# Processor propositiecalculus voor Automath

Processor Propositiecalculus voor AUTOMATH

N.G. de Bruijn, 15 januari 1968

Type definities

<label> ::= <positive integer>

<proper expression> ::= <label> | <label>(<proper expression string>

<label string> ::= emptystring | <label string> ,<label>

<proper expression string> ::= emptyproperexpressionstring |
<proper expression string> ,<proper expression>

<expression> ::= EB | PM | <proper expression>

<category> ::= elt | set | bool | true | ax

<line> ::= <label> ,<boolean> ,<label string> ,<expression>,
<category>, <hint>

<hint> ::= <integer>,<integer> | emptyhint

<line string> ::= emptybook | <line string>, <line>

Elementaire procedures

Als E $\in$ <expression> dan

proper (E) := E $\in$ <proper expression>

emblo (E) := E = EB

primno (E) := E = PN

Als E $\in$ <expression> en proper (E) true, dan

head (E) := $\lambda$

substring (E) := $\mu$

als E = $\lambda(\mu)$ met $\lambda \in$ <label>, $\mu \in$ <proper expression string>.

Als $\lambda \in$ <label>, $\mu \in$ <proper expression string> dan

buildexpression ($\lambda$, $\mu$) := $\lambda(\mu)$ als $\mu$ nonempty
$\lambda$ als $\mu$ empty

Als $\lambda, \mu \in$ <category> dan

categoryimplication ($\lambda$, $\mu$) := $(\lambda,\mu) \in$ [category implication list]

Als $\lambda \in$ <line> dan worden zijn componenten aangeduid door resp.
labelof($\lambda$), boolof($\lambda$), labelstringof($\lambda$), expressionof($\lambda$), categoryof ($\lambda$), hintof($\lambda$)

Formline ($\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$, $\alpha_6$) is de regel(line) waarvan de componenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ zijn.

Definities betreffende strings

THING betekent hier "label" of "proper expression" of "line"

Als $M \in \langle$THINGstring$\rangle$ dan
length (M) := aantal THINGs in M.
Als k geheel, $M \in \langle$THINGstring$\rangle$, $0 < k \leq$ length(M) dan
member (M,k) := $k^e$ THING in M
Als k geheel, $M \in \langle$THINGstring$\rangle$, $0 \leq k \leq$ length(M) dan
frontsection (M,k) := de THINGstring bestaande uit de eerste k THINGs uit M (als k=0 is het de emptyTHINGstring)
Als $M \in \langle$THINGstring$\rangle$, $t \in \langle$THING$\rangle$, dan is join (M,t) de THING-string die ontstaat door t aan de achterkant aan M toe te voegen

Voorbeeld van aan te bieden text. De volgende linestring, bestaande uit 10 lines, wordt door de procedure "entirelycorrect" in orde bevonden. Terwille van de leesbaarheid zijn de labels uit de eerste kolom, die eigenlijk 1 t.e.m. 10 moeten zijn, hier vervangen door andere identifiers.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| u | u | true | EB | bool | |
| v | u,v | true | EB | bool | |
| ext | u,v | false | PN | bool | |
| a | empty | false | PN | bool | |
| ond | ond | true | a | true | |
| x | ond,x | true | EB | bool | |
| Ax | ond,x | false | ext(x,x) | ax | |
| Geg | Geg | true | a | true | |
| Dan | Geg | false | Ax(Geg,a) | true | |
| Gevolg | Geg | false | ext(a,a) | true | applydef, Dan |

De eerste kolom geeft de namen der nieuw ingevoerde identifiers. De derde kolom geeft met true aan dat er een nieuw blok wordt geopend, anders false. In de tweede kolom staan de labels waar de omvattende blokken achtereenvolgens zijn geopend. De vierde kolom geeft de definitie van het nieuwe label in termen van oude. De PN's zijn primitieve begrippen die niet nader worden gedefinieerd; de EB's zijn emptyblockopeners: de bijbehorende labels zijn nieuw geïntroduceerde variabelen. Bij de regel "ond" wordt het blok geopend met een gemaakte onderstelling, nl. dat a = true. De vijfde kolom geeft de category van de nieuwe identifier aan. Een bijzondere rol speelt de category "ax"; de betreffende regel moet met "bool" worden bewezen maar mag met "true" worden gebruikt.

In de laatste kolom is alleen op de onderste regel een hint ingevuld; alle andere zijn emptyhint.

In gebruikelijke taal luidt het bovenstaande stukje text:
1. Laat voor alle proposities u en v de propositie ext(u,v) gegeven zijn.
2. Zij a een gegeven propositie.
3. Axioma. Als a waar is dan geldt voor iedere propositie x dat ook ext(x,x) waar is.
4. Neem nu aan dat a waar is. Aangezien aan de onderstelling uit het axioma is voldaan, mag a voor x worden ingevuld, zodat ook ext(a,a) waar is.

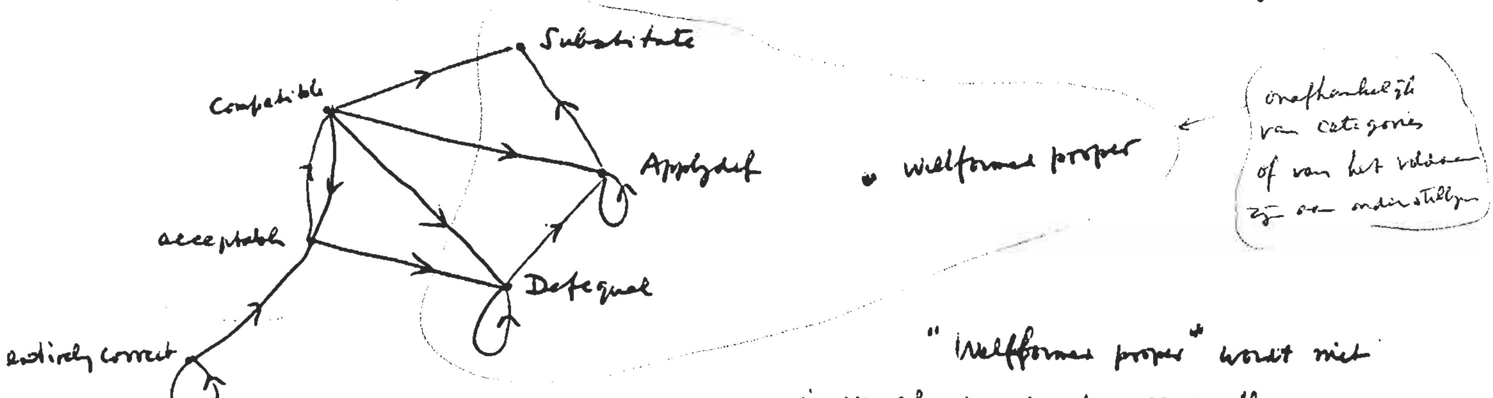
Andere notatie voor hetzelfde stukje tekst

| | | |
|---|---|---|
| u := | EB | bool |
| V := | EB | bool |
| ext := | PN | bool |
| | | |
| a := | PN | bool |
| | | |
| ond := | a | true |
| x := | EB | bool |
| Ax := | ext (x, x) | ax |
| | | |
| Geg := | a | true |
| Dan := | Ax (Geg, a) | true |
| Gevolg := | ext (a, a) | true |

applydefinition van "Dan"

---

OVERZICHT der procedures A ⟶ B betekent A maakt gebruik van B.




onafhankelijk van categories of van het voldoen zijn aan andere stellingen

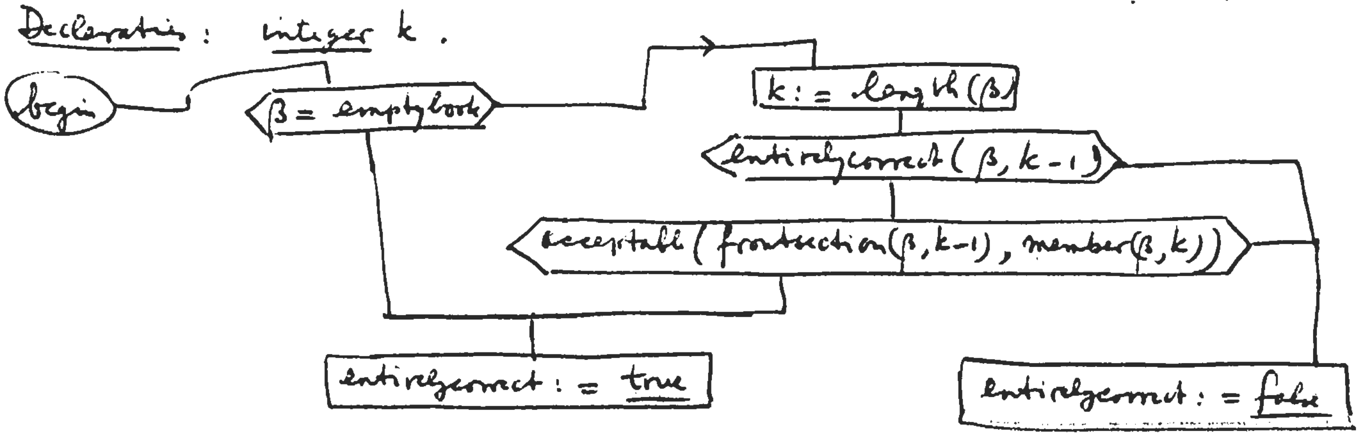
"Wellformed proper" wordt niet in eigenlijke zin gebruikt; dient alleen voor beter begrip.

---

ENTIRELY CORRECT aanroep : entirelycorrect (β)

met β ∈ {line string}

Declaraties : integer k .



# WELLFORMED PROPER

Alleen voor intern gebruik

$\beta \in$ <line string>

$k \in$ <integer>

$\chi \in$ <proper expression>

$\boxed{\text{wellformed proper}(\beta, k, \chi)}$,

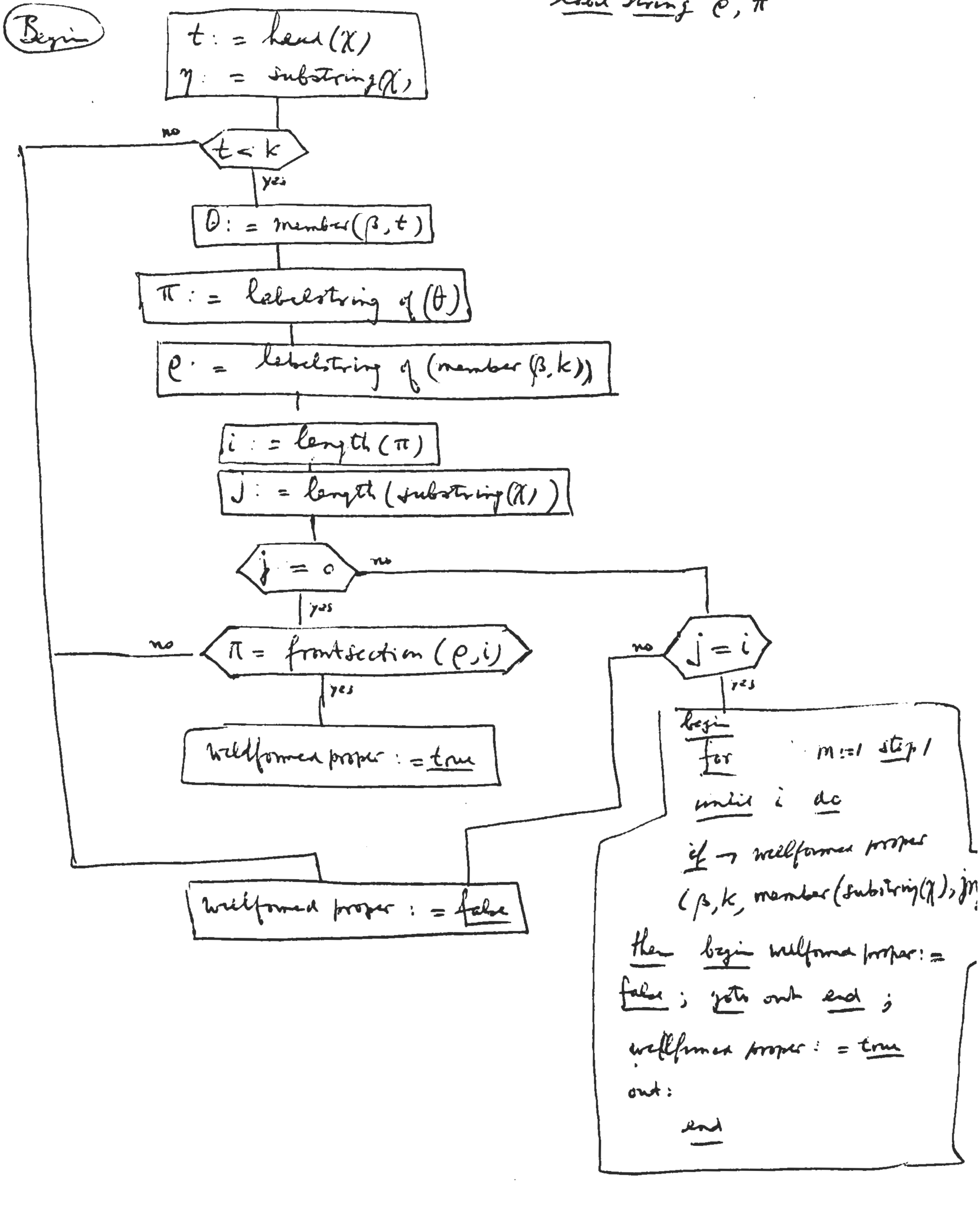
Alleen aanroepen als

$1 \le k \le \text{length}(\beta)$

en entirelycorrect$(\beta)$

Declaratie line $\theta$, integer $t, i, j, m$ proper expression string $\eta$

label string $\rho, \pi$

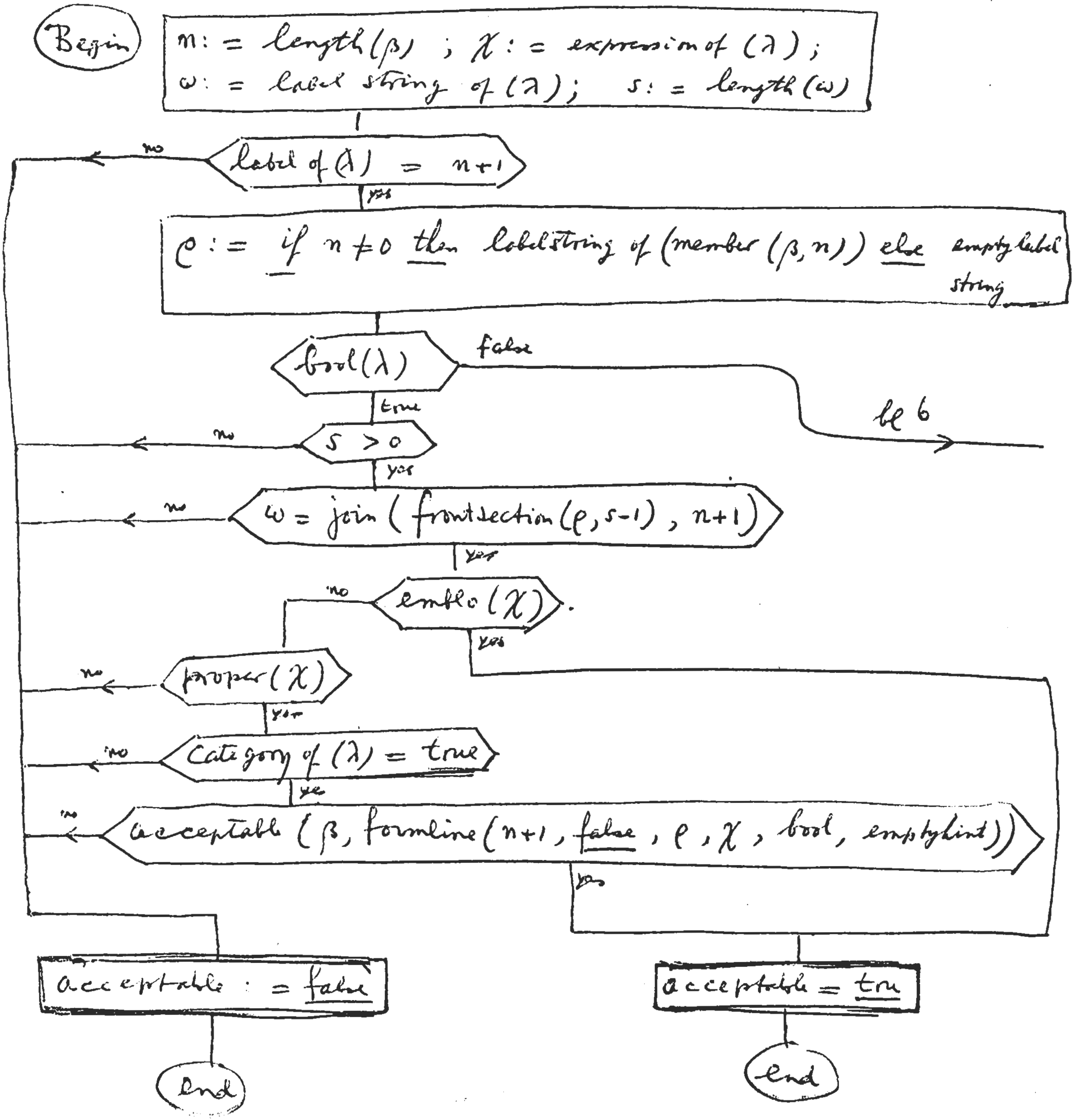


$\beta \in$ <line string>
$\lambda \in$ <line>

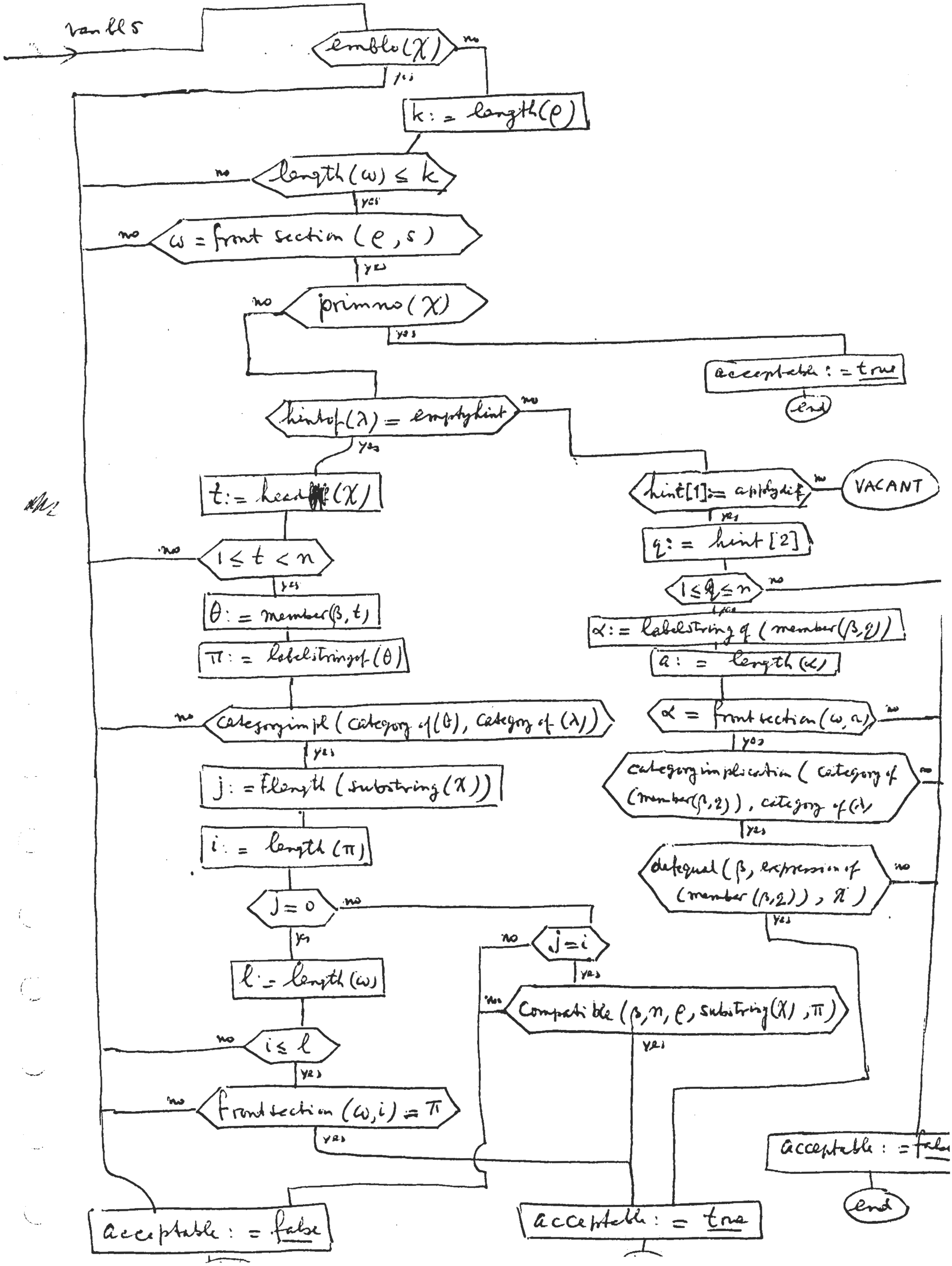
## ACCEPTABLE

Definitie van $\boxed{\text{acceptable}(\beta, \lambda)}$. Mag aangeroepen worden als entirelycorrect($\beta$) vaststaat.

Declaraties
<u>line</u> $\theta$
<u>label string</u> $\omega, \varrho, \pi, \alpha$
<u>expression</u> $\chi$
<u>integer</u> $n, s, t, j, l, i, q, k, a$



ACCEPTABLE (remg)



# COMPATIBLE

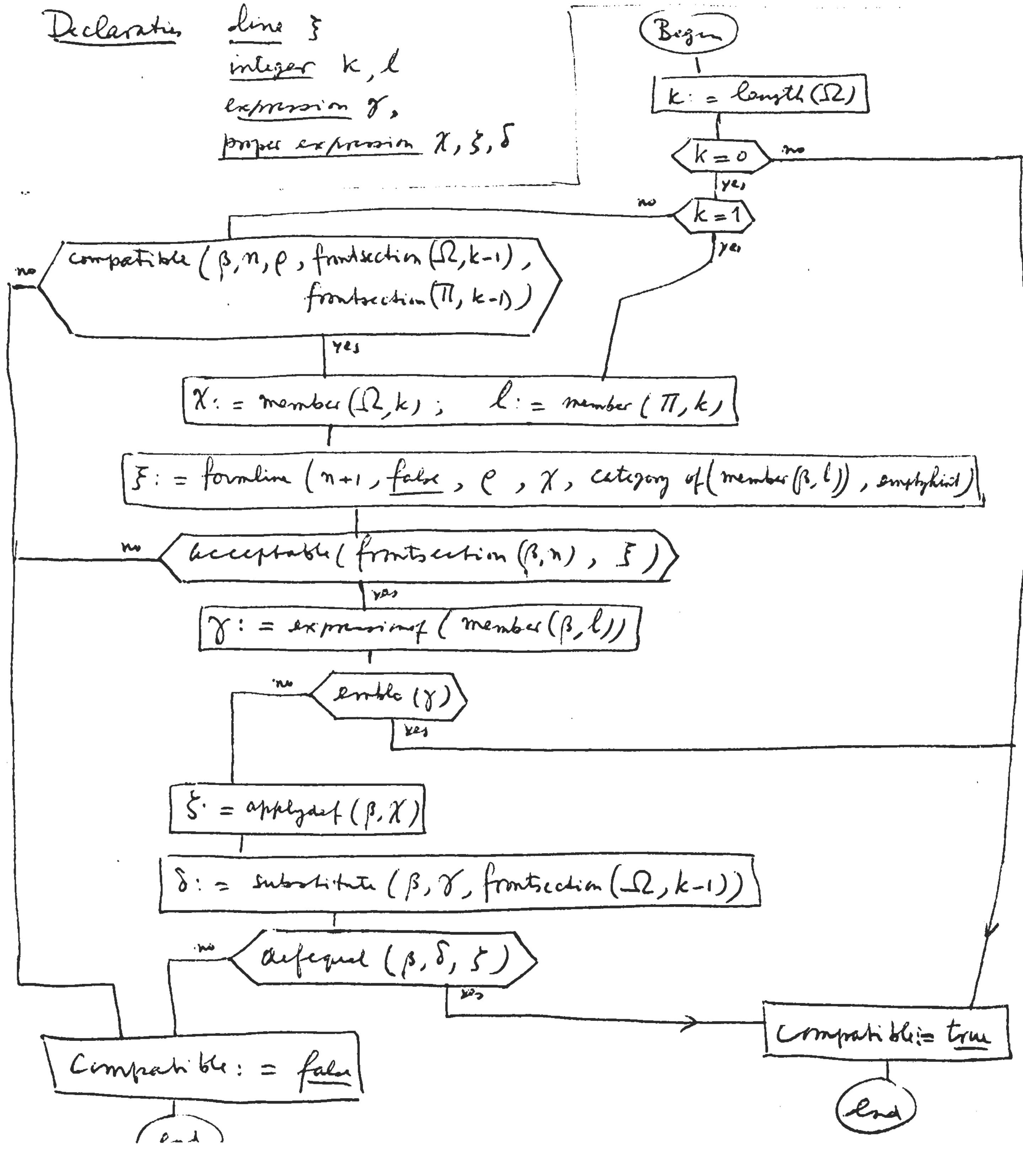
$\beta \in$ <line string>
$n \in$ <integer>
$\rho \in$ <label string>
$\Omega \in$ <proper expression string>
$\Pi \in$ <label string>

Mag aangeroepen worden als tegelijk:

1) entirelycorrect$(\beta)$
2) $1 \le n \le$ length$(\beta)$
3) $\Pi$ is labelstring van een der regels uit $\beta$
4) $\rho$ is labelstring van de $n^e$ regel

length$(\Omega)$ = length$(\Pi) \ge 0$

compatible$(\beta, n, \rho, \Omega, \Pi)$



# SUBSTITUTE

$\beta \in$ <line string>
$\lambda \in$ <proper expression>
$\mu \in$ <proper expression string>

**Definition**
substitute $(\beta, \lambda, \mu)$

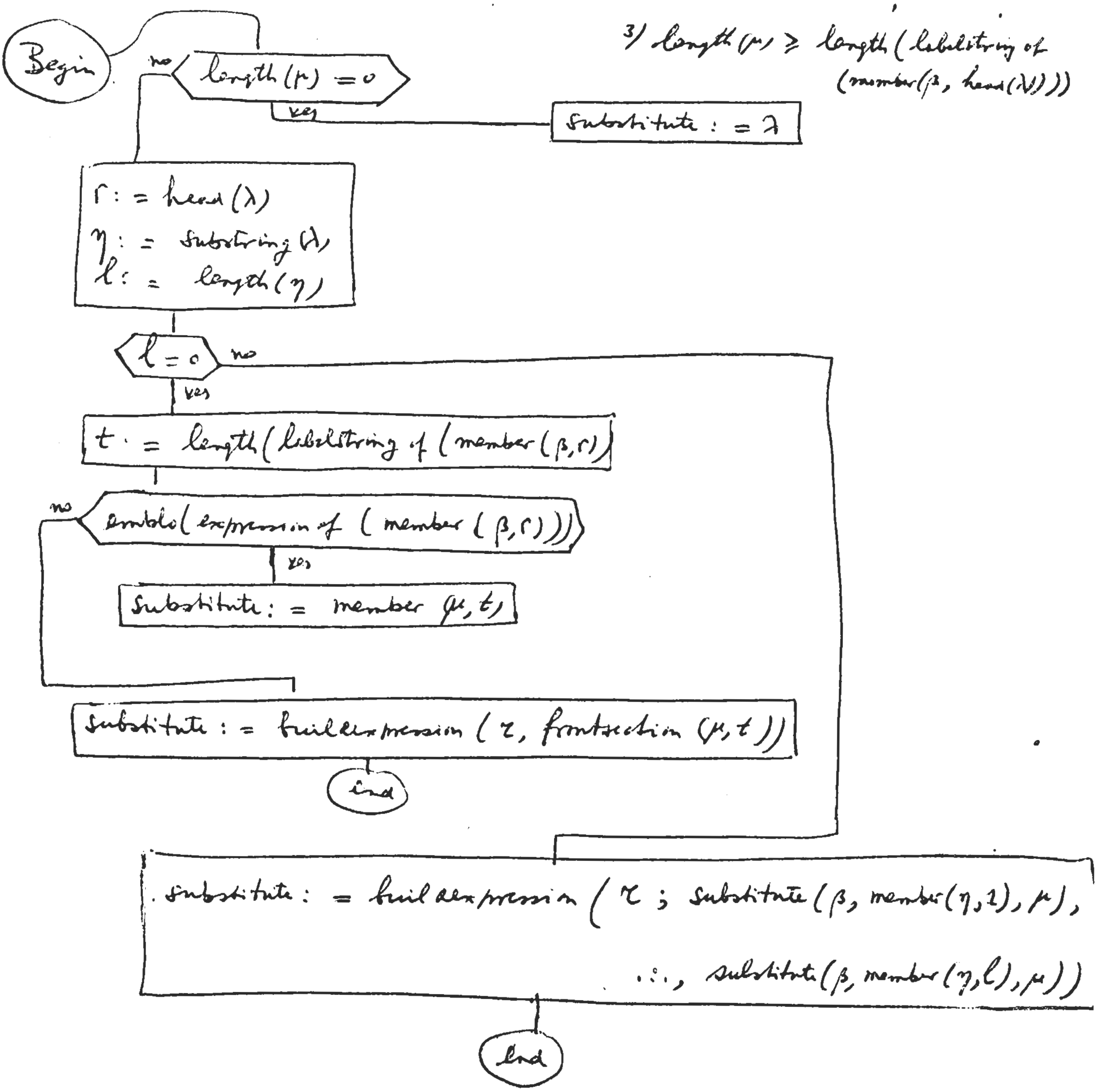
(voldaan is aan)
Mag aangenomen worden als

1) entirelycorrect$(\beta)$.

2) wellformedproper$(\beta$, length$(\beta)$, $\lambda)$

3) length$(\mu) \geq$ length(labelstring of (member$(\beta$, head$(\lambda))))$

**Declarations** proper expression string $\eta$
integer $r, t$



# APPLYDEF

$\beta \in$ <line string>

$\lambda \in$ <proper expression>

applydef $(\beta, \lambda)$

Mag aangeroepen worden als

entirely correct $(\beta)$

en

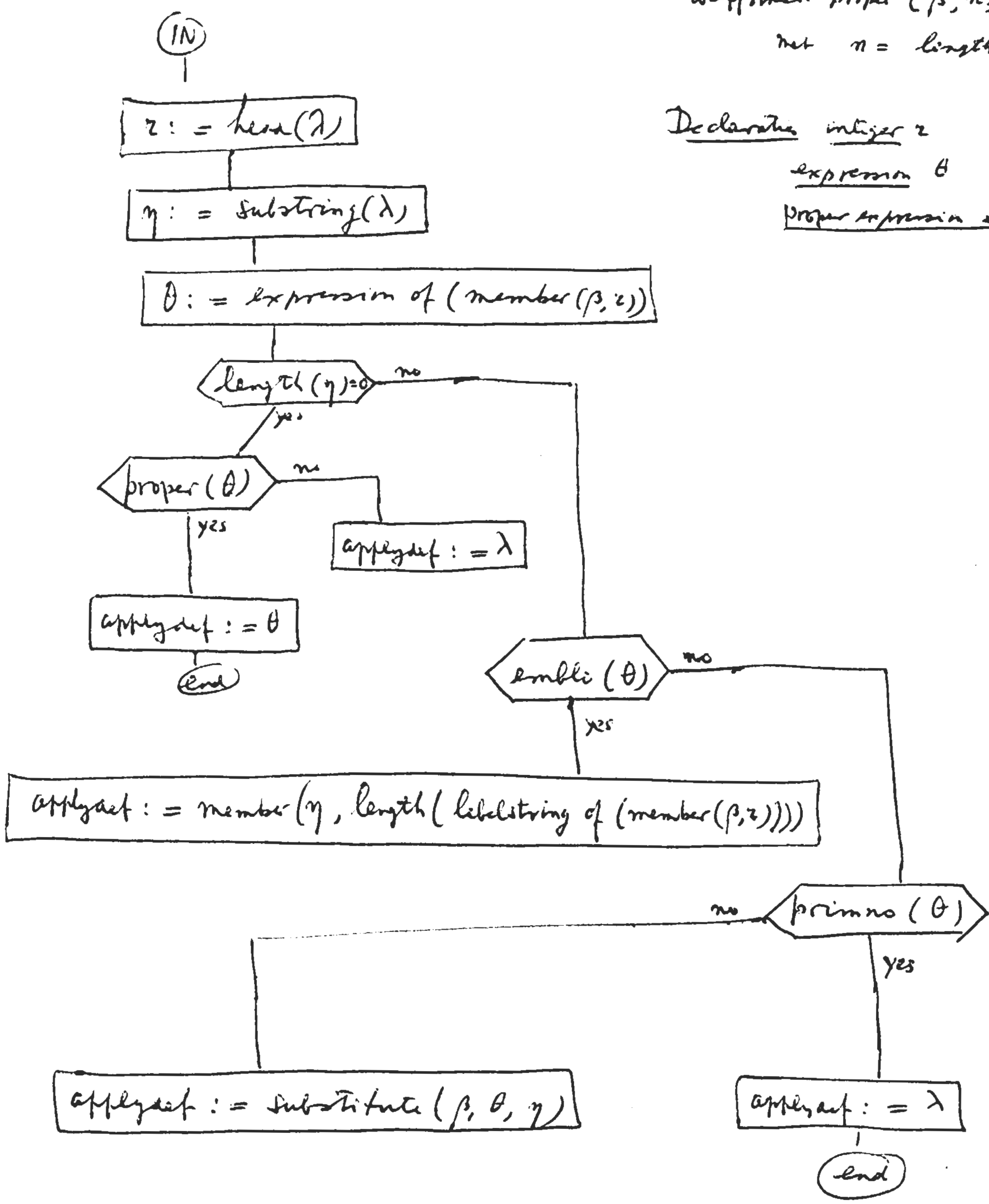
wellformed proper $(\beta, n+1, \chi)$

met $n =$ length $(\beta)$

<u>Declaraties</u> <u>integer</u> $z$

<u>expression</u> $\theta$

<u>proper expression string</u> $\eta$



# DEFEQUAL

$\beta \in$ <line string>

$\delta, \zeta \in$ <proper expression>

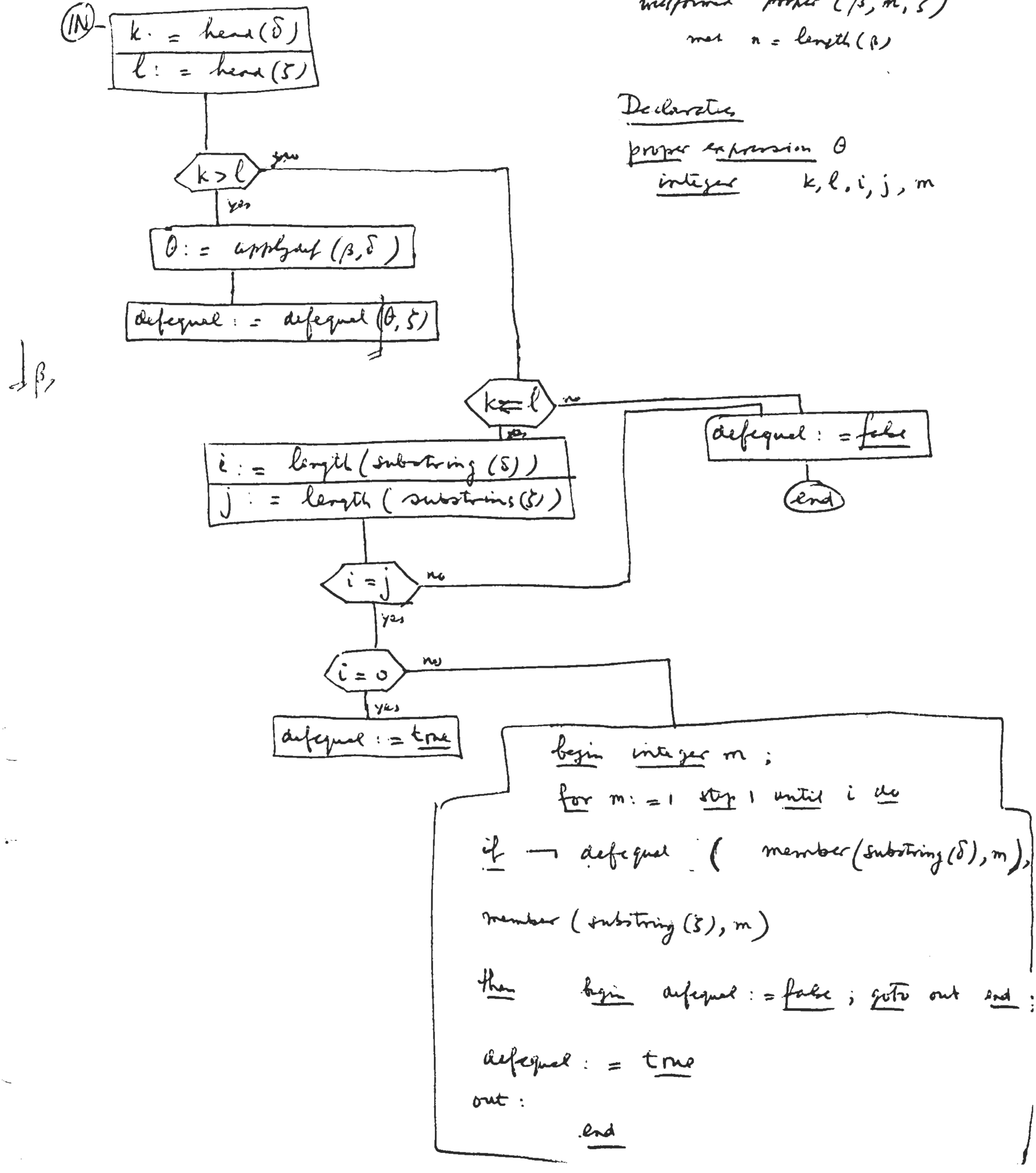
$\boxed{\text{defequal}(\beta, \delta, \zeta)}$

Mag aangeroepen worden als voldaan is aan

entireqcorrect (β)
wellformed proper (β, n+1, ζ)
wellformed proper (β, m, ζ)
met n = length(β)

<u>Declaraties</u>

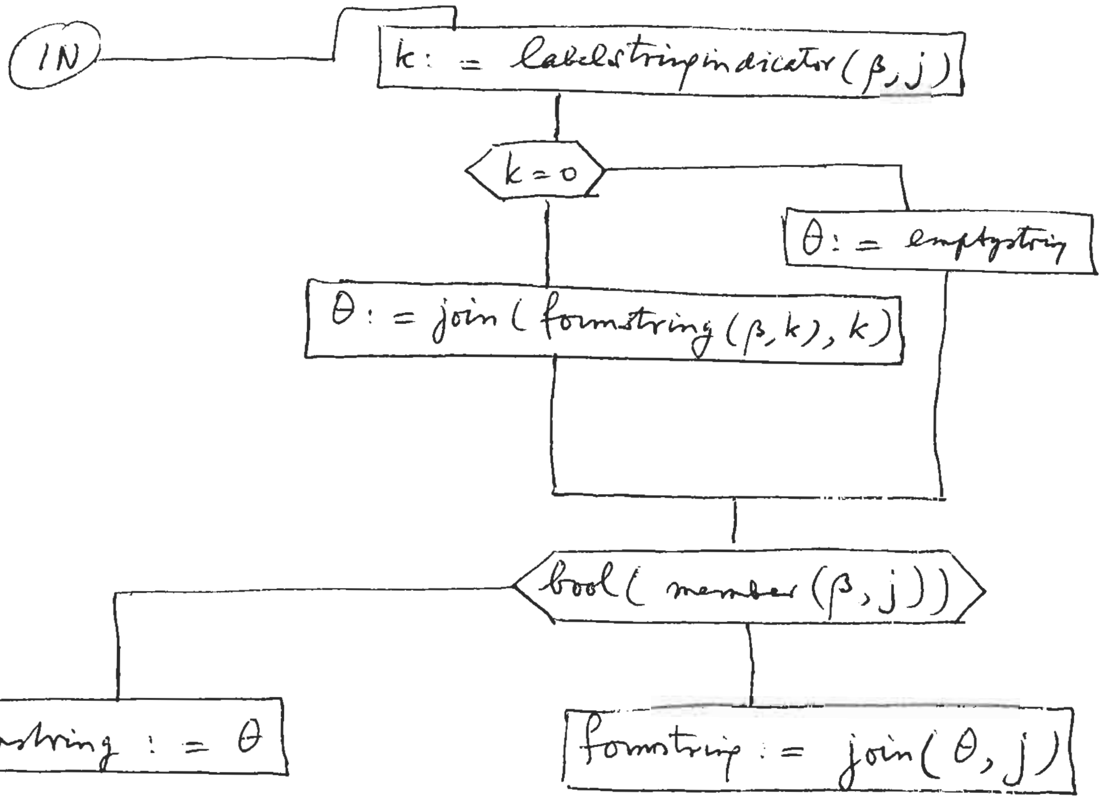
<u>proper expression</u> θ
<u>integer</u> k, l, i, j, m



formstring ($\beta$, j)

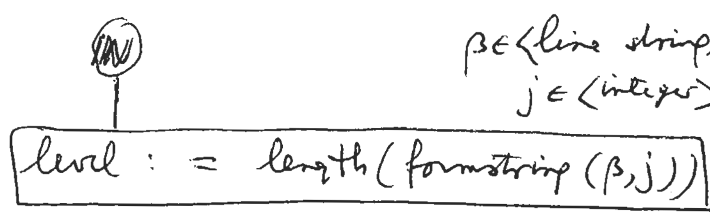
$\beta \in$ <line string>
$j \in$ <integer>

Declaraties: integer k, label string $\theta$




level ($\beta$, j)

$\beta \in$ <line string>
$j \in$ <integer>



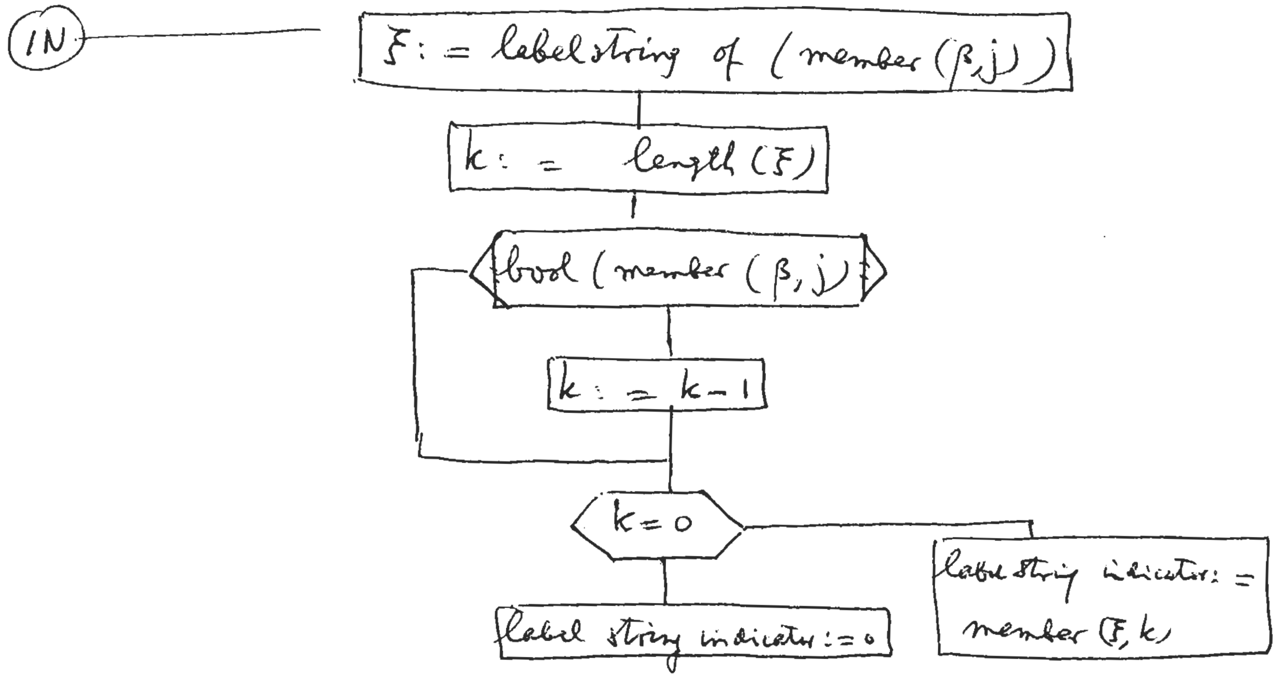

Opm: "formstring" ~~levert~~ ($\beta$, j)" levert op labelstring of (member($\beta$, j)), termineert als $\beta$ entirely correct is.

$\boxed{\text{labelstring indicator } (\beta, j)}$

$\beta \in \langle \text{line string} \rangle$
$j \in \langle \text{integer} \rangle$

Ondersteld: $1 \leq j \leq \text{length}(\beta)$

<u>Declaraties</u> ~~label~~ <u>integer</u> k; labelstring $\xi$




labelstringindicator of (λ) := labelstring indicator (β, labelof(λ)),