$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$  is een symmetrische **massamatrix**. Alleen de termen van de rechtsbovendriehoek worden gegeven:

$$M_{11} = \frac{1}{105} \rho A_1 l_1 ( 35 l_1^2 + 39 v_1^2 - 11 v_1 l_1 \psi + l_1^2 \psi^2 ) + \\ + ( \rho A_2 l_2 + m_1 + m_2 ) ( l_1^2 + v_1^2 ) + J_{2s} + J_{2a}(1-i)^2 + J_1$$

$$M_{12} = l_1 \left( \frac{7}{20} \rho A_1 l_1 + \rho A_2 l_2 + m_1 + m_2 \right)$$

$$M_{13} = -\frac{1}{20} \rho A_1 l_1^3 + J_{2s} + J_{2a}(1-i)^2$$

$$M_{14} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \left\{ \frac{1}{2} \rho A_2 l_2 (l_1 l_2 + \frac{3}{4} v_1 v_2) + m_1 (l_1 l_2 + v_1 v_2) \right\} + \\ + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left\{ \frac{1}{2} \rho A_2 l_2 \left( \frac{3}{4} l_1 v_2 - v_1 l_2 \right) + m_1 (l_1 v_2 - v_1 l_2) \right\} + J_{2a} i(1-i)$$

$$M_{15} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{3}{8} \rho A_2 l_2 + m_1 \right) l_1 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{3}{8} \rho A_2 l_2 + m_1 \right) l_1$$

$$M_{22} = \frac{39}{105} \rho A_1 l_1 + \rho A_2 l_2 + m_1 + m_2$$

$$M_{23} = -\frac{11}{210} \rho A_1 l_1^2$$

$$M_{24} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{1}{2} \rho A_2 l_2 + m_1 \right) l_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{3}{8} \rho A_2 l_2 + m_1 \right) v_2$$

$$M_{25} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{3}{8} \rho A_2 l_2 + m_1 \right)$$

$$M_{33} = \frac{1}{105} \rho A_1 l_1^3 + J_{2s} + J_{2a}(1-i)^2$$

$$M_{34} = J_{2a} i(1-i)$$

$$M_{35} = 0$$

$$M_{44} = \rho A_2 l_2 \left( \frac{1}{3} l_2^2 + \frac{33}{140} v_2^2 \right) + m_1 (l_2^2 + v_2^2) + J_{2a} i^2$$

$$M_{45} = \frac{11}{40} \rho A_2 l_2^2 + m_1 l_2$$

$$M_{55} = \frac{33}{140} \rho A_2 l_2 + m_1$$

De bewegingsvergelijking kan afgeleid worden met de methode volgens Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \left[ \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] + \left[ \frac{\partial V}{\partial q_k} \right] - Q_k = 0;$$

T is de totale kinetische energie als functie van  $\mathbf{q}$  en  $\dot{\mathbf{q}}$ . V is de totale potentiële energie (deformatie-energie) als functie van  $\mathbf{q}$ .  $\mathbf{Q}$  is de kolom van niet van een potentiaal af te leiden gegeneraliseerde krachten.

De eerste twee termen kunnen uitgedrukt worden in elementen van de massamatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  en de gegeneraliseerde coördinaten  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \left[ \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] &= \frac{d}{dt} (M_{ik} \dot{q}_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i + M_{ik} \ddot{q}_i - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= M_{ik} \ddot{q}_i + \left[ \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

De van de potentiële energie af te leiden gegeneraliseerde krachten:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{EI_1}{l_1^3} (12v_1 - 6\psi l_1),$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{EI_1}{l_1^2} (-6v_1 + 4\psi l_1),$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_4} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_5} = \frac{3EI_2}{l_2^3} v_1.$$

De niet van een potentiaal af te leiden krachten:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \left( u_1 - \gamma(\dot{\varphi}_1, \omega_c) T_{c1} - \dot{\varphi}_1 T_{d1} \right) + \\
 &\quad - \left( u_2 - \gamma(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}, \omega_c) T_{c2} - (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) T_{d2} \right) \\
 Q_2 &= - \frac{DI_1}{l_1^3} ( 12\dot{v}_1 - 6\dot{\psi}l_1 ) \\
 Q_3 &= - \left( u_2 - \gamma(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}, \omega_c) T_{c2} - (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) T_{d2} \right) - \frac{DI_1}{l_1^2} ( - 6\dot{v}_1 + 4\dot{\psi}l_1 ) \\
 Q_4 &= \left( u_2 - \gamma(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}, \omega_c) T_{c2} - (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) T_{d2} \right) \\
 Q_5 &= - \frac{3DI_2}{l_1^3} \dot{v}_1
 \end{aligned}$$

De symbolen  $u_1$  en  $u_2$  stellen de ingangssignalen voor.

$$\text{De functie } \gamma(a, c) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{a}{c}\right)^5 - \frac{10}{8} \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \frac{15}{8} \left(\frac{a}{c}\right) & \text{als } |a| < c \\ \varepsilon(a) - \varepsilon(-a) & \text{anders} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \left[ \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] + \left[ \frac{\partial V}{\partial q_k} \right] - Q_k = 0$$

$\Rightarrow$

$$M_{ik} \ddot{q}_i + \left[ \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j + \left[ \frac{\partial V}{\partial q_k} \right] - Q_k = 0$$

$$\text{Definitie: } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De term  $\left[ \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j + \left[ \frac{\partial V}{\partial q_k} \right] - Q_k$  is te schrijven als:

$$h_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + H_{kj} u_j$$

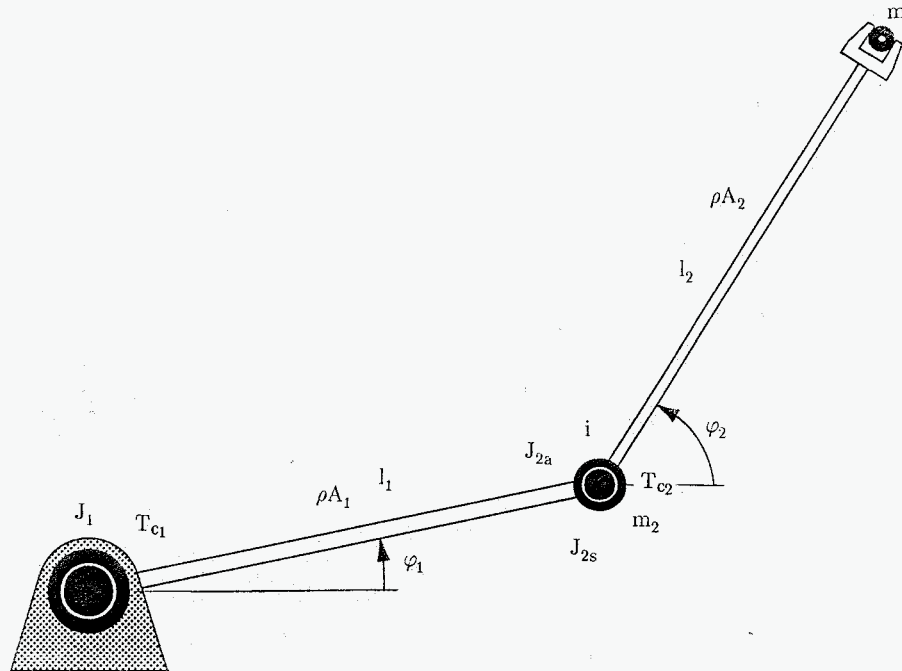
Het stelsel bewegingsvergelijkingen is te schrijven als:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

— . —

## Appendix F

De bewegingsvergelijking voor het schattingsmodel van de robot



figuur F.1 starre robot

De waarden van de konstanten zijn, voor zover relevant, en niet anders aangegeven, hetzelfde als die in Appendix E. Voor enkele konstanten wordt een andere waarde gekozen:  $\omega_c = 1$ ,  $T_{d1} = 0$ ,  $T_{d2} = 0$ . Er wordt dus geen lineair viskeuze wrijving gemodelleerd.

