

Het bezwijken van materiaal onder mechanische belasting

Citation for published version (APA):

Kals, J. A. G. (1978). *Het bezwijken van materiaal onder mechanische belasting*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0427). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1978

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

BRK
01
WPA

WT 0427

BB 936803

HET BEZWIJKEN VAN MATERIAAL ONDER MECHANISCHE BELASTING

door

Ir. J.A.G. Kals

PT-rapport nr. 0427

Tekst t.b.v. het kollege Vervaardigingskunde 40 in Afdeling
Werktuigbouwkunde

VAKGROEP PRODUCTIETECHNOLOGIE TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

1. INLEIDING

De term „berwijken“ is een betrekkelijk begrip. Of iets bezwikt hangt af van de eisen die men stelt. Deze eisen kunnen betrekking hebben op vele aspecten, zoals algemene gaafheid, vormnauwkeurigheid, oppervlaktegesteeldheid, vlakheid, elastische vormafwijkingen bij mechanische belasting, blijvende vormafwijkingen na mechanische belasting, breuk en de aanwezigheid van inwendige of oppervlakte- scheurtjes. In het volgende zullen we dus vooral op het laatste richten, namelijk het ontstaan van scheuren plaatselijk in een metaal en de factoren die hierop van invloed zijn. Deze problematiek zal belicht worden vanuit de begrippenwereld van de continuumsmechanica. Buiten beschouwing blijven dus, hoewel ook zeer interessant, scheurvoortplanting tot breuk, materiaalkundige achtergronden, dynamische effecten etc.

Om misverstanden te voorkomen wij ik erop dat in de literatuur het begrip „sterkte“, d.w.z. de weerstand tegen „berwijken“, vaak wordt behandeld in termen van uitwendige belasting of gemiddelde inwendige spanning. Als plaatselijk de materiaalsamenhang verloren gaat is dit echter het gevolg van de plaatselijke belasting en niet van de gemiddelde. Uiteraard is de plaatselijke toestand wel afhankelijk van de gemiddelde spanning, maar niet eraan gelijk. We maken dus duidelijk onderscheid tussen de sterkte van het materiaal en van het

< lichaam.

2. ENIGE BEZWIJKKRITERIA

In dit gebied bestaat nog veel onduidelijkheid, hoewel er al veel wetenschappelijke inspanning op gericht is en nog steeds wordt. Enige oorzaken hiervan zijn

- het optreden van verschillende scheurvormen die visueel herkenbaar zijn aan blinkend resp. mat breukvlak, welke meestal in mengvorm verschijnen. De beide zuivere scheurvormen worden aangeduid met taai resp. brose scheur, plastische resp. elastische, glij- resp. splitscheur. Ook de treffend typerende benaming "afmattingsbreuk" i.p.v. taai breuk wordt recent vaak gehoord.
- de gespecialiseerde breukmechanica is, hoewel nog sterk in ontwikkeling, zeer complex en weinig geschikt voor de technische praktijk.
- de praktische realisatie van gewenste experimenten en de bijbehorende meettechnieken is vaak zeer moeilijk of zelfs onmogelijk.

Desondanks is in de loop van de tijd een aantal bruikbare "bezwijkcriteria" voorgesteld, waarvan de bruikbaarheid bevestigd is mits men, met enig inzicht gewaarsd, voor verschillende gevallen het juiste criterium weet te kiezen. Deze criteria zijn:

I Het kritische normaalspanningscriterium (volgens Rankine). Dit houdt in dat de materiaalsamenhang plaatselijk wordt verbroken als de grootste trekspanning een kritische en van het materiaal afhankelijke waarde bereikt. Uit experimenten is gebleken dat dit criterium alleen bij "brosse" materialen lijkt op te gaan. Dit begrip "bros" zal later nog van kantteekeningen worden voorzien.

II Het criterium van de kritische isostatiese spanningcomponent. Hiermee wordt gesteld

dat een splitscheur wordt geïnitieerd indien de isostatiese component van de plaatselijke spanningstoestand (= de gemiddelde normaalspanning = de eerste invariant van de spanningstensor = de gemiddelde hoofdspanning) een kritische en van het materiaal afhankelijke (positieve) waarde aanneemt. Ran gezien een isostatiese spanningstoestand geen scheurspanningen opwekt kan hij ook geen plastische deformatie veroorzaken. Hij kan dus uitsluitend elastische volumeverandering veroorzaken (zie later). Om deze reden kan dit scheurkriterium ook geformuleerd worden in termen van kritische volumevergroting of kritische volumevergrotingsarbeid.

Normal bij grote trekspanningen in alle richtingen is het experimenteel zeer moeilijk de criteria I en II separaat te toetsen. Koudas dat er nog steeds geen eenstemmigheid heeft de moeite verdient.

III Het kritische scheurspannings criterium.

Dit criterium wordt vaak door constructeurs gehanteerd als eenvoudige bezwijkgrens en er zijn de namen van Mohr, Guest en Tresca mee verbonden. In de duvorm-technologie wordt het eveneens toegepast, maar als eenvoudige vloeiervormwaarde. Omdat het geen betrekking heeft op bezwijken in de zin zoals in deze tekst bedoeld blijft het verder buiten beschouwing.

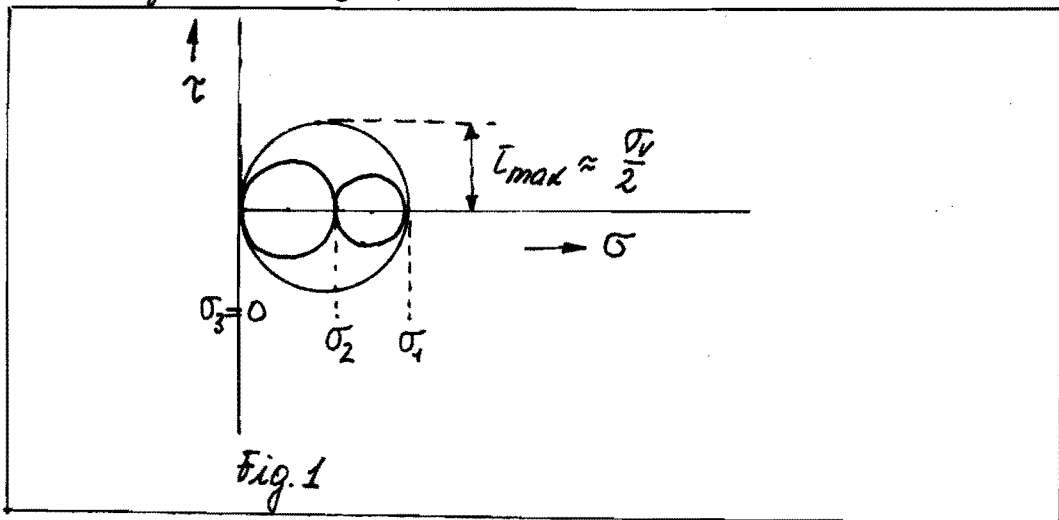
IV Het criterium van de kritische elastische vormveranderingsenergie. Dit criterium, waaraan o.a. de namen van Maxwell en von Mises verbonden zijn, stelt dat een materiaal plastisch begint te vloeien als de tweede invariant van de deviatorische spanningstensor (ofwel de specifieke potentiële elastische vormveranderingsarbeid die plaatselijk in het materiaal is opgeslagen) een kritische en van het materiaal afhankelijke waarde bereikt. Ook dit criterium heeft alleen betrekking op „bezwijken“ vanuit het gezichtspunt van de constructie. Voor de duvormtechnologie is het slechts de plasticiteitsvoorwaarde. Het is hier alleen opgemerkt om dit verschil in opvatting te benadrukken.

V Het criterium van de kritische plastische vormveranderingsarbeid. Deze schemehypothese is reekent voorgesteld door Gillemot en lijkt bruikbaar te zijn voor het voorspellen van plastische breuk. In plaats hiervan kan men uiteraard ook stellen dat scheuren worden geïnitieerd indien de plaatselijke effectieve deformatie een kritische materiaalafhankelijke waarde bereikt. Hier is de integraal over de inkrementele effectieve deformatie (= tweede invariant van de inkrementele rektenzor) met in het geding.

3. DE ELASTISCHE GEDAANTEVERANDERINGSENERGIE.

Om misstanden te voorkomen: onder „vormverandering“ meeta ik een verandering van de maatverhoudingen van een lichaam of volumeelement bij konstant volume. Denk hierbij aan het begrip „gelijkvormigheid“ uit de meetkunde. Een isostatistische spanningstoestand veroorzaakt een volumeverandering van het belaste lichaam, en ieder volumeelement daarin, bij gelijkblijvende vorm. Het „gedaanteverandering“ bedoel ik het samengestelde effect van een vormverandering en een volumeverandering.

In het volgende zullen we bewijzen dat de deviatorische spanningstoestand en de isostatistische komponent van de spanningstoestand verantwoordelijk zijn voor de vormverandering resp. volumeverandering van een (homogeen en isotroop) volumeelement. De aanname van een homogeen materiaal is o.a. wettelijk omdat in de wand van een microkolle een hoofdspanning steeds gelijk aan nul is en dus de grootste hoofdspanning daar nooit groter dan ongeveer de bloespanning in de trekproef kan zijn (zie Fig. 1).



Onmiddelijk in de wand van kolten - evenals trouwen in lichaamsoppervlakken waarop geen uitwendige belasting aangrijpt - kan de isostatische komponent van de spanningstoestand dus nooit verlopen door plastische relaxatie. De aanname van isotropie is men een kwestie van „puntjes op de i's" zetten, omdat de continuumsmechanica volgens von Drises hiervan uitgeat. Men kan dat zo opvatten, dat als het materiaal niet geheel isotrop is ook de uitkomsten niet geheel juist zijn. De tendenzen zijn dit echter wel en daarom gaat 't hier. Zoals steeds proberen we ook hier inzicht te verwerven via simplificerende modellen.

Mit de trekproef vinden we voor het elastisch gebied van metalen een lineaire relatie tussen spanning en rek, de zog. „Wet van Hooke":

$$(1) \quad \sigma = E \cdot \epsilon, \quad \text{dus}$$

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E = \text{konst.}, \quad \text{of}$$

dit is onafhankelijk van ϵ .

Dit betekent, dat een plaatselijke ruimtelijke spanningstoestand opgebouwd kan worden gedacht uit drie onderling loodrechte lijnspanningen. Voor de deformatie maakt het geen verschil in welke volgorde de lijnspanningen - of gedeeltes daarvan - worden gesuperponeerd.

| | Richting 1 | Richting 2 | Richting 3 |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| gevolg van σ_1 | σ_1/E | $-\nu \sigma_1/E$ | $-\nu \sigma_1/E$ |
| gevolg van σ_2 | $-\nu \sigma_2/E$ | σ_2/E | $-\nu \sigma_2/E$ |
| gevolg van σ_3 | $-\nu \sigma_3/E$ | $-\nu \sigma_3/E$ | σ_3/E |
| | Som = ϵ_1 | Som = ϵ_2 | Som = ϵ_3 |

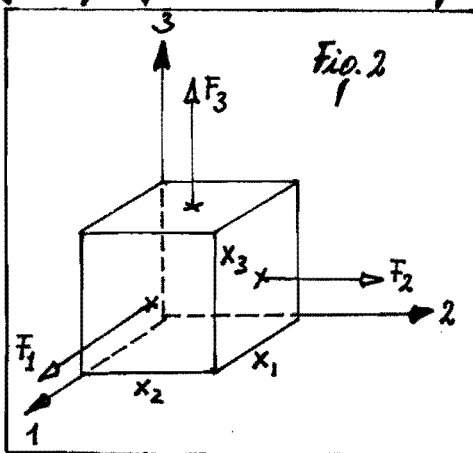
Op deze eenvoudige wijze verkrijgen we nu de volgende relaties tussen rekken en spanningen in de drie hoofdrichtingen (waartoe we ons gemakshalve beperken):

$$(2) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \} \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \end{aligned}$$

In deze zog. "konstitutieve vergelijkingen" van de elasticiteitsmechanica is

- ϵ = rek (maatrek of natuurlijke rek maakt numeriek geen verschil uit)
- E = elasticiteitsmodulus, een materiaalkonstante.
- ν = dwarscontractiecoëfficiënt of konstante van Poisson, eveneens een materiaalkonstante

(Enige getalwaarden zijn in tabel 1 gegeven.)



Beschouwen we nu een volumeelement $x_1 x_2 x_3$, waarvan de zijden in de hoofdrichtingen van de spanningstoestand zijn georiënteerd, zodat het element rechthoekig blijft. (Fig. 2)

| material | $\frac{E}{10^4 \text{ N/mm}^2}$ | $\frac{G}{10^4 \text{ N/mm}^2}$ | ν |
|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------|
| magn./alum. legeringen | 4...4,5 | 1,5...1,7 | ~0,3 |
| aluminiumlegeringen: | | | |
| zuiver aluminium | 7 | 2,7 | ~0,3 |
| Al Si Mg | 6,8...7,2 | 2,6...2,8 | ~0,34 |
| Al Cu Mg | 7,2...7,4 | 2,8 | 0,33...0,34 |
| zinklegeringen | 11...13 | 4,5...5 | 0,26...0,28 |
| ijzerlegeringen: | | | |
| zuiver ijzer | ~21 | ~8 | ~0,3 |
| grys gietijzer 12 | ~7,5 | ~3 | ~0,24 |
| grys gietijzer 22 | ~12 | ~4,9 | 0,24...0,26 |
| C-, Cr-, Si-, Mn-staal | 21 | 8 | 0,30...0,31 |
| Ni-staal \approx 5% Ni | 20,3...20,5 | 7,8...7,9 | 0,31 |
| Ni-staal \approx 25% Ni | 18,2 | 7 | 0,30 |
| Ni-staal \approx 36% Ni | 15,6 | 6 | 0,30 |
| koperlegeringen: | | | |
| elektrolytisch Cu (gegl.) | ~11,5 | ~4,3 | ~0,34 |
| elektrolytisch Cu (getr.) | ~12,5 | ~4,7 | ~0,34 |
| Ms 58 | ~12,5 | ~4,6 | 0,37 |
| Ms 63 | ~9,5 | ~3,5 | 0,36 |
| brons | ~11,6 | ~4,3 | ~0,35 |
| tin | 4,15 | — | — |
| tantaal | 1,9 | — | — |
| zilver, goud | 8 | — | — |
| kadmium | 0,51 | — | — |
| itidium | 52 | — | — |
| beryllium | 30 | — | — |
| nikkel | 20,5 | — | — |
| platina | 17 | — | — |
| kobalt | 20,8 | — | — |

Tabel 1. Getalwaarden van de elastische konstanten van enige metalen en legeringen.

Veronderstellen we dat het volumelement "vastligt" tegen de coördinaatvlakken, dan zijn de verlengingen van de zijden (Δx_1 , etc.) tevens de verplaatsingen van de aangrijpingspunten van de krachten (F_1 , etc.). De arbeid die aan het volumelement wordt toegevoerd is dan:

$$W = \int_0^{\Delta x_1} F_1 dx_1 + \int_0^{\Delta x_2} F_2 dx_2 + \int_0^{\Delta x_3} F_3 dx_3$$

$$= \frac{1}{2} (F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2 + F_3 \Delta x_3)$$

De specifieke deformatiearbeid wordt dan:

$$W_s = \frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{x_2 x_3} \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{F_2}{x_3 x_1} \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{F_3}{x_1 x_2} \frac{\Delta x_3}{x_3} \right)$$

of:

$$(3) \quad W_s = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

(Deze uitdrukking geldt uiteraard alleen voor een elastische deformatie omdat voor de integratie reeds een lineair verband tussen kracht en verlenging is verondersteld.)

uit meq. (3) kunnen we de rekken elimineren door meq. (2) te substitueren:

$$W_s = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1 \left\{ \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \right\} + \sigma_2 \left\{ \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \right\} + \sigma_3 \left\{ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \right\} \right]$$

Verder uitgewerkt:

$$W_S = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 - \nu\sigma_1\sigma_2 - \nu\sigma_3\sigma_1 + \sigma_2^2 - \nu\sigma_2\sigma_3 - \nu\sigma_4\sigma_2 + \sigma_3^2 - \nu\sigma_3\sigma_4 - \nu\sigma_3\sigma_2)$$

$$(4) \quad W_S = \frac{1}{2E} \left\{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right\}$$

Probeerendelwijz blijkt dat deze uitdrukking nog verder vereenvoudigd kan worden. Hoewel enigszins moeizaam is dit zeer lonend. Hiertoe voeren we allereerst de gemiddelde normaalspanning ofwel de „isostatische komponent“ van de spanningstoestand ten tonele:

$$(5) \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\text{Dus:} \quad 3\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$(6) \quad 9\sigma_m^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

Om nu hebben we de effectieve spanning volgens von Mises nodig:

$$(7) \quad 2\bar{\sigma}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Dus:} \quad 2\bar{\sigma}^2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2 \\ &= 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \end{aligned}$$

$$\text{en:} \quad \bar{\sigma}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

$$(8) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \bar{\sigma}^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

Substitutie van (8) in (6) levert nu:

$$9\sigma_m^2 = \bar{\sigma}^2 + 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

$$(9) \quad \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 3\sigma_m^2 - \frac{\bar{\sigma}^2}{3}$$

Substitutie van (9) in (8) levert voort:

$$(10) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \bar{\sigma}^2 + 3\sigma_m^2 - \frac{\bar{\sigma}^2}{3} = \frac{2}{3}\bar{\sigma}^2 + 3\sigma_m^2$$

De laatste substitueren we (9) en (10) in (4) en vinden nu:

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2E} \left[\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2 + 3\sigma_m^2 - 2\nu \left(3\sigma_m^2 - \frac{\bar{\sigma}^2}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2E} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\nu \right) \bar{\sigma}^2 + (3 - 6\nu)\sigma_m^2 \right] \\ &= \frac{1}{2E} \left[\frac{2}{3}(1+\nu)\bar{\sigma}^2 + 3(1-2\nu)\sigma_m^2 \right] \end{aligned}$$

$$(11) \quad W_s = \frac{1}{2} \left[\frac{2(1+\nu)}{3E} \bar{\sigma}^2 + \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m^2 \right]$$

We kunnen dit nu ook vereenvoudigen door twee (elastische) grootheden in te voeren:

$$(12) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \text{" glijdingsmodulus "}$$

$$(13) \quad \kappa = \frac{3(1-2\nu)}{E} = \text{" compressibiliteit "}$$

Met (12) en (13) gaat vergelijking (11) nu over in:

$$(14) \quad W_s = \frac{\bar{\sigma}^2}{6G} + \frac{\alpha}{2} \sigma_m^2$$

$$W_{s \text{ totaal}} = W_{s \text{ deviatorisch}} + W_{s \text{ volumettisch}}$$

Blijkbaar geldt dus dat de totale gedaanteveranderingsarbeid die elastisch wordt opgenomen gelijk is aan de som van de elastische vormveranderingsarbeid en de elastische volumeveranderingsarbeid. Meer in het bijzonder: het deviatorische en het isostatische deel van de spanningstoestand zijn blijkbaar separaat verbonden met de vormverandering resp. volumeverandering van het beschouwde volumeelement.

Opmerking: het is mogelijk om, m. b. v. verg. (5), nuog. 4, om te rekenen tot de volgende uitdrukking in deviatorische hoofdspanningen:

$$(15) \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) \quad \text{met } \sigma_i' = \sigma_i - \sigma_m \text{ enz.}$$

Dit ten ondersteuning van het bovengeskeide.

Voer een objectieve kijk op deze zaken is het nuttig dat volumeverandering van het materiaal en volumeverandering van het lichaam van elkaar scheidbaar worden. Uit experimenten is namelijk bekend, dat volumeverandering van materiaal - en tevens van lichamen zoals op holten en scheutjes afwezig zijn - uitsluitend elastisch en daarmee omkeerbaar is. Deze volumeverandering wordt veroorzaakt door de isostatische spanningskomponent σ_m . Omdat σ_m en ook iedere andere zijdelingse spanning geen invloed heeft op de effectieve spanning

$\bar{\sigma}$ kan een materiaal isostatisek worden belast - zowel in positieve als negatieve zin - tot een bedrag van σ_m dat vele malen het bedrag van de materiaal vloeispanning bedraagt Zonder dat het materiaal plastisek kan „moegeven“ of relaxeren. In de wand van koetes kan - zoals al eerder aangeleid - de isostatiseke spanning slechts weinig van nul afwijken, zodat daar eventueel nie plastiseke vervorming plaats kan vinden. Hoewel een lichaam als geheel isostatisek belast is kan er toch een blijvende volumeverandering optreden als gevolg van inwendige koetes. (Vergelijk in dit verband een massieve kubus en een doos van dezelfde afmetingen en materiaal die samen in een druktank worden gebracht. De kubus zal geen blijvende deformatie ondergaan, de doos daarentegen zal in elkaar worden gedrukt.)

Volledigheidshalve drukken we de gedaanteveranderingsarbeid ook nog uit in de rekken. Dit moet mogelijk zijn omdat het verband tussen spanningen en rekken bekend is, of althans bekend verondersteld mag worden. Hiertoe schrijven we de konstitutieve vergelijkingen (2) als volgt:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ E\varepsilon_2 &= \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \\ E\varepsilon_3 &= \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \text{ofwel na sommeren:} \end{aligned}$$
$$E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$
$$E \cdot 3\varepsilon_m = 3\sigma_m - 6\nu\sigma_m$$
$$E\varepsilon_m = (1 - 2\nu)\sigma_m$$

Het

$$(17) \quad \epsilon_m = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3}$$

Vinden we dat vervolgens:

$$(18) \quad \epsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m = \frac{\delta}{3} \sigma_m$$

Hierin kunnen we de volumeverandering nog rechtstreeks zichtbaar maken. Beschouwen we een rechteblikig volumeelementje met zijden x_1 , x_2 en x_3 evenwijdig aan de hoofdrichtingen. Voor het volume en de volumeverandering geldt dan algemeen:

$$V = x_1 x_2 x_3$$

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} dx_3 \\ &= x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3 \end{aligned}$$

$$(19) \quad \frac{dV}{V} = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3$$

Integratie leidt nu tot

$$\ln \frac{V}{V_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

Voor de kleine elastische rekken maakt het getalsmatig niets uit of we met ϵ een maatrek of een natuurlijke rek bedoelen. Benadruken we de logaritme door de eerste term van de desbetreffende reeks, dan mogen we nu schrijven:

$$(20) \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_m$$

Hiermee gaat verg. (10) over in

$$(21) \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \alpha \sigma_m$$

Het deze uitdrukking wordt het wezen van de „kompres-
sibiliteit“ α van het materiaal geheel duidelijk. Uit (21)
leiden we voort of dat de kompresibiliteit gelijk aan
nul is, d.w.z. het materiaal niet van volume kan
veranderen, als

$$\nu = \frac{1}{2} \quad (\rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = 0)$$

We konkluderen voort dat de gemiddelde rek ϵ_m niet
andus dan een maat van de plaatselijke volume-
verandering van het materiaal (dus elastisch) is.

4. DE ELASTISCHE VORMVERANDERINGSENERGIE TOT VLOEI

Overeenkomstig de eerder vastgestelde definities bedoel ik
met „vormveranderingsenergie“ uitsluitend de arbeid
die door het deviatorisch deel van de spanningstoestand
wordt verricht. Uit verg. (14) volgt dat deze (omzover
elastisch) is:

$$(22) \quad W_{sdev.} = \frac{\sigma^2}{6G} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2$$

Hierin zijn ν , E en G elastische materiaalgrootheden
die de verplaatsingen bepalen die het materiaal toelaat
en waaronder de spanningen arbeid verrichten.

De grootheid

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

is uitsluitend van de plaatselijke spanningstoestand afhankelijk en duidt aan hoe groot de „arbeidscapaciteit“ van de spanningstoestand m.b.t. normverandering is. Het ligt voor de hand te stellen dat een materiaal plastisch vloeit, d.w.z. blijvend meegeft, als deze capaciteit een bepaalde waarde bereikt die van het desbetreffende materiaal afhankelijk is. In het geval van een trekproef geldt bijv.

$$\sigma_1 > 0 ; \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ („lijnspanning“)}$$

Dan is:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1)^2 + (-\sigma_1)^2] = \sigma_1^2$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_1$$

Plastische deformatie vindt plaats als $\sigma_1 = \sigma_1$, dus als

| | |
|------|---------------------------|
| (23) | $\bar{\sigma} = \sigma_1$ |
|------|---------------------------|

Deze uitdrukking wordt dan „vloeiwaarde“ genoemd. In feite houdt deze ook in, dat plastische vloeï plaatsvindt (begint of voortgaat) indien de opgetrapte elastische energie in het kristalrooster een kritische bereigrens bereikt. En wel onafhankelijk van de soort spanningstoestand. De zog. „vloeiconstante“ σ_1 (ook wel aangeduid met k_f of γ) kan dan heel eenvoudig in de trekproef worden gemeten om ieder metaal.

Zoals reeds eerder gezegd, of de vloeivoorwaarde tevens bezwijkcriterium is hangt af van het desbetreffende probleem. Een relatieve zaak dus. Ook in de zuivorm-techniek kan dit het geval zijn, bijv. als we een gereedschap beschouwen.

Wellicht ten Druivloede stellen we nog vast dat $\bar{\sigma}$ hoofzakenlijk is van de isostatistische komponent van de spanningstoestand. Immers, verandert men alle hoofdspanningen (in verp. (1)) met een gelijk bedrag dan wordt $\bar{\sigma}$ hiervan niet beïnvloed. De spanningsverschillen zijn alleen bepalend voor $\bar{\sigma}$ en deze worden voorgesteld door de diameters van de drie korresponderende spanningcirkels van Mohr en bepalen dus de drie maximale - en dus actieve - schuifspanningen. Normveranderingsarbeid is eigenlijk in fysisch opzicht zuivere afschuifarbeid.

Opmerking: ik wijs u nogmaals op dat deze beschouwingen bedoeld zijn om de „modelwerkelijkheid“ van een homogeen en isotherm continuum. bijna een halve eeuw van evasie, experimenten en theoretische studie hebben echter geleerd dat het plasticiteitsmodel volgens von Mises de werkelijkheid zodanig abstrahert dat verschillen steeds slechts afwijkingen van relatief duidelgeschikt belang zijn. Deze afwijkingen worden in de materiaalkunde bestudeerd en verklaard (ook men met behulp van denkmodellen).

5. DE PLASTISCHE VORMVERANDERINGSWERK TOT BREUK

Doats elders wraat afgeleid kan de specifieke inkrementele plastische vormveranderingsarbeid als volgt worden uitgedrukt:

$$dW_{\text{dev.}} = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \sigma_v d\bar{\epsilon}$$

Bepaken we dus tot een modelmateriaal dat zich precies volgens de mustervigingsrelatie van Ludwik gedraagt, dan is

$$dW_{\text{dev.}} = C(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n d\bar{\epsilon}$$

en

$$(24) \quad W_{\text{dev.}} = C \int_{\bar{\epsilon}} (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n d\bar{\epsilon}$$

Gillemot meende reent uit vele experimenten te mogen konkluderen, dat glijbreuk (of taai breuk) in een materiaal wordt geïnitieerd indien de specifieke plastische vormveranderingsarbeid plaatselijk een materiaalafhankelijke kritische waarde bereikt. Uit (24) kunnen we afleiden dat dit tevens betekent, dat dan de effectieve deformatie een kritische waarde heeft bereikt. De eveneens gebezigde term „afmattingsbreuk” karakteriseert dit breuktype dus zeer juist.

Kennkend van deze breuksoort is omits dat het breukvlak - of althans het eerst ontstaan gedeelte ervan - samenvalt met de vlakken van grootste afschuiving en of grootste schuifspanning. Omits is een breukvlak bij taai breuk meestal glanzend, dit in tegenstelling tot een breukvlak bij zuiver brosse breuk dat mat (tijdspanaactief) is.

Onderzoeken we dit breukmodel model. We schrijven:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2)}$$

Voorts: $d\epsilon_1 : d\epsilon_2 : d\epsilon_3 = 1 : \alpha : -(1+\alpha)$

(Hierin ligt besloten dat $d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$). Dan is

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3}d\epsilon_1^2\{1 + \alpha^2 + (1+\alpha)^2\}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}d\epsilon_1^2(2\alpha^2 + 2\alpha + 2)} \\ &= \frac{2|d\epsilon_1|}{\sqrt{3}} \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1} \end{aligned}$$

of:

$$(25) \quad |d\epsilon_1| = \frac{\sqrt{3} d\bar{\epsilon}}{2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}}$$

(Opmerking: bij plastische deformatie wordt de toegevoerde arbeid zo goed als geheel gedissipeerd. We verantwoorden dit door te stellen dat de (inkrementele) vormveranderingsarbeid steeds positief is. Omdat

$$dw_s = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon},$$

is hieraan steeds voldaan door per definitie te stellen dat $\bar{\sigma}$ en $d\bar{\epsilon}$ beiden steeds positief zijn.)

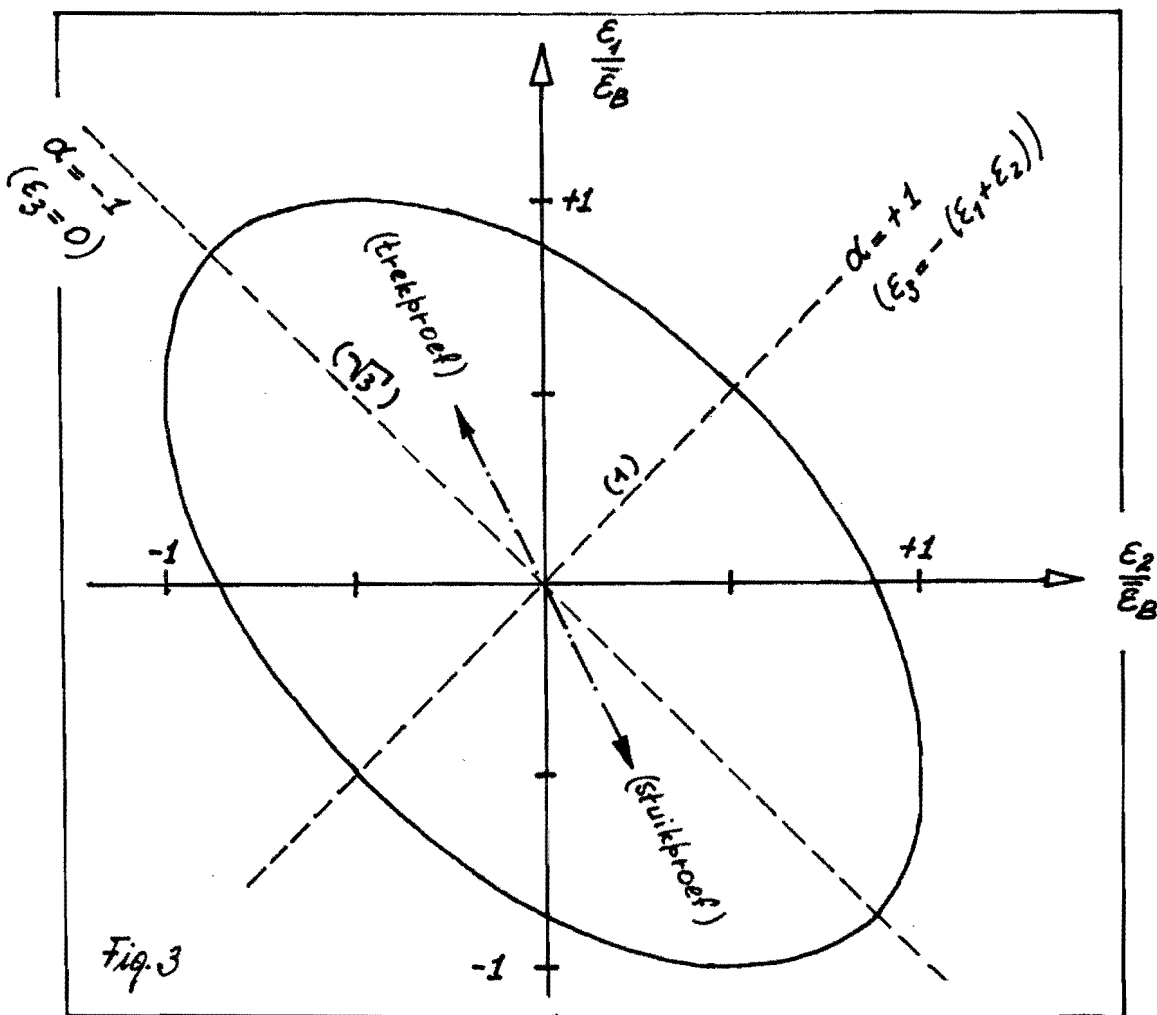
Dan met vgl. (25) voort te kunnen gaan in de gewenste zin maken we twee beperkingen:

- de hoofdrichtingen roteren niet door het materiaal, zodat eindige waarden van ϵ_i enz. een reële betekenis hebben.

- De verhouding α is konstant gedurende de gehele deformatie. De meetkundige plaats van alle beeldpunten van tussen-deformaties in een (ϵ_1, ϵ_2) -grafiek (en x_1) is dan een rechte lijn. We spreken van een „rechte deformatieweg.“

Integratie van verp. (25) geeft dan:

$$(26) \quad |\epsilon_1| = \frac{\bar{\epsilon} \sqrt{3}}{2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}} \quad [\epsilon_2 = \alpha \epsilon_1]$$

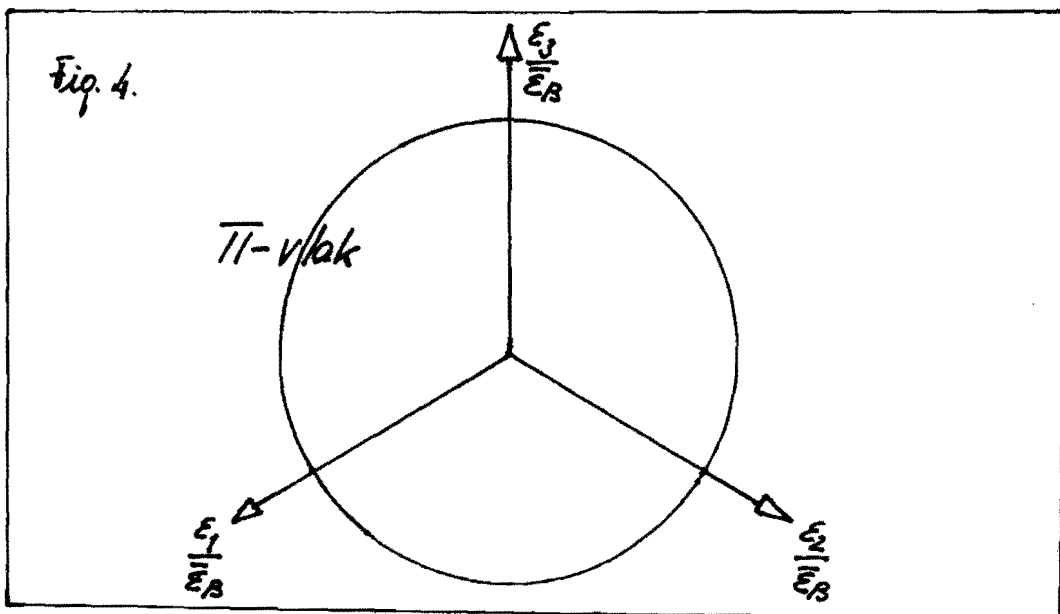


Indien we nu de kritische waarde van \bar{E} bij breuk aanduiden met \bar{E}_B kan verg. (26) grafisch worden weergegeven (zie fig. 3). Een interessante conclusie die uit deze grafiek volgt is dat voor $\alpha = -1$ („zuivere afschuiving“) het materiaal ideaal deformeert. Althans indien men hiervoor als criterium het (absolute) bedrag van de rekken ϵ_1 en ϵ_2 hanteert.

Opms:

- De in fig. 3 getekende ellips (met asverhouding $\sqrt{3}$) is de projectie van een ruimtelijke figuur in de $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -ruimte. De projectie op beide andere coördinaatvlakken moet dus identiek zijn omdat het materiaal anders niet isotroop zou zijn! De ruimtelijke figuur is een cirkel met de coördinaten-oorsprong als middelpunt, een diameter $\sqrt{3}$ en liggend in het zog. π -vlak dat door de oorsprong en gelijke hoeken met de drie coördinaatassen maakt. Dit vlak voldoet voortaan de voorwaarde van volume invariantie

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \quad (\text{voor } \alpha = \text{konstant}) \quad (\text{zie fig. 4.})$$



- Het eenduidig vaststellen van de waarde $\bar{\epsilon}_B$ voor verschillende materialen is zeer moeilijk. Erige op het eerste gezicht voor de hand liggende mogelijkheden blijken bij nadere beschouwing nogal problematisch te zijn. Een trekstaaf snijert, lang voor $\bar{\epsilon}_B$ bereikt is, doorgaans al in. In de inhoerzone ontstaan zodanig grote isostatische trekspanningen dat in het hart van de staaf brosse breuk wordt geïnitieerd, die later pas in een glijbreuk overgaat (fig. 5)

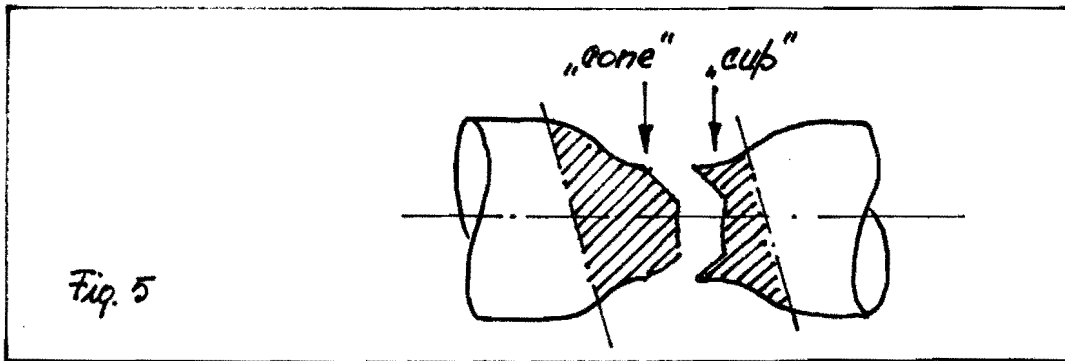


Fig. 5

- Een strijkproef is eveneens problematisch omdat hierbij zeer grote fluctuaties in plaatselijke effectieve deformaties kunnen worden waargenomen, die gemiddeld weliswaar weinig invloed op hiermee bepaalde versterigingskrommen hebben, maar de toepassing voor ons doel zeer problematisch maken.
- Een bijkomende moeilijkheid is dat met zekerheid de kritische getalwaarde $\bar{\epsilon}_B$ sterk wordt beïnvloed door de isostatische component σ_m van de plaatselijke spanningsstoestand. In het geval van een kritische waarde σ_{mB} van brosse breuk zou $\bar{\epsilon}_B$ zelfs gelijk aan nul worden. Het andere worden: de ellips in fig. 3 en

de cirkel in fig. 4 kunnen inkrimpen tot een punt met toenemende (positieve) waarde van σ_m . Diergekond geldt, dat bij grote hydrostatische drukken $\bar{\epsilon}_B$ zeer groot kan zijn. Ter illustratie zijn in fig. 6 meetresultaten

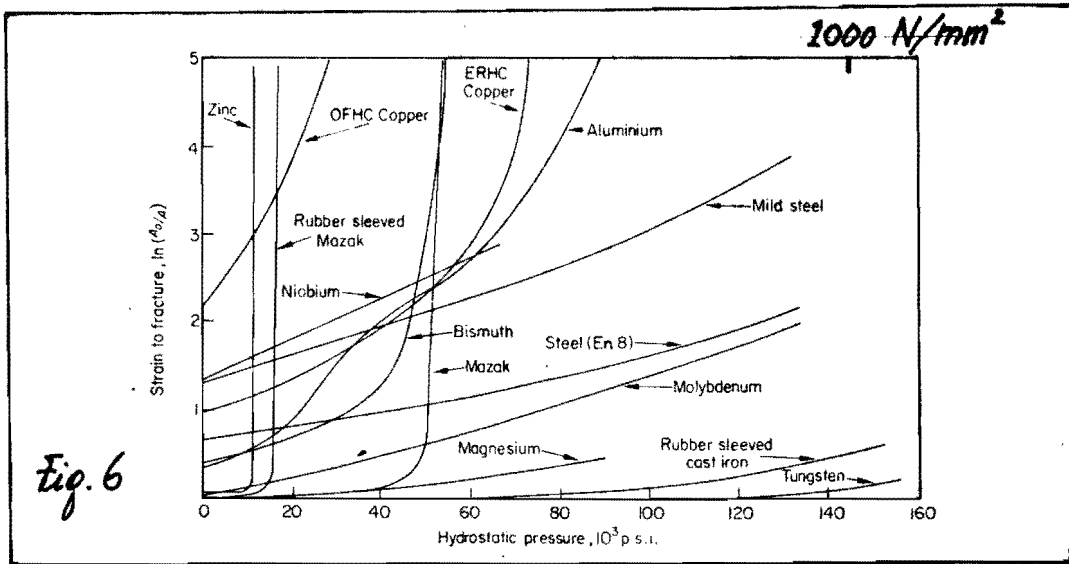
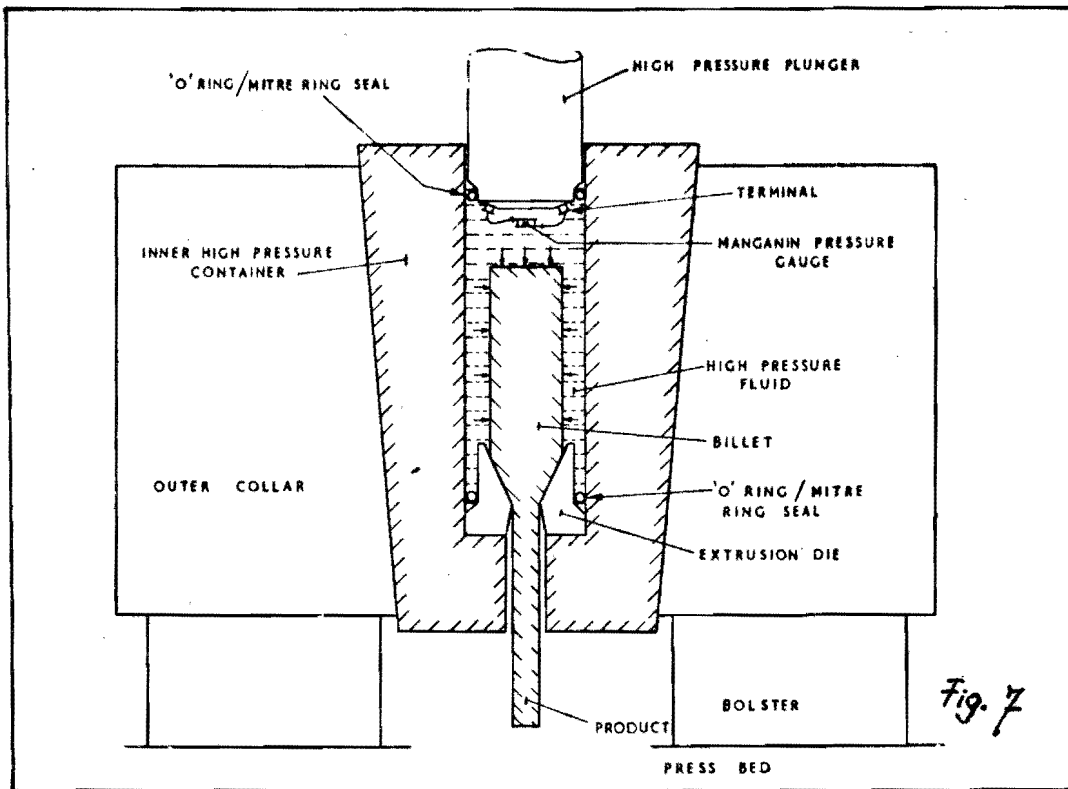


Fig. 6

weergegeven die werden verkregen door trekproeven in een druktank uit te voeren. De plaatselijke langtrek in de kleinste doorsnede van de inhoesing, die bereikt werd, is uitgezet over de hydrostatische druk in de drukcilinder. Deze druk $p \approx -\sigma_m$ bij de trekproef. Opmerkelijk is, dat het effect bij poreuze materialen zoals gietijzer uitsluitend optreedt indien deze van een gesloten rubberhoes worden voorzien. Hierop kom ik verderop nog nader terug.

- Het tegengaan van breuk door het plastisch proces in een hydraulisch drukmilieu te plaatsen is, op een enkele uitzondering na, zelden van uitzonderlijk wetenschappelijke betekenis. Noen uitzondering is in fig. 7 te zien.



Dit proces, „hydrostatische extrusie" genaamd, is een wezen een omvormmethode waarbij het uitgangsmateriaal, de „billet", door middel van een gekomprimeerde vloeistof in plaats van met een stempel, zoals toegepast bij het konventionele extruderen, door de matroisopening wordt geperst. De hoge druk werkt hiërby niet alleen op het achtervlak van de billet maar tevens op het /de zijvlakken). Hierdoor staat het materiaal tot in de uitstroombopening onder hoge alzijdige druk en eventueel ook daarna nog indien een tegendruk wordt aangebracht. Eveneens wordt wrijving vermeden langs het nog ongeformeerd gedeelte van de billet. Deze extrusiemethode vereist de oplossing van veel problemen zoals afdichting van de hoge druk, smering en procescontrole. Ondanks

de hoge investeringskosten is ze echter lonend in sommige gevallen doordat producten kunnen worden gemaakt die met konventioneel extruderen onmogelijk zijn. Bij voorbeeld dunwandige pijp met hoge langsribben (binnen of buiten 'de pijp') van warmte-wisselaars. Een ander voordeel is dat uitermate grote diameterredukties (van enkele decimeters tot enkele centimeters) in één doorgang, dus zonder tussengloeien, mogelijk zijn zonder teheuvorming. Deze heidt overigens vaak op

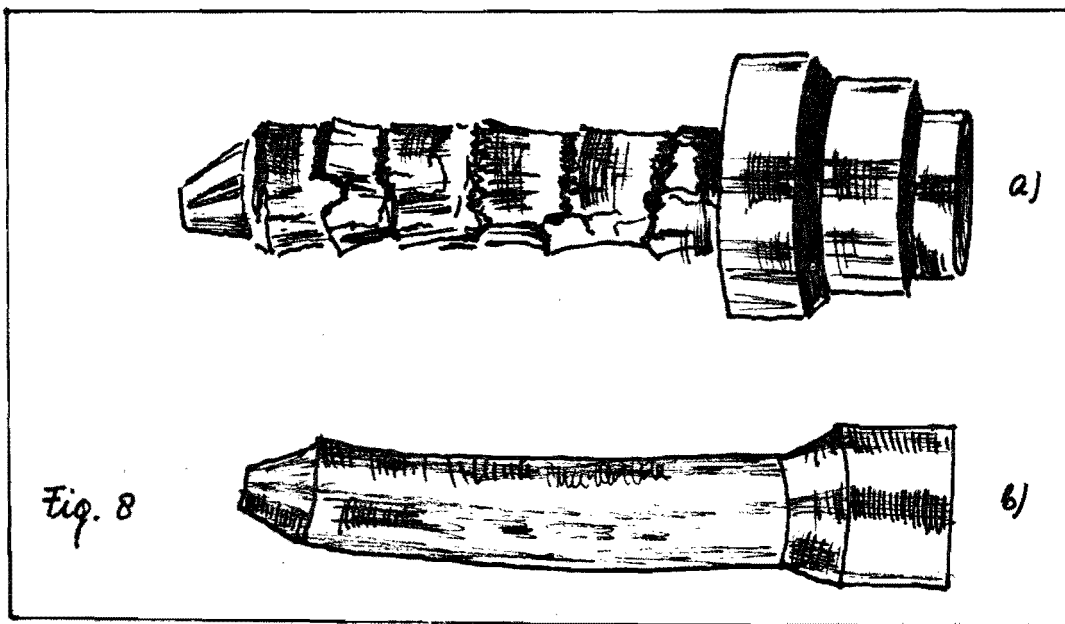


Fig. 8

als gevolg van onvoldoende smering. De grote oppervlakte-toename van het materiaal in de extrusieopening leidt dan tot een plaatselijk smeermiddel tekort. In fig. 8 is geschetst hoe het probleem kan worden opgelost door een tegendruk. (Molybdeen, kamertemperatuur, doorsnedereductie $\frac{1}{2}$, metrijshoek 45° , tegendruk $38.000 \text{ p.s.i} = 2672 \text{ at} = 262 \frac{\text{KN}}{\text{mm}^2}$)

Om begrijpelijke praktische redenen wordt het hydrostatisch extrusieproces gestopt voor al het materiaal door de extrusieopening is gevloeid. De extrusiematrijs wordt samen met het eind van de billet gedemonteerd (zie fig. 8a.)

- Hoewel ook hiervoer nog weinig systematische en getalmatige kennis beschikbaar is hebben voort met zekerheid de materiaalt temperatuur en de deformatiesnelheid $\dot{\epsilon}$ invloed op het bedrag van de kritische deformatie $\bar{\epsilon}_B$. Het feit dat beide invloeden met elkaar samenhangen duidt de deformatie arbeid in warmte wordt omgezet en meer bijdraagt tot temperatuuroverloping, naarmate vinder warmte wordt afgevoerd maar het gerud- schap enz., vormt een experimentele kompli- katie.

6. DE ELASTISCHE VOLUMEVERANDERINGSARBEID TOT BREUK.

Leider (zie verp. (14)) hebben we gezien dat voor de elastische volumeveranderingsarbeid geldt:

$$(27) \quad W_{\text{svol.}} = \frac{\alpha}{2} \sigma_m^2 \quad \text{met } \alpha = \frac{3(1-2\nu)}{E}$$

Met behulp van (18) kunnen we dit ook anders uitdrukken:

$$(28) \quad W_{\text{svol.}} = \frac{9}{2\alpha E} \epsilon_m^2$$

of met verg. (20) en (21):

$$(29) \quad W_{svol} \approx \frac{\sigma_m}{2} \cdot \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)^2$$

Een vierde variant, tenslotte, luidt

$$(30) \quad W_{svol} = \frac{3}{2} \sigma_m \epsilon_m$$

En volgt eenvoudig uit de voorgaande uitdrukkingen. Verg. (30) volgt eveneens direct uit verg. (3) indien we een isostatistische gedaanteverandering bekijken:

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_m \epsilon_m + \sigma_m \epsilon_m + \sigma_m \epsilon_m) = \frac{3}{2} \sigma_m \epsilon_m \end{aligned}$$

uit (27) +/m (30) volgt dat, onafhankelijk van het teken van σ_m , ϵ_m resp. ΔV , het teken van W_{svol} steeds positief is. Dit is in overeenstemming met de gevonde bru arbeid die aan een lichaam wordt toegewezen positief te noemen. In het voorgaande is echter reeds duidelijk geworden dat het wezenlijk verschil maakt of σ_m (en daarmee ook ϵ_m) positief dan wel negatief is, indien we de invloed op het optreden van scheuren bekijken:

$$\begin{aligned} \sigma_m > 0 &\rightarrow \Delta V > 0 \rightarrow \text{breukbevorderend.} \\ \sigma_m < 0 &\rightarrow \Delta V < 0 \rightarrow \text{breukremmend.} \end{aligned}$$

(Opmerking: het is gebruikelijk een druk p een positief teken te geven. Men mag dan niet vergeten dat $\sigma_m = -p$)

Het ligt dus nu σ_m de hand dat er een kritische positieve waarde σ_{mB} van σ_m bestaat σ_m elk materiaal waarbij brose breuk optreedt indien $\bar{\sigma} = 0$. Hierbij hoort een eveneens materiaalafhankelijke waarde ϵ_{mB} . Deze laatste is echter klein en alleen al daarom moeilijk meetbaar. Tijdens plastische deformatie wordt blijkbaar een scheur geïnitieerd als een onbekende functie

$$f(\bar{\epsilon}, \epsilon_m) \text{ resp. } f'(\bar{\epsilon}, \sigma_m)$$

van het materiaal afhankelijke waarde f_B bereikt. Deze functie kent dan twee extreme gevallen, namelijk σ_m

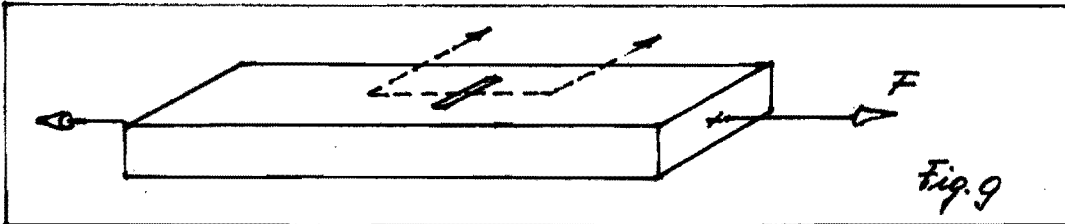
$$\bar{\epsilon} = 0 \rightarrow \begin{matrix} \epsilon_m = \epsilon_{mB} \\ (\sigma_m = \sigma_{mB}) \end{matrix} \rightarrow \text{zuiver brose breuk}$$

$$\epsilon_m = 0 \rightarrow \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_B \rightarrow \text{zuiver taai breuk.}$$

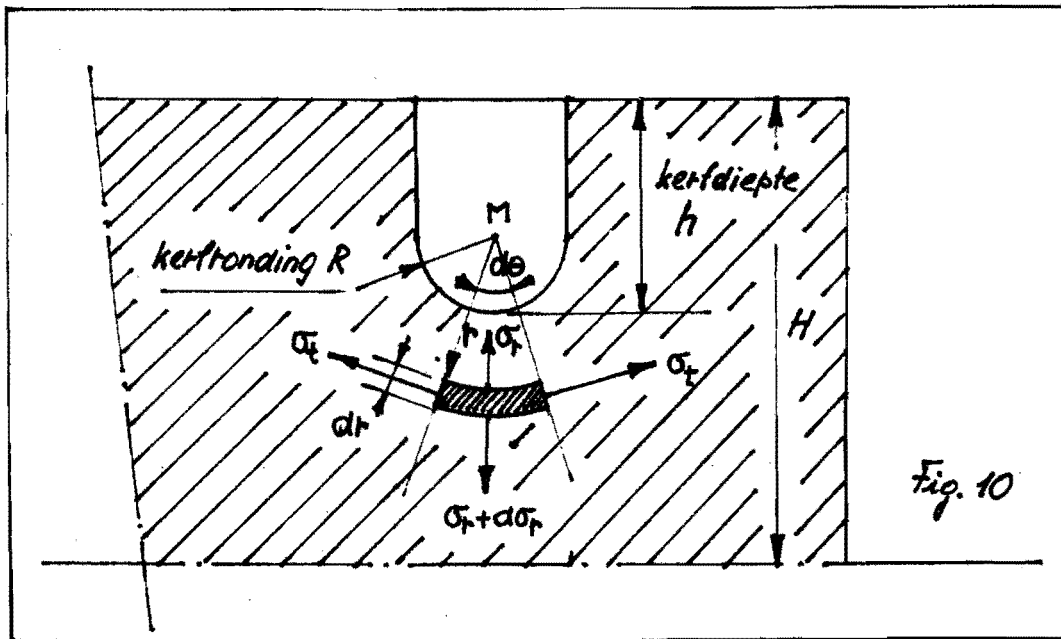
Van de hand van fig. 6 hebben we reeds de invloed van een negatieve σ_m op het materiaalgedrag bestudeerd. Een direct experimenteel onderzoek van een positieve σ_m (zijdige trek), al dan niet in combinatie met plastische deformatie, is niet wel mogelijk. Langs indirecte weg kunnen we echter een eind komen. We zullen zien, dat in de omgeving van keven en krassen zeer hoge positieve σ_m -waarden kunnen bestaan tijdens plastische deformatie als gevolg van de plaatselijke geometrie. Duidelijk bepaalde gebreken die eraan kleven zullen we via een zeer eenvoudig model van de keef invloed dit effect nagaan. Zo doende ligt het accent op het verschijnsel als zodanig.

7. DE KERFINVLOED OP DE ISOSTATISCHE SPANNINGS-
KOMPONENT TIJDENS PLASTISCHE DEFORMATIE.

We gaan uit van een keef in een strip die door een
lengtekracht F wordt belast. Zie fig. 9.



De doorsnede van de keef en omgeving modelleren
we tot een regelmatige d.w.z. beschrijfbaar geometrie
volgens fig. 10. Nu een willekeurig volumenelement,



met infinitesimale afmetingen volgens de schets,
schrijven we de evenwichtsvomwende naar de
krachten in radiale richting op (onder aanname
dat op het geanalyseerde vlakje van het element geen
shearspanningen werken, dit een symmetrievlak is dus)

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)d\theta \frac{r}{2} - \sigma_r r d\theta \frac{r}{2} - 2\sigma_z dt z \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

Bepalen we dus tot het symmetrievlak door M en de allernaaste omgeving dan hebben we met een zeer kleine middelpuntshoek $d\theta$ te doen en is $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$. We kunnen nu vereenvoudigen tot

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr) - \sigma_r r - \sigma_z dt = 0$$

$$\cancel{\sigma_r r} + \sigma_r dt + r d\sigma_r + \cancel{d\sigma_r dr} - \cancel{\sigma_r r} - \sigma_z dt = 0$$

$$(\sigma_r - \sigma_z) dt = -r d\sigma_r$$

(31) $\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{r}$

Hiermee hebben we de (differentiaal)vergelijking van het radiale evenwicht onder de keertip. Gaan we er verder van uit dat het materiaal overal in het beschouwde gebied plastisch vloeit, dan kunnen we voortz een vloeivoorwaarde noteren als volgende vergelijking. Omdat het hier om een eerste poging tot het bewijzen van inzicht gaat kiezen we de eenvoudigste: volgens Tresca.

(32) $\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_v$

Conform de aannamen zijn σ_r en σ_z (loodrecht op het vlak van tekening) hoofdspanningen, σ_r dus ook. Op de bodem van de keel geldt (met zekerheid):

$$(r=R \rightarrow) \sigma_r = 0$$

en

$$\sigma_z > 0$$

Dus (32) te kunnen toepassen dienen we de (relatieve) grootte van σ_z nog te weten. Eldus in de trekstip geldt dat $\sigma_z = 0$ moet zijn, rond de keef kan de situatie echter afwijken. We kunnen bijv. eens bekijken wat er gebeurt als zich enige plastische rek in tangentiële richting zou concentreren in de kefstip. Het is duwaarschijnlijk dat zich dan materiaal in langsrichting van de keef gaat verplaatsen. Rekkompensatie in radiale richting ligt veel meer voor de hand. We schrijven dus:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &\approx 0 \\ d\epsilon_x &= \alpha \lambda \left(\sigma_z - \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2} \right) \end{aligned} \right\} \sigma_z \approx \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}$$

In dit geval is σ_z dus de middenspanning! We concluderen voortvrij dat

$$0 \leq \sigma_z \leq \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}$$

moet zijn. Althaus bij de kefstip. (A posteriori moeten we nog vaststellen of dit in het hele beschouwde gebied mag worden aangehouden) We gaan nu verder met:

(33) $\sigma_t = \sigma_{\max}$ (c.g. σ_1)
 $\sigma_r = \sigma_{\min}$ (c.g. σ_3)

hiermee gaat (32) over in

(34) $\sigma_t - \sigma_r = \sigma_v$

Substitutie hiervan in verg. (31) levert nu

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_v}{r} \rightarrow d\sigma_r = \sigma_v \frac{dr}{r}$$

Integreren (aannemend dat σ_v niet afhankelijk van t is):

$$\sigma_r = \sigma_v \ln t + k,$$

waarin k de integratieconstante aanduidt. Als randvoorwaarde voeren we in

$$\sigma_r|_{t=R} = 0, \text{ dus}$$

$$0 = \sigma_v \ln R + k \rightarrow k = -\sigma_v \ln R$$

Substitutie levert tenslotte op (zie ook (34)):

| | | |
|------|--|----------------|
| (35) | $\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_v \ln \frac{t}{R} \\ \sigma_t &= \sigma_v \left(\ln \frac{t}{R} + 1 \right) \\ \sigma_z _{\frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 0} &= \sigma_v \left(\ln \frac{t}{R} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\}$ | volgens Tresca |
|------|--|----------------|

en:

| | |
|------|--|
| (36) | $\sigma_t : \sigma_z : \sigma_r = \left(1 + \frac{1}{\ln \frac{t}{R}} \right) : \left(1 + \frac{1}{2 \ln \frac{t}{R}} \right) : 1$ |
|------|--|

Hiërmee hebben we nu eeste benadering de spanningsverdeling onder de keertip in handen.

Opmerking: Zouden we de randvoorwaarde volgens von Mises hebben toegepast ($\bar{\sigma} = \sigma_v$) in plaats van die volgens Tresca, dan zou (35) als volgt uitzien:

$$\begin{aligned}
 (37) \quad \sigma_r &= \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}} \ln \frac{t}{R} \\
 \sigma_t &= \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{t}{R} + 1 \right) = \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}} \ln e \frac{t}{R} \\
 \sigma_z &= \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{t}{R} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}} \ln \sqrt{e} \frac{t}{R}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_z \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{volgens} \\ \text{von} \\ \text{Mises} \end{array}$$

Deze waarden zijn 15,5 % groter, hetgeen met betrekking tot ons doel weinig uitmaakt. Veel belangrijker is wat deze vergelijkingen ons te zeggen hebben. Daartoe gaan we ons model nader bekijken.

8. ANALYSE VAN HET PLASTISCH KERFMODEL

We kunnen (37) enigszins vereenvoudigen door de spanningen tot dimensieloze verhoudingsgetallen te reduceren:

Dan is:

$$\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{\sigma_v} \quad \text{enz.}$$

$$\begin{aligned}
 (38) \quad \sigma_r^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{t}{R} \\
 \sigma_t^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{t}{R} + 1 \right) \\
 \sigma_z^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{t}{R} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

De enige beïnvloedbare variabele is hierin de radius R van de kerfspits. De waarde van t bepaalt slechts de plaats waar we willen kijken. Voorts is (fig. 10)

$$t \gg R \rightarrow \ln \frac{t}{R} \gg 0$$

Eenvoudigheidshalve zijn in tabel 1 wat getalwaarden
vraagstuk (38) gegeven.

| $\frac{h}{R}$ | σ_r^* | σ_t^* | σ_z^* |
|---------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0 | 1,15 | 0,58 |
| 2 | 0,80 | 1,96 | 1,38 |
| 4 | 1,60 | 2,76 | 2,18 |
| 8 | 2,40 | 3,56 | 2,98 |
| 16 | 3,20 | 4,36 | 3,78 |
| 32 | 4,00 | 5,16 | 4,58 |
| 64 | 4,80 | 5,96 | 5,38 |
| 128 | 5,60 | 6,76 | 6,18 |
| 256 | 6,40 | 7,56 | 6,98 |
| 512 | 7,20 | 8,36 | 7,78 |
| 1024 | 8,00 | 9,16 | 8,58 |
| 2048 | 8,80 | 9,96 | 9,38 |
| 4096 | 9,60 | 10,76 | 10,18 |
| 8192 | 10,40 | 11,56 | 10,98 |
| 16384 | 11,21 | 12,36 | 11,78 |
| 32768 | 12,01 | 13,16 | 12,58 |
| 65536 | 12,81 | 13,96 | 13,38 |
| 131072 | 13,61 | 14,76 | 14,18 |

Tabel 1

Aangezien in vers. (37) en (38) de kerf diepte h niet
voorkomt, moeten we op grond van de getallen in
tabel 1 concluderen dat sekerse kerf aan het
oppervlak - ook als ze zeer diep zijn - door de kerfspits
spanningen kunnen veroorzaken die vele malen groter
zijn dan de relevante vloeispanning van het materiaal.
De oorspronkelijk hiervan is dat de verhouding van de isostatische
komponent van de spanningstoestand en de deviatorische
hoofdspansingen groter is naarmate de kerf scherper is en
ook naarmate de beschouwde plaats dieper onder de
kerf gelegen is.

konsequent doordenkend moeten we dan ook konkluderen dat deze verschijnselen onvermijdelijk zijn. Denk bijv. aan draaigroeven, polijstkrassen enz. Uit ervaring weten we echter dat dit - althans bij statische belasting - niet of nauwelijks het geval is. Uit tabel 1 kunnen we afleiden dat de plastische deformatie in de keefbodem het gemakkelijkst en vermoedelijk ook het eerst plaats vindt. De kef-radius verandert dan, neemt toe. Bij zeer ondiepe keven verdwijnt de kef zelf grotendeels. Deze kefdiepte invloed kan in dit eenvoudige model niet worden verantwoord omdat dit een gebeuren in de tijd is.

(Dat bij wisselende (+/-) belasting een grotere kefinvloed aanwezig is, ook bij zeer ondiepe keven, kan worden verklaard door aan te nemen dat tijdens de drukbelasting de kef meer dichtgedrukt en dus scherper wordt. De plastische deformatie concentreert zich rond de kef, zodat hier een eindig groot bedrag aan kan nemen zonder dat de vormverandering van het lichaam als geheel dit doet bemerken)

Hoewel in tabel 1 waarden van de gereduceerde spanningen ook voor zeer grote t/R zijn gegeven zijn deze - althans m.b.t. kunstmatig aangebrachte keven, denk bijv. aan de kefslagproef - niet meer relevant. Er is een technische grens aan de kefscherpten die nog realiseerbaar zijn, voor "natuurlijke keven", bijv. mikroholten ligt het anders. Hierbij krijgt men bovendien met een directe invloed van de korrelgrootte te maken.

In fig. 11 is voor een willekeurig gekozen geval de verdeling van de (gereduceerde) spanningen geïllustreerd. (volgenv. pag. (30)). Deze verdeling geldt dus indien de kleinste doorsnede bij gegeven R volledig plastisch is.

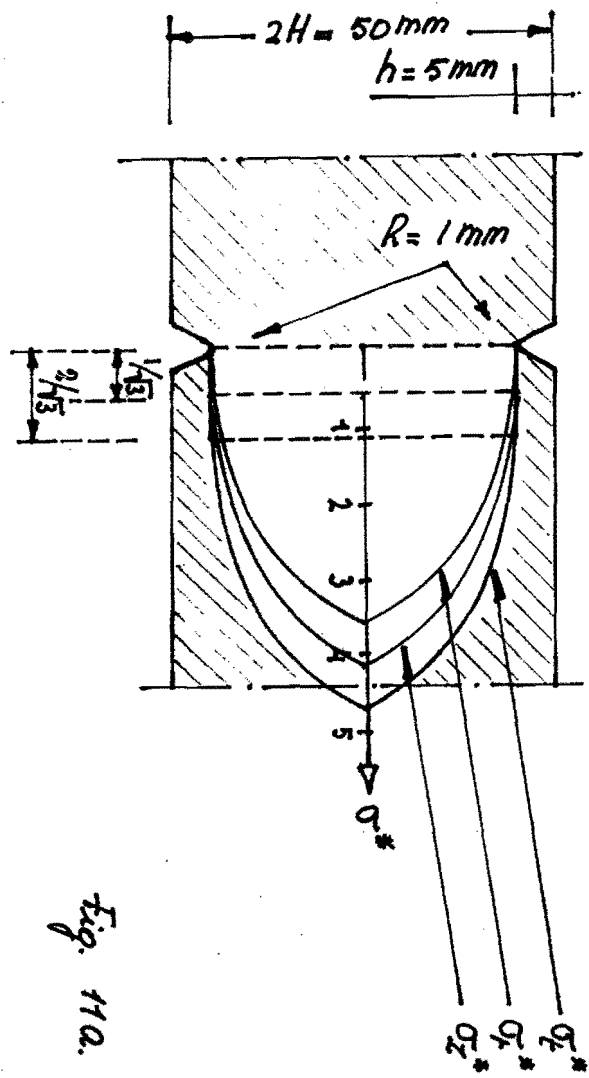
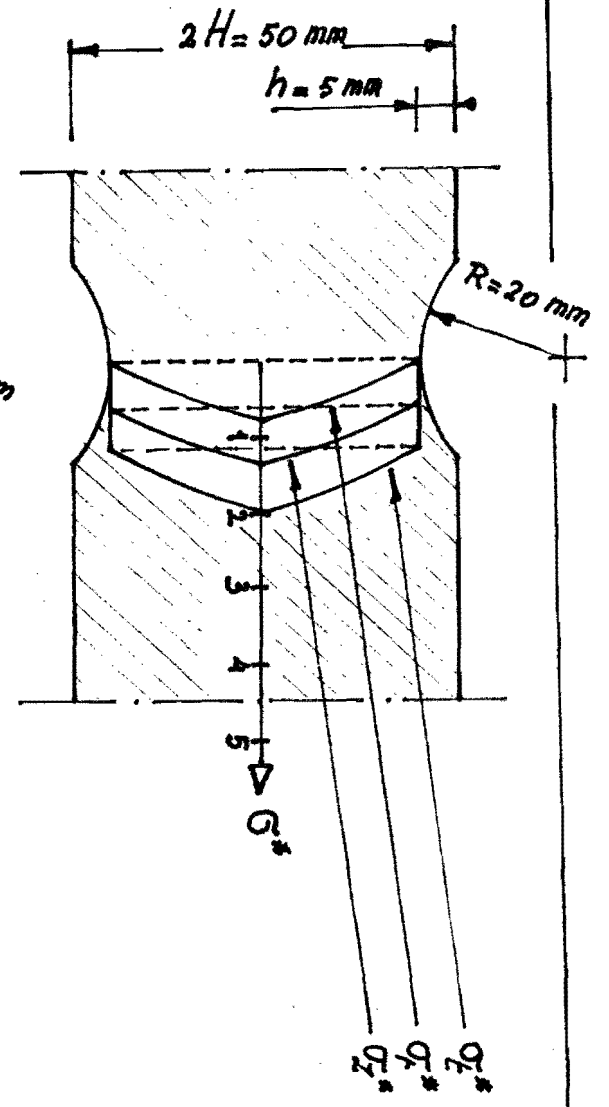
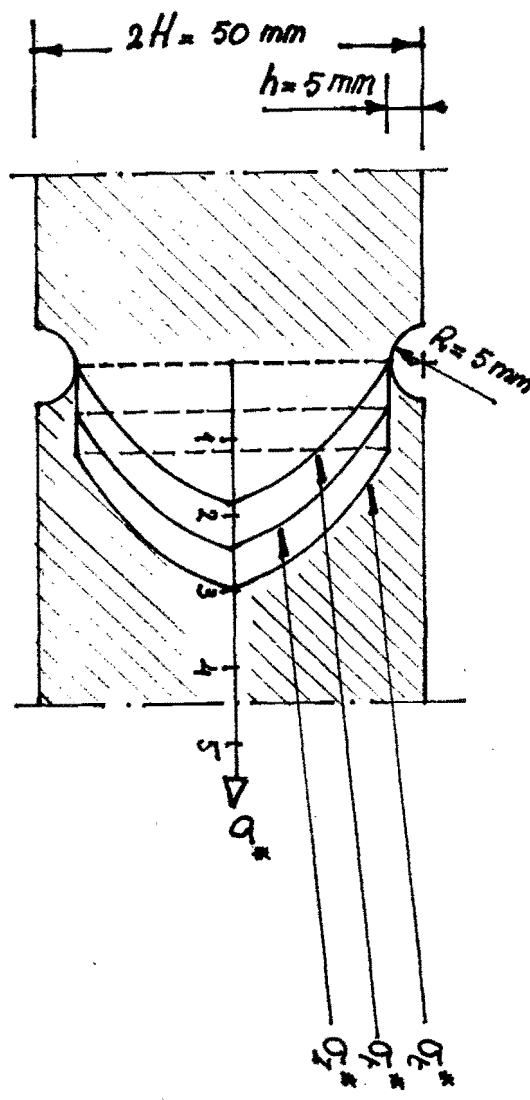
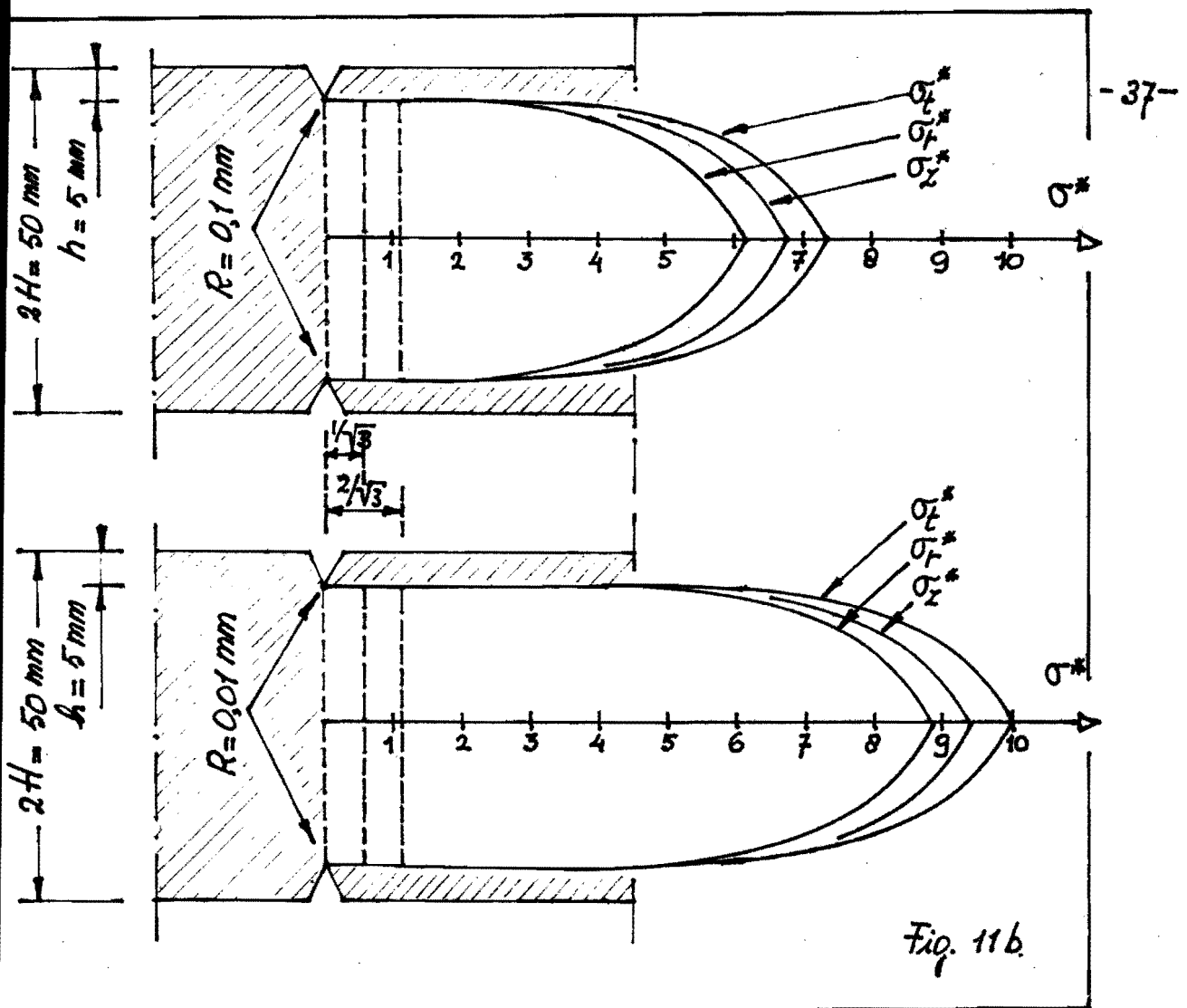


Fig. 110.





Met behulp van het afgeleide plastische keutmodel komen we dus nu tot de volgende belangrijke inzichten:

- Tijdens plastische deformatie moeten, om redenen van lokaal evenwicht onder keven isostatische spanningcomponenten heisen welke vele malen groter kunnen zijn dan de plaatselijke waarde van de vloeikoustante van het materiaal.
- Onafhankelijk van de vraag of het criterium voor zuiver brose breuk in de grootste hoofd(trek)spanning of in de isostatische (trek)spanningcomponent van de

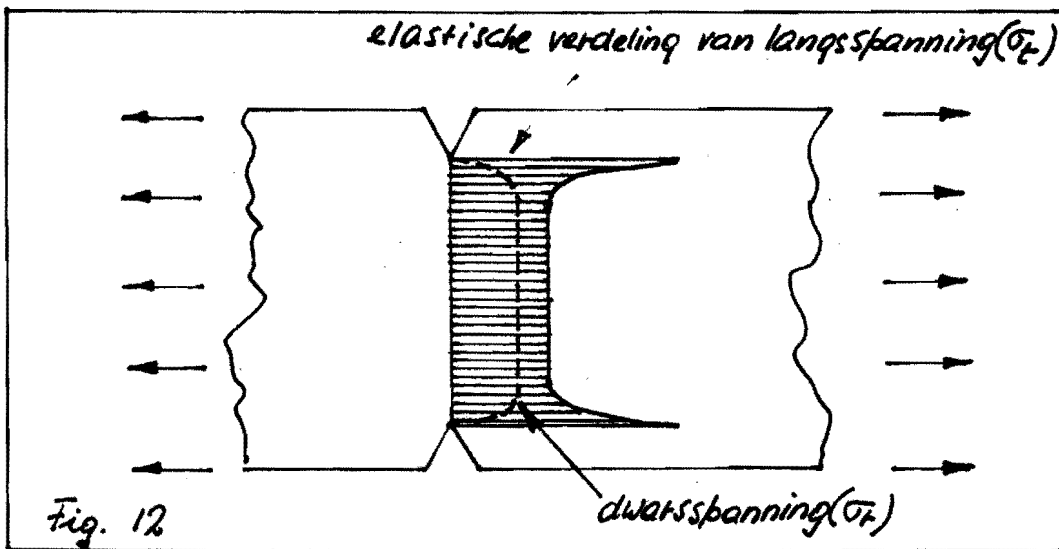
spanningstoestand moet worden uitgedrukt, kan een brosse scheur blijkbaar zeer wel geïnitieerd worden tijdens plastische deformatie van „taaiere“ materialen. (Scheurvormplanting tot breuk is een ander probleem)

- Volgens konventionele opvattingen was het verschijnsel brosse o.g. taaiere breuk een kenmerkende materiaaleigenschap. Vanuit een meer hedendaagse optiek zijn deze verschijnselen als zodanig verbonden met de spanningstoestand. Alleen in het overgangsgebied spelen het materiaal en zijn toestand een rol. (Vergelijk dit bijv. met de vaste o.g. vloeibare fase enz. die als zodanig ook niet kenmerkend zijn voor een materiaal! Wel zijn de overgangen karakteristiek)
- De voorgaande wijziging van opvatting is uitermate belangrijk voor de Divorumbiotechnologie. Immers, moeilijkheden met bepaalde Divorumprocessen kunnen, behalve door over te gaan op andere materialen, ook door geschiedoptimalisering worden tegengestaan of, in ernstige gevallen, door doelbewuste keuze van een ander basisproces. (Vergelijk figuur 6) Een historisch bewijs in deze zin werd door von Kármán geleverd toen hij, ongeveer een halve eeuw geleden, het uitermate „brosse“ suiker extrudeerde tot een gaas, scheurvrij, eindproduct!

