

## Belastinginstabiliteit van een rond metalen membraan

**Citation for published version (APA):**

Kals, J. A. G. (1978). *Belastinginstabiliteit van een rond metalen membraan*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0423). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1978

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

BELASTINGINSTABILITEIT VAN EEN ROND METALEN MEMBRAAN.

Ir. J. A. G. Kals

1. Inleiding.

Zoals bekend, is een generaliserende analyse van de belastinginstabiliteit alleen mogelijk gebleken voor een rechthoekige plaat met een uniform verdeelde vlakke spanningstoestand en rechte spanningsweg. Hoewel hierdoor, in combinatie met de wèl algemeen (voor vlakke spanningstoestand en rechte spanningsweg) geldige analyse van lokale instabiliteit, reeds belangrijke inzichten m.b.t. plastische instabiliteitsverschijnselen en hun technische betekenis zijn verworven, zitten we nog met aanzienlijke problemen.

We realiseren ons, dat de economisch belangrijke plaatverwerkende industrie (bijv. automobiefabrikage) in grote mate strekkende bewerkingsmethoden toepast, waarbij niet-uniforme spanningsverdeling de regel is. (Uit vele metingen door HSU in Engeland is gebleken dat de spanningsweg doorgaans nauwelijks van de rechte afwijkt, zodat we dit probleem buiten beschouwing kunnen laten). De groep van de genoemde bewerkingen wordt in de grensvormingskromme door beeldpunten in het eerste kwadrant vertegenwoordigd. Zoals bekend, is juist hier een analyse van de belastingsinstabiliteit (voor ieder geval apart vanwege de geometrie invloed!) noodzakelijk omdat de lokale instabiliteit niet tot insnoering etc. kan leiden doordat het instabiele plekje door het niet-instabiele omgevende materiaal in het gareel wordt gehouden.

Het moeilijkste hierbij is - naast de rekentechnische problemen waarvoor een acceptabele oplossing moet worden gevonden - het vinden van het geschikte uitgangspunt. Dit dient immers een voor elk geval specifiek en technisch relevant instabiliteitskriterium te zijn.

2. Het criterium voor belastinginstabiliteit.

Het gekozen geval voor deze analyse vinden we bijvoorbeeld in de top van de bulgetest. Zijdelings wordt opgemerkt, dat dit geval sterk verschilt van het bekende probleem van het opblazen van een dunwandige bol. Bij de bulgetest neemt de kromtestraal tijdens het strekken immers af en kan de deformatieverdeling onmogelijk uniform zijn. Bij de trekrand is de omtrekstrek gelijk aan nul, terwijl in de top de deformatietoestand axiaalsymmetrisch is.

In het geval dat de bulgetest hydraulisch wordt uitgevoerd, is bekend dat insnoering en scheurvorming worden voorafgegaan door "puistvorming".

Gedurende het stabiele gedeelte van de proef blijkt de vorm van de uitstulping zuiver bolvormig te zijn. Dit is in overeenstemming met de minimum-energiehypothese omdat de bol het kleinste oppervlak is dat een gegeven (olie)-volume aan kan nemen,

is de strekarbeid (= oppervlakte-vergrotingsarbeid) die de pomp moet verrichten minimaal als de bulge bolvormig blijft. Blijkbaar is de allengs ontstane ongelijkmatige dikte niet of nauwelijks van belang hierbij. Anders wordt het wanneer in de top een aanzienlijke verzwakkende invloed werkzaam wordt.

De lokale instabiliteit, die optreedt als de diktere de kritische waarde  $\delta_{3k} = -n$  (voor  $\bar{\delta}_0 = 0$ ) aanneemt, heeft betrekking op de strekking van een aanvankelijk oneindig klein materiaalvolume. Het omgevende, nog stabiele, materiaal maakt geconcentreerde strekking in ons geval echter onmogelijk. Uit proeven is bekend dat de insnoering niet begint bij deze kritische diktevermindering. Bij biaxiale strekking is de invloed van de lokale instabiliteit blijkbaar te gering.