De vektor  $\mathbf{q}$  bevat de gegeneraliseerde koördinaten:

$$\mathbf{q}^T = [ \varphi_1 ; \varphi_2 ]$$

De bewegingsvergelijkingen kunnen eenvoudig afgeleid worden uit die in Appendix E. Hiervan wordt alleen de 1<sup>e</sup> en de 4<sup>e</sup> gebruikt. In deze vergelijkingen worden de variabelen  $v_1$ ,  $\psi$  en  $v_2$  gelijk aan nul verondersteld.

Dan volgt:

$$M_{11} = (\rho A_2 l_2 + m_1) l_1^2 + (\frac{1}{3} \rho A_1 l_1 + m_2) l_1^2 + J_1 + J_{2s} + (1-i)^2 J_{2a} ,$$

$$M_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) (\frac{1}{2} \rho A_2 l_2 + m_1) l_1 l_2 + i(1-i) J_{2a} ,$$

$$M_{21} = M_{12} ,$$

$$M_{22} = (\frac{1}{3} \rho A_2 l_2 + m_1) l_2^2 + i^2 J_{2a} ,$$

$$h_1 = [ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\frac{1}{2} \rho A_2 l_2 + m_1) l_1 l_2 ] \dot{\varphi}_2^2 + T_{c1} \gamma(\dot{\varphi}_1, \omega_c) + T_{c2} \gamma(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2, \omega_c) ,$$

$$h_2 = [ -\sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\frac{1}{2} \rho A_2 l_2 + m_1) l_1 l_2 ] \dot{\varphi}_1^2 - T_{c2} \gamma(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2, \omega_c) .$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ,$$

Het stelsel bewegingsvergelijkingen is te schrijven als:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

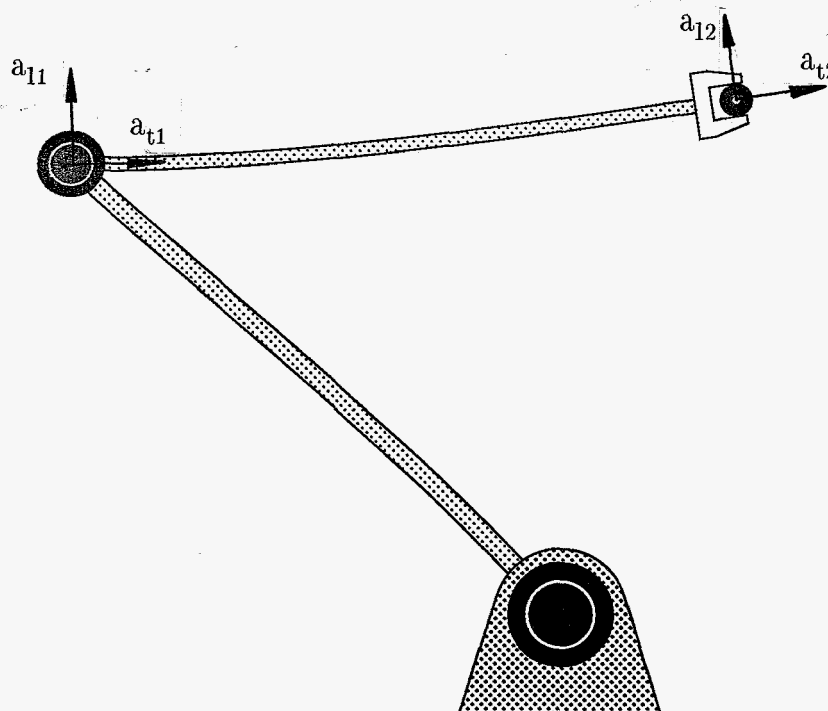
De gemeten versnellingen, als aangegeven in figuur F.2, zijn als volgt gemodelleerd:

$$a_{t1} = l_1 [ \cos(\varphi_2)(-\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 - \sin(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1) + \sin(\varphi_2)(-\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + \cos(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1) ]$$