De verwachting dat de keefinvloed op analoge wijze optreedt bij andere geometrische vormen (ronde staven, bolvormen i.p.v. oppervlaktkeulen, scherpe overgangen, enz.) is gewettigd. Een praktische illustratie vormt de zog. Bridgman-korrektie om het meetbereik bij trekproeven op ronde staven te vergroten tot in het inspanningsgebied door de meetwaarden te corrigeren op de keefinvloed. Ook in andere belastinggevallen, zoals buiging, kan keefwerking een belangrijke rol spelen.

9. DE KERFINVLOED IN HET ELASTISCH GEBIED

Een analoog verschijnsel kan eveneens worden waargenomen indien onder de kerf plastische deformatie geheel kan worden vermeden. In een zodanig geval vindt dus geen plastische spanningsrelaxatie op. Mathematisch geformuleerd: in het stelsel vergelijkbaar dat de situatie beschrijft komt de vloeivoorwaarde niet voor. Hoewel de desbetreffende analyse buiten het bestek van deze tekst valt is het nuttig te vergelijken, het verschil in de spanningverdeling hier kort te tonen (zie fig. 12)



hieruit volgt bijv. duidelijk, dat een verhoging van de vloeispanning in de oppervlaktelaag - bijv. door harden, koudvervormen, uitereen luis - gunstig is als het erom gaat plastische vloeien te vermijden, kortom om "bezwijken" (in de opvatting van de constructeur) te vermijden. Het bezwijken begint kennelijk bij de kerf.

Met betrekking tot de kritische doorsnede van een belaste staaf, zoals eerder onderzocht, is het in publikaties over de betreffende sterkteproblemen in de elasticiteitsmechanica gebruikelijk een zog. „spanningsconcentratiefactor“ k_f te definiëren:

$$(39) \quad k_f = \frac{\text{maximale trekspanning in doorsnede}}{\text{gemiddelde langstrekspanning in doorsnede}}$$

De invoering van deze faktor maakt eenvoudige sterktecontroles mogelijk omdat voor vele verschillende belastinggevallen, afmetingen van konstruktiedelen, kerfdiepten en kerfsehefften k_f -waarden in handboeken werden verzameld. k_f is per definitie groter dan 1. Vaak wordt k_f „geometrische spanningsconcentratiefactor“ genoemd omdat hij alleen een functie van de geometrie van het konstruktieonderdeel is. Q_1 bestaan vele methoden om de grootte van de spanningsconcentratie vast te stellen, zoals de analyse m.b.v. de elasticiteitstheorie (Timoshenko e.a.) en de experimentele benadering d.m.v. fotoelasticiteit, elektrische analogen of rekmetingen. In fig. 13 is een voorbeeld van handboek informatie over dit geval gegeven. (Attentie: de notatie in fig. 13 en ook in fig. 14 t/m 20 wijkt af van de in deze tekst gebruikte)

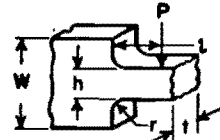
*) Ch. Lipson, G.C. Noll, L.S. Clock: „Stress and Strength of Manufactured Parts“; 1st. Edition 1950, McGraw-Hill Book Company; New York, Toronto, London. (T.H.D. bibl. 0930 5430)

*) Ch. Lipson and R.C. Juvinall: „Handbook of Stress and Strength, Design and Material Applications“; 1st. Printing 1963, The Macmillan Company; New York. (s.b.w. T.H.E. CD 6303)

Fig. 14

GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

FLAT PLATES
Circular Fillets
Bending—Concentrated Load



$$\sigma_{nom.} = \frac{6Pt}{th^2}$$

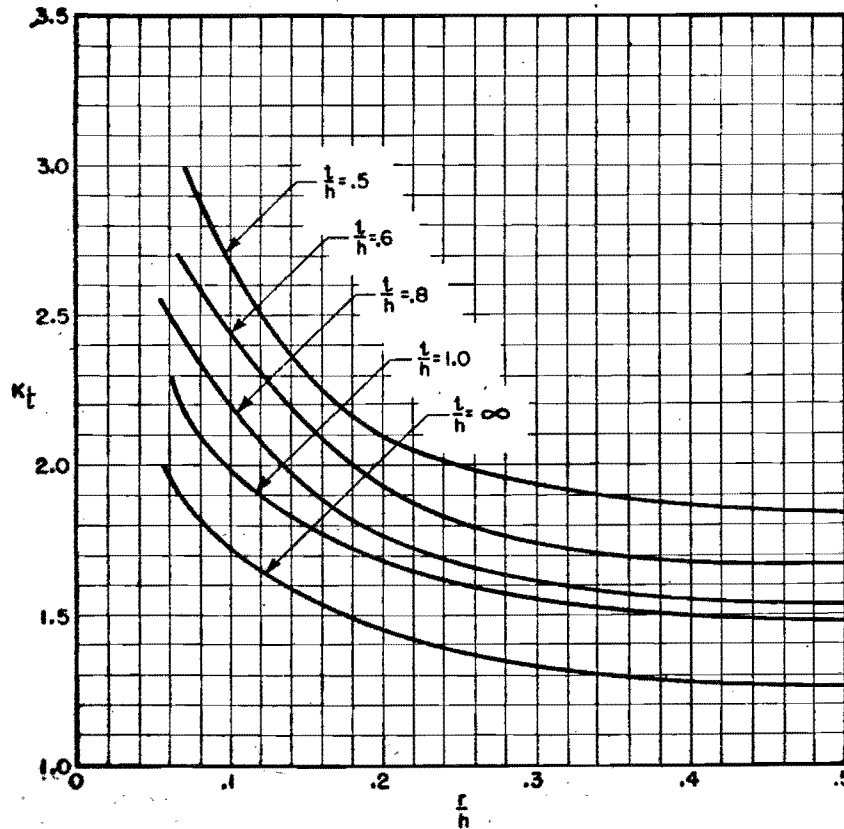
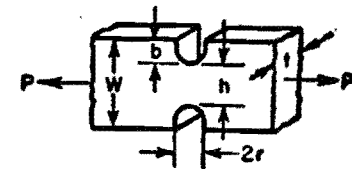


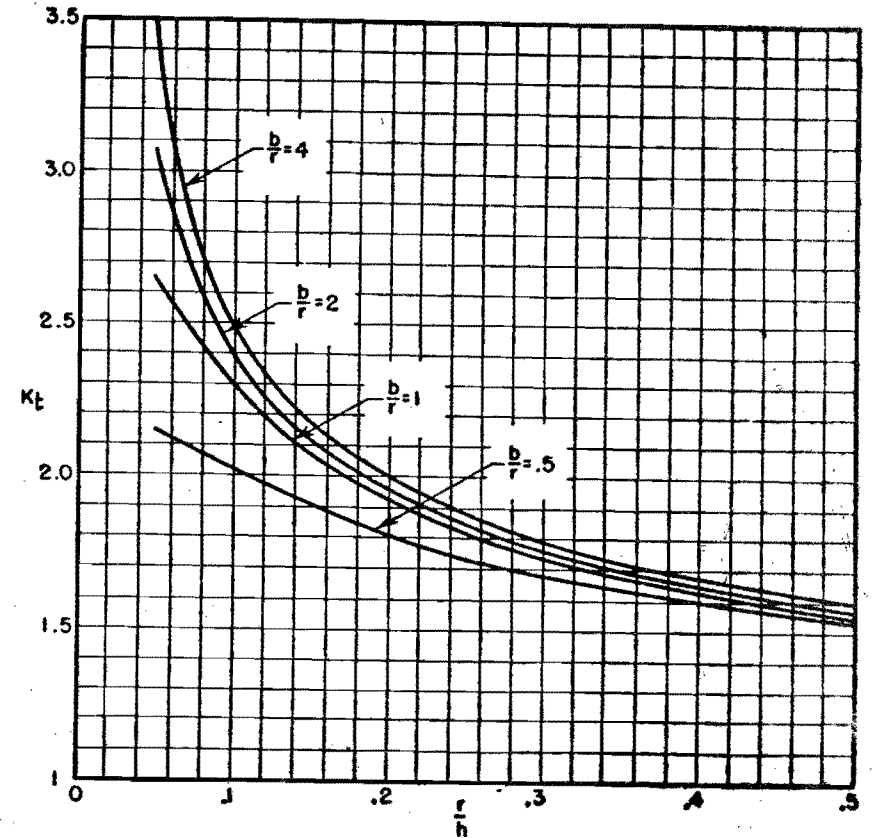
Fig. 13

GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

FLAT PLATES
Circular Grooves
Tension



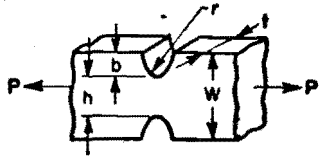
$$\sigma_{nom.} = \frac{P}{ht}$$



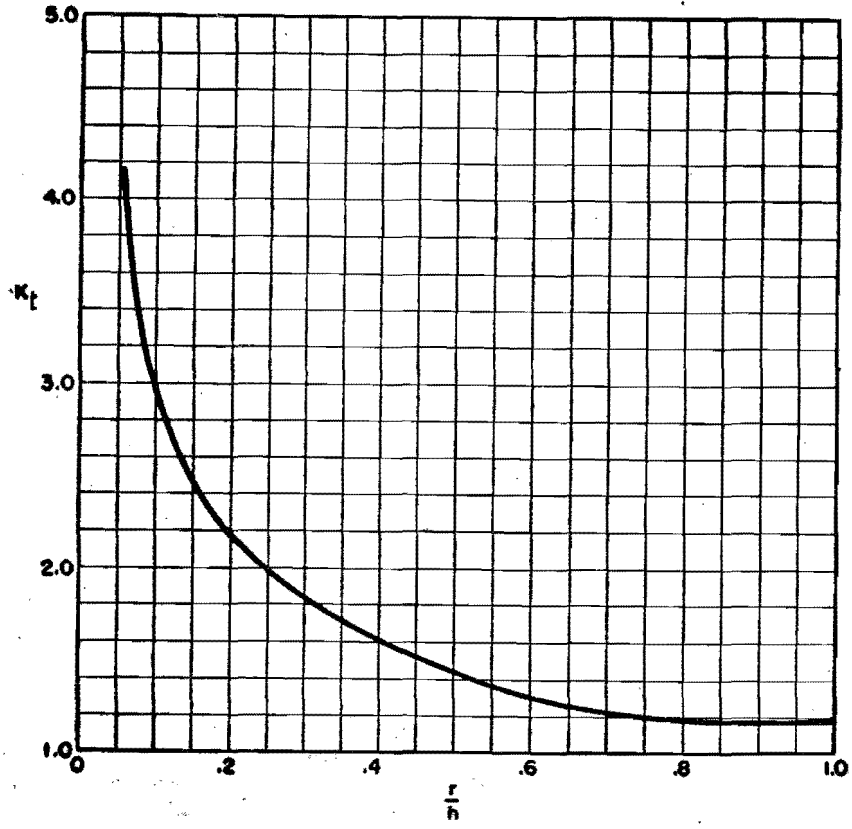
GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

Fig. 16

FLAT PLATES
Hyperbolic Grooves
Tension



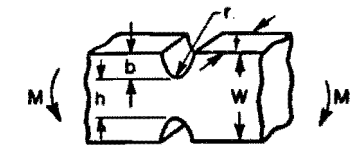
$$\sigma_{nom} = \frac{P}{ht}$$



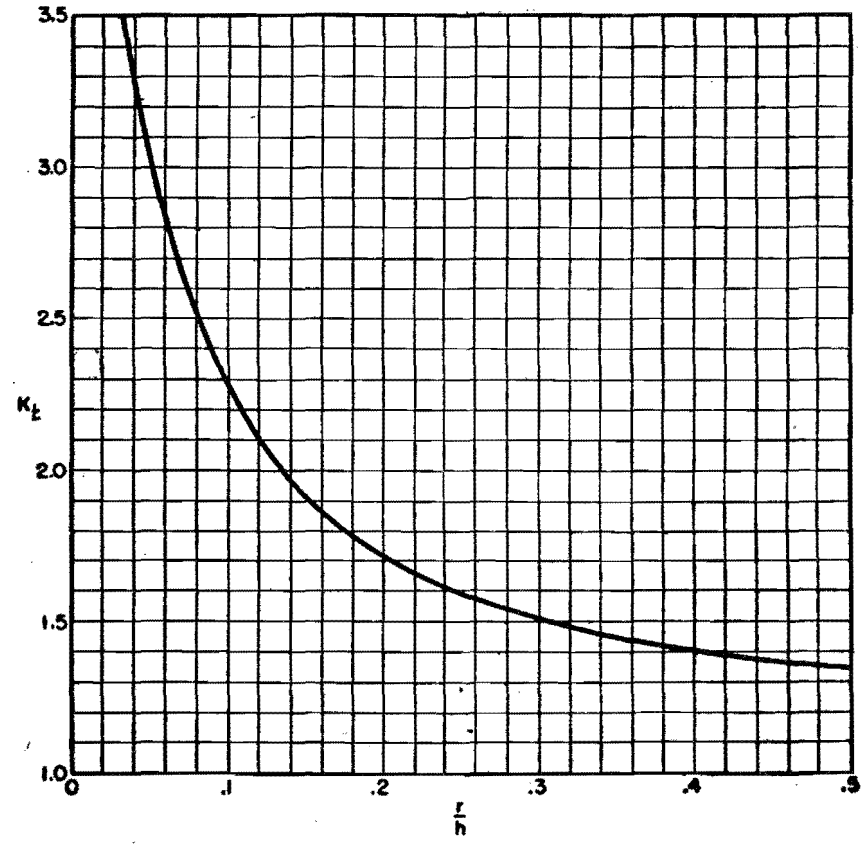
GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

Fig. 15

FLAT PLATES
Hyperbolic Grooves
Bending



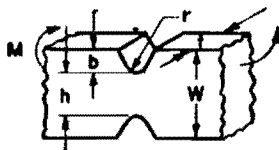
$$\sigma_{nom} = \frac{6M}{h^2t}$$



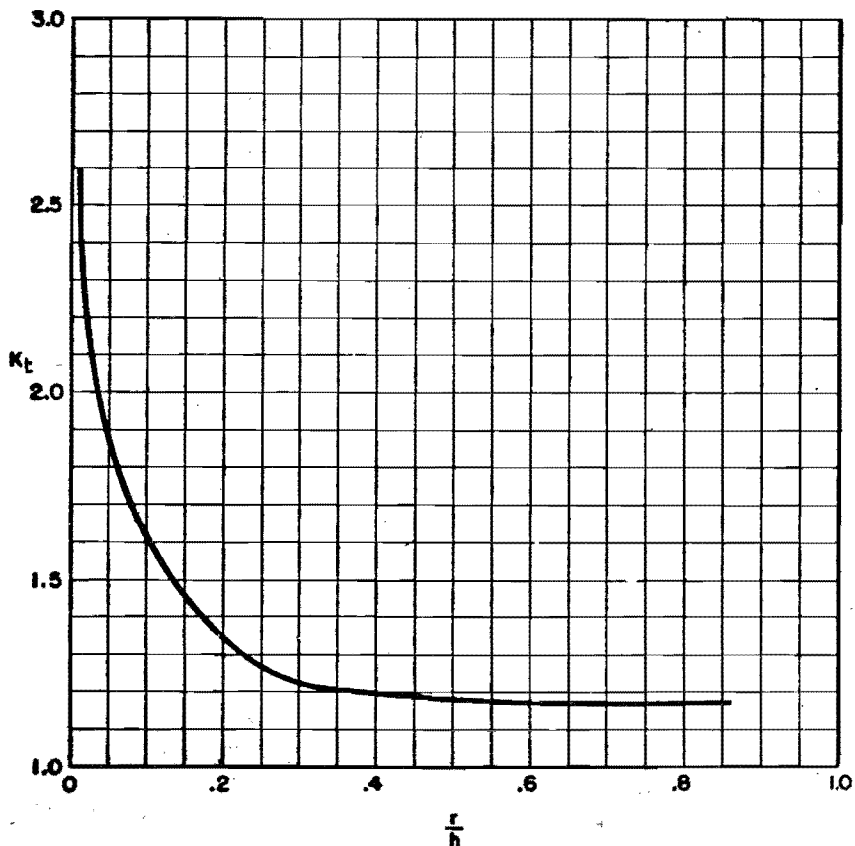
GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

Fig. 18

FLAT PLATES
Hyperbolic Grooves
Transverse Bending



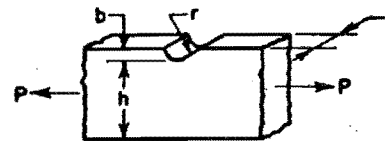
$$\sigma_{nom} = \frac{6M}{ht^2}$$



GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

Fig. 17

FLAT PLATES
Hyperbolic Groove on One Edge
Tension



$$\sigma_{nom} = \frac{P}{th}$$

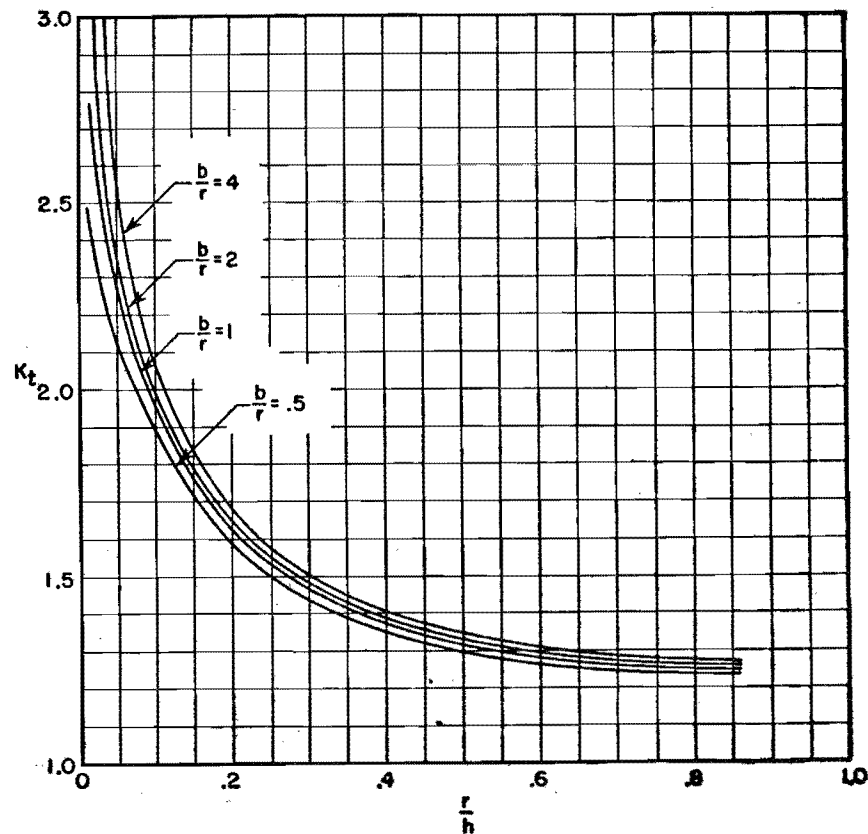
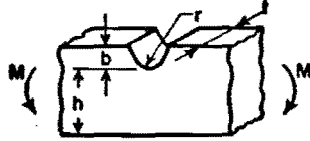


Fig. 20

GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

FLAT PLATES
Hyperbolic Groove on One Edge
Bending



$$\sigma_{nom.} = \frac{6M}{th^2}$$

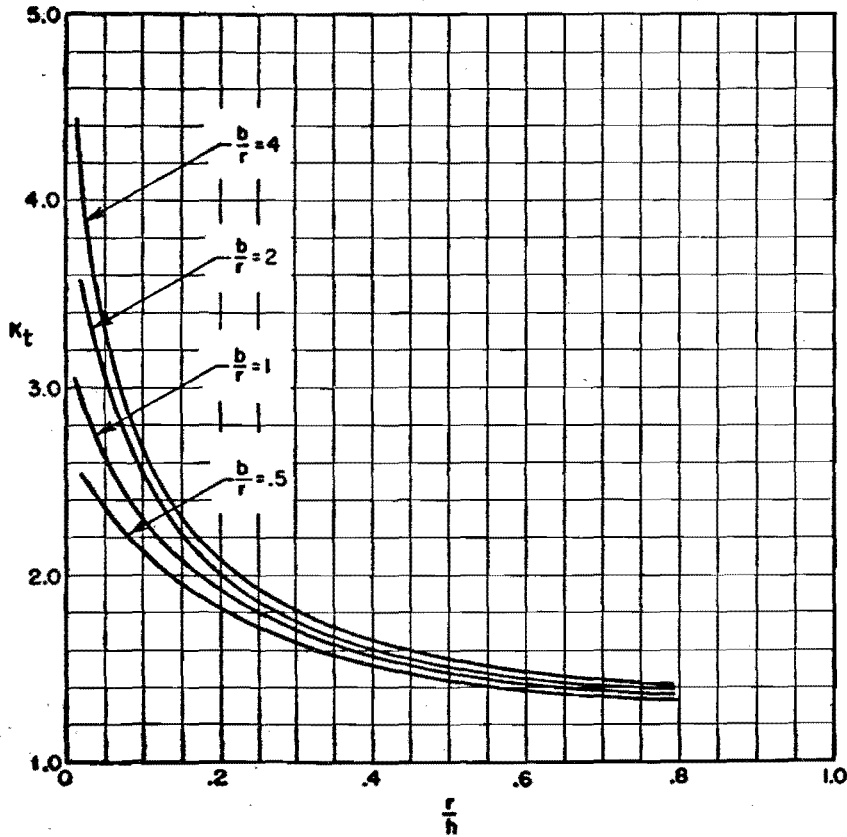
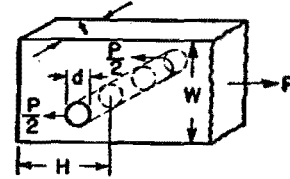


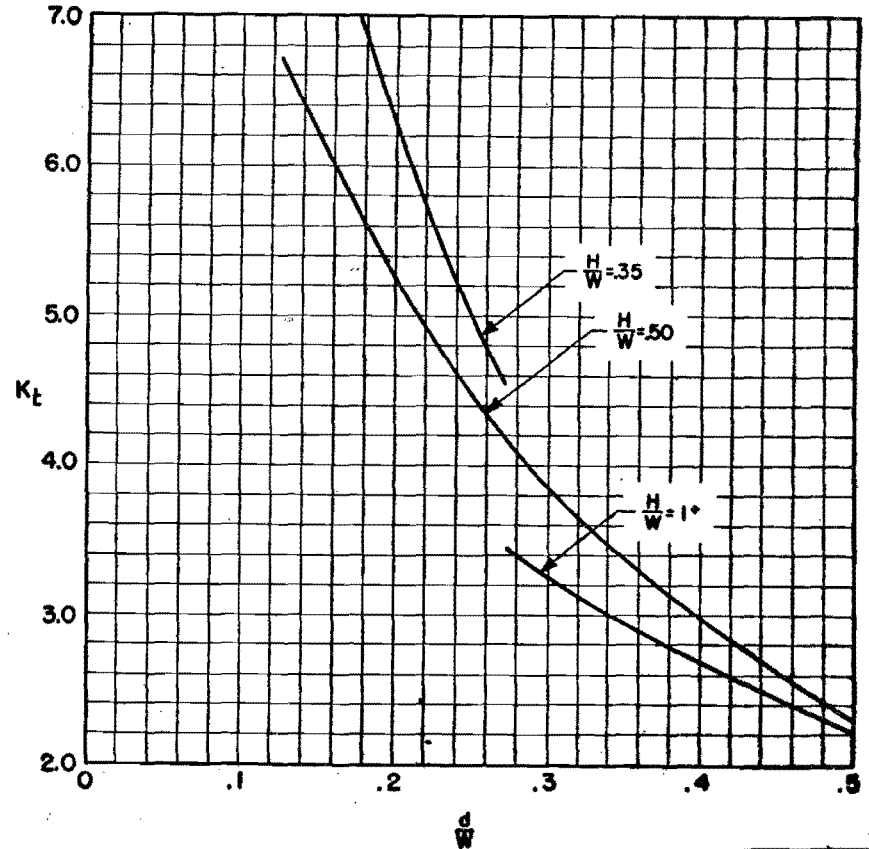
Fig. 19

GEOMETRIC STRESS CONCENTRATION FACTORS

FLAT PLATES
Pin in Transverse Hole at Center



$$\sigma_{nom.} = \frac{P}{(W-d)t}$$



111-

Ter vergelijking zijn de figuren 14 t/m 20 toegevoegd. We komen tot de interessante conclusie dat het belastingsgeval en de globale geometrie van ondergeschikt belang zijn (m.b.t. de spanningsconcentratie) in vergelijking met de relatieve kerfradius. Vermoedelijk geldt dit ook in het plastisch gebied van de materiaal karakteristiek.

10 DE KERFINVLOED TIJDENS PLASTISCHE DEFORMATIE

Het ligt nu voor de hand een spanningsconcentratiefactor (ψ) in te voeren naar analogie van k_t in het elastische geval. We kunnen bijv. invoeren (zie verg. (37) en (38)):

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\sigma_{t \max}}{\sigma_V} = \sigma_{t \max}^* = \frac{2}{13} \left(\ln \frac{r_{\max}}{R} + 1 \right) = \\ &= \frac{2}{13} \left(\ln \frac{H-h+R}{R} + 1 \right)\end{aligned}$$

$$(40) \quad \psi = \frac{\sigma_{t \max}}{\sigma_V} = \frac{2}{13} \left\{ \ln \left(\frac{H-h}{R} + 1 \right) + 1 \right\}$$

Dan is:

$$(41) \quad \begin{aligned}\sigma_{t \max} &= \psi \sigma_V \\ \sigma_{r \max} &= \left(\psi - \frac{2}{13} \right) \sigma_V \\ \sigma_{z \max} &= \left(\psi - \frac{1}{13} \right) \sigma_V\end{aligned}$$

Bijv. is voor $H = 20 \text{ mm}$; $h = 0,5 \text{ mm}$; $R = 0,1 \text{ mm} \rightarrow \psi = 7,25$, zodat

$$\sigma_{t \max} = 7,25 \sigma_V ; \sigma_{r \max} = 6,09 \sigma_V ; \sigma_{z \max} = 6,67 \sigma_V$$

uit (41) volgt nu, dat

$$\sigma_{Tmax} = \frac{\sigma_{Tmax} + \sigma_{Tmax} + \sigma_{Zmax}}{3} = \left(\nu - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sigma_V$$

Gesteld, dat er een toelaatbare waarde van σ_m bestaat waarbij een zuiver brosse scheur wordt geïnitieerd: σ_{mB} . Dan geldt:

$$\left(\nu - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sigma_V = \sigma_{mB}, \text{ of}$$

$$(42) \quad \nu_B = \frac{\sigma_{mB} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_V}{\sigma_V} = \sigma_{mB}^* + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Aangezien keven, hollen en krasen moet geheel vermeden kunnen worden moeten we - onder zekere voorwaarden - tot de slotsom komen, dat de materiaalprootheid

$$(43) \quad \sigma_{mB}^* = \frac{\sigma_{mB}}{\sigma_V} = \text{„Duktiliteit“},$$

een belangrijke maatstaf voor de (schuivige) plastische vervormbaarheid van metalen is. Aan de ervaring kunnen aanwijzingen worden ontleend, dat dit juist is. Bij een trekproef op zacht messino kan men bijv. opmerken dat, hoewel op grond van de hoge versterkings-exponent $n = 0,45 \div 0,60$ de gelijkmatige rek tot het begin van instorting relatief groot is, breuk al intreedt voor de een moemenswaardige instorting is kunnen ontstaan. Blijkbaar is de duktiliteit slecht bij een relatief goede rekbaarheid. Uit ervaring is nimmerdaad bekend, dat messino een goede diefstrekbaarheid en strekbaarheid bezit bij de relatieve kleine deformaties in de plaatbewerking, daarentegen bij strieken enz. zeer snel breekt.

Een grote gedaanten sprong brengt ons bij de hardmetalen, waarmede vaak omvormgeleedschappen worden vervaandigd. Een belangrijke, wenselijke, eigenschap van hardmetalen is de, overigens zeer geringe, duktiliteit. Hierdoor kunnen elastische spanningen die, vooral bij stootbelasting kunnen ontstaan, niet onbeperkt toenemen door plastische demping. Bij onderzoek in het verleden is gebleken dat er een duidelijke correlatie bestaat tussen de grootte van de korbidedeeltjes en een onderlinge afstand in het hardmetaal enerzijds en de duktiliteit anderzijds. Overigens dient hier vermeld te worden dat het begrip "duktiliteit" (= "smeedbaar"; "kneedbaar"; "handelbaar" enz.) vaak in slecht gedefiniëerde en sterk gevoelsmatige betekenissen wordt toegepast.

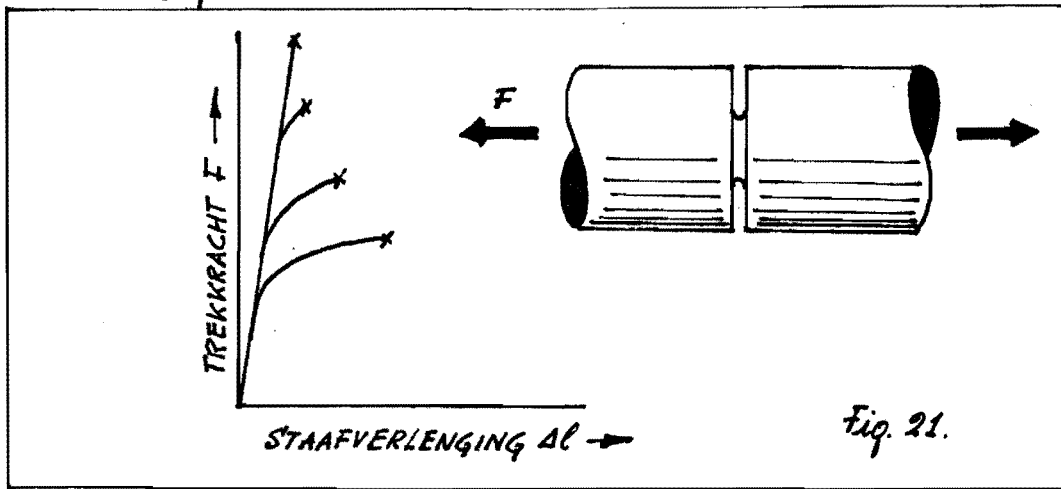
Voorts wordt erop gewezen, dat nauwelijks getalwaarden van T_{mB} resp. T_{m3} bekend zijn. Dit hangt vermoedelijk samen met het feit, dat er geen universele meetmethode bekend is om van verschillende materialen deze grootte te bepalen, of althans dit op een eenduidige wijze te doen. Het voorgaande komt duidelijk naar voren dat men om dit soort onderzoek gekerfde proefstukken nodig heeft waarbij als complicatie de veranderende kerfstraling tijdens plastische deformatie moet worden genoemd!

Een klassieke werktuigbouwkundige materiaaltest is in dit verband de zoo. "kerfslagproef", waarbij de resultaten echter wordt in een objectieve, overdraagbare, vorm zijn gebracht en uitsluitend gebruikt worden om een vergelijkende waardering van materialen op hun "kerfgevoeligheid". Het behoort geen betoog, dat de begrippen duktiliteit en kerfgevoeligheid niet elkaars verbonden zijn. Hetzelfde geldt ook om het begrip "taaiheid" (zie ook omvormtechniek VE 10)

11. TOETSING

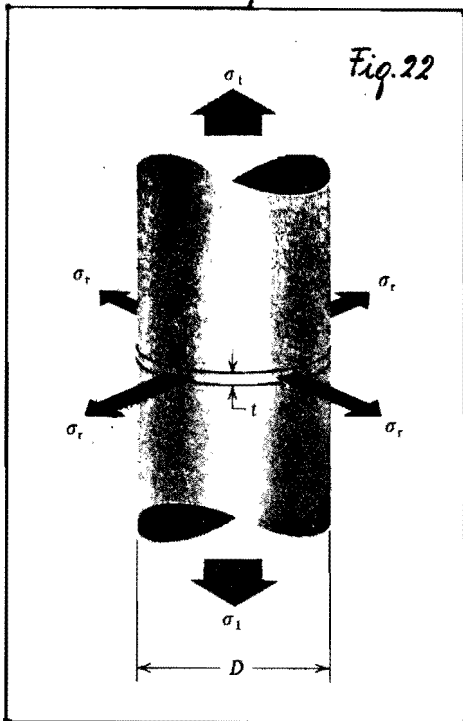
In het kader van deze tekst zie ik af van een grondige wetenschappelijke toetsing, of althans de beschrijving ervan. Vooral een getalmatige toetsing levert nogal problemen op omdat, vooral schepen, keven moeilijk nauwkeurig aan te brengen zijn en, zoals eerder aangeduid, tijdens plastische deformatie aanzienlijk kunnen versanden. De laatste invloed kan enigzins worden tegengegaan door diepe keven aan te brengen.

A. Uit een beschouwing van fig. 11 volgt dat, wanneer trekproeven worden uitgevoerd op een aantal overigens gelijke gekerfde staven waarbij uitsluitend de kerf-radius wordt gewarield, de overgang van het rechte elastische gedeelte van de kracht-wo kromme naar het vlakke plastische gedeelte bij een grotere kracht plaatsvindt naarmate de kerf scherper is. (zie fig. 21).



Gezien vanuit het standpunt van de constructeur betekent de kerfscherpte dus een versterking van de kleinste doorsnede (niet noodzakelijkerwijs van de staaf!) Sterkte technisch is een technofout dus een uitermate interessant Objekt, bijv..

B. Een andere interessante proefneming is de volgende: twee koperen cilinders van gelijke doorsnede vorm en afmeting worden „kops“ op elkaar gesoldeerd. Hierbij wordt zorgvuldig erop gelet dat de soldeerlaag gaaf is en vooral een goede hechting met het koper heeft. De verkregen cilinder wordt vervolgens afgedraaid om een gaaf buitenvlak te verkrijgen. Belast men nu de staaf met een trekkracht dan begint het tin, dat zijn lagere vloeikwaant, het eerst te vloeien. Er vormt zich een zeer scherpe keel met een radius in de orde van de dikte van de soldeerlaag en die nitest klein kan zijn. Het als nitemark taai bekend staande tin breekt vervolgens volkomen brot bij een gemiddelde trekspanning die vele malen groter is (bijv. 10x) dan de vloeispanning. Deze test is in fig. 22 afgebeeld voor een ronde staaf.



Doch hier blijkt ook wel dat, in strijd met heersende opvattingen, brot of taai materiaalgedrag in eerste instantie van de spanningstoestand afhankelijk is. (Overigens valt in deze test een interessante verwantschap met het druk- of wrijvingsbergfenomeen bij pletten te ontdekken, zij het dat de tekens hier omgekeerd zijn)

C. Eenslotte proberen we nog tot een getalmatige toetsing te komen. De maximale spanning kan echter in het plastisch gebied niet worden bepaald. Wel de gemiddelde langspanning, via de trekkracht. We dienen dus nu een uitdrukking voor deze kracht uit het model af te leiden. Beschouwen we fig. 10 en gaan we uit van tweezijdig doorlopende kerven, dan is:

$$F = 2L \int_R^{(H-h+R)} \sigma_t dt$$

Substitutie van (37) hierin voert nu tot

$$\begin{aligned} F &= \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_v L \int_R^{(H-h+R)} \left(\ln e \frac{t}{R} \right) dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_v L \left[\ln \frac{e}{R} \int_R^{(H-h+R)} dt + \int_R^{(H-h+R)} \ln t dt \right] \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_v L \left[\left(\ln \frac{e}{R} \right) t + t (\ln t - 1) \right]_R^{(H-h+R)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_v L \left[\left(\ln \frac{e}{R} \right) (H-h) + (H-h+R) \left(\ln (H-h+R) - 1 \right) - R (\ln R - 1) \right] \end{aligned}$$

$$(44) \quad F = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_v L (H-h+R) \ln \frac{H-h+R}{R}$$

Tijdens plastische deformatie in de kleinste doorsnede
 van de staaf is de gemiddelde trekspanning:

$$(45) \quad \sigma_{t \text{ gem}} = \frac{F}{2(H-h)L} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_V \left(1 + \frac{R}{H-h}\right) \ln \left(1 + \frac{H-h}{R}\right)$$

Definiëren we vervolgens de keirfactor α_k als volgt:

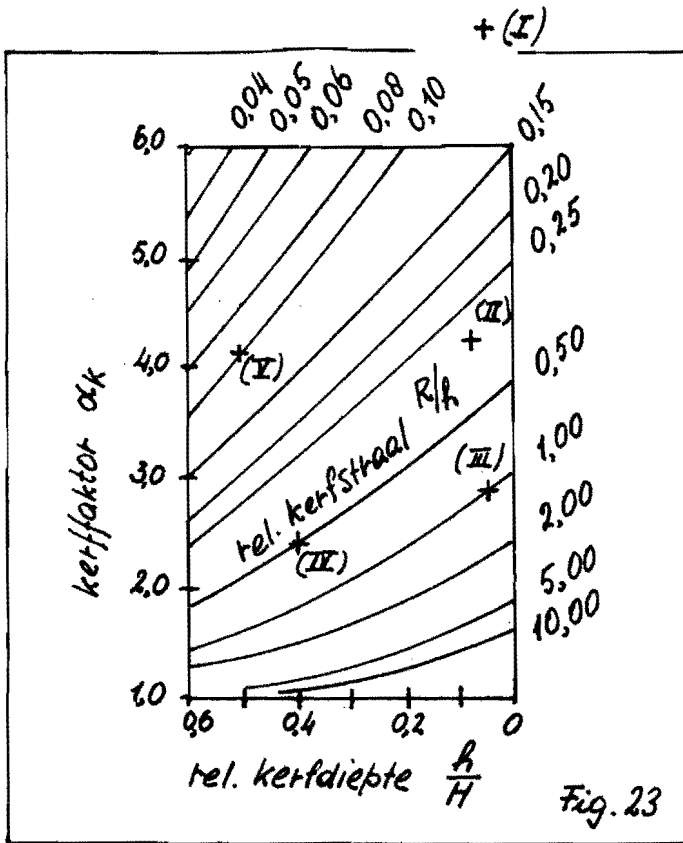
$$(46) \quad \alpha_k = \frac{\sigma_{t \text{ gem}}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad \text{met } \sigma_{\text{nom}} = \sigma_V \text{ (lijnsb.)}$$

dan kunnen we ten slotte schrijven:

$$(47) \quad \alpha_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{R}{H-h}\right) \ln \left(1 + \frac{H-h}{R}\right)$$

In een handboek *) treffen we een grafiek aan
 waarin α_k is weergegeven als functie van h/H
 en R/h , verstaand naar onze symbolen. Deze grafiek
 is weergegeven in fig. 23. Volgens opgave zijn
 deze en andere grafieken gebaseerd op experimenteel
 onderzoek door de „Material-Prüfungs-Anstalt“ te
 Darmstadt. Het onderzoek werd verricht ten behoeve
 van de sterkteberekening van konstruktieonderdelen
 („Bauteile“); er is echter niet vermeld hoe en volgens
 welk criterium het onderzoek werd uitgevoerd.

* Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, I, 28. Aufl. 1955,
 Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin; p. 962



De voordustelling
ligt van de hand,
dat men de kracht
heeft gemeten bij
het begin van blij-
vende deformatie.
Het gebruik van
Fig. 23 kunnen we
dit model verglijken
met gemeten waarden.
Hier toe kunnen we
verg. (47) nog dur-
ven tot:

$$(48) \quad \alpha_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{R/h}{H/h-1} \right) \ln \left(1 + \frac{H/h-1}{R/h} \right)$$

We nemen een aantal gevallen aan, welke in fig. 23 door kruisjes zijn aangeduid, en berekenen de waarden van α_k (volgens (40)) en ψ (volgens (40)). Deze waarden vergelijken we met de α_k waarde volgens figuur 23. Achteloos volgens:

Geval I: $\left. \begin{array}{l} H = 40 \text{ mm} \\ h = 2 \text{ mm} \\ R = 0,2 \text{ mm} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} R/h = 0,1 \\ H/h = 20 \\ (h/H = 0,05) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{k \text{ graf}} = 7,0 \\ \alpha_{k \text{ bet}} = 6,1 \\ \psi = 7,2 \end{array}$

Geval II: $\left. \begin{array}{l} H = 10 \text{ mm} \\ h = 3 \text{ mm} \\ R = 0,1 \text{ mm} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} R/h = 0,333 \\ H/h = 13,33 \\ (h/H = 0,075) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{k \text{ graf}} = 4,2 \\ \alpha_{k \text{ bet}} = 6,8 \\ \psi = 6,1 \end{array}$

Geval III: $\left. \begin{array}{l} H = 40 \text{ mm} \\ h = 2 \text{ mm} \\ R = 2 \text{ mm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R/h = 1 \\ H/h = 20 \\ (h/H = 0,05) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{k \text{ graf}} = 2,8 \\ \alpha_{k \text{ bet}} = 3,6 \\ \psi = 4,6 \end{array}$

Geval II: $\left. \begin{array}{l} H = 25 \text{ mm} \\ h = 10 \text{ mm} \\ R = 5 \text{ mm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R/h = 0,5 \\ H/h = 2,5 \\ (h/H = 0,4) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{k \text{ graf}} = 2,4 \\ \alpha_{k \text{ bet}} = 2,1 \\ \psi = 2,8 \end{array}$

Geval I: $\left. \begin{array}{l} H = 20 \text{ mm} \\ h = 10 \text{ mm} \\ R = 1 \text{ mm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R/h = 0,1 \\ H/h = 2 \\ (h/H = 0,5) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{k \text{ graf}} = 4,2 \\ \alpha_{k \text{ bet}} = 3,0 \\ \psi = 3,9 \end{array}$

- Voorlopig concluderen we dat dit eenvoudige model kwalitatief en kwantitatief een heel eind voert hoewel er enige twijfel blijft bestaan t.a.v. representativiteit van het experimentele cijfermateriaal.
- De grootste afwijking vinden we bij de kleinste kerfstraal. Het is niet onwaarschijnlijk dat veranderingen van de kerfstraal tijdens deformatie hiervoor als oorzaak moeten worden aangewezen. Immers alleen de beginradius is slechts bekend, de fabricage nauwkeurigheid is hier het moeilijkst in de hand te houden en bij het opvoeren van de kracht begint het materiaal in de kerfspit het eest te deformerem (de doorsnede is dan dus gedeeltelijk plastisch). Een oorzaak van afwijkingen kan voort zijn, dat in ons model stralingsvrijheid $\frac{d\sigma_r}{dt} = 0$ is verondersteld, hetgeen niet waar is als de kleinste doorsnede geleidelijk van buiten naar binnen plastisch wordt.

D. Gaan we nog even terug naar verg. (45) en (47):

$$\frac{F}{A} = \frac{F}{2(H-h)L} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_v \left(1 + \frac{R}{H-h}\right) \ln\left(1 + \frac{H-h}{R}\right) = \alpha_k \sigma_v$$

dus:

$$\sigma_v (= \bar{\sigma}) = \frac{1}{\alpha_k} \frac{F}{A} \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{R}{H-h}\right) \ln\left(1 + \frac{H-h}{R}\right)$$

en met $c_k = 1/\alpha_k$ en $H-h = a$ gaat dit over in

$$(49) \quad \sigma_v = c_k \frac{F}{A}$$

$$\text{met} \quad c_k = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{R}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right) \right]^{-1}$$

In 1952 werd door Bridoman t. b. v. de evaluatie van de trekproef een faktor c_B (de zog. "Bridoman-faktor") afgeleid waardoor het mogelijk werd om ook tijdens het insnoeren van een ronde trekstaaf de juiste punten van de effectieve vloei-kromme te bepalen. Het isostatisch gedeelte van de gemiddelde trekspanning wordt door c_B a. h. w. wegecorrecteerd:

$$(50) \quad \sigma_v (= \bar{\sigma}) = c_B \frac{F}{A}$$

$$\text{met} \quad c_B = \left[\left(1 + \frac{2R}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \right]^{-1}$$

Hiervan is op analoge wijze R de profielradius van de insnoering ter plaats van de kleinste doorsnede en a is de straal van de kleinste doorsnede.

Verloopten we (49) en (50) dan blijkt een treffende overeenstemming. In eerste instantie is dit een waardevolle aanwijzing voor de juistheid van de verkregen inzichten. In het volgende hoofdstuk wordt de afleiding gegeven van de Bridgman-faktor als voorbeeld van een meer gedetailleerde uitwerking van de eerder ontwikkelde inzichten ten behoeve van een specifieke toepassing in de puuvormtechnologie.

12. DE KORREKTIE VOLGENS BRIDGMAN *)

Bij de afleiding van de basisrelaties van de plasticiteitsmechanika is reeds gebleken dat de resultaten van de trekproef representatief zijn voor het verband tussen de effectieve spanning en de effectieve deformatie van een materiaal tot de rek de waarde $\epsilon = n - \bar{\epsilon}_0$ bereikt. Daarna bestaat er in het gebied van de zich ontwikkelende insnoering, waarbinnen de verdergaande deformatie zich concentreert, geen lijnspanningstoestand meer. De waarde van de versterkingsexponent is zelden groter dan 0,4 zodat de trekproef, met zijn eenvoudige interpretatie gebaseerd op uniforme rek, slechts een beperkt meetbereik biedt. Voor vele technologische toepassingen van de meetresultaten is dit meetbereik te klein. De analyse volgens Bridgman maakt het mogelijk een korrektiefaktor te berekenen voor het effect van de insnoering op de uitkomst van de trekproef. Hierdoor komt een aanzienlijk groter meetbereik ter beschikking

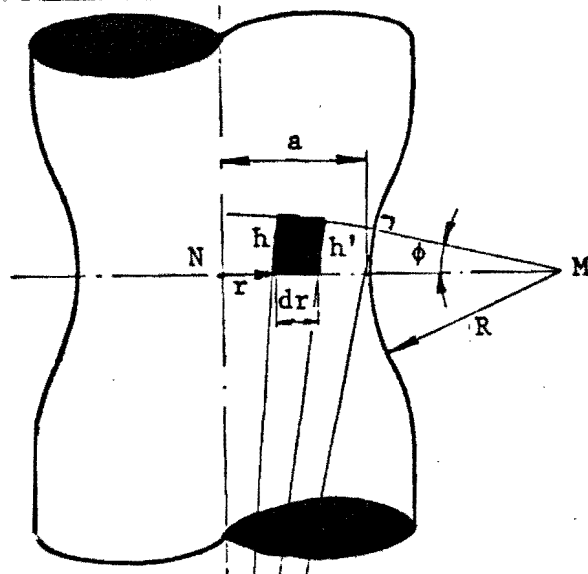
*) P. W. Bridgman: „Studies in Large Plastic Flow and Fracture.“ McGraw-Hill, New York-London, 1952.

voor technologisch gebruik.

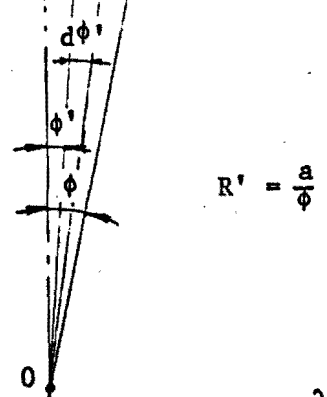
Alvorens we, op analoge wijze als om de vlakke strip, het evenwicht van een volumeelement kunnen gaan beschouwen, moeten we dit zo handig mogelijk kiezen. We doen dit zodanig dat zoveel mogelijk grensvlakken van het volumeelement samenvallen met of onder randcondities overgaan in bijzondere vlakken van de trekstaaf. Dit zijn het vlak van de kleinste staafdoorsnede, de vlakken door de hartlijn en tenslotte het staafoppervlak nabij de kleinste doorsnede dat benaderend een touwvlak is. Al deze vlakken zijn hoofdvlakken, of omdat symmetrievlakken qualitatief spanningvrij zijn, of omdat het buitenoppervlak geheel spanningvrij is.

Van de bovenstaande wensen kan worden voldaan door de ribben van het - overigens vrij gekompliceerd - volumeelement in drie afzonderlijke bolcoördinaatstelsels te beschrijven. Deze stelsels zijn in fig. 24.I aangeduid. Het infinitesimaal volumeelement is in fig. 24.II getekend. We kiezen het volumeelement zodanig dat het steeds tegen de kleinste doorsnede ligt, ABCD ligt dus in de kleinste doorsnede. AD en BC zijn concentrische cirkelbogen rond N als middelpunt. AB en CD zijn rechte lijnen door N. Vervolgens zijn de grensvlakjes ABFE en DCGH platte vlakken door de staafas. Hiervan zijn de grenslijnen EF en HG cirkelbogen rond een middelpunt O op de staafas en de grenslijnen AE, DH, BF en CG cirkelbogen rond een middelpunt M dat buiten de staaf in het vlak van tekening en in het vlak van de kleinste staafdoorsnede ligt. De grenslijnen AD, EH, FG en BC, tenslotte, zijn cirkelbogen rond een middelpunt N op de staafas en in de kleinste staafdoorsnede. Hiermee liggen de hoofdafmetingen van de drie gewelfde vlakjes AEHD, BFGC en EFGH ook vast.

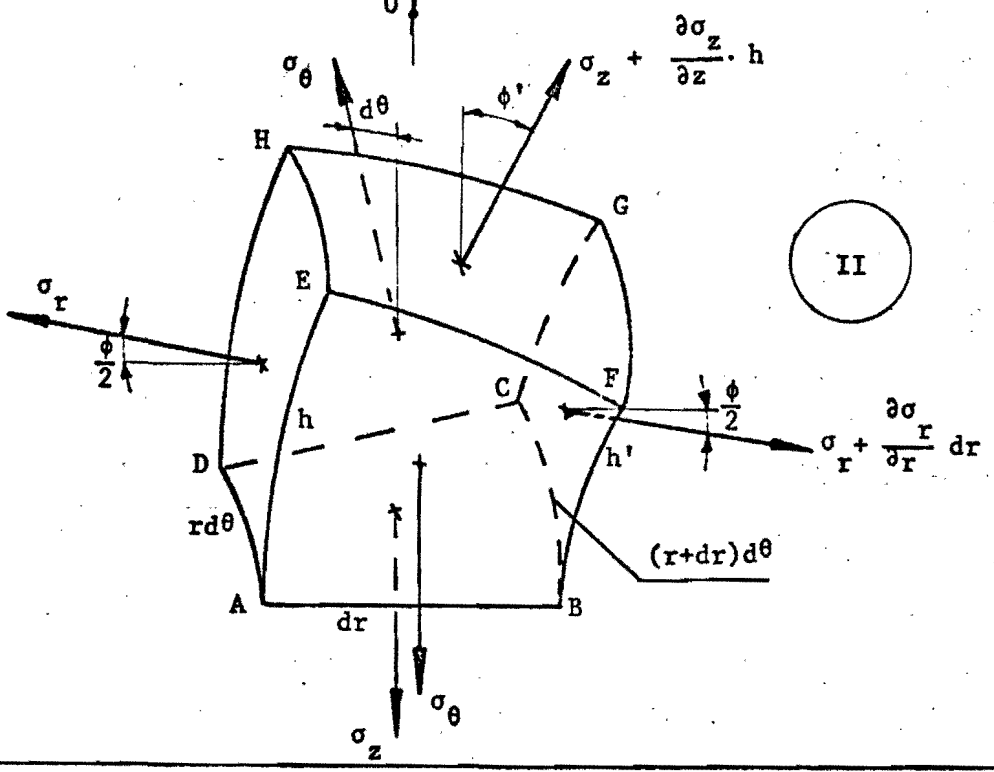
Fig. 24



I



$$R' = \frac{a}{\phi}$$



II

Aangezien het elementje in omtreksrichting (middelpuntshoek $d\theta$ in N) en in radiale richting (middelpuntshoek $d\phi$ in O) infinitesimale afmetingen heeft en we de axiale afmetingen zeer klein houden (door de hoek ϕ zeer klein resp. de straal R' zeer groot te nemen), liggen de greusvlakken van het volumelementje zodanig dicht bij elkaar en zijn ze zodanig weinig afwijkend van (twee dan twee) evenwijdig dat we eenvoudigheidshalve aannemen dat ook de gewelfde greusvlakken evenals de platte alle hoofdvlakken van de spanningstoestand zijn.

Met betrekking tot het evenwicht van krachten in radiale richting geldt nu:

$$\begin{aligned} & (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} h) (r + \frac{dr}{2}) d\theta dt \sin(\phi' + \frac{d\phi}{2}) + \\ & (\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr) (r + dr) d\theta h' \cos \frac{\phi}{2} - 2 \sigma_\theta \frac{h+h'}{2} dt \sin \frac{d\theta}{2} + \\ & - \sigma_r h r d\theta \cos \frac{\phi}{2} = 0 \end{aligned}$$

Voor infinitesimale resp. kleine hoeken geldt (zie fig. 24):

$$2 \sin \frac{d\theta}{2} \approx 2 \frac{d\theta}{2} = d\theta, \text{ en}$$

$$\sin(\phi' + \frac{d\phi}{2}) = \phi' + \frac{d\phi}{2} = \phi'$$

Daarmee gaat de evenwichtsvergelijking over in:

$$(51) \quad \begin{aligned} & (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} h) (r + \frac{dr}{2}) \phi' dt + (\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr) (r + dr) h' \cos \frac{\phi}{2} + \\ & - \sigma_\theta \frac{h+h'}{2} dt - \sigma_r h r \cos \frac{\phi}{2} = 0 \end{aligned}$$

Een verdere vereenvoudiging kan worden verkregen

door het invoeren van enige geometrische relaties welke uit fig. 24 volgen. Deze zijn:

$$(52) \quad R' = \frac{a}{\phi}$$

$$(53) \quad h = R\phi + R'\cos\phi' - R'\cos\phi = R\phi + \frac{a}{\phi}(\cos\phi' - \cos\phi)$$

$$(54) \quad h' = R\phi + R'\cos(\phi' + d\phi') - R'\cos\phi = \\ = R\phi + \frac{a}{\phi} \{ \cos(\phi' + d\phi') - \cos\phi \}$$

Alvorens men er anders uit te kunnen werken hebben we nog enige eenvoudige vergelijkingen nodig, welke eveneens uit fig. 24 volgen:

$$(55) \quad \sin\phi' = \frac{r}{a} \sin\phi \rightarrow \phi' = \frac{r}{a} \phi$$

$$(56) \quad \sin d\phi' = \frac{dr}{a} \phi \rightarrow d\phi' = \frac{dr}{a} \phi$$

$$(57) \quad \cos d\phi' \approx 1$$

In verg. (54) is nu:

$$\cos(\phi' + d\phi') = \cos\phi' \cos d\phi' - \sin\phi' \sin d\phi' = \\ \cos\phi' - \phi' d\phi' = \cos\phi' - \frac{\phi^2}{a^2} r dr$$

Hierna gaat (54) over in (zie ook (53)):

$$h' = R\phi + \frac{a}{\phi} \left\{ \cos\phi' - \frac{\phi^2}{a^2} r dr - \cos\phi \right\} = \\ = R\phi + \frac{a}{\phi} (\cos\phi' - \cos\phi) - \frac{\phi}{a} r dr$$

Dus:

$$(58) \quad h' = h - \frac{\Phi}{a} t dt$$

We kunnen nu de evenwichtsvergelijking (51) verder uitwerken door substitutie van (55) en (58). Uitveemening-vuldigen en achtereenvolgens verwaarlozen van termen welke van 2^e en hogere orde klein zijn, verwijderen van termen welke tegen elkaar wegvallen en tenslotte delen door Φdt leidt nu tot

$$(59) \quad \begin{aligned} \sigma_z \frac{t^2}{a} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \frac{t^2}{a} h - \sigma_r \frac{t^2}{a} \cos \frac{\Phi}{2} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} \frac{t h}{\Phi} \cos \frac{\Phi}{2} + \\ + \sigma_r \frac{h}{\Phi} \cos \frac{\Phi}{2} - \sigma_\theta \frac{h}{\Phi} = 0 \end{aligned}$$

De drie keer hierin voorkomende factoren $\cos \frac{\Phi}{2}$ kunnen we tot een reeks ontwikkelen:

$$(60) \quad \begin{aligned} \cos \frac{\Phi}{2} &= 1 - \frac{(\Phi/2)^2}{2} + \dots \\ &\approx 1 \quad \text{voor } \Phi \ll 1 \end{aligned}$$

Voorts houden we rekening met het feit dat de kleinste doorsnede van de ijsboerzoue van de trekstaaf een symmetrievlak voor σ_z is, zodat

$$(61) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Substitueeren we (60) en (61) in (59), dan verkrijgen we tenslotte als evenwichtswaarde:

$$(62) \quad (\sigma_z - \sigma_r) \frac{t^2}{a} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \frac{r h}{\phi} + (\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{h}{\phi} = 0$$

Hiermee beschikken we over één vergelijking van het stelsel dat ons probleem bepaalt. De tweede volgt uit de aanname dat in elk punt van de kleinste doorsnede en de naaste omgeving ervan plastische vloeï optreedt.
D.w.z.

$$\bar{\sigma} = \sigma_v$$

$$\text{Het} \quad 2\bar{\sigma}^2 = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2$$

Volgt hieruit

$$(63) \quad 2\sigma_v^2 = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2$$

We kunnen deze vloeivonwaarde nog enigszins meer nodig hebben op grond van de overweging dat om isotroop materiaal de kleinste draafdorsnede eikelvormig blijft tijdens de deformatie. Ze wordt dus gelijkvormig vrekleind en dat betekent dat de rekken in het vlak van de kleinste doorsnede in elk punt en in elke richting gelijk zijn. Dus

$$(64) \quad d\varepsilon_r = d\varepsilon_\theta$$

Substitueren we dit in de Lévy-von Misesrelaties

$$(65) \quad \begin{cases} d\varepsilon_r = d\lambda \left(\sigma_r - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \right) \\ d\varepsilon_\theta = d\lambda \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \right) \end{cases}$$

dan volgt
$$\sigma_r - \frac{\sigma_t + \sigma_\theta}{2} = \sigma_\theta - \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}$$

$$2\sigma_r - \cancel{\sigma_t} - \sigma_\theta = 2\sigma_\theta - \cancel{\sigma_t} - \sigma_r$$

(66)
$$\sigma_r = \sigma_\theta$$

Substitueren we dit gegeven in (63) dan zien we

$$\sigma_v = |\sigma_z - \sigma_r|$$

In de kleinste doorsnede en aan het staafoppervlak is met zekerheid $\sigma_z > 0$ en $\sigma_r = 0$. We weten immers, dat σ_z gemiddeld positief moet zijn aangezien de trek-staaf op trek wordt belast. Met redelijke zekerheid kunnen we dus zeggen dat algemeen (a.w.z. vooral in de kleinste doorsnede) geldt:

(67)
$$\sigma_v = \sigma_z - \sigma_r$$

Dit dienen we a posteriori te controleren (en blijft dan te kloppen).

Voor de verdere uitwerking substitueren we (66) en (67) in de evenwichtsomwaarde (62):

$$\sigma_v \frac{t^3}{a} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \frac{t^2 h}{\phi} = 0$$

(68)
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\sigma_v \frac{t}{a} \cdot \frac{\phi}{h}$$

In deze vorm is de vergelijking nu niet integreerbaar.
 We dienen de hulp grootheden ϕ en h te elimineren.
 Met (53) kunnen we noteren

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{h} &= \frac{\phi}{R\phi + \frac{a}{\phi}(\cos\phi' - \cos\phi)} = \\ &= \frac{1}{R + \frac{a}{\phi^2}(\cos\phi' - \cos\phi)}\end{aligned}$$

In dit geval mogen we $\cos\phi'$ resp. $\cos\phi$ niet gelijk aan 1 stellen. We ontwikkelen de reeksen voor deze cosinussen.

$$\begin{aligned}\cos\phi &= 1 - \frac{\phi^2}{2} + \dots \approx 1 - \frac{\phi^2}{2} \\ \cos\phi' &= 1 - \frac{\phi'^2}{2} + \dots \approx 1 - \frac{\phi'^2}{2} = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\phi^2}{2}\end{aligned}$$

(zie voo. (55))

Substitutie van deze uitdrukkingen in de vergelijking voor ϕ/h geeft nu:

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{h} &= \frac{1}{R + \frac{a}{\phi^2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\phi^2}{2}} - \sqrt{1 + \frac{\phi^2}{2}} \right]} = \\ &= \frac{1}{R + a \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{2} \right)} = \\ &= \frac{1}{R + \frac{a}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)} = \frac{1}{R + \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2}}\end{aligned}$$

Dus:

$$(69) \quad \frac{\phi}{h} = \frac{1}{R + \frac{a^2 - r^2}{2a}}$$

We kunnen nu met (69) ϕ/h uit (68) elimineren:

$$(70) \quad \frac{d\sigma_r}{dt} = -\sigma_r \frac{2t}{2aR+a^2-t^2}$$

Er rest ons nu alleen nog het integreren van deze differentiaalvergelijking over t . Hiertoe nemen we aan, dat bij het begin van de proef in de door ons beschouwde doorsnede al geldt:

$$(71) \quad \frac{d\sigma_r}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(\sigma_r/c)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\sigma_r^*}{dt} = 0$$

Mit de studie van de versterkingsinvloed op de (effektieve) deformatieverdeling weten we dat

$$(72) \quad \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = Q \cdot \frac{d\sigma_r^*}{dt} \quad \text{met} \quad Q = \frac{(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^{1-n}}{n}$$

Dus $d\bar{\epsilon}/dt = 0$ zodat ook in de volgende deformatiestap (71) weer geldt, enz. Voor $n > 0$ en een oorspronkelijk redelijk homogeen materiaal geldt dus steeds resp. (71). Bij de integratie mag σ_r dus als konstante worden behandeld.

Dom substitutie van

$$x = 2aR + a^2 - t^2, \text{ en}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2t \rightarrow dt = -\frac{dx}{2t}$$

in resp. (70) gaat deze over in

$$d\sigma_r = \sigma_r \frac{dx}{x}$$

$$\int d\sigma_r = \sigma_v \int \frac{dx}{x} \rightarrow \sigma_r = \sigma_v \ln x + k$$

$$\sigma_r = \sigma_v \ln(2aR + a^2 - r^2) + k$$

Als randvoorwaarde nemen we in

$$\sigma_r = 0 \text{ voor } r = a$$

zodat

$$0 = \sigma_v \ln(2aR + a^2 - a^2) + k \rightarrow k = -\sigma_v \ln 2aR$$

Tenslotte vinden we na substitutie hiervan:

$$(73) \quad \sigma_r = \sigma_v \ln\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2aR}\right)$$

hieruit volgt met (67) voor de spanning σ_z in de langs-richting

$$(74) \quad \sigma_z = \sigma_r + \sigma_v = \sigma_v \left\{ \ln\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2aR}\right) + 1 \right\}$$

Met haar is de trekkracht op de ingesmoede staaf. Deze kan worden uitgedrukt in de axiale spanning σ_z :

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^a \sigma_z r dr \\ &= 2\pi \sigma_v \int_0^a \left\{ \ln\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2aR}\right) + 1 \right\} r dr \\ &= 2\pi \sigma_v \left[\int_0^a r \ln(2aR + a^2 - r^2) dr + (1 - \ln 2aR) \int_0^a r dr \right] \end{aligned}$$

$$(75) \quad F = 2\pi \sigma_v [A + B]$$

hierin is $A = \int_0^a t \ln(2aR + a^2 - t^2) dt$

Met $2aR + a^2 - t^2 = x$ en $dt = -\frac{dx}{2t}$

verkrijgen we:

$$A = -\int_{t=0}^{t=a} t \ln x \frac{dx}{2t} = -\frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=a} \ln x dx.$$

Gebruik makend van de methode van partiële integratie vinden we nu

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \left[x \ln x - \int dx \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[x \ln x - x \right] = -\frac{1}{2} \left[x (\ln x - 1) \right] \\ &= \frac{x}{2} (1 - \ln x) \Big|_{t=0}^{t=a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2aR + a^2 - t^2}{2} \left\{ 1 - \ln(2aR + a^2 - t^2) \right\} \Big|_{t=0}^{t=a} = \\ &= aR \left\{ 1 - \ln(2aR) \right\} - \frac{2aR + a^2}{2} \left\{ 1 - \ln(2aR + a^2) \right\} \end{aligned}$$

$$(76) \quad A = aR \ln \frac{2aR + a^2}{2aR} + \frac{a^2}{2} \ln(2aR + a^2) - \frac{a^2}{2}$$

Verdergens berekenen we de tweede term in voo. (75).

$$\begin{aligned} B &= (-\ln 2aR) \int_0^a t dt = (-\ln 2aR) \frac{t^2}{2} \Big|_0^a = \\ &= (-\ln 2aR) \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$(77) \quad B = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln 2aR$$

Substitueren van (76) en (77) in (75) voert nu tot:

$$\begin{aligned}
 F &= 2\pi\sigma_v \left[aR \ln \frac{2aR+a^2}{2aR} + \frac{a^2}{2} \ln(2aR+a^2) - \frac{a^2}{2} \ln 2aR \right] \\
 &= 2\pi\sigma_v \left[aR \ln \frac{2aR+a^2}{2aR} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{2aR+a^2}{2aR} \right] \\
 &= 2\pi\sigma_v \left(aR + \frac{a^2}{2} \right) \ln \frac{2aR+a^2}{2aR}
 \end{aligned}$$

$$(78) \quad F = \pi a^2 \sigma_v \left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)$$

De gemiddelde trekspanning op de kleinste doorsnede van de trekstaaf is dus

$$\sigma_{z \text{ gem}} = \frac{F}{\pi a^2} = \sigma_v \left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)$$

of ook:

$$(79) \quad \frac{\sigma_{z \text{ gem}}}{\sigma_v} = \alpha_k = \left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)$$

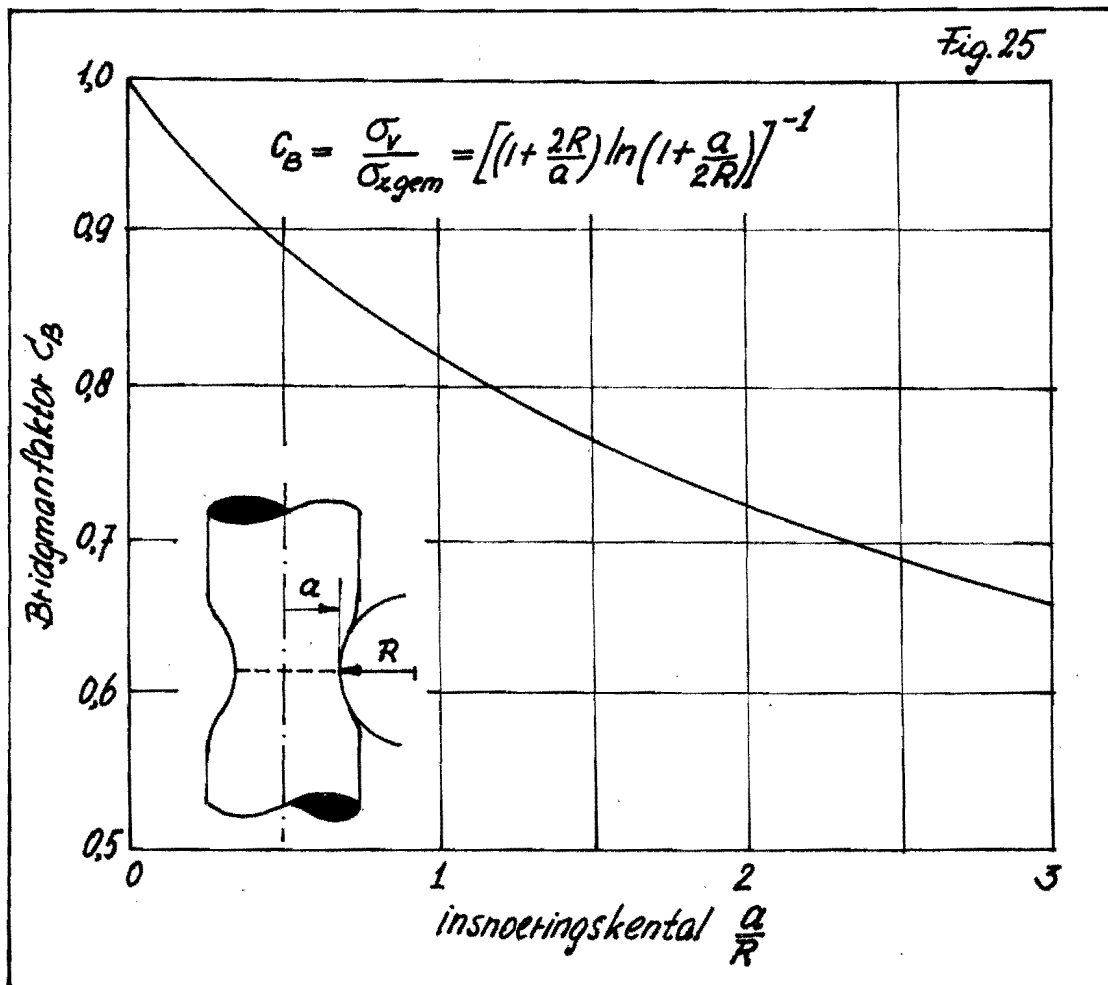
Tijdens het uitvoeren van een trekproef kunnen F en a - al dan niet intermitterend - worden gemeten. De waarde van de Molikoustante σ_v volgt dan uit

$$\sigma_v = c_B \cdot \frac{F}{\pi a^2} \quad \text{met}$$

(80)

$$c_B = \frac{1}{\left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)} = \text{" Bridgman faktor "}$$

Zoals duidelijk is, kan met behulp van deze faktor uit gemeten korresponderende waarden van de trekkracht F , de halve diameter a van de kleinste doornede en de profielradius R van de insnoering de bijbehorende momentane waarde van de vloeikoustante σ_y (en dus ook van de momentane waarde van $\bar{\sigma}$) worden bepaald. Met behulp van de korrektiefaktor C_B kan de invloed van de elastische spanningcomponent op de meetresultaten worden weggezuiverd als het nou gaat de versterigingskromme e.g. -functie te bepalen over een aanzienlijk groot meetbereik dan zonder voortzetting van de proef na het begin van insnoering mogelijk is. In fig. 25 is de getalwaarde van C_B grafisch weergegeven als functie van het insnoeringskental a/R .



Uit vno. (64) volgt dat we met een rechte deformatieweg te maken hebben. Dit

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_t + d\varepsilon_\theta = 0$$

en $d\varepsilon_t = d\varepsilon_\theta$

volgt $d\varepsilon_x : d\varepsilon_t : d\varepsilon_\theta = 1 : (-\frac{1}{2}) : (-\frac{1}{2}) = \text{konstant}$

Dus

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_x^2 + d\varepsilon_t^2 + d\varepsilon_\theta^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon_x^2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})} = \\ &= \sqrt{d\varepsilon_x^2} = |d\varepsilon_x| = d\varepsilon_x \end{aligned}$$

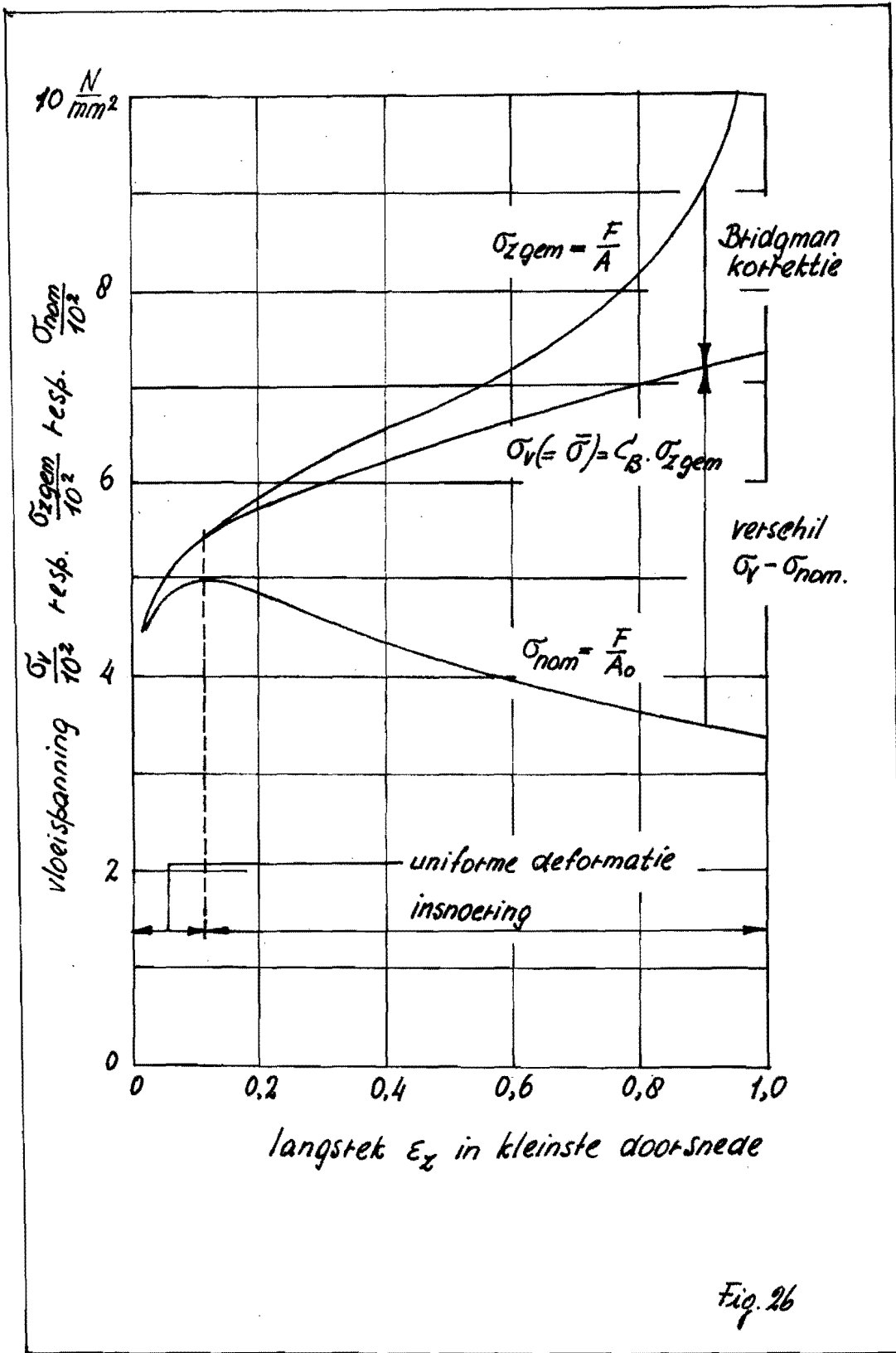
En

$$(81) \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_x = -2\varepsilon_t = -2 \ln \frac{2a}{2a_0} = 2 \ln \frac{a_0}{a}$$

Uit de meetwaarden F , t en a volgt dus behalve σ_v (met a_0) ook de effectieve deformatie in de kleinste doorsnede. Hiermee is nu de weg naar het bepalen van de versterkingsrelatie volgens Ludwik

$$(82) \quad \sigma_v = C(\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_0)^n$$

open gelegd. In fig. 26 is nu een zachte en koolstofarme staalsoort het effect van de Bridgmancorrectie gedemonstreerd. De oudste kromme geeft de nominale trekkrumme weer, waarbij de nominale spanning wordt gedefinieerd als het quotiënt van de trekkracht en de oorspronkelijke doorsnede A_0 van de proefstaaf. Deze



nominale trekkrumme heeft geen technologische betekenis (meer) als basisgegeven en zeker niet in de puurvorm-technologie. De bovenste kromme wordt verkregen indien ook in het gebied van de insnoering de spanning wordt gedefinieerd als quotiënt van trekkracht en momentane kleinste doorsnede. In feite meent men zodoende aan dat in het insnoeringsgebied een lijnspanningstoestand blijft bestaan. De werkelijke spanningstoestand wordt dan dus onvolledig en van technologische toepassing onvoldoende beschreven. De middelste kromme ontstaat door toepassing van de correctie volgens Bridgman op de meetgegevens, zoals behandeld. Deze uitkomst wordt aangevaard als in technologisch opzicht representatief voor het plastisch materiaalsoedrag. In vele gevallen heeft toepassing van dit gegeven bij de analyse van velelei processen tot controlebaar goede resultaten gevoerd.