Er dient zich echter nog een ander criterium aan:

de oliedruk kan een hoogte bereiken die in een bepaald gebied het maximum vormt. D.w.z. meer kan de plaat plaatselijk niet opnemen. Als dit het geval is, ligt het voor de hand dat de bolvorm overgaat in een paraboloidvorm omdat de druk niet verder op kan lopen en dus niet meer voldoende is om de andere gebieden van het bulgeoppervlak verder te strekken. Het ontstaan van deze paraboloidvorm kan vrij goed worden waargenomen d.m.v. intermitterende proeven en waarneming onder een profielprojektor.

We zullen dit criterium nader onderzoeken, waarbij we er - zoals steeds - niet aan zullen kunnen ontkomen enige aannamen te maken. De eerste aanname is dat we met relatief zodanig dunne plaat werken, dat buiginvloeden verwaarloosbaar zijn.

Wellicht ten overvloede wordt erop gewezen, dat de analyse niet van toepassing is op de zgn. Erichsen-test. Ook niet als deze wrijvingsloos zou worden uitgevoerd. De bulgestempel heeft immers een (konstante) bolvorm. Zodra een paraboloidvorm zou willen ontstaan valt plaatselijk de druk weg. Het drukkriterium kan hier dus nooit relevant worden. Een aanwijzing in deze richting is ook, dat bij de Erichsentedest de scheur ver buiten de top optreedt.

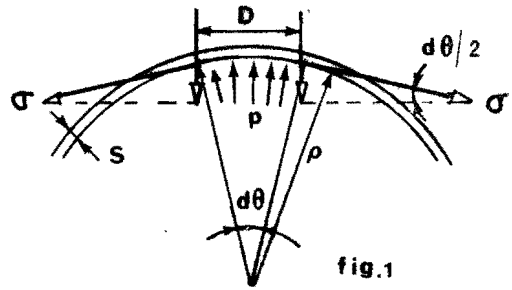
### 3. De analyse.

Uit experimenten is bekend, dat bij duktiele plaatmaterialen inderdaad een maximale druk optreedt. Breuk treedt op bij afnemende druk in de naaste omgeving van de pool.

Volgens fig.1 geldt voor het plaatselijke evenwicht in radiale richting ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  vanwege axiale symmetrie):

$$\frac{\pi}{4} D^2 p = \sigma s \frac{d\theta}{2} \pi D$$

$$\frac{1}{2} \rho d\theta p = \sigma s d\theta$$



(1)	$p = 2\sigma \frac{s}{\rho}$	( $s \ll \rho$ )
-----	------------------------------	------------------

Uit deze evenwichtsvoorwaarde volgt, dat  $p \ll \sigma$  en dus m.b.t. vloeivoorwaarde etc. niet van belang is.

Dus:

(2)	$\sigma_3 \approx 0$	(normaalspanning)
-----	----------------------	-------------------

Uit (1) volgt nu het totaal differentiaal:

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\delta p}{\delta \rho} d\rho + \frac{\delta p}{\delta s} ds + \frac{\delta p}{\delta \sigma} d\sigma \\ &= 2\frac{s}{\rho} d\sigma + \frac{2\sigma}{\rho} ds - 2\sigma s \frac{1}{\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

dus:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\rho}{2\sigma s} \left( \frac{2s}{\rho} d\sigma + \frac{2\sigma}{\rho} ds - \frac{2\sigma s}{\rho^2} d\rho \right)$$

$$(1a) \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{ds}{s} - \frac{d\rho}{\rho}$$

Hierin kunnen we nu ons instabiliteitskriterium,

$$(3) \quad dp = 0,$$

substitueren. In de vergelijking

$$(4) \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{ds}{s}$$

zijn dus nu de eisen van (radiaal) evenwicht en instabiliteit verenigd. In de voortzetting van de analyse moeten we nu nog proberen het plastisch materiaalgedrag, het deformatieverloop en de (meetbare) uitwendige geometrie te koppelen met (4).

