

Plaatbuigen : modellen en analyse : deel 1

Citation for published version (APA):

Hoogenboom, S. M. (1988). *Plaatbuigen : modellen en analyse : deel 1*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Vakgroep Produktietechnologie : WPB; Vol. WPA0639). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1988

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

BB 440747

Plaatbuigen: Modellen en analyse

Auteur: Ir.S.M.Hoogenboom

WPA-rapport nr. 0639

Sept'88

VF code: D₁

WPA 0639

Ir. L. J. A. Houliker

PLAATBUIGEN: Modellen en analyse

Inleiding

In dit rapport is het buigen van plaat geanalyseerd waarbij als belasting een zuiver buigend moment optreedt, d.w.z. de invloed van dwars- en normaalkrachten wordt niet in rekening gebracht.

De enige geometrische procesparameter die dan nog een rol speelt is de dimensieloze grootte R/s , waarin R de momentane kromtestraal en s de plaatdikte.

De overige procesparameters betreffen het materiaalgedrag, resp. $E, \nu, n, C, \bar{\epsilon}_0$

Er zullen een aantal buigmodellen gecombineerd met diverse materiaalmodellen worden beschouwd. Het is duidelijk dat het toe te passen materiaalmodel samenhangt met de parameter R/s . Voor grote waarden daarvan deformeert de plaat elastisch, vervolgens zal bij afnemende R/s het materiaal aan het oppervlak plastisch worden met rond het middenvlak een elastisch gebied en bij nog kleinere waarden van R/s kunnen de elastische rekken worden verwaarloosd en mag een star plastisch materiaalmodel gekanteerd worden.

Het doel van de berekeningen is het bepalen van de relatie tussen het buigend moment en R en het voorspellen van plaatdikteveranderingen en de positie van het neutrale vlak

II

De nu volgende modellen worden geanalyseerd:

pag

I Elastisch resp. Elastisch-Plastisch

1

Hierbij wordt een eenvoudige buigmodel gelanteed, m.n. vlakspanning loodrecht op de plaat en vlakke deformatie loodrecht op de buigrichting; tevens wordt een rechte spanningsweg aangenomen.

V.a.v. de plastische component van de deformatie wordt exponentiële versterking verondersteld.

II Star-plastisch m.b.v. het Bovengrensteorema en een arbeidsanalyse

6

Bij het bovengrensteorema wordt de positie van het neutrale vlak als vrijheidsgraad gekantteerd en vervolgens berekend, de resultaten daarvan komen overeen met de spanningsanalyse (zie III).

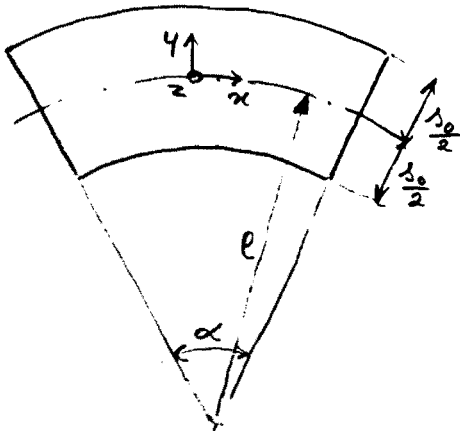
Bij de arbeidsanalyse wordt de kromtestraal van het initiële middenvlak afhankelijk gesteld van de buighoek; vervolgens wordt de betreffende functie bepaald door optimalisatie.

III Star-ideaal plastisch m.b.v. evenwicht

25

Op basis van spanningsevenwicht, Levy-Von Mises en de slaaivoorwaarde worden de spanningen en het buigend moment bepaald. Het moment blijft daarbij constant te zijn, tevens verandert de plaatdikte niet.

Plaatbuigen : elastisch en elastisch-plastisch.



Modellering

- $\epsilon_z = 0$
- $\sigma_y = 0$
- $\bar{\sigma} = C(\bar{\epsilon} + \epsilon_0)^n$
Hierin is $\bar{\epsilon}$ de effectieve
rek t.g.v. de plastische
rekcomponent
- $s = s_0 = \text{const.}$
- $\alpha r = \text{const.}$

I Elastisch

Er geldt

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} \quad (1)$$

Met Hooke is ($\epsilon_z = 0$ en $\sigma_y = 0$)

$$\sigma_z = \nu \sigma_x \quad (2)$$

en

$$\frac{y}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_z) = \frac{1}{E} (1 - \nu^2) \sigma_x \quad (3)$$

of

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{y}{\rho} \quad (4)$$

hiermee wordt voor M_{Be} gevonden

$$M_{Be} = \int_{-\frac{s_0}{2}}^{\frac{s_0}{2}} \sigma_x \cdot b \cdot dy \cdot y \quad (5)$$

of uitgewerkt

$$M_{Be} = \frac{b E s_0^3}{12(1-\nu^2)} e$$

Omdat bij andere analyses M_B dimensieloos wordt geschreven met $C b s_0^2$ zullen we dat hier ook doen, dus

$$M_{Be}^* = \frac{M_{Be}}{C b s_0^2} = \frac{E^*}{12(1-\nu^2)} e^* \quad (7)$$

Waarin

$$E^* = \frac{E}{C} \quad \text{en} \quad e^* = \frac{e}{s_0} \quad (8)$$

Relatie (7) geldt totdat het materiaal juist gaat vloeien, ofwel als

$$\bar{\sigma} = \sigma_v = C \bar{\epsilon}_0^n \quad (9)$$

met (2) is

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\nu^2 - \nu + 1} |\sigma_x| \quad (10)$$

Dus vloeien treedt op als

$$|\sigma_x| = \frac{C \bar{\epsilon}_0^n}{\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}} \quad (11)$$

Nu is σ_x maximaal op $y = \pm \frac{s_0}{2}$. Voor de waarde van e (e_v) waarbij juist vloeien optreedt, wordt zodanige met (4) gevonden

$$\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s_0/2}{e_v} = \frac{C \bar{\epsilon}_0^n}{\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}} \quad (12)$$

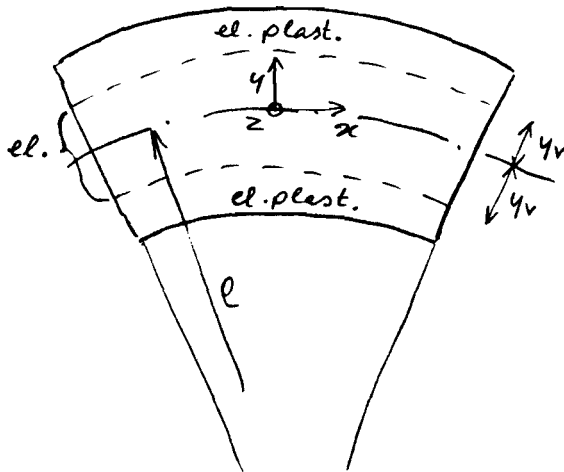
of dimensieloos

$$e_v^* = \frac{E^* \sqrt{\nu^2 - \nu + 1}}{2(1-\nu^2) \cdot \bar{\epsilon}_0^n} \quad (13)$$

Het bijbehorend buigend moment M_{BV}^* is met (7)

$$M_{BV}^* = \frac{\bar{E}_0^n}{6\sqrt{v^2 - v + 1}} \quad (14)$$

II Elastisch - plastisch ($e^* < e_v^*$)



Modellering

- In het el. plast. gebied wordt een rechte spanningsweg aangenomen

De grens tussen de elastisch-plastische en het elastische gebied wordt aangegeven met y_v . In het elastische gebied gelden de relaties (4) en (11). Voor y_v wordt dan gevonden

$$y_v = \frac{C \bar{E}_0^n (1 - v^2) e}{E \sqrt{v^2 - v + 1}} \quad (15)$$

In het elastisch-plastische gebied kan voor de totale reknelheid geschreven worden

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (16)$$

waarin $\dot{\epsilon}^e$ de elastische- en $\dot{\epsilon}^p$ de plastische component.

