

## Cumulatieve-som kaarten

**Citation for published version (APA):**

Praagman, J. (1984). *Cumulatieve-som kaarten*. (TH Eindhoven. THE/BDK/ORS, Vakgroep ORS : rapporten; Vol. 8413). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1984

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

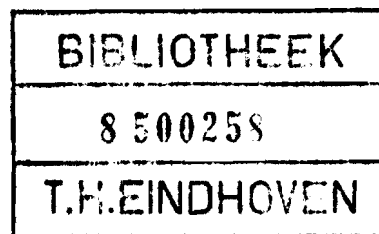
[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

CUMULATIEVE-SOM KAARTEN

by

J. Praagman



Report ARW 03 THE BDK/ORS/84/13  
Eindhoven University of Technology  
Department of Industrial Engineering  
and Management Sciences  
Postbox 513  
5600 MB Eindhoven  
Netherlands

## CUMULATIEVE-SOM KAARTEN\*

J. Praagman\*\*

### Samenvatting

Er is een hernieuwde belangstelling te constateren voor de methoden en de methodische werkwijze van de statistische kwaliteitsbeheersing. Eén van die methoden is de cumulatieve som kaart, 30 jaar geleden door Page geïntroduceerd als hulpmiddel bij de procesbeheersing. Sindsdien is een groot aantal artikelen over (aspecten van) de cusumkaart verschenen. Aangezien het aantal gebruikers weer toe lijkt te nemen, zullen we na een beschrijving van de cusumkaart op een aantal van die aspecten ingaan.

---

\* Gebaseerd op een voordracht op 21 maart 1984 voor de Bedrijfssectie van de VVS.

\*\* Afdeling Bedrijfskunde

T.H. Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

tel. 040-472729

## Introductie

Statistische kwaliteitsbeheersing is in. Mede onder invloed van de economische omstandigheden en het japanse voorbeeld is er een hernieuwde belangstelling voor de methoden en de methodische werkwijze van de statistische kwaliteitsbeheersing. Daarbij is er niet zozeer sprake van de ontwikkeling van nieuwe technieken, als wel van een soort revival. Al lang bestaande methoden worden weer te voorschijn gehaald en toegepast. Statistische methoden, die hulpmiddel zijn om kwaliteitsproblemen op te lossen, dan wel oplossingen voor die problemen te suggereren.

Een goed gebruik van de middels deze methoden verkregen informatie stelt eisen aan de gebruikers - ze zullen voldoende inzicht in de methode moeten hebben om de gegevens goed te kunnen interpreteren - en de organisatie waarbinnen ze opereren. Vooral ook dit laatste punt staat centraal in de filosofie, zoals o.a. door Deming propageerd (zie bv. Deming, 1982).

In het onderstaande gaan we nader in op de cumulatieve som (cusum) kaart. Een inmiddels ook al weer 30 jaar oude methode die kan worden toegepast bij de procesbeheersing.

## Procesbeheersing

De essentie van procesbeheersing is het onder controle houden van de variatie in de voor de kwaliteit belangrijke produkt eigenschappen. In elk, al dan niet industrieel, proces zijn bepaalde variaties onvermijdelijk. Bij procesbeheersing wordt in eerste instantie vastgesteld welke orde van grootte deze zogenaamde procesinherente variatie heeft. Is die variatie te groot in vergelijking met de voor de betreffende produkteigenschap gestelde kwaliteitseisen of tolerantie, dan zijn technische verbeteringen van het proces noodzakelijk om die variatie terug te dringen.

In het andere geval kan worden overgegaan op (regelmatige) controle van het proces, om na te gaan of we nog steeds alleen met procesinherente variatie te maken hebben of dat er andere verstorende oorzaken in het spel zijn. Daartoe wordt voor de procesinherente variatie een kansmodel gepostuleerd. De keuze van dat model zal uiteraard gebaseerd moeten

zijn op een goede kennis van het onderhavige proces en/of een gedegen analyse van historische gegevens van dat proces.

In feite worden hier dus de mogelijke procesveranderingen in twee groepen onderscheiden. Die welke gegeven het proces en de omstandigheden als onvermijdelijk worden beschouwd, en die waarvan wordt verondersteld dat er andere, aanwijsbare en dus te corrigeren, oorzaken voor bestaan.

Procesbeheersing betekent dus, dat we ons voortdurend de vraag stellen of de optredende variaties nog als toevallig kunnen worden aangemerkt, of dat een andere oorzaak moet worden verondersteld. In termen van het voor de toevalsvariatie gekozen kansmodel: in hoeverre de gevonden resultaten nog passen binnen dat model.

Een proces heet dan ook statistisch beheerst, zolang de optredende variaties in de essentiële produkteigenschappen nog passen binnen het voor de procesinherente variatie gekozen kansmodel.

Regelkaarten (voor een overzicht, zie Gibra, 1975), in het algemeen zijn grafische hulpmiddelen bij de uitvoering van procesbeheersing. Het gebruik van standaardregelkaarten, zoals al ruim 50 jaar geleden door Shewhart geïntroduceerd, komt neer op het met regelmatige tussenpozen doen van waarnemingen (vaak steekproefgemiddeldes) en het uitzetten van die waarnemingen  $X_1, X_2, \dots$  op een kaart. Die kaart is voorzien van aktiegrenzen op  $\pm 3\sigma_x$  van de streefwaarde, waarbij  $\sigma_x$  bijv. geschat is op grond van range en standaarddeviatie binnen de steekproeven. Het proces is beheerst zolang de  $X_i$  binnen die regelgrenzen vallen. De positie van de grenzen wordt gekozen uitgaande van het voor de procesinherente variatie gekozen model en de consequenties van eventuele onjuiste beslissingen.

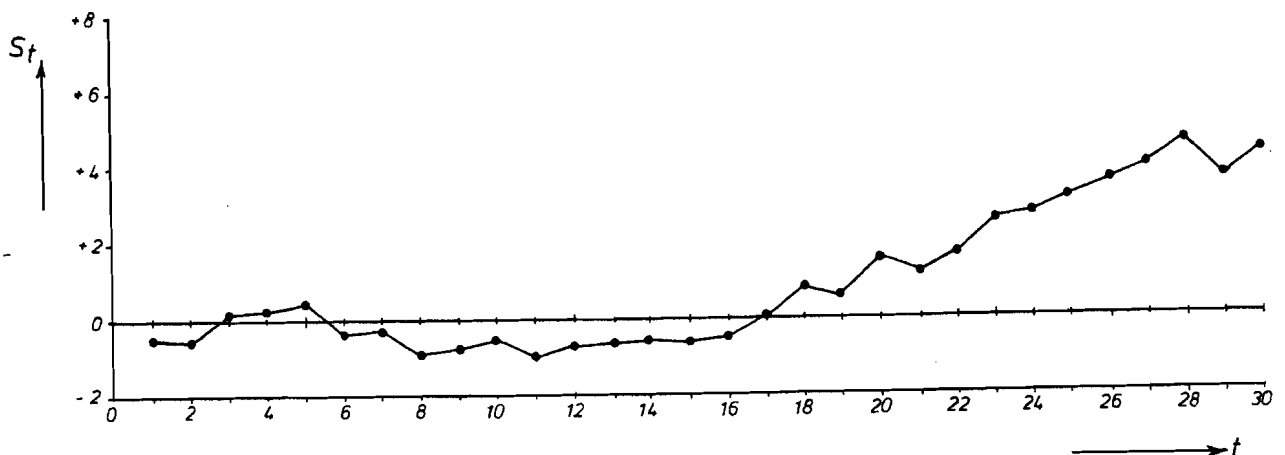
In de loop van de tijd zijn vele veranderingen en variaties op deze standaardkaart voorgesteld. De belangrijkste zijn de toevoeging van waarschuwingsgrenzen en het gebruik van runs (zie bv. Weindling e.a., 1971). De essentie van deze uitbreidingen is dat, anders dan bij de standaard kaart, de beslissing of het proces nog beheerst is op tijdstip  $t$  niet meer alleen van de laatst verkregen waarneming  $X_t$  afhangt, maar ook wordt beïnvloed door de eerdere resultaten. Het blijkt daardoor mogelijk vooral de kleine- en middelgrote afwijkingen sneller te signaleren.

## Cusumtechnieken

Bij cusumtechnieken worden de opeenvolgende waarnemingen  $X_i$  vergeleken met een streef- of referentiewaarde  $T$  en wordt de cumulatieve som van de afwijking van deze waarden

$$S_t = \sum_{i=1}^t (X_i - T)$$

als functie van  $t$  op een kaart uitgezet, dan wel in een tabel opgenomen. Als deze gecumuleerde afwijkingen een bepaalde grens overschrijden, dan wordt dat opgevat als een signaal dat er sprake is van een verstoring. Bij de grafische weergave van de cumulatieve som wordt de momentane gemiddelde waarde van de  $X_i$  dus gerepresenteerd door de helling van de grafiek. En niet zoals bij de standaardkaart door de hoogte boven de horizontale as. Een gemiddelde waarde groter dan de streefwaarde levert een stijgende cusum, een kleiner gemiddelde juist een dalende. Veranderingen in de gemiddelde waarde van de bekeken grootheid worden op de cusumkaart dus zichtbaar als veranderingen in de helling. De plaats van een eventuele knik in de figuur markeert het moment waarop de verandering heeft plaatsgevonden. Figuur 1 geeft een voorbeeld.



Figuur 1. Voorbeeld van cusumkaart, met normaal verdeelde  $X_i$ ,  $\sigma_e^2 = 1$ ,

$$EX_i = 0, i \leq 12 \text{ en } EX_i = 0.5, i > 12.$$

Uiteraard kunnen de  $X_i$  ook andere grootheden zijn, zoals de fractie fouten in een steekproef, een maat voor de variantie binnen een steekproef etc. Voor het gemak zullen we verder, tenzij anders vermeld steeds aannemen dat we te maken hebben met variabele procescontrole, geïnteresseerd zijn in het gedrag van het procesgemiddelde ( $\mu$ ) en de  $X_i$  steekproefgemiddelden zijn waarvoor geldt dat  $E X_i = \mu$ . Dit neemt niet weg dat veel van het gestelde na de noodzakelijke aanpassingen ook in andere gevallen geldig is.

Merk verder op dat de grafische representatie van de  $X_i$  in een cusum kaart zoals hierboven omschreven geen enkele eis aan de gegevens stelt ten aanzien van de verdeling van de  $X_i$  of hun onderlinge (on)afhandelbaarheid. Dit wordt natuurlijk anders als we regels gaan formuleren op grond waarvan besloten wordt of veranderingen in de cusum al dan niet passen binnen de toevalsvariatie, en we de eigenschappen van de dan ontstane procedure willen vastleggen. In een van de volgende paragrafen komen we hier op terug.

Het gebruik van cusumtechnieken beperkt zich niet tot het gebied van de statistische kwaliteitsbeheersing (zie bv. Mahon, 1973 en Alderliesten en Van Splunter, 1983). Ruwweg kunnen twee situaties worden onderscheiden waarin cusum-technieken worden toegepast.

- "on line": de gegevens komen sequentieel beschikbaar en worden onmiddellijk verwerkt. De bedoeling is om zo snel mogelijk een eventuele verandering te signaleren en de grootte daarvan te schatten. Na iedere nieuwe waarneming volgt dus een beslissing. Dit is de meest voorkomende gebruikswijze binnen de procesbeheersing. Zodra een verandering is gesignaleerd volgt zo mogelijk een correctieve actie ten aanzien van de procescondities.
- retrospectief: een serie gegevens komt in z'n geheel beschikbaar, en wordt geanalyseerd om na te gaan of ergens in de loop van de serie veranderingen zijn opgetreden. Nu wordt er dus in feite op grond van de hele serie een test uitgevoerd. Voor dit zogenaamde veranderpunt probleem bestaan meerdere toetsingsgrootheden, die vaak meer geschikt zijn dan de cusumtechniek (zie bijv. Bhattacharyya en Johnson, 1968, Chernoff en Zacks, 1964, Sen en Srivastava, 1975, Pettitt, 1979).

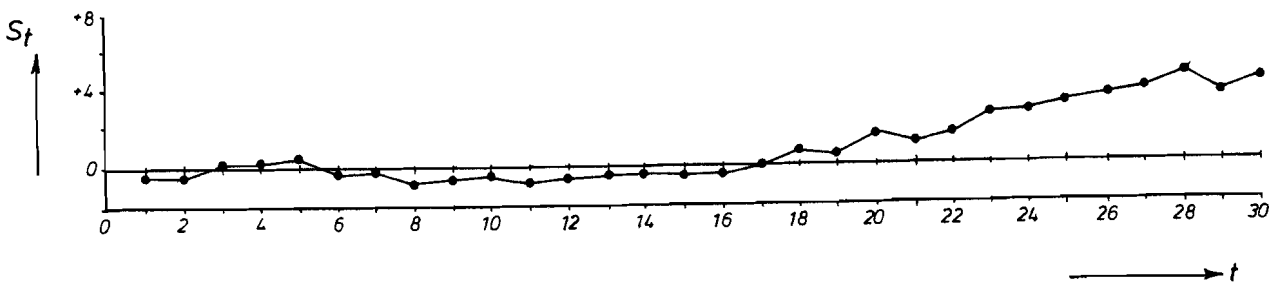
In hetgeen volgt zullen we ons richten op de on-line toepassing.

### Keuze referentiewaarde en schaal

Om in de figuur eventuele veranderingen snel zichtbaar te maken is de keuze van de referentiewaarde  $T$  en van de te hanteren schaal belangrijk. Een te grote (kleine) referentiewaarde betekent dat de cusum over het geheel genomen steeds dalend (stijgend) is. Afgezien van het praktische bezwaar, dat de grafiek dan regelmatig van het papier afloopt zijn dan de wijzigingen relatief minder goed zichtbaar.

North (1980) stelde in verband hiermee een modificatie van de cusumkaart voor : de quangle. Hierin wordt een verandering zichtbaar gemaakt door een verandering van de hoek van de grafiek met de horizontale as, en niet van de tangens van die hoek zoals bij de cusum. Deze modificatie is evenwel niet erg geschikt voor on-line toepassing, gezien de mogelijkheid van de quangle om over de "kop te slaan", zodat de horizontale as niet meer eenduidig als tijdsas kan worden geïnterpreteerd. Voor een retrospectieve analyse is toepassing mogelijk.

Bij toepassingen binnen de statistische kwaliteitsbeheersing zal als referentiewaarde  $T$  veelal een gewenst kwaliteitsniveau, zoals een AQL of een maximaal percentage uitval etc. gekozen kunnen worden.



Figuur 2. Invloed schaalfactor.

Figuur 2 illustreert het effect van een te kleine schaal. Het is een weergave van dezelfde gegevens als gebruikt in figuur 1. De opgetreden verandering is nu veel slechter zichtbaar.



Als vrij algemeen aanvaarde vuistregel geldt, dat 1 steekproef, interval op de horizontale as, moet corresponderen met  $2\sigma_e$  eenheden op de verticale. Daarbij is  $\sigma_e^2$  de procesinherente variatie. Een afwijking ter grootte van  $2\sigma_e$  resulteert dan in een cusum met een helling van  $45^\circ$ . Uiteraard zal kennis van het te beheersen proces, en meer in het bijzonder van de grootte van de te registreren afwijkingen, aanleiding zijn om een andere schaalfactor te kiezen.

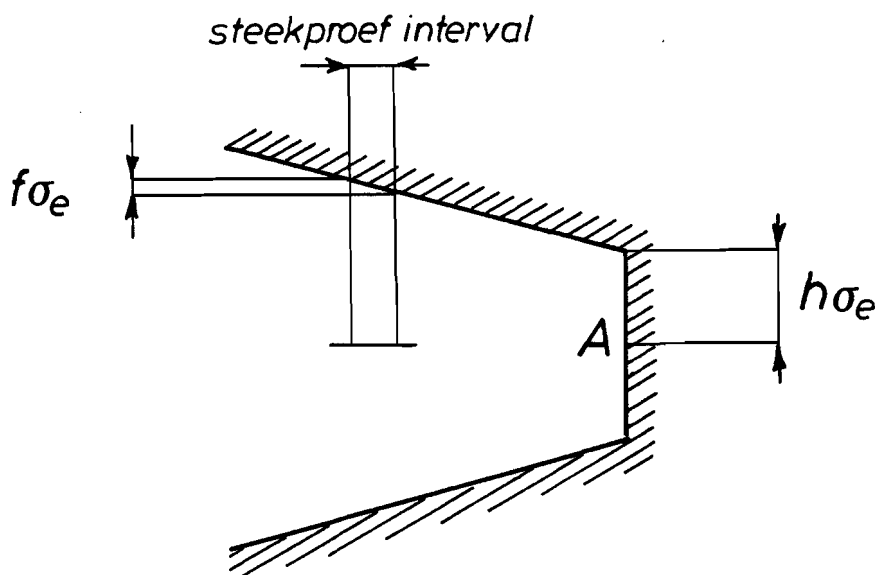
### Beslissingsregels

Om de cusumkaart effectief te kunnen gebruiken binnen de statistische kwaliteitsbeheersing is een duidelijke beslissingsregel nodig. Wanneer is er sprake van een verandering van de helling van de cusum, meer dan op grond van de procesinherente variatie kan worden verwacht?

De meest gehanteerde beslissingsregel komt in twee uitvoeringen voor. In de eerste wordt met een zogenaamd V-masker rechtstreeks naar de helling van de cusum gekeken en is geschikt als de cusum inderdaad grafisch wordt bijgehouden. Dat masker, zoals geïntroduceerd door Barnard (1959), heeft de vorm van een afgeplatte V en wordt zodanig op de kaart gelegd, dat het punt A samenvalt met het laatst geregistreerde punt (zie figuur 3). Vallen alle voorgaande punten binnen de armen van de V, dan wordt aangenomen dat het proces nog statistisch beheerst is. Liggen een of meer punten buiten de V, dan duidt dat op een te steile helling van de cusum en wordt aangenomen dat er sprake is van een verstoring.

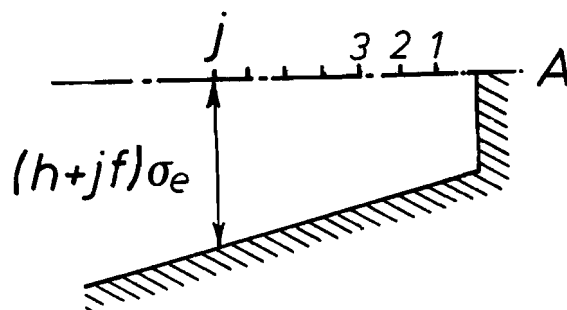
De preciese vorm van het V-masker bepaald nu dus in feite het kansmodel dat voor de procesinherente variatie wordt gehanteerd. Deze vorm wordt bepaald door twee parameters,  $h$  en  $f$  (zie figuur 3).

De V-masker procedure is oorspronkelijk tweezijdig. Eenzijdig gebruik kan eenvoudig door een arm van de V weg te laten. Verder is er ook geen dwingende reden de V symmetrisch te maken. Laten we de symmetrie los, dan zijn dus 4 parameters,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $f_1$  en  $f_2$  nodig om de procedure vast te leggen.



Figuur 3. V-masker.

Deze sterk op de grafische presentatie van de cusum geënte procedure kan ook helemaal numeriek beschreven worden. En dat levert de tweede uitvoeringsvorm van de beslissingsprocedure. We kijken daarvoor even alleen naar een mogelijke overschrijding van de onderste arm van de V (zie figuur 4). Een dergelijke overschrijding correspondeert zoals gezegd met een verschuiving in opwaartse richting van de relevante procesparameter.



Figuur 4. Eenzijdige procedure.

Op tijdstip  $t$  veronderstellen we dat een dergelijke verschuiving niet heeft plaatsgevonden, als voor  $j = 1, 2, 3 \dots$  geldt dat

$$S_t - S_{t-j} < (h + jf) \sigma_e$$

oftewel

$$\max_{j \geq 1} \sum_{i=t-j+1}^t (X_i - (T + f\sigma_e)) < h\sigma_e$$

Een overschrijding van de onderste arm van de  $V$  vindt dus plaats zodra de som  $\sum_1^t (X_i - (T + f\sigma_e))$  meer dan  $h \cdot \sigma_e$  groter is dan het minimum van diezelfde som op een eerder tijdstip. Het is dus voldoende om deze som bij te houden, en steeds opnieuw bij 0 te beginnen, zodra er een negatieve waarde voorkomt. Die negatieve waarde is dan immers het nieuwe minimum waarmee toekomstige waarden moeten worden vergeleken. Met andere woorden definieer

$$S'_t = \max(0, S'_{t-1} + X_t - T - f\sigma_e)$$

met

$$S'_0 = 0$$

dan veronderstellen we dat een verstoring heeft plaatsgevonden zodra  $S'_t \geq h \cdot \sigma_e$ .

Analoog aan het bovenstaande volgt dat de bovenarm van de  $V$  wordt overschreden, zodra de som  $\sum_1^t (X_i - (T - f\sigma_e))$  meer dan  $h\sigma_e$  kleiner is dan het maximum van diezelfde som op een eerder tijdstip.

De tweezijdige  $V$ -masker procedure is daarmee dus vertaald in twee gelijktijdig uit te voeren eenzijdige procedures.

Deze numerieke uitvoering is al in 1954 door Page voorgesteld en staat bekend als de beslissingsintervalmethode. Zijn voorstel behelsde inderdaad een eenzijdige procedure. Uitgaande van een AQL en een zeg groter Rejectable Quality Level koos hij een tussen die twee liggende referentiewaarde  $K$ . De verschillen  $X_i - K$  worden dan gecumuleerd. Is er

sprake van het AQL dan zullen de bijdragen dus een negatieve verwachtingswaarde hebben; de cumulatieve som zal dus een dalende tendens vertonen en steeds nieuwe minima bereiken. In geval het proces op het RQL zit zijn de bijdragen gemiddeld juist positief en vertoont de cusum een stijgende tendens. Zodra de totale toename t.o.v. het minimum eerder in de reeks groter is dan het zogenaamde beslissingsinterval  $H$ , wordt dan ook geconcludeerd dat het proces verstoord is.  $K$  correspondeert dus met  $T + f \cdot \sigma_e$ ,  $H$  met  $h \cdot \sigma_e$ .

Kemp (1961) was de eerste die er op wees dat de beide methoden (V-masker en beslissingsinterval) in wezen identiek zijn. Keuze voor het gebruik van een van beide kan dus helemaal op basis van praktische overwegingen gebeuren.