Duiden we de dikterek aan met  $\epsilon_3 = \ln(s/s_0)$ , dan mogen we nu schrijven (4):

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\rho}{\rho} - d\epsilon_3, \text{ of}$$

$$(5) \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\epsilon_3} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\epsilon_3} - 1$$

De beide differentiaalquotiënten kunnen worden bepaald m.b.v. de vloeivoorwaarde respectievelijk de geometrische beschrijving van het deformatieproces. Het eerste levert geen moeilijkheden op; op basis van de axiale geometrie geldt immers  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  en voorts is  $\sigma_3 = 0$ , dus:

$$\begin{aligned} 2\sigma^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ &= 2\sigma^2 \end{aligned}$$

$(6) \quad \bar{\sigma} =  \sigma  = \sigma \quad (\text{strekken})$
--

Voorts geldt eveneens, dat

$$d\epsilon_1 = d\epsilon_2 = -\frac{1}{2} d\epsilon_3,$$

dus

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3} (d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} d\epsilon_3^2 + \frac{1}{4} d\epsilon_3^2 + d\epsilon_3^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} d\epsilon_3^2} \end{aligned}$$

$$(7) \quad d\bar{\sigma} = /d\epsilon_3/ = - d\epsilon_3 \quad (\text{strekken!})$$

$$(8) \quad \boxed{\bar{\epsilon} = - \epsilon_3}$$

We substitueren (6) en (8) nu in de versterfingsfunctie volgens LUDWIK:

$$(9) \quad \boxed{\bar{\sigma} = C(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n}$$

$$(11) \quad \sigma = C(\bar{\epsilon}_0 - \epsilon_3)^n$$

Hierin worden de karakteristieke deformatieweerstand  $C$ , de "voorvervorming"  $\bar{\epsilon}_0$  en de versterfingsexponent als konstanten beschouwd, en geldt dus:

$$(12) \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon_3} = - Cn (\bar{\epsilon}_0 - \epsilon_3)^{n-1}$$

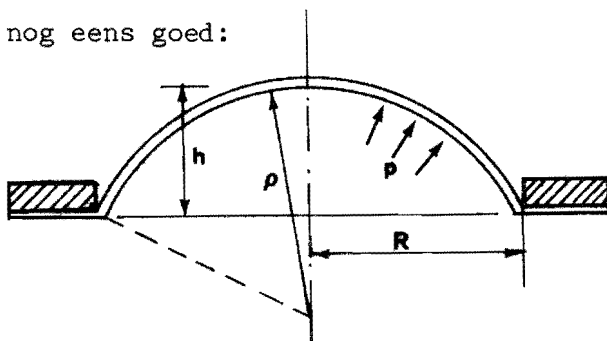
We kunnen deze deelanalyse nu besluiten door (11) en (12) in de voorwaarde (5) te substitueren:

$$\frac{Cn (\bar{\epsilon}_0 - \epsilon_3)^{n-1}}{C(\bar{\epsilon}_0 - \epsilon_3)^n} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\epsilon_3} - 1$$

$$(13) \quad \boxed{\frac{n}{\bar{\epsilon}_0 - \epsilon_3} = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\epsilon_3}}$$

(Deze voorwaarde omvat dus nu de eisen van evenwicht, belastingsinstabiliteit, plastische vloeï en de juiste wijze van versterfing).

We wenden ons nu naar het laatste differentiaalquotiënt, en hebben dus een relatie tussen de kromtestraal en de bijbehorende dikte(rek) nodig. Hiertoe bekijken we de geometrie nog eens goed:



Uit de hulpdriehoek in Fig.2 volgt de volgende relatie tussen de kenmerkende geometrische grootheden:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= R^2 + (\rho-h)^2 \\ &= R^2 + \rho^2 + h^2 - 2\rho h \\ 2\rho h &= R^2 + h^2\end{aligned}$$

(14)

$$\rho = \frac{R^2 + h^2}{2h}$$

Omdat deze relatie alleen voor een bolvorm geldt, wordt ze automatisch ongeldig als de paraboloidvorm zich begint te ontwikkelen. Omdat alleen dit begin ons interesseert is (14) dus net lang genoeg geldig! Met (14) kunnen we  $\rho$  nu uitdrukken in de gereedschapkonstante  $R$  en de (meetbare) bulgehoogte  $h$ . Alleen het verband tussen de diktere  $k$  in de top en  $h$  is nog niet duidelijk. Hiertoe maken we nu de aanname, dat de volumeelementjes bij de pool steeds loodrecht op het momentane bulgeprofiel bewegen. Op symmetriegronden moet dit in de top exakt waar zijn. In de onmiddellijke omgeving kan het dus vermoedelijk niet veel afwijken.

Het is duidelijk, dat deze aanname tot dusver het verreweg zwakste punt in onze analyse is omdat we niet kunnen beoordelen hoe groot het instabiele gebied moet zijn om insnoering in zichtbare vorm mogelijk te maken. M.a.w. we lopen het risico, dat ons criterium in de eindvorm wel erg ver aan de veilige kant ligt. Desalniettemin proberen we onze aanname bij gebrek aan beter maar uit. Radiale deeltjesverplaatsing bij de pool betekent, dat de boog die ze opspannen evenredig is met  $\rho$ :

$$(15) \quad d\varepsilon = \frac{(\rho + d\rho)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dh}{\rho}$$

Hierin kunnen we (14) substitueren:

(16)

$$d\varepsilon = \frac{2h}{R^2 + h^2} dh$$

Dit moeten we nu integreren. Stel

$$x = R^2 + h^2 \rightarrow \frac{dx}{dh} = 2h \rightarrow dh = \frac{dx}{2h}$$

Substitutie levert nu op:

$$d\epsilon = \frac{2h}{x} \cdot \frac{dx}{2h} = \frac{dx}{x}, \text{ en dus}$$

$$\epsilon = \ln \frac{x}{x_0} = \ln \frac{R^2 + h^2}{R^2}$$

$$(17) \quad \epsilon = \ln\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)$$

Met deze vergelijking verkrijgen we de algemene relatie

$$(18) \quad \epsilon_3 = -2\epsilon = -2 \ln\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)$$

Bij de afleiding hiervan hebben we de materiaaleigenschappen (i.c. de versterking als belangrijkste invloed op de rekverdeling) buiten beschouwing gelaten. In de praktijk zal verg. (18) dan ook een betere benadering zijn naarmate het materiaal meer voorgedeeformeerd is. Dit werd experimenteel bevestigd door HILL.\*

We beschikken dus nu over relaties in R en h voor zowel  $\rho$  (14) als  $\epsilon_3$  (18). Hiermee moeten we nu (13) proberen te herleiden tot meetbare c.q. bekende grootheden. We beginnen met het differentiaalquotient in (13).

Uit (14) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dh} &= \frac{d}{dh} (R^2 + h^2)^{\frac{1}{2h}} + \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{2h}\right) (R^2 + h^2) \\ &= 2h \cdot \frac{1}{2h} - \frac{1}{2} \frac{1}{h^2} (R^2 + h^2) = 1 - \frac{R^2 + h^2}{2h^2} \\ &= \frac{2h^2 - R^2 - h^2}{2h^2} = \frac{h^2 - R^2}{2h^2} \end{aligned}$$



$$(19) \quad \frac{d\rho}{dh} = \frac{h^2 - R^2}{2h^2}$$

Uit (16) volgt:

$$d\varepsilon_3 = -2d\varepsilon = -\frac{4h}{R^2+h^2} dh$$

$$(20) \quad \frac{d\varepsilon_3}{dh} = -\frac{4h}{R^2+h^2}$$

Nu is

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon_3} = \frac{d\rho}{dh} \cdot \frac{dh}{d\varepsilon_3} = -\frac{h^2-R^2}{2h^2} \cdot \frac{R^2+h^2}{4h} = \frac{(R^2-h^2)(R^2+h^2)}{8h^3}$$

$$(21) \quad \boxed{\frac{d\rho}{d\varepsilon_3} = \frac{R^4-h^4}{8h^3}}$$

(De dimensie "lengte" is links en rechts gelijk).