Wordt een rechte spanningsweg aangenomen dan kan met name het plastische deel (Levy - Von Mises) geïntegreerd worden.

Er geldt dan met Hooke en Levy-VonMises

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_z) + \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_z}{2} \right) \quad (17)$$

en

$$\epsilon_z = 0 = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x) + \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x}{2} \right) \quad (18)$$

Hierin is $\bar{\epsilon}$ de effectieve rek t.j.v. de plastische rekcomponent.

Verder geldt

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(\left(\frac{\bar{\sigma}}{C} \right)^{1/n} - \bar{\epsilon}_0 \right) \quad (19)$$

en

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_z \quad (20)$$

Door substitutie van (19) en (20) in (17) en (18) worden voor $|y| > y_v$ zodoende een tweetal impliciete relaties gevonden in σ_x en σ_z waarmee σ_x numeriek bepaald kan worden.

Voor de bepaling van het elastisch-plastisch moment M_{BP} moet over een drietal gebieden geïntegreerd worden, n.l.

$$M_{BP} = b \int_{-s/2}^{-4v} \sigma_x \cdot y \, dy + b \int_{-4v}^{4v} \sigma_x y \, dy + b \int_{4v}^{s/2} \sigma_x y \, dy \quad (21)$$

Oplassing van de tweede integraal met (4) en (15) geeft

$$M_{BP} = \frac{2 b E y_v^3}{3(1-\nu^2)\rho} + b \int_{-s/2}^{-4v} \sigma_x y \, dy + b \int_{4v}^{s/2} \sigma_x y \, dy \quad (22)$$

Dimensieloos geschreven met $C_{10}^2 b$ geeft met (15)

$$M_{BP}^* = \frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon}_0^{3n}}{(\nu^2 - \nu + 1)^{3/2}} \cdot \left(\frac{\rho^*(1-\nu^2)}{E^*} \right)^2 + \frac{1}{4} \int_{-1}^{-4\nu} \sigma_x^* y^* dy^* + \frac{1}{4} \int_{4\nu}^1 \sigma_x^* y^* dy^* \quad (23)$$

waarin:

$$\left. \begin{aligned} y^* &= \frac{2y}{s_0} \\ y_v^* &= \frac{2y\nu}{s_0} = \frac{2\bar{\epsilon}_0^n (1-\nu^2) \rho^*}{E^* \sqrt{\nu^2 - \nu + 1}} \\ \sigma_x^* &= \frac{\sigma_x}{c} \end{aligned} \right\} (24)$$

waarbij σ_x^* bepaald moet worden met (zie (17) t/m (20))

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^*}{2\rho^*} &= \frac{1}{E^*} (\sigma_x^* - \nu\sigma_z^*) + \frac{\sqrt{\bar{\sigma}^*} - \bar{\epsilon}_0}{\bar{\sigma}^*} (\sigma_x^* - \frac{\sigma_z^*}{2}) \\ 0 &= \frac{1}{E^*} (\sigma_z^* - \nu\sigma_x^*) + \frac{\sqrt{\bar{\sigma}^*} - \bar{\epsilon}_0}{\bar{\sigma}^*} (\sigma_z^* - \frac{\sigma_x^*}{2}) \end{aligned} \right\} (25)$$

waarin:

$$\bar{\sigma}^* = (\sigma_x^{*2} + \sigma_z^{*2} - \sigma_x^* \sigma_z^*)^{1/2}$$

Opm. (25) geldt alleen voor $|y| > y_v$ ofwel

$$\frac{|y^*|}{2\rho^*} > \frac{\bar{\epsilon}_0^n (1-\nu^2)}{E^* \sqrt{\nu^2 - \nu + 1}} = \text{constant} \quad (26)$$

Opm. Bovenstaande berekening geldt alleen voor $n \neq 0$

Procesanalyse m.b.v. vermogens- en arbeids- berekeningen in het geval van plaatbuigen.

Vooraf

Minimaliseren van het plastische deformatie-
vermogen, gecombineerd met ideaal plastisch
materiaalgedrag, is in de omvormtechnologie een
veel toegepaste methode voor procesanalyse
en staat bekend als het bovengrenstheorema.
De geldigheid van het genoemde theorema, m.v.
dat het m.b.v. het smelheidsmodel berekende
vermogen (P_m) altijd groter is dan het werkelijk
gedissipeerde vermogen (P), kan worden bewezen.
Voor het wrijvingsloze geval geldt dan:

$$P_m = \sigma_v \int_V \dot{\bar{\epsilon}}^* dV \geq P = \sigma_v \int_V \dot{\bar{\epsilon}} dV \quad (1)$$

hierin leeft $\dot{\bar{\epsilon}}^*$ betrekking op het smelheidsmodel
en $\dot{\bar{\epsilon}}$ loort bij het werkelijke smelheidsveld.
Geïntegreerd naar de tijd wordt (1) met $dV = dV_0$

$$W_m = \int P_m dt = \sigma_v \int_{V_0} \bar{\epsilon}^* dV_0 \geq W = \int P dt = \sigma_v \int_{V_0} \bar{\epsilon} dV_0 \quad (2)$$

Het ligt voor de hand dat een dergelijk soort
theorema ook t.a.v. de totaal gedissipeerde
plastische deformatiearbeid, gecombineerd
met materiaalversterking, geformuleerd zou
kunnen worden; het probleem is echter het
aantonen van de ongelijkheid (1).
Het betreffende "arbeidstheorema" zou kunnen
luiden:

De m.b.v. een smelheidsmodel berekende
totale deformatiearbeid zal altijd groter
zijn dan de werkelijk gedissipeerde
deformatiearbeid.

Hoewel het arbeidstheorema als zodanig nog
niet is bewezen wordt er wel, en vooral
numeriek, veelvuldig gebruik van gemaakt.

In de nu volgende berekening zal een vermogens- en arbeidsanalyse op plaatbuigen worden toegepast. Het voordeel van dit proces is dat het wrijvingsloos is en dat voor ideaal plastisch materiaal de exacte oplossing bekend is.

I Inleiding

Nagegaan zal worden hoe in het geval van dikwandige plaat de momentane plaatgeometrie is; m.n. de ligging van het neutrale vlak ($\dot{\epsilon} = 0$) zal worden bepaald. De in volgende procesmodellering wordt hierbij toegepast (zie fig 1):

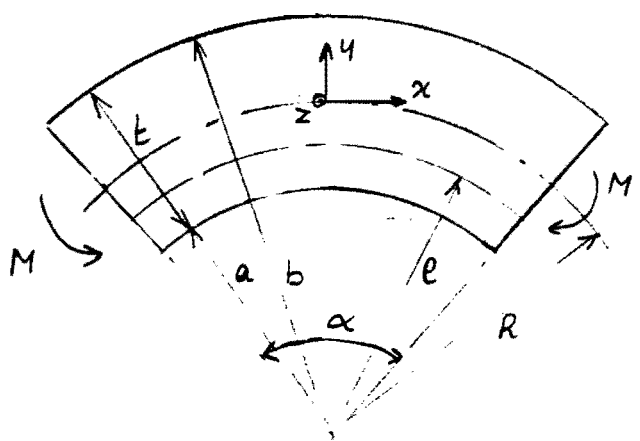
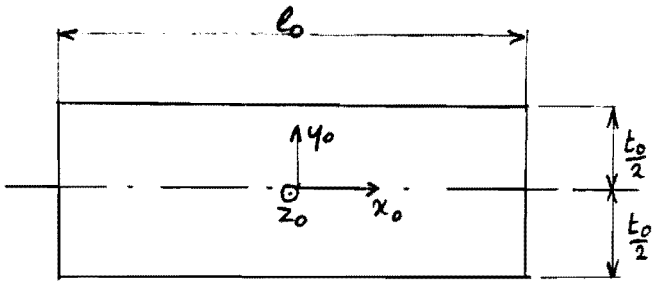


fig 1

- vlakke deformatie in de z-richting ($\dot{\epsilon}_z = 0$)
- geen afschuiving ($\dot{\epsilon}_{xy} = 0$)

R is de straal van het materiële vlak dat initieel op de halve plaatdikte is gelegen, het coördinatenstelsel is in dit vlak gepositioneerd.

Er wordt een zuiver buigend moment toegepast.
 ρ is de snael van het momentane neutrale vlak, per definitie geldt daarvoor $\frac{d}{dt}(\alpha e) = 0$.
 Er wordt in de nu volgende berekening onderscheid gemaakt tussen ideaal plastisch materiaalgedrag en exponentieel versterkend materiaalgedrag.

II Ideaal plastisch materiaal

Hierbij kan, omdat overal dezelfde vloei spanning leest, direct aan de momentane geometrie worden gerekend zonder rekening te hoeven met de gevolgde deformatieweg.

Bij een gegeven α wordt het deformatievermogen P_m bepaald en vervolgens wordt de vrijheidsgraad ρ berekend door $dP_m/d\rho = 0$ toe te passen.

Voor de lengte van een materieel lijnstuk op afstand y geldt:

$$l = \alpha(R+y) \quad (2.1)$$

Hiermee is:

$$\dot{l} = \dot{\alpha}(R+y) + \alpha(\dot{R} + \dot{y}) \quad (2.2)$$

Volumeinvariantie toegepast op het volume dat ingesloten wordt door $R+y$ en l levert (met $\frac{d}{dt}(\alpha l) = 0$):

$$\dot{R} + \dot{y} = -\dot{\alpha} \left\{ \frac{l^2 + (R+y)^2}{2\alpha(R+y)} \right\} \quad (2.3)$$

Hiermee is

$$\dot{l} = \frac{\dot{\alpha}}{2} \left\{ R+y - \frac{l^2}{R+y} \right\} \quad (2.4)$$

Voor de reknelleden geldt:

$$\dot{\epsilon}_z = 0$$

en

$$\dot{\epsilon}_x = -\dot{\epsilon}_y = \frac{\dot{l}}{l}$$

} (2.5)

Dan is

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{\dot{l}}{l} \right| = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha\sqrt{3}} \left| 1 - \left(\frac{l}{R+y} \right)^2 \right| \quad (2.6)$$

Voor het deformatievermogen geldt dan:

$$P_m = \sigma_V \int \dot{\bar{\epsilon}} dV = \frac{L\sigma_V\dot{\alpha}}{\sqrt{3}} \int_{a-R}^{b-R} \left| 1 - \left(\frac{l}{R+y} \right)^2 \right| (R+y) dy \quad (2.7)$$

Hierin is L de plaatafmeting loodrecht op de buigrichting.

Het teken van de term tussen de modulus tekens verandert by $y = e - R$. Uitwerking van (2.7) geeft zodoende.

$$P_m = \frac{L \cdot \sigma_v \cdot \alpha}{\sqrt{3}} \left\{ -e^2 + e^2 \ln \frac{e^2}{ab} + \frac{a^2 + b^2}{2} \right\} \quad (2.8)$$

Voepassing van $\frac{\partial P_m}{\partial e} = 0$ geeft tenslotte *

$$\boxed{e = \sqrt{ab}} \quad (2.9)$$

De vraag is nu hoe de plaatgeometrie verloopt als functie van de buighoek α ; m.n. hoe het verloop van R en t is.

Volumeinvariantie toegepast op het volume tussen R en e levert met (2.9)

$$R^2 + 2\alpha R \frac{dR}{d\alpha} + ab = 0 \quad (2.10)$$

Met

$$\alpha (b^2 - R^2) = \alpha (R^2 - a^2) = b_0 t_0 \quad (2.11)$$

kan de term ab worden geëlimineerd.

*

Hetzelfde resultaat wordt verkregen m.b.v. een spanningsanalyse, zie dictaat n^o 4482

2.6 wordt dan

$$R^2 + 2\alpha R \frac{dR}{d\alpha} + \sqrt{R^4 - \left(\frac{l_0 t_0}{\alpha}\right)^2} = 0 \quad (2.12)$$

met als R.V.W. voor $\alpha \rightarrow 0$ is $\alpha R \rightarrow l_0$

Hieraan voldoet:

$$\boxed{R^2 = \left(\frac{l_0}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \quad (2.13)$$

Met 2.11 is dan

$$a = \frac{l_0}{\alpha} - \frac{l_0}{2}$$

en

$$b = \frac{l_0}{\alpha} + \frac{l_0}{2}$$

} (2.14)

Voor de plaatdikte geldt zoodanig

$$\boxed{t = b - a = t_0 = \text{constant}} \quad (2.15)$$

Voor (2.8) wordt dan met (2.9), (2.14) en (2.15)

gevonden

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2\sqrt{3}} t_0^2 \cdot \sigma_v \cdot L \cdot \alpha} \quad (2.16)$$

en voor het buigend moment

$$\boxed{M = \frac{1}{2\sqrt{3}} t_0^2 \cdot \sigma_v \cdot L} \quad (2.17)$$

III Exponentieel versterigend materiaal

Hierbij kan de momentane ρ niet zonder meer worden bepaald omdat deze afhangt van de deformatieverdeling in de gebogen plaat. Om deze verdeling te kunnen berekenen zal moeten worden nagegaan langs welke "weg" de deformatie van de plaat is verlopen; in principe kan dit worden beschreven met de vooralsnog onbekende functie $R = R(\alpha)$. Afhankelijk van deze functie kan de bij een bepaalde eindbuighoek α behorende totale deformatiearbeid W_m worden berekend. Vervolgens moet worden nagegaan voor welke $R = R(\alpha)$ de W_m minimaal is.