Op een aantal andere beslissingsregels komen we terug na een bespreking van de eigenschappen van deze methode.

#### Keuze parameters

Zoals eerder genoemd zijn de preciese eigenschappen van de procedure afhankelijk van de parameters  $h$  en  $f$ . De keuze van deze parameters is vergelijkbaar met de keuze van de preciese plaats van actie en waarschuwingsgrenzen in een gewone regelkaart. Om deze keuze verantwoord te kunnen maken zullen we dus in ieder geval inzicht moeten hebben in de relatie tussen de parameters en de performance van de procedure.

De performance van een cusumprocedure wordt in het algemeen gemeten middels (de parameters van) de zogenaamde runlengteverdeling. Voor ieder kwaliteitsniveau is de runlengte  $L$  gedefinieerd als het aantal steekproeven dat genomen wordt, voordat geconcludeerd wordt dat het proces verstoord is; dit onder de aanname dat het kwaliteitsniveau al die tijd constant is. Is het proces op het gewenste kwaliteitsniveau dan moet  $L$  dus groot zijn (weinig vals alarm). Anderzijds is een kleine runlengte gewenst als het proces zich op een afwijkend kwaliteitsniveau bevindt. Dat immers betekent dat een verstoring snel wordt gesignaleerd zodat het eventuele verlies door produktie van goederen van slechtere kwaliteit wordt beperkt.

Veelal wordt alleen uitgegaan van de gemiddelde runlengte  $EL$  (ARL).

(Op de berekening van de EL komen we in de volgende paragraaf terug.)  
 En wordt voor zowel het AQL als het RQL een gewenste ARL gespecificeerd, waaruit dan de waarden voor h en f volgen.  
 De keuze van de gewenste ARL-waarden vindt op hun beurt meestal ad-hoc plaats. Strikt genomen is het geheel natuurlijk een economisch probleem en zou de totale keuze moeten gebeuren na afweging van de kosten verbonden aan de verschillende fouten die bij toepassing van de procedure kunnen optreden (valse alarms vs. (te) laat signaleren van verstoringen). Zeker in vergelijking met de soortgelijke vraagstelling bij de standaard regelkaart is hieraan bij de cusumkaart nog weinig aandacht besteed. Als een van de weinigen geeft Chiu (1974) een model voor het ontwerp van een optimale cusumprocedure, als de  $X_i$  normaal verdeelde steekproefgemiddeldes zijn; en waarin slechts een soort verstoring mogelijk is en de grootte van die storing bekend is.

#### Bepaling ARL

Aan de bepaling van de ARL (en de runlengte verdeling) is in de loop van de tijd wel veel aandacht besteed. Naast de mogelijkheid via simulaties (zie bv. Goldsmith en Whitfield, 1961, Bissell, 1969) is ruwweg een tweetal aanpakken te onderscheiden. De eerste maakt gebruik van de relatie van de cusumprocedure met sequentiële toetsen; de tweede beschrijft de cusum als een Markov-proces. De analogieën zijn het duidelijkst, als we uitgaan van de eenzijdige cusum in termen van de  $S_t'$ , zoals bij de beschrijving van de beslissingsintervalmethode ingevoerd. Als de gemiddelde runlengten voor 1-zijdige schema's bekend zijn kunnen die voor tweezijdige daar direkt uit worden afgeleid met behulp van de relatie

$$\frac{1}{EL_{2\text{-zijdig}}} = \frac{1}{EL_{\text{boven}}} + \frac{1}{EL_{\text{onder}}}$$

(Kemp, 1961). Met  $L_{\text{boven}}$  en  $L_{\text{onder}}$  de runlengtes van de twee eenzijdige procedures die samen de tweezijdige vormen.

Voor de eerste analogie vatten we de cusumprocedure op als een serie sequentiele toetsen, waarin  $\sum_{i=1}^n (X_i - K)$  wordt bijgehouden totdat deze som  $\geq H$  of  $\leq 0$  is. In het eerste geval wordt tot verwerping overgegaan (en wordt dus een verstoring verondersteld), in het tweede geval leidt de sequentiele toets tot acceptatie en wordt een nieuwe test begonnen, waarbij de sommatie met de eerstvolgende  $X_i$  opnieuw wordt gestart. Een run van de cusumprocedure is dan dus equivalent met de uitvoering van een serie sequentiele toetsen, steeds beginnend op de acceptatiegrens ( $S' = 0$ ), en waarvan alleen de laatste eindigt met verwerping ( $S' \geq H$ ). Is nu  $P(x)$  de kans dat zo'n sequentiele toets, beginnend met  $S' = x$ , eindigt met acceptatie en  $N(x)$  het aantal waarnemingen waaruit de test bestaat, dan is eenvoudig af te leiden dat

$$EL = \frac{EN(0)}{1 - P(0)}$$

Waarmee de ARL dus is uitgedrukt in twee grootheden van de sequentiele toets. Maar ook de berekening van die grootheden levert nog de nodige problemen.

Reynolds (1975) bekijkt het speciale geval dat de  $X_i$  onderling onafhankelijk normaal verdeelde steekproefgemiddeldes zijn. De bijbehorende sequentiele toets is dan een zogenaamde SPRT (sequential probability ratio test). Gebruik makend van daarvoor beschikbare, van Wald afkomstige benaderingen voor  $P(0)$  en  $EN(0)$ , komt zij tot waarden voor  $EL$ . Vergelijking met anders verkregen resultaten laten zien dat deze benadering tot duidelijke onderschatting van  $EL$  leidt. Khan (1978) verbeterde deze benaderingen en generaliseert naar  $X_i$  met een dichtheid uit de exponentiele familie met 1 parameter.

Voor exacte bepaling van  $N(0)$  en  $P(0)$  is de oplossing nodig van de integraalvergelijkingen, (de  $X_i$  worden onderling onafhankelijk verondersteld)

$$N(x) = 1 + \int_0^H f(y - x) N(y) dy$$

en

$$P(x) = F(-x) = \int_0^H f(y-x) P(y) dy$$

met  $F$  en  $f$  de verdeling en kansdichtheid van  $X_1 - K$ .

O.a. door Ewan en Kemp (1960), van Dobben de Bruyn (1968) en Goel en Wu (1971) zijn oplossingsmethoden voor deze vergelijkingen aangegeven en met name voor het geval van normaal verdeelde  $X_1$  ook toegepast. Recent heeft Khan (1984) aangetoond dat niet alleen EL, maar ook de momentengenererende functie van  $L$  kan worden uitgedrukt in bij de sequentiele toetsen horende grootheden. Dus ook de andere parameters van de run lengte verdeling zijn in theorie via deze analogie te achterhalen.

De tweede aanpak beschrijft zoals gezegd het verloop van de cumulatieve som  $S_t$  in de tijd als een Markov-proces, met als toestandsruimte de mogelijke waarden die de som kan aannemen. Daarbij wordt (dus) ook weer onderlinge onafhankelijkheid van de  $X_1$ 's verondersteld.

Brook en Evans (1972), Zacks (1981) en Woodall (1983) gebruiken deze analogie. De eerste twee beperken zich in feite tot geheeltallige  $X_1$ , waardoor de cusum als een Markov-keten met 1 absorberende toestand kan worden beschouwd. Woodall bekijkt het continue geval. Voor alle situaties waarin de ARL niet te groot is levert dit een hanteerbare methode voor de bepaling van de complete runlengte verdeling (zie met name Woodall). Voor grotere ARL zoals in doorsnee geest voor het AQL stuit dat echter op praktische bezwaren, als gevolg van de erg grote runlengten die dan kunnen voorkomen.

Een mogelijkheid die dan nog ter beschikking staat is het gebruik van benaderingen. Door meerdere auteurs is aangetoond dat de runlengte verdeling bij benadering een geometrische rechterstaart heeft, terwijl Evan en Kemp voor niet al te kleine  $\ell$  al de benadering

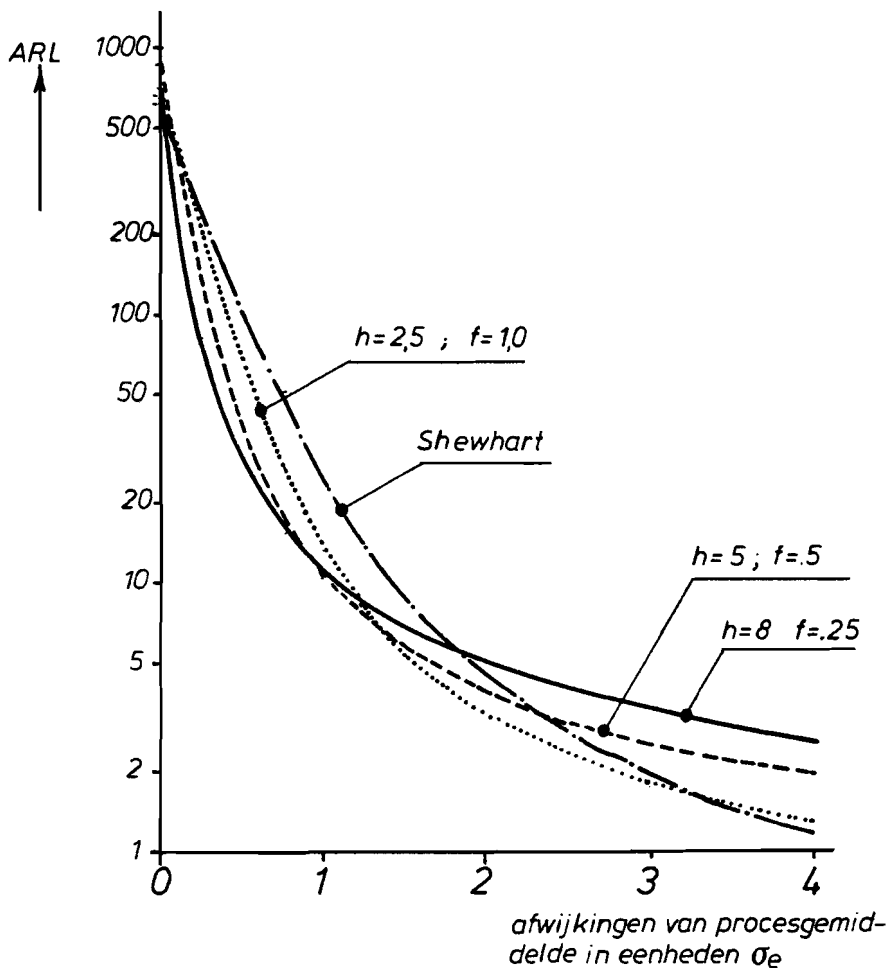
$$P(L = \ell) \approx \frac{1}{EL} \exp\left(-\frac{\ell-1}{EL}\right)$$

gaven.

Voor de bepaling van de runlengte verdeling lijkt een combinatie van Woodall's aanpak voor kleine ARL en deze benadering voor grote ARL op dit moment de beste oplossing.

De benadering van Ewan en Kemp laat tegelijkertijd zien dat het gebruik van alleen de ARL in plaats van de totale run-lengte verdeling in veel gevallen redelijke resultaten zal opleveren.

Figuur 5 geeft een voorbeeld van een paar ARL-curven.



Figuur 5. ARL-curves van 3 cusumprocedures en de Shewhart kaart met waarschuwinglijnen.