We substitueren nu (14), (18) en (21) in de voorwaarde (13):

$$\begin{aligned} \frac{n}{\bar{\varepsilon}_0 + 2 \ln \left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} &= 1 - \frac{2h}{R^2+h^2} \cdot \frac{R^4-h^4}{8h^3} \\ &= 1 - \frac{R^2-h^2}{4h^2} = \frac{4h^2 - R^2 + h^2}{4h^2} = \\ &= \frac{5h^2 - R^2}{4h^2} = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{R^2}{h^2}\right) \end{aligned}$$

$$(22) \quad \boxed{n = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{R^2}{h^2}\right) \left\{ 2 \ln \left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right) + \bar{\varepsilon}_0 \right\}}$$

Dit is de - helaas impliciete - eindvergelijking voor de kritische waarde van  $h$  als functie van de grootheden  $n$ ,  $R$  en  $\bar{\varepsilon}_0$ .

Een eerste interessante konklusie kunnen we echter reeds trekken: voor  $n = 0$  geldt de oplossing

$$\left(\frac{R}{h}\right)_{\max} = \sqrt{5} = 2,24 \quad , \text{ of}$$

$$(23) \quad \boxed{\left(\frac{h}{R}\right)_{\min} = 0,447 \quad (= \sqrt{\frac{1}{5}}),}$$

omdat  $n$  normaal gesproken niet negatief kan worden.

Ons model voorspelt dus, dat zelfs een niet-verstevigend materiaal over een hoogte gelijk aan 45% van de bulgestraal kan worden uitgestulpt (het materiaal moet natuurlijk wèl duktiel, d.w.z. vervormbaar zijn).

Numerieke uitwerking van (22) levert nu de volgende getalwaarden in het technisch relevante gebied van  $n$  op:

$h/R$	$n$
0,4472 (min)	0
0,5000	0,112
0,5500	0,224
0,6000	0,342
0,6500	0,464
0,7000	0,590
(0,7500)	(0,719)
(0,8000)	(0,850)

Tabel 1

Hiermee kunnen we de volgende grafiek tekenen, die interpoleren vergemakkelijkt:

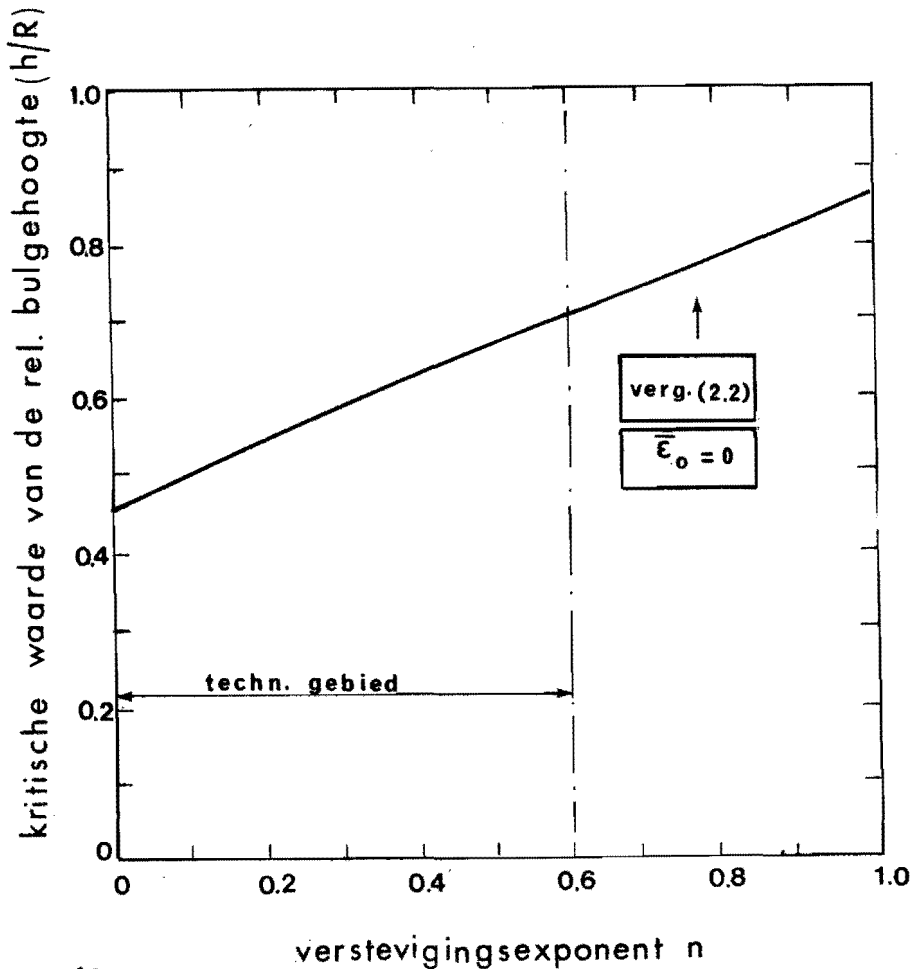


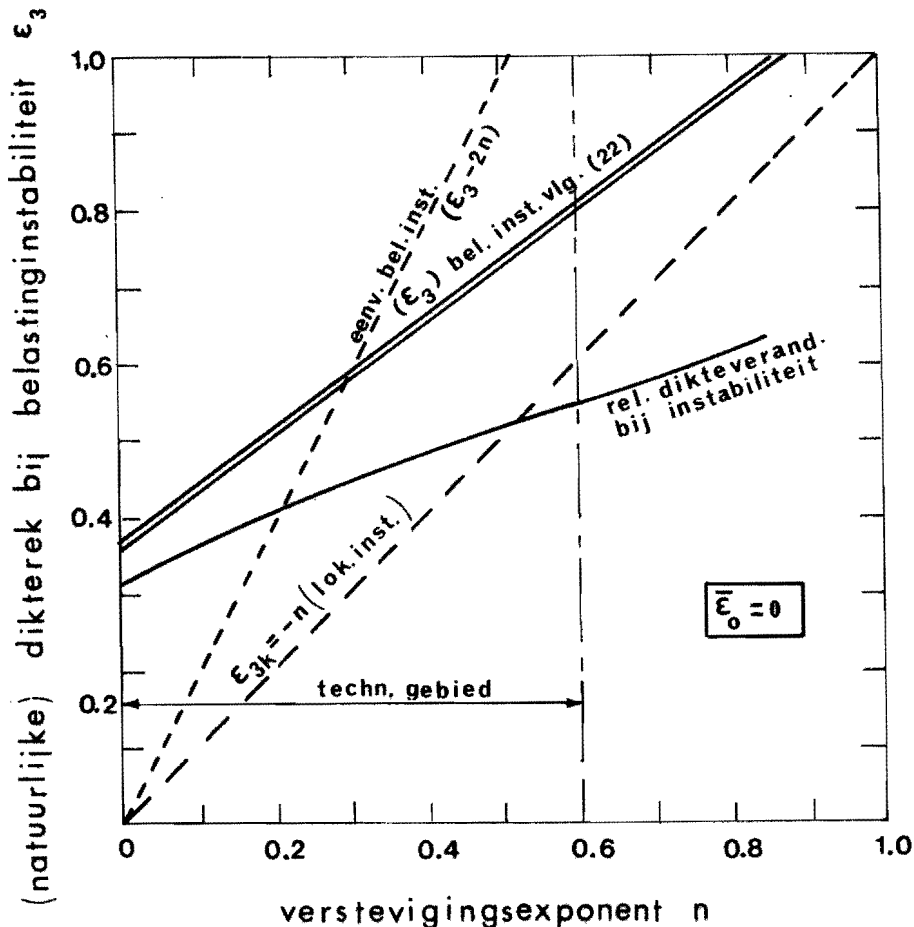
fig 3

We willen tenslotte ook nog enig inzicht verwerven in de grootte van de plaatverdunding bij belastinginstabiliteit. Hiertoe moeten we (22) herleiden tot de dikterek. Met (18) vinden we weer:

$h/R$	$(\epsilon_3)_{\text{inst.}}$	rel.dikteverand. bij bel.instab.
$1/\sqrt{5} = 0,4472$	- 0,365	- 0,306
0,5000	- 0,446	- 0,360
0,5500	- 0,529	- 0,411
0,6000	- 0,615	- 0,459
0,6500	- 0,705	- 0,506
0,7000	- 0,798	- 0,550
0,7500	- 0,893	- 0,591
0,8000	- 0,989	- 0,628

Tabel 2

M.b.v. de tabellen 1 en 2 kunnen we de interpolatiegrafiek voor de dikterek bij belastinginstabiliteit tekenen:



Ter vergelijking is het bekende criterium voor lokale instabiliteit (die hier dus niet direct tot insnoering kan voeren) ingetekend. Met toenemende waarde van  $n$  wordt de afstand tussen beide criteria kleiner. Een belangrijke konklusie is, dat de belastingsinstabiliteit voor alle relevante waarden van  $n$  later optreedt dan de lokale instabiliteit, zodat de laatste technisch oninteressant is bij de hydraulische bulgetest.

Voorts is ingetekend de lijn voor belastinginstabiliteit bij uniforme vlakke spanningstoestand in een vlakke rechthoekige plaat. Deze lijn snijdt ons nieuwe criterium bij  $n = 0,3$ , dus voor "normale" materialen lijkt het instabiliteitscriterium voor uniforme vlakke spanningstoestand op het eerste gezicht geldig te zijn. Dit heeft men inderdaad geruime tijd verondersteld op basis van empirische gegevens, en hierdoor wordt goed geïllustreerd hoe voorzichtig men moet zijn met de interpretatie van ongericht onderzoek.

4. Praktische benaderingsformules.

In Fig.3 en Fig.4 blijken de berekende lijnen nagenoeg rechten te zijn, dit temeer omdat ons slechts het gebied tot  $n = 0,6$  interesseert. Hoewel benaderingsformules via reeksontwikkeling van de logaritmie in (22) etc. kunnen worden gevonden, kan het eenvoudiger uit de grafieken.

We vinden (gebruikmakend van de uiterste punten beneden  $n = 0,6$ ):

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{R}\right)_{\text{inst.}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{0,7 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{0,590} n \\ &= 0,447 + \frac{0,2528}{0,590} n = 0,447 + 0,4285 n \end{aligned}$$

(24)

$$\left(\frac{h}{R}\right)_{\text{inst.}} \approx 0,45 + 0,43 n$$

En voorts:

$$\begin{aligned} (\epsilon_3)_{\text{inst.}} &= -0,365 + \frac{-0,798 + 0,365}{0,590} n \\ &= -0,365 - 0,734 n \end{aligned}$$

(25)

$$(\epsilon_3)_{\text{inst.}} = -(0,36 + 0,73 n)$$

JOHNSON \*\* vindt langs mathematische weg dezelfde benaderende vergelijking in de volgende notatie:

(25a)

$$(\epsilon_3)_{\text{inst.}} = -\frac{4}{11}(2n + 1)$$

---

\* W.JOHNSON; P.B.MELLOR: Engineering Plasticity.  
Van Nostrand Reinhold, London, 1973, p.262.

\*\* idem, p.262

5. Kommentaar.

- A. Zoals reeds opgemerkt, is onze meest opvallende konklusie, dat, bij het hydrostatisch bulgen van vlakke plaat, de absolute theoretische dikterek bij breuk steeds groter is dan 0,36 (31%). Hierdoor is de bulgetest - vooral voor weinig versterkende dunne plaat - een zeer geschikte methode voor het bepalen van de spanning-rek karakteristiek. Een bijkomend voordeel is de kostenbesparing t.o.v. de aanmaak van trekstrippen. Een nadeel in dit verband (zie verg. (1)) is dat door de vereiste diktemeting een ononderbroken uitvoering van de proef bezwaarlijk is.
- B. Experimenten zijn uitgevoerd door MELLOR.\* Hierbij is een goede overeenstemming gevonden tussen berekende en gemeten dikterekken bij instabiliteit. Opvallend hierbij was, dat in sommige gevallen geen instabiliteit kon worden waargenomen, terwijl de dikterek bij breuk toch overeenkwam met de theoretische waarde. Zacht en half-hard messing en half-hard aluminium braken onder nagenoeg konstante druk. Instabiliteit en breuk traden dus nagenoeg tegelijk op.

---

\* W. JOHNSON, P.P. MELLOR: Engineering plasticity.  
Van Nostrand Reinhold, London, 1973, p.253.