Om het rekenwerk te vereenvoudigen zullen alle grootheden worden uitgedrukt in afhankelijkheid van de initiële coördinaat y_0 .

Er geldt (analoog aan 2.1)

$$l' = \alpha (R + y)$$

(3.1)

Met volumeïnvariantie is

$$R + y = \sqrt{R^2 + \frac{2l_0 y_0}{\alpha}} \quad (3.2)$$

Zodat

$$l = \sqrt{(\alpha R)^2 + 2l_0 y_0 \alpha} \quad (3.3)$$

Voor $\bar{\varepsilon}$ geldt (zie 2.6)

$$\bar{\varepsilon} = \int \dot{\bar{\varepsilon}} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\alpha_e} \frac{|l'|}{l} d\alpha \quad (3.4)$$

Hierin leeft de ' betrekking op differentiatie naar α ; α_e is de eindbuighoek.

Voordat (3.4) kan worden uitgewerkt moet het teken van l' worden bepaald. Met (3.3) is:

$$l' = \frac{\alpha R (\alpha R)' + l_0 y_0}{\sqrt{(\alpha R)^2 + 2l_0 y_0 \alpha}} \quad (3.5)$$

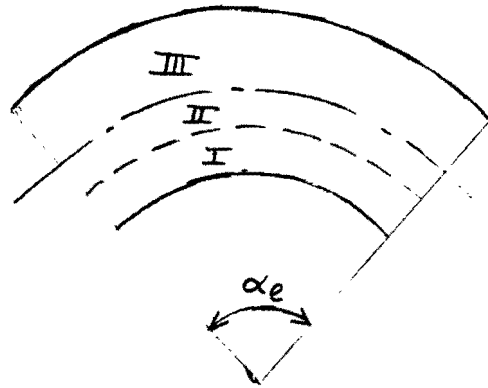
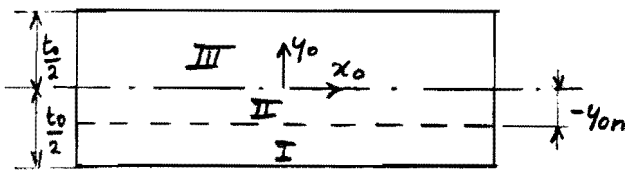
De initiële coördinaat (y_{0n}) van het vlak welke bij de eindbuighoek α_e juist neutraal vlak is wordt bepaald door:

$$l'(\alpha = \alpha_e, y_0 = y_{0n}) = 0 \quad (3.6)$$

of

$$y_{0n} = -\frac{1}{l_0} (\alpha R (\alpha R)')_{\alpha = \alpha_e} \quad (3.7)$$

Als aangenomen wordt dat het neutrale vlak zich bij toenemende α monotoon in de negatieve y -richting verplaatst (beginnend bij $y_0=0$), dan kunnen een drietal gebieden worden onderscheiden (zie fig.)



Gebied I : $-l_0/2 < y_0 < y_{0n}$

In dit gebied is het materiaal in de x -richting steeds gestrekt. Dit betekent dat $\epsilon' < 0$. Voor de effectieve rek geldt met (3.4) en (3.3)

$$\bar{\epsilon}_I = \frac{-2}{\sqrt{3}} \int_0^{\alpha_e} \frac{l'}{l} d\alpha = \frac{-2}{\sqrt{3}} \int_{l_0}^{l(\alpha_e)} \frac{dl}{l} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \ln \frac{l(\alpha_e)}{l_0} \quad (3.8)$$

of

$$\bar{\epsilon}_I = \frac{-2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{(\alpha_e R_e)^2 + 2 l_0 y_0 \alpha_e}}{l_0} \quad (3.9)$$

Gebied II $y_0 < y_0 < 0$

Tijdens het buigproces wordt een materieel vlak in dit gebied eerst gestrekt in de x -richting, vervolgens is het een moment neutraal vlak en tenslotte wordt het weer gerekt. Wordt de loek waarop een vlak op y_0 juist neutraal vlak is met β aangegeven, dan geldt:

$$e' < 0 \quad \text{voor} \quad 0 < \alpha < \beta$$

$$e' > 0 \quad \text{voor} \quad \beta < \alpha < \alpha_e$$

De loek β wordt bepaald door de relatie

$$e'(\alpha = \beta, y_0) = (\alpha R(\alpha R)' + l_0 y_0)_{\alpha = \beta} = 0 \quad (3.10)$$

Voor $\bar{\epsilon}_{II}$ kan dan analoog aan (3.8) worden gevonden

$$\bar{\epsilon}_{II} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{l(\alpha_e) \cdot l_0}{(l(\beta))^2}$$

en met (3.3)

$$\bar{\epsilon}_{II} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{l_0 \sqrt{(\alpha_e R_e)^2 + 2 l_0 y_0 \alpha_e}}{(\beta R_\beta)^2 + 2 l_0 y_0 \beta} \quad (3.11)$$

Hierin is met (3.10) $\beta = \beta(y_0)$

Gebied III $0 < y_0 < \frac{t_0}{2}$

In dit gebied wordt het materiaal in de x -richting steeds gerekt; er geldt:

$$e' > 0$$

Voor $\bar{\epsilon}_{III}$ wordt dan analoog aan (3.8) gevonden

$$\bar{\epsilon}_{III} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{(\alpha e R e)^2 + 2 l_0 y_0 \alpha e'}}{l_0} \quad (3.12)$$

Met de $\bar{\epsilon}$ verdeling vastligt, kan de totale deformatie-
arbeid W_m worden berekend, n.l. met $\bar{\sigma} = C(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n$ is

$$W_m = \frac{C}{n+1} \int_{V_0} \{ (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^{n+1} - \bar{\epsilon}_0^{n+1} \} dV_0 \quad (3.13)$$

Uitwerking voor de drie gebieden geeft zodanende

$$W_m = \frac{CL t_0}{n+1} \left\{ \int_{-\frac{t_0}{2}}^{y_{0n}} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{(\alpha e R e)^2 + 2 l_0 y_0 \alpha e'}}{l_0} + \bar{\epsilon}_0 \right)^{n+1} dy_0 + \int_{y_{0n}}^0 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{l_0 \sqrt{(\alpha e R e)^2 + 2 l_0 y_0 \alpha e'}}{(\beta R \beta)^2 + 2 l_0 y_0 \beta} + \bar{\epsilon}_0 \right)^{n+1} dy_0 + \int_0^{\frac{t_0}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{(\alpha e R e)^2 + 2 l_0 y_0 \alpha e'}}{l_0} + \bar{\epsilon}_0 \right)^{n+1} dy_0 - \bar{\epsilon}_0^{n+1} t_0 \right\} \quad (3.14)$$

Hierin is L de plaatafmeting loodrecht op de buigrichting. De vraag is nu voor welke $R = R(\alpha)$ is W minimaal.

18

Een benaderende oplossing voor dit probleem kan worden verkregen door voor R probeerfuncties te nemen met een of meer vrijheidsgraden; hierbij moet voor het geval van ideaal plastisch materiaal ($n=0$) (2.13) als oplossing gevonden kunnen worden.

Als probeerfunctie is gekozen

$$R = \frac{l_0}{\alpha} (1 + a_1 k^2 \alpha^2)^{a_2} \quad (3.15)$$

waarin a_1 en a_2 twee vrije parameters en k een verloningsgetal, n.l.

$$k = \frac{t_0/2}{l_0} \quad (3.16)$$

Voor $a_1 = 1$ en $a_2 = 0,5$ wordt 2.13 verkregen.

Verwerking van (3.15) en (3.16) in (3.14) met toepassing van de nu volgende dimensieloze grootheden:

$$W_m^* = \frac{W_m}{l_0 t_0 L C} \quad (3.17)$$

$$y_0^* = \frac{y_0}{t_0/2} \quad (3.18)$$

$$y_{0n}^* = \frac{y_{0n}}{t_0/2} \quad (3.19)$$

levert voor (3.14) :

$$\begin{aligned}
 W_m^* = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \int_{-1}^{y_{0n}^*} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left[(1+a, k^2 \alpha_e^2)^{2a_2} + 2k\alpha_e y_0^* \right] + \bar{E}_0 \right)^{n+1} dy_0^* \right. \\
 + \int_0^{y_{0n}^*} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{(1+a, k^2 \alpha_e^2)^{2a_2} + 2k\alpha_e y_0^*}{\left\{ (1+a, k^2 \beta^2)^{2a_2} + 2k\beta y_0^* \right\}^2} + \bar{E}_0 \right)^{n+1} dy_0^* + \\
 \left. \int_0^{y_{0n}^*} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left[(1+a, k^2 \alpha_e^2)^{2a_2} + 2k\alpha_e y_0^* \right] + \bar{E}_0 \right)^{n+1} dy_0^* \right. \\
 \left. - 2\bar{E}_0^{n+1} \right\} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Met (3.7) en (3.10) wordt voor y_{0n}^* en β gevonden

$$y_{0n}^* = -2a_1 a_2 k \alpha_e (1+a, k^2 \alpha_e^2)^{2a_2-1} \quad (3.21)$$

en

$$\beta (1+a, k^2 \beta^2)^{2a_2-1} = -\frac{y_{0n}^*}{2a_1 a_2 k} \quad (3.22)$$

IV Resultaten en conclusies

De voor ideaal plastisch materiaal in hoofdstuk II gevonden resultaten, m.v. (2.9) en daaruit afgeleid (2.13) t/m (2.17), komen overeen met de m.b.v. spanningsevenwicht gevonden exacte oplossing.

V.a.v. de resultaten van hoofdstuk III kan het volgende worden opgemerkt: Hoewel het mogelijk is om (3.20) m.b.t. a_1 en a_2 direct te minimaliseren, is om de invloed van deze parameters te zien, gekozen voor de berekening van een veld van a_1 en a_2 waarden (zie Bijlage I).

Tevens is, om te kunnen vergelijken met de exacte oplossing, ideaal plastisch materiaal ($n=0$, $c \cong \sigma_v$) aangenomen.

Verder is gegeven: $\alpha_e = 1,58 \text{ rad} (\approx \frac{\pi}{2})$ en $k = 0,25$

Bij de resultaten van de in Bijlage I weergegeven waarden van W^* kan het volgende worden opgemerkt.

a De nullen in de matrix vinden zijn oorzaak in het feit dat voor de betreffende a_1 - a_2 combinaties een negatief getal onder een ln-bewerking of in een machtsverheffing wordt gebracht.

b m.b.v. 2.16 kan worden gevonden dat ($\sigma_v \cong c$):

$$W^* = \frac{1}{\sqrt{3}} k \cdot \alpha_e$$

k en α_e hierin gesubstitueerd geeft tot in de 10^o decimaal overeenstemming met de m.b.v. (3.20) gevonden waarde (waarbij $a_1 = 1$ en $a_2 = 0,5$), n.l.:

$$W^* = 0,2280533563$$

M.b.v. de resultaten uit hoofdstuk II (zie Bijlage II) kan worden gevonden:

$$y_{0n}^* = k \cdot \alpha$$

Hiermee is

$$y_{0n}^* = 0,395$$

dit komt overeen met het m.b.v. 3.21 gevonden resultaat.

⊆ De waarden in de matrix laten zien dat voor een aantal a_1 - a_2 combinaties, anders dan $a_1 = 1$ en $a_2 = 0,5$, lagere waarden voor W^* worden gevonden.

De laagste waarde is voor m.v.:

$$a_1 = 32 \quad \text{en} \quad a_2 = 0,05$$

Hierbij is

$$W^* = 0,2220 \quad \text{en} \quad y_{0n}^* = 0,2523$$

Dit betekent een duidelijk ander deformatieverloop van de plaat dan hetgeen de exacte oplossing voorspelt.

Drastische verhoging van de afbreekaanwakenrigheid in de berekening had pas invloed in het zesde cijfer achter de komma.

Conclusies

Voor $a_1 = 1$ en $a_2 = 0,5$ wordt voor W^* m.b.v. 3.20 het juiste resultaat gevonden; dit zou tevens de laagste waarde van W^* moeten zijn.

Waarom voor een aantal andere a_1 - a_2 combinaties lagere waarden worden gevonden is volstrekt onduidelijk. Theoretisch gezien zou dit niet mogelijk kunnen zijn omdat de modelvorming in Hoofdstuk III (m.v. pag 8 e.v.) consistent en niet in tegenspraak is met de voor ideaal plastisch materiaal gevonden exacte oplossing

Numerieke onnauwkeurigheden t.g.v. afbreekcriteria gecombineerd met een grote gevoeligheid van 3.20 voor de parameters a_1 en a_2 kunnen een oorzaak zijn omdat een sterk verhoogde afbreeknauwkeurigheid derzelfde resultaten gaf.

Tot slot kan worden opgemerkt dat het, i.v.m. de "geldigheid" en bruikbaarheid van energieberekeningen in de omvormertechnologie, van belang is dat de oorzaak wordt gevonden van bovengenoemde tegenstrijdigheden in de gevonden resultaten.

4	0,2300	0	0	0	0	0	0	0
2	0,2308	0,2402	0	0	0	0	0	0
1,4	0,2368	<u>0,2266</u>	0,2830	0	0	0	0	0
1	0,2425	<u>0,2277</u>	0,2365	0,3757	0	0	0	0
0,8	0,2457	0,2311	<u>0,2275</u>	0,2755	0	0	0	0
0,5	0,2507	0,2373	0,228053	0,2313	0,3213	0	0	0
0,2	0,2568	0,2511	0,2433	0,2325	<u>0,2242</u>	0,2356	0,3021	
0,1			0,2514	0,2442	0,2344	<u>0,2250</u>	<u>0,2223</u>	0,2350
0,05			0,2561	0,2520	0,2458	0,2376	0,2290	<u>0,2220</u>
	0,2	0,5	1	2	4	8	16	32

a_2

a_1

Bijlage II

Met volumeinvariantie is :

$$b_0 y_{0n} = \frac{\alpha}{2} (R^2 - \rho^2)$$

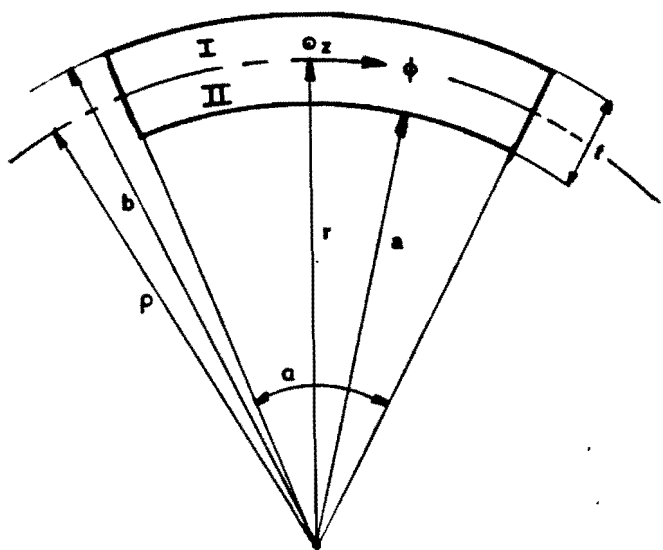
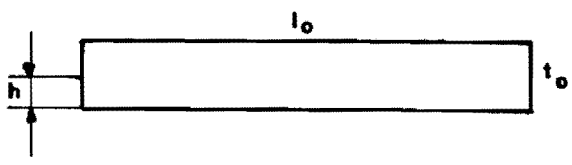
met (2.9), (2.13) en (2.14) is dan

$$b_0 y_{0n} = \alpha \cdot \left(\frac{t_0}{2}\right)^2$$

of

$$y_{0n}^* = k \cdot \alpha$$

Star-ideaal plastisch m.b.v. evenwicht



Modellering

- $\dot{\epsilon}_z = 0$
- r, z en φ hoofdrichtingen
- ideaal plastisch materiaal

Berekening van

- a Spanningen, neutrale vlak
- b Plaatgeometrie
- c Buigend moment
- d Deformatieënergie
- e $\bar{\epsilon}$ -verdeling
- f $\bar{\epsilon}$ in het neutrale vlak

a Er geldt

$$\delta \epsilon_z = 0 = \delta \lambda \left(\sigma_z - \frac{\sigma_\varphi + \sigma_r}{2} \right) \quad (1)$$

dus

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_r}{2} \quad (2)$$

Dan is met $\bar{\sigma} = \sigma_v$ ← (3)

$$2\sigma_v^2 = \frac{3}{2} (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 \quad (4)$$

of

$$|\sigma_\varphi - \sigma_r| = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \quad (5)$$

Evenwicht geeft

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} \quad (6)$$

Twee vergelijkingen (5) en (6) met 2 onbekenden (σ_r en σ_φ).

De vraag is nu wat het teken is van $\sigma_\varphi - \sigma_r$?

We weten al dat op

- $r = a \quad \sigma_\varphi - \sigma_r < 0 \quad (\sigma_r = 0 \text{ en } \sigma_\varphi < 0)$
- $r = b \quad \sigma_\varphi - \sigma_r > 0 \quad (\sigma_r = 0 \text{ en } \sigma_\varphi > 0)$

Het teken van $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ hangt dus waarschijnlijk samen met het stuik-respektievelijk rek-gebied m.b.t. $\delta \epsilon_\varphi$.

Gaan we dit na, dan is:

$$\delta \epsilon_{\varphi} = \delta \lambda \left(\sigma_{\varphi} - \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} \right)$$

Met (2)

$$\delta \epsilon_{\varphi} = \delta \lambda \frac{3}{4} (\sigma_{\varphi} - \sigma_r)$$

Definieren we de neutrale laag op $r=\rho$ als het vlak waar momentaan $\delta \epsilon_{\varphi}=0$, dan is met (9) en met het gegeven uit de figuur dat $\delta \epsilon_{\varphi} > 0$ voor $r > \rho$ en $\delta \epsilon_{\varphi} < 0$ voor $r < \rho$.

$$I. \quad r > \rho \quad \sigma_{\varphi} - \sigma_r > 0 \quad \text{en} \quad \sigma_{\varphi} - \sigma_r = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \quad (10)$$

$$II. \quad r < \rho \quad \sigma_{\varphi} - \sigma_r < 0 \quad \text{en} \quad \sigma_r - \sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \quad (11)$$

Met (6) wordt zodoende voor de beide gebieden gevonden

$$I. \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\sigma_v}{r} \quad (12)$$

of

$$d\sigma_r = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \frac{dr}{r} \quad (13)$$

en

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln r + C \quad (14)$$

Voor $r=b$ is $\sigma_r=0$ zodat

$$C = -\sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln b \quad (15)$$

Dit geeft

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln \frac{r}{b} \quad (16)$$

met (10) is

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v (1 + \ln \frac{r}{b}) \quad (17)$$

$$II. \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = -\sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\sigma_v}{r} \quad (18)$$

of

$$d\sigma_r = -\sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \frac{dr}{r} \quad (19)$$

en

$$\sigma_r = -\sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln r + C \quad (20)$$

Voor $r=a$ is $\sigma_r=0$ zodat

$$C = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln a \quad (21)$$

Hiermee is

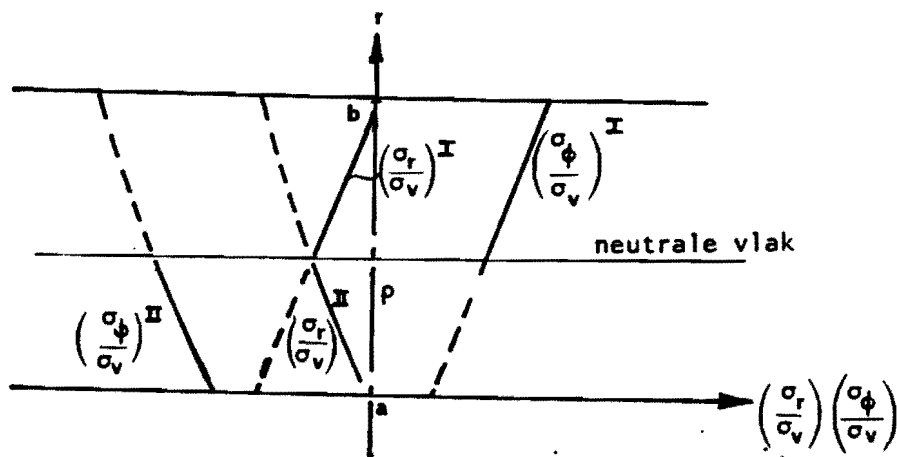
$$\sigma_r = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln \frac{a}{r} \quad (22)$$

en met (11)

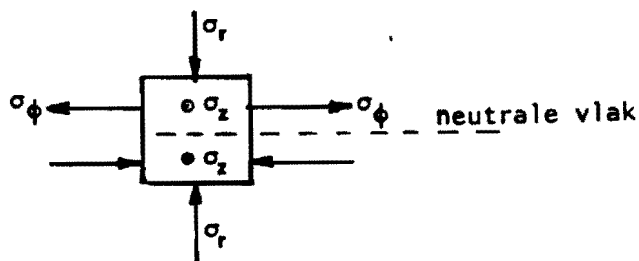
$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v (\ln \frac{a}{r} - 1) \quad (23)$$

M.b.v. de spanningen kan, zoals in het nu volgende zal blijken, worden nagegaan hoe de ligging is van het neutrale vlak.

(16), (17), (22) en (23) in grafiek gebracht, geeft kwalitatief het hieronder geschetste verloop voor de spanningen.



Vanwege evenwicht moet gelden dat het verloop van σ_r continu is; σ_ϕ en σ_z mogen discontinu zijn (zie onderstaande figuur).



M.a.w. de grens tussen beide gebieden, ofwel het neutrale vlak, ligt waar geldt

$$\sigma_r^I = \sigma_r^{II}$$

voor $r = \rho$ is dan

$$\sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln \frac{\rho}{b} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \ln \frac{a}{\rho} \tag{24}$$

$\rho = \sqrt{ab}$

(25)

b) Momentaan wordt het vlak op $r=\rho$ niet gerekt.

Wordt α als deformatieparameter gebruikt dan moet zodoende gelden

$$\left(\frac{d(\alpha r)}{d\alpha}\right)_{r=\rho} = 0 \quad (26)$$

of

$$\left(r + \alpha \frac{dr}{d\alpha}\right)_{r=\rho} = 0 \quad (27)$$

Nu is vanwege volume-invariantie

$$\frac{\alpha}{2} (r^2 - a^2) = l_0 h \quad (28)$$

Hierbij is h de initiële coördinaat van een materieel vlak.

(28) omgeschreven geeft

$$r^2 = \frac{2 l_0 h}{\alpha} + a^2 \quad (29)$$

Gedifferentieerd naar α

$$2r \frac{dr}{d\alpha} = \frac{-2 l_0 h}{\alpha^2} + 2a \frac{da}{d\alpha} \quad (29a)$$

of

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{1}{2r} \left(\frac{a^2 - r^2}{\alpha} + 2a \frac{da}{d\alpha}\right) \quad (30)$$

Dan is met (27)

$$\rho + \alpha \frac{1}{2\rho} \left(\frac{a^2 - \rho^2}{\alpha} + 2a \frac{da}{d\alpha}\right) = 0 \quad (31)$$

of

$$\rho + \frac{a^2 - \rho^2}{2\rho} + \frac{a\alpha}{\rho} \frac{da}{d\alpha} = 0 \quad (32)$$

Met $\rho = \sqrt{ab}$ wordt dit

$$a + b + 2\alpha \frac{da}{d\alpha} = 0 \quad (33)$$

Tenslotte geldt er nog volume-invariantie voor de gehele plaat

$$\frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2) = l_0 t_0 \quad (34)$$

Hiermee zijn twee vergelijkingen gevonden ((33) en (34)) met 2 onbekenden (a en b). Voor het oplossen van deze vergelijkingen is het handig om op de plaatdikte over te gaan

$$b - a = t$$

Elimineren we hiermee b uit (33) en (34) dan wordt gevonden

$$2a + t + 2\alpha \frac{da}{d\alpha} = 0 \quad (35)$$

$$\text{en } 2a = \frac{2l_0 t_0}{\alpha t} - t \quad (36)$$

Differentieren van (36) geeft

$$\frac{2da}{d\alpha} = \frac{-2l_0 t_0}{\alpha^2 t^2} \left(t + \alpha \frac{dt}{d\alpha} \right) - \frac{dt}{d\alpha} \quad (37)$$

Elimineren we met (36) en (37) a uit (35) dan is

$$\begin{aligned} & \frac{2l_0 t_0}{\alpha t} - t + t + \alpha \left\{ \frac{-2l_0 t_0}{\alpha^2 t^2} \left(t + \alpha \frac{dt}{d\alpha} \right) - \frac{dt}{d\alpha} \right\} = 0 \\ \text{of} & \frac{dt}{d\alpha} \left(\frac{2l_0 t_0}{t^2} + \alpha \right) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

De vorm tussen haakjes is ongelijk nul, dus

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0 \quad (39)$$

of $t = t_0$

D.w.z. met (36) en $b - a = t$ is

$$a = \frac{l_0}{\alpha} - \frac{t_0}{2} \quad (40)$$

$$b = \frac{l_0}{\alpha} + \frac{t_0}{2} \quad (41)$$

$$\text{c) } M = \int_a^b \sigma_\varphi \, dr \, L(r-\rho) \quad (42)$$

$$= \int_a^\rho \sigma_\varphi \, dr \, L(r-\rho) + \int_\rho^b \sigma_\varphi \, dr \, L.(r-\rho) \quad (43)$$

L is de lengte van de plaat loodrecht op de buigrichting. Beide termen hebben een positieve bijdrag aan het moment. Het moment is genomen om het punt $r=\rho$. Substitutie van (17) en (23) geeft

$$\begin{aligned} & = L \int_a^\rho (r-\rho) \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right) dr + \\ & \quad L \int_\rho^b (r-\rho) \sqrt{\frac{4}{3}} \sigma_v \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right) dr \end{aligned} \quad (44)$$

Uitwerking hiervan geeft met $\rho = \sqrt{ab}$ *)

$$M = \frac{1}{2\sqrt{3}} (a-b)^2 \cdot \sigma_v \cdot L \quad (45)$$

of

$$M = \frac{1}{2\sqrt{3}} t^2 \cdot \sigma_v \cdot L \quad (46)$$

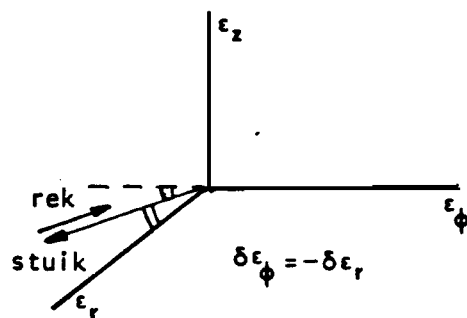
*) Standaardintegralen $\int \ln \frac{r}{a} \, dr = r \ln \frac{r}{a} - r + C$

$$\int r \ln \frac{r}{a} \, dr = \frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{4} + C$$

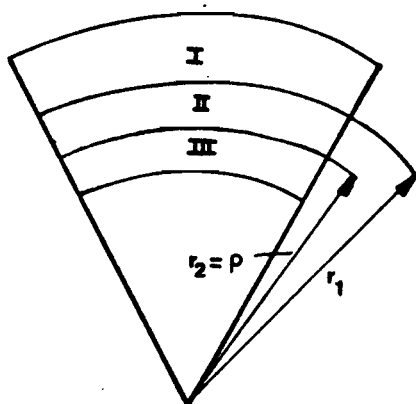
Dit is hetzelfde als hetgeen bij opgave 6.3 werd gevonden. Dit betekent dat het in rekening brengen van de verschuiving van het neutrale vlak, in het geval van ideaal plastisch materiaal, geen invloed heeft op het buigend moment.

$$d) \quad W = \int M d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} t^2 \cdot \sigma_v \cdot L \cdot \alpha \quad (48)$$

e) De hoofdrichtingen draaien niet t.o.v. het materiaal, tevens is de verhouding tussen de incrementele hoofdrekken constant. Toch mogen niet zonder meer de eindige rekken worden gebruikt voor de berekening van de effectieve rek. De oorzaak hiervan is dat de vlakken die tijdens de deformatie neutraal vlak zijn geweest m.b.t. de tangentiële rek eerste worden gestuikt en vervolgens worden gerekt (zie figuur).



De plaat kan nu voor een bepaalde α in drie gebieden worden verdeeld.



$$I. \quad \delta\epsilon_\varphi > 0$$

$$II. \quad \delta\epsilon_\varphi < 0 \text{ en vervolgens } \delta\epsilon_\varphi > 0$$

$$III. \quad \delta\epsilon_\varphi < 0 \quad (49)$$

De vraag is nu hoe de grenzen van gebied II liggen; m.n. hoe groot is r_1 ($r_2 = \rho$). Er geldt

$$\delta \epsilon_{\varphi} = \frac{\delta(\alpha r)}{\alpha r} = \frac{\alpha \frac{dr}{d\alpha} \delta\alpha + r \delta\alpha}{\alpha r} \quad (50)$$

met (29a) is dan

$$\delta \epsilon_{\varphi} = \frac{\alpha}{2r} \left(\frac{-2 l_0 h}{\alpha^2} + 2a \frac{da}{d\alpha} \right) + r \delta\alpha \quad (51)$$

Met (29) en (40) is

$$r^2 = \frac{2 l_0 h}{\alpha} + \left(\frac{l_0}{\alpha} - \frac{t_0}{2} \right)^2 \quad (52)$$

Elimineren van r en a met (52) en (40) geeft voor (51)

$$\delta \epsilon_{\varphi} = \frac{l_0 h - \frac{l_0 t_0}{2} + \frac{t_0^2}{4\alpha}}{2 l_0 h \alpha + \left(l_0 - \frac{t_0 \alpha}{2} \right)^2} \delta\alpha \quad (53)$$

Dit is de incrementele tangentiële rek als functie van de deformatieparameter α en afhankelijk van de initiële coördinaat h .

De begrenzing van gebied II is dan uitgedrukt in h ($\delta \epsilon_{\varphi} = 0$)

$$h_1 = \frac{t_0}{2} \quad (\alpha = 0) \quad (54)$$

$$h_2 = \frac{t_0}{2} - \frac{\alpha t_0^2}{4 l_0} \quad (55)$$

In de straal r uitgedrukt vinden we m.b.v. (52)

$$r_1^2 = \left(\frac{l_0}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{t_0}{2} \right)^2 \quad (56)$$

$$r_2^2 = \left(\frac{l_0}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{t_0}{2} \right)^2 \quad (57)$$

(57) is uiteraard ook te vinden met $r = c = \sqrt{ab}$.

Voor gebied I en III gelden de formuleringen voor de rechte rekweg, dus met

$$\epsilon_r = -\epsilon_{\varphi}$$

is

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{4}{3}} |\epsilon_{\varphi}| \quad (58)$$

en

$$\epsilon_{\varphi} = \ln \frac{1}{l_0} = \ln \frac{\alpha r}{l_0} \quad (59)$$

Uitgedrukt in de initiële coördinaat h wordt dit met (52)

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\alpha^2}{l_0} \left(\frac{2 l_0 h}{\alpha} + \left(\frac{l_0}{\alpha} - \frac{t_0}{2} \right)^2 \right) \right] \quad (60)$$

of

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{2 l_0 h \alpha + \left(l_0 - \frac{\alpha t_0}{2} \right)^2}{l_0^2} \quad (61)$$

Voor gebied I is dan

$$I \quad \epsilon_{\varphi} > 0 \quad \text{dus} \quad \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{4}{3}} \epsilon_{\varphi} \quad \text{zodat}$$

$$\bar{\epsilon}^I = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{2 l_0 h \alpha + (l_0 - \frac{\alpha t_0}{2})^2}{l_0^2} \quad (62)$$

en voor gebied III

$$III \quad \epsilon_{\varphi} < 0 \quad \text{dus} \quad \bar{\epsilon}^{III} = -\sqrt{\frac{4}{3}} \epsilon_{\varphi} \quad \text{zodat}$$

$$\bar{\epsilon}^{III} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{l_0^2}{2 l_0 h \alpha + (l_0 - \frac{\alpha t_0}{2})^2} \quad (63)$$

Voor gebied II geldt het volgende

$$II \quad \bar{\epsilon} = \int \delta \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{4}{3}} \int |\delta \epsilon_{\varphi}| \quad (64)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \left\{ \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stuik}}}{(-\delta \epsilon_{\varphi})} + \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rek}}}{\delta \epsilon_{\varphi}} \right\}$$

Bij beide integralen is er sprake van een recht rekweg, dus:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{stuik}}}{-\epsilon_{\varphi}^{(1)}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rek}}}{\epsilon_{\varphi}^{(2)}} \right) \quad (65)$$

Op de grens tussen de beide integralen geldt dat $\delta \epsilon_{\varphi} = 0$. We noemen de α waarbij dit optreedt α' . Dan is met (53)

$$\alpha' = \frac{2 l_0}{t_0^2} (t_0 - 2h) \quad (66)$$

D.i. de hoek waarbij een vlak op h juist neutraal vlak is.

De straal waarop het betreffende vlak ligt noemen we r' , dan is met (52)

$$r'^2 = \frac{2 l_0 h}{\alpha'} + \left(\frac{l_0}{\alpha'} - \frac{t_0}{2} \right)^2 \quad (67)$$

en met (66)

$$r'^2 = h t_0^2 \frac{(t_0 - h)}{(t_0 - 2h)^2} \quad (68)$$

Met (65) geldt nu

$$\bar{\epsilon}^{II} = \sqrt{\frac{4}{3}} \left(-\ln \frac{\alpha' r'}{l_0} + \ln \frac{\alpha r}{\alpha' r'} \right) \quad (69)$$

of

$$\bar{\epsilon}^{II} = \sqrt{\frac{4}{3}} \ln \frac{\alpha r l_0}{(\alpha' r')^2} \quad (70)$$

Met (52), (66) en (68) is dan

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left[\frac{\alpha t_0^2 \left(\frac{2l_0 h}{\alpha} + \left(\frac{l_0}{\alpha} - \frac{t_0}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{4l_0 h(t_0 - h)} \right] \quad (71)$$

Elimineren van h m.b.v. (52) geeft de effectieve rek als functie van de lopende coördinaat r .

f) De effectieve rek van het neutrale vlak kan zowel met (63) als met (71) worden berekend.

Substitutie van $h = h_2$ (55) geeft in beide gevallen

$$\bar{\epsilon} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \ln \left(1 - \frac{\alpha^2 t_0^2}{4l_0^2} \right) \quad (72)$$