Het gaat daar om controle op het procesgemiddelde, met als aanname dat de procesinherente variatie normaal verdeeld is met bekende  $\sigma_e^2$ . De ARL is uitgezet als functie van de afwijking van de streefwaarde. Ter



vergelijking is ook de ARL-curve van de Shewhart-kaart met actiegrenzen op  $\pm 3 \sigma_e$  en waarschuwingsgrenzen op  $\pm 2 \sigma_e$ .

Duidelijk is de al in de inleiding genoemde eigenschap van cusumkaarten, dat juist kleine en middelgrote afwijkingen sneller worden gesignaleerd. Verder illustreert de figuur de "vuistregel" volgens welke de parameter  $f$  het beste zo kan worden gekozen dat  $f \sigma_e$  ongeveer gelijk is aan de helft van het verschil tussen het AQL (de streefwaarde) en een RQL (vergelijk met de opmerking over de keuze van  $K$  in de bespreking van de beslissingsintervalmethode).

Voor uitgebreide tabellen en nomogrammen met gegevens over ARL- en runlengtes verwijzen we naar de genoemde literatuur en de uitgave van de British Standards Institution (zie lit. lijst).

Essentieel bij de berekeningen in deze paragraaf is de veronderstelling dat de  $X_i$  onderling onafhankelijk zijn. Over het geval waarin de  $X_i$  onderling gecorreleerd zijn is betrekkelijk weinig bekend. Maar uit het werk van Johnson en Bagshaw (1974 en Bagshaw en Johnson, 1975), blijkt dat de door hen onderzochte correlatiestructuur de ARL niet erg, maar de run lengte verdeling in z'n geheel wel duidelijk beïnvloedt. Het gebruik van de ARL als enige indicator voor de run lengte verdeling is hier dus minder juist.

### Andere beslissingsregels

Alle andere voorgestelde beslissingsregels zijn kleine variaties op de V-masker (beslissingsinterval)methode. Variaties die zijn geïnspireerd door het feit dat de cusumkaart met die regel, weliswaar kleine afwijkingen vrij snel signaleert, maar grote afwijkingen gemiddeld wat minder snel dan de standaard regelkaart (vgl. Fig. 5). Verbetering hiervan wordt nagestreefd door de laatste (paar) verkregen  $X_i$  ('s) wat meer gewicht toe te kennen. Dat kan bijv. door naast de V-masker methode tegelijkertijd de beslissingsregel van de gewone Shewhart regelkaart te gebruiken. Dus door ook in het proces in te grijpen als de laatste  $X_i$  buiten de  $3\sigma$  (of algemener  $a\sigma$ ) grenzen valt (Lucas,

1982). In feite betekent dit niets anders dan een "vernaauwing" van de V ter hoogte van het laatste steekproefinterval.

En ook de andere voorstellen (Lucas, 1973, Bissell, 1979, Rowlands e.a. 1982) komen neer op een dergelijke vernaauwing van de V voor de laatste steekproeven en verschillen slechts in de preciese voorgestelde vorm. Gegevens over de performance van deze aangepaste regels zijn overeenkomstig de verwachting. Wat kleinere ARL-waarden voor de grotere afwijkingen ten koste van een hele kleine afname van de ARL in de niet verstoorde toestand.

Een iets andere wijziging is voorgesteld door Lucas en Crosier (1982) en betreft het eenzijdige geval. Gaat het om een situatie waarin gecontroleerd wordt op toename van de te controleren proceseigenschap, dan nemen zij als beginwaarde voor de cusum niet 0, maar een positieve waarde  $s$ . Dus  $S_0' = s$ . Is het proces in niet verstoorde toestand dan zal de invloed van deze "head-start" in doorsnee snel zijn genivelleerd. Alleen wanneer er al direkt bij de start sprake is van een te grote waarde van de betreffende proceseigenschap zal de bovengrens H gemiddeld genomen sneller worden bereikt. Anders dan bij de andere variaties heeft deze dus geen invloed als de procesverstoring zich voordoet terwijl de controle met de cusumkaart al een tijdje bezig is. Het praktische belang van deze regel beperkt zich dan ook tot die processen, waar er bij een nieuwe start van de cusum bijvoorbeeld na een corrigerende actie, een redelijke kans is dat het proces (nog) verstoord is.

#### Slotopmerkingen

Uit het onderzoek naar de ARL van cusumkaarten en de vergelijking daarvan komt duidelijk naar voren dat de cumulatieve som kaarten afgaand op deze eigenschappen in doorsnee de voorkeur verdienen. Het praktische bezwaar van de cusumkaarten is altijd geweest, dat het gebruik op de werkvloer ingewikkelder is dan dat van de gewone regelkaart, waar een verkregen resultaat direkt kan worden geregistreerd. Door de sterk toegenomen mogelijkheden van direkte automatische verwerking van de gegevens op de werkvloer, verliest dit

bezwaar aan kracht en lijkt toepassing van de cusumkaart op ruimere schaal gerechtvaardigd.

Zoals ook uit het voorgaande kan worden opgemaakt is tot nu toe de meeste aandacht uitgegaan naar cusumkaarten voor controle op het procesgemiddelde met bovendien meestal de aanname dat de procesinherente variatie normaal verdeeld is. Run lengte gegevens zijn in voldoende mate beschikbaar. Wat in deze situatie nog wel aandacht verdient gezien de praktische betekenis daarvan, is de invloed van afhankelijkheid tussen opeenvolgende  $X_i$  en het ontwerp van modellen, waarbinnen een afweging mogelijk is van de (economische) gevolgen van de verschillende typen fouten. Het artikel van Chiu (1974) kan voor dit laatste als eerste aanzet worden beschouwd.

Andere, uit het oogpunt van procesbeheersing interessante grootheden (processpreiding, fractie fouten etc.) zijn minder uitgebreid bestudeerd. Wel zijn diverse voorstellen voor cusum-schema's gedaan (zie bijv. Page, 1955; Johnson en Leone, 1962; Johnson, 1966; Hawkins, 1981; en de uitgave van het British Standards Institution, 1980/1981). Maar voor die schema's is nog minder bekend over hun eigenschappen in termen van ARL en runlengte.

## Literatuur

- Alderliesten, M. en R. van Splunter (1983) - Cudif charts for detecting systematic differences between duplicate determinations.  
**Kwantitatieve Methoden** 12 p.65-78.
- Bagshaw, M. en R.A. Johnson (1975) - The effect of serial correlation on the performance of cusum tests II. **Technometrics** 17 p.73-80.
- Barnard, G.A. (1959) - Control charts and stochastic processes.  
**J.R. Statist. Soc. B** 21 p.239-270.
- Bhattacharyya, G.K. en R.A. Johnson (1968) - Nonparametric tests for shift at an unknown time point. **Ann. Math. Stat.** 39  
p.1731-1743.
- Bissell, A.F. (1969) - Cusum techniques for quality control.  
**Appl. Statist.** 18 p.1-25.
- (1979) - A semi parabolic mask for cusum charts. **The Statistician** 28  
p.1-7.
- British Standards Institution (1980, 1981) Guide to data analysis and quality control using cusum techniques. BS 5703 Part 1-3.
- Brook, D. en D.A. Evans (1972) - An approach to the probability distribution of cusum run length. **Biometrika** 59 p.530-549.
- Chernoff, H. en S. Zacks (1964) - Estimating the current mean of a normal distribution which is subjected to change in time.  
**Ann. Math. Stat.** 34 p.999-1018.
- Chiu, W.K. (1974) - The economic design of cusum charts for controlling normal means. **Appl. Statist.** 23 p.420-433.
- Deming, W.E. (1982) - **Quality Productivity and Competitive Position.**  
MIT Press, Cambridge.

- van Dobben de Bruijn, C.S. (1968) - **Cumulative sum tests: theory and practice.** Griffins, Londen.
- Ewan, W.D. en K.W. Kemp (1960) - Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results. **Biometrika** 47 p.363-380.
- Guel, A.L. en S.M. Wu (1971) - Determination of A.R.L. and a contour nomogram for cusum charts to control normal mean. **Technometrics** 13 p.221-230.
- Goldsmith, P.L. en H. Whitfield (1961) - Average Run Lengths in cumulative chart quality control schemes. **Technometrics** 3 p.11-20.
- Hawkins, D.M. (1981) - A cusum for a scale parameter. **J. Qual. Techn.** 13 p.228-231
- Johnson, N.L. (1966) - Cumulative sum control charts and the Weibull distribution. **Technometrics** 8 p.481-491.
- en F.C. Leone (1962) - Cumulative sum control charts: mathematical principles applied to their construction and use. **Ind. Qual. Control**, June p.15-21; July p.29-36; Aug. p.22-28.
- Johnson, R.A. en M. Bagshaw (1974) - The effect of serial correlation on the performance of cusum tests. **Technometrics** 16 p.103-112.
- Kemp, K.W. (1961) - The average run length of a cumulative sum chart when a V-mask is used. **J.R. Statist. Soc. B** 23 p.149-153.
- Khan, R.A. (1978) - Wald's approximations to the average run length in cusum procedures. **J. Stat. Pl. Inf.** 2 p.63-77.
- (1984) - On cumulative sum procedures and the SPRT with applications. **J.R. Statist. Soc. B** 46 p.79-85.
- Lucas, J.M. (1973) - A modified V-mask control scheme. **Technometrics** 15 p.833-847.

- (1982) - Combined Shewhart-cusum quality control schemes.  
**J. Qual. Techn.** 14 p.51-59.
  
- en R.B. Crosier (1982) - Fast initial response for cusum quality control schemes: give your cusum a head start.  
**Technometrics** 24 p.199-205.
  
- Mahon, B.H. (1977) - Statistics and decisions: the importance of communication and the power of graphical representation.  
**J.R. Statist. Soc. A** 140 p. 298-323.
  
- North, W.R.S. (1980) - The quangle: a modification of the cusum chart.  
**Appl. Statist.** 31 p.155-158.
  
- Page, E.S. (1954) - Continuous inspection schemes. **Biometrika** 41  
p.100-115.
  
- (1955) - A test for a change in a parameter occurring at an unknown point. **Biometrika** 42 p.523-526.
  
- Pettitt, A.N. (1979) - A nonparametric approach to the change point problem. **Appl. Statist.** 28 p.126-135.
  
- Reynolds, M.R. (1975) - Approximations to the average run length in cumulative sum control charts. **Technometrics** 17 p.65-71.
  
- Rowlands, R.J., A.B. Nix; M.A. Abdollahian en K.W. Kemp (1982) - Snub nosed V-mask control schemes. **The Statistician** 31 p.133-142.
  
- Sen, A. en M.S. Srivastava (1975) - Some one-sided tests for a change in level. **Technometrics** 17 p.61-64.
  
- Weindling, J.I., S.B. Littauer en J.I. de Oliveira (1971) - Gemiddelde aktietijd van de x-controlekaart met waarschuwingsgrenzen.  
**Sigma** 17 p.209-214.
  
- Woodall, W.H. (1983) - The distribution of the run length of one sided cusum procedures for continuous random variables. **Technometrics** 25 p.295-301.

Zacks, S. (1981) - The probability distribution and the expected value of a stopping variable associated with one-sided cusum procedures for non-negative integer valued random variables. **Comm. Statist. Theor. Meth. A** 10 p.2245-2258.