$$a_{11} = l_1 [ -\sin(\varphi_2)(-\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 - \sin(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1) + \cos(\varphi_2)(-\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + \cos(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1) ]$$

$$a_{t2} = a_{t1} - l_2\dot{\varphi}_2^2$$

$$a_{12} = a_{11} + l_2\ddot{\varphi}_2$$



figuur F.2 versnellingsmetingen



## Appendix G;

Struktuur en eigenwaarden van de Jacobiaan van het stelsel  
differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x}_k(\tau) = f_k(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) + (W^{-1})_{kl} \lambda_l(\tau) ,$$

$$\dot{\lambda}_k(\tau) = \frac{\partial g_i(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_k(\tau)} V_{ij} (g_j(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) - y_j(\tau)) - \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_k(\tau)} \lambda_i(\tau) ,$$

De Jacobiaan  $\mathbf{E}$  bestaat uit vier  $(n \times n)$ -partities:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix}$$

De uitdrukkingen voor deze partities:

$$(\mathbf{E}_{11})_{kl} = \frac{\partial f_k(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_l(\tau)} , \quad (\mathbf{E}_{12})_{kl} = (W^{-1})_{kl} ,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{21})_{kl} &= \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_k(\tau) \partial x_l(\tau)} V_{ij} (g_j(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) - y_j(\tau)) + \\ &+ \frac{\partial g_i(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_k(\tau)} V_{ij} \frac{\partial g_j(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_l(\tau)} - \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_k(\tau) \partial x_l(\tau)} \lambda_i(\tau) , \end{aligned}$$

$$(\mathbf{E}_{22})_{kl} = - \frac{\partial f_l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)}{\partial x_k(\tau)} .$$

$\mathbf{V}$  is symmetrisch.  $\mathbf{W}$  is positief definit en symmetrisch. Voor de partities geldt:  $\mathbf{E}_{22} = -\mathbf{E}_{11}^T$ ,  $\mathbf{E}_{12}^T = \mathbf{E}_{21}$ ,  $\mathbf{E}_{21}^T = \mathbf{E}_{12}$  en  $\det(\mathbf{E}_{12}) \neq 0$ .

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & -\mathbf{E}_{11}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mu\mathbf{I}-\mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} \mu\mathbf{I}-\mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mu\mathbf{I}+\mathbf{E}_{11}^T \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{E}_{12} & \mu\mathbf{I}-\mathbf{E}_{11} \\ \mu\mathbf{I}+\mathbf{E}_{11}^T & \mathbf{E}_{21} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n \det(\mathbf{E}_{12}) \det[ \mathbf{E}_{21} - (\mu\mathbf{I} + \mathbf{E}_{11}^T) \mathbf{E}_{12}^{-1} (\mu\mathbf{I} - \mathbf{E}_{11}) ] = \\ &= (-1)^n \det(\mathbf{E}_{12}) \det[ \mathbf{E}_{21} - (\mu\mathbf{I} + \mathbf{E}_{11}^T) \mathbf{E}_{12}^{-1} (\mu\mathbf{I} - \mathbf{E}_{11}) ]^T = \\ &= (-1)^n \det(\mathbf{E}_{12}) \det[ \mathbf{E}_{21} - (\mu\mathbf{I} - \mathbf{E}_{11}^T) \mathbf{E}_{12}^{-1} (\mu\mathbf{I} + \mathbf{E}_{11}) ] = \\ &= (-1)^n \det(\mathbf{E}_{12}) \det[ \mathbf{E}_{21} - (-\mu\mathbf{I} + \mathbf{E}_{11}^T) \mathbf{E}_{12}^{-1} (-\mu\mathbf{I} - \mathbf{E}_{11}) ] = \\ &= \det(-\mu\mathbf{I}-\mathbf{E}) . \end{aligned}$$

Voor een reële matrix  $\mathbf{E}$  impliceert deze eigenschap een symmetrische ligging van de eigenwaarden t.o.v. de imaginaire as van het complexe vlak.