Bijnaperiodieke multiplicatieve functies

BIJNAPERIODIEKE MULTIPLICATIEVE FUNCTIES

DOOR

N. G. DE BRUIJN

(Den Haag).

§ 1.

Verschillende onderzoekers [1]) hebben noodige en voldoende voorwaarden aangegeven, opdat een multiplicatieve getaltheoretische functie in den zin van BESICOVITCH bijnaperiodiek is. Slechts in het geval van de positieve multiplicatieve functies vonden zij voorwaarden, die tegelijk noodig en voldoende zijn.

In dit artikel beschouwen we multiplicatieve functies die in den zin van H. BOHR bijnaperiodiek zijn. Het is gelukt deze met behulp van een DIRICHLET-karakter volledig te karakteriseeren. Vooraf gaan enkele definities.

Een getaltheoretische (d.w.z. voor alle natuurlijke getallen n gedefiniëerde) functie $f(n)$ (die complexe waarden mag aannemen) heet multiplicatief, als $f(1) = 1$ en $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$ voor ieder paar n_1, n_2 van onderling ondeelbare natuurlijke getallen.

Een getaltheoretische functie heet in het volgende bijnaperiodiek (in den zin van BOHR), als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $L > 0$ bestaat, zóó dat er bij iedere $x > 0$ in het interval $(x, x + L)$ minstens één ε-verschuivingsgetal ligt. Een

[1]) M. KAC, E. R. VAN KAMPEN and AUREL WINTNER, RAMANUJAN sums and almost periodic functions, Amer. Journ. of Math. **62** (1940) 107—114; E. R. VAN KAMPEN and A. WINTNER, On the almost periodic behaviour of multiplicative number-theoretical functions, ibid. 613—626; P. ERDÖS and A. WINTNER, Additive functions and almost periodicity (B^2), ibid. 635—645; PH. HARTMAN and A. WINTNER, On the almost periodicity of additive number-theoretical functions, ibid. 753—758.

getal τ heet hierbij ε-verschuivingsgetal, als τ geheel en positief is, en voor elk natuurlijk getal y geldt $|f(y+\tau)-f(y)|<\varepsilon$. Deze definitie wijkt wegens de beperking tot positieve y ietwat van de gebruikelijke af; men gaat aan de hand van § 2 echter gemakkelijk na, dat elke in dezen zin bijnaperiodieke multiplicatieve functie voor niet-positieve n zoo kan worden gedefiniëerd, dat zij in gebruikelijken zin bijnaperiodiek is en daarbij multiplicatief blijft [1]).

Ook wanneer het niet uitdrukkelijk is vermeld, stellen latijnsche letters (uitgezonderd functiesymbolen) alsmede de letter τ (verschuivingsgetallen) natuurlijke getallen voor, terwijl p steeds een priemgetal beteekent.

Het hoofdresultaat van dit artikel luidt nu:

Stelling I. *Een multiplicatieve getaltheoretische functie $f(n)$ is dan en alleen dan bijnaperiodiek, als er een natuurlijk getal N en een restkarakter χ mod N bestaat, zóó dat*

(1) *voor elke p/N geldt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(p^n)=0$,

(2) *voor de overige p geldt* $(G(m)=\bar{\chi}(m)f(m))$:

$$\lim_{n\to\infty} G(p^n) \textit{ bestaat en is } \neq 0,$$

(3) *als bij niet op N deelbare p de bovenste grens van de rij getallen $|G(p^n)-1|$ $(n=1,2,3,\ldots)$ door $b(p)$ wordt voorgesteld, $\Sigma\, b(p)$ convergeert.*

We zullen verder zien dat een bijnaperiodieke multiplicatieve functie ook grensperiodiek is, d.w.z. dat er bij iedere $\varepsilon>0$ een τ is, zóó, dat de getallen $\tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ ε-verschuivingsgetallen zijn.

Stelling I vertoont een sterke analogie met het zuiver periodieke geval, dat natuurlijk veel eenvoudiger is, doch dat wij terwille van de overeenkomst vermelden:

Stelling I*a*. *Een multiplicatieve getaltheoretische functie is dan en alleen dan zuiver periodiek, als er een natuurlijk getal N en een restkarakter χ mod N bestaat, zóó dat*

(1*a*) *voor alle p/N geldt: vanaf zekere n is $f(p^n)=0$*

(2*a*) *voor de overige p geldt $(G(m)=\bar{\chi}(m)f(m))$:*

vanaf zekere n is $G(p^n)$ constant en $\neq 0$,

---

[1]) Men neme daartoe (met de notatie van Stelling I) $f(-n)=\chi(n)f(n)$ en $f(0)=0$ als $N>1$; $f(0)=\prod\limits_{p}\lim\limits_{n\to\infty} G(p^n)$ als $N=1$.

(3*a*) *slechts voor een eindig aantal priemgetallen p bestaan er een of meer exponenten n met $G(p^n) \neq 1$.*

Opmerkelijk is, dat Stelling I*a* gemakkelijk uit Stelling I kan worden afgeleid:

Zoowel uit de periodiciteit als uit de voorwaarden (1*a*) t.e.m. (3*a*) volgt

(4) $f(n)$ neemt slechts eindig veel verschillende waarden aan.

Verder is een bijnaperiodieke functie die aan (4) voldoet, zuiver periodiek, terwijl men gemakkelijk uit de voorwaarden (1) t.e.m. (4) de voorwaarden (1*a*) t.e.m. (3*a*) afleidt.

Door beperking tot volledig multiplicatieve functies ($f(n)$ heet volledig multiplicatief, als $f(1) = 1$ en voor alle natuurlijke getallen n_1 en n_2 geldt $f(n_1 n_2) = f(n_1)f(n_2)$) volgt uit Stelling I onmiddellijk [1]):

Een volledig multiplicatieve functie $f(n)$ is dan en alleen dan bijnaperiodiek, als er een natuurlijk getal N en een karakter χ mod N bestaat, zóó dat

$$|f(p)| < 1 \quad \textit{als } p/N,$$
$$f(p) = \chi(p) \quad \textit{als } (p, N) = 1.$$

Zeer eenvoudig wordt het resultaat voor de door Wintner c.s. meermalen beschouwde z.g. sterk multiplicatieve functies (d.z. multiplicatieve functies met $f(p) = f(p^2) = f(p^3) \ldots$ voor alle p):

Een sterk multiplicatieve functie is dan en alleen dan bijnaperiodiek, als $\sum_p |f(p) - 1|$ convergeert [2]).

§ 2.

In deze paragraaf bewijzen we het eerste gedeelte van Stelling I: *Een multiplicatieve functie die aan de voorwaarden* (1) *t.e.m.* (3) *voldoet, is bijnaperiodiek, en zelfs grensperiodiek.*

---

[1]) Dit resultaat werd zonder bewijs medegedeeld in no. X van de bij mijn dissertatie (Amsterdam V. U. 1943) gevoegde stellingen.

[2]) Opmerking bij de correctie: Deze stelling komt voor in een door P. Erdös aangevulde herdruk van het op blz. 81 genoemde artikel van Kac, van Kampen en Wintner, Studia Mathematica **9**, blz. 52.

Bewijs. Uit (3) volgt gemakkelijk dat $|f(n)|$ naar boven begrensd is; α zij de bovenste grens van $|f|$. Dan is $\alpha \geqq |f(1)| = 1$. Verder zij $0 < \varepsilon < 1$. Wegens (3) bestaat er een x met

$$\sum_{p>x} b(p) < \frac{\varepsilon}{8\alpha^2}. \qquad (5)$$

We zorgen ervoor, dat $x > N$ is. Bij iedere $p \leqq x$ bepalen we vervolgens in overeenstemming met (1) en (2) een exponent $\lambda_0(p)$ zóó, dat

$$|f(p^\lambda) - \chi(p^\lambda) l(p)| < \frac{\varepsilon}{8x\alpha^2} \text{ voor } \lambda \geqq \lambda_0(p). \qquad (6)$$

Hierin is $l(p) = \lim\limits_{n\to\infty} G(p^n)$ als $(p, N) = 1$, $l(p) = 0$ als p/N.

Is verder $\lambda_1(p)$ het aantal factoren p dat in N opgaat, dan zetten we

$$\lambda(p) = \lambda_0(p) + \lambda_1(p) \quad (p \leqq x) \qquad (7)$$
$$\lambda(p) = 0 \quad (p > x)$$
$$\tau = \prod_p p^{\lambda(p)}.$$

We zullen aantoonen dat de getallen $a\tau$ $(a = 1, 2, 3, \ldots)$ ε-verschuivingsgetallen zijn, en laten daartoe zien dat voor alle a en y geldt

$$|f(y + a\tau) - f(y)| < \varepsilon \qquad (8)$$

Bij iedere p geven we het aantal factoren p in y resp. $y + a\tau$ door $\mu(p)$ resp. $\nu(p)$ aan. Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{als } \mu(p) < \lambda(p), \text{ dan is } \nu(p) = \mu(p); \\ \text{als } \mu(p) \geqq \lambda(p), \text{ dan is } \nu(p) \geqq \lambda(p). \end{array}\right\} \qquad (9)$$

We onderscheiden nu twee gevallen:

1°. Er is een p met p/N (dus $p < x$) en $\mu(p) \geqq \lambda_0(p)$, dus wegens (7) en (9) is ook $\nu(p) \geqq \lambda_0(p)$. Dan is

$$|f(y)| = |f(yp^{-\mu(p)})| \,.\, |f(p^{\mu(p)})| < \alpha \,.\, \frac{\varepsilon}{8x\alpha^2} = \frac{\varepsilon}{8x\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Evenzoo geldt $|f(y + a\tau)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus (8) is bewezen.

2°. Voor alle p met p/N geldt $\mu(p) < \lambda_0(p)$. Wegens (9) is [1])

$$|f(y+a\tau)-f(y)|=|f(\prod_{\mu(p)<\lambda(p)} p^{\mu(p)})|.|\prod_{\mu(p)\geqq\lambda(p)} f(p^{\nu(p)})-\prod_{\mu(p)\geqq\lambda(p)} f(p^{\mu(p)})|. \quad (10)$$

We hebben

$$\tau \prod_{\mu(p)<\lambda(p)} p^{-\mu(p)} \equiv 0(N), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

want als p/N, is het aantal factoren p in het linkerlid $= \lambda(p) - \mu(p) > \lambda(p) - \lambda_0(p) = \lambda_1(p)$. Uit (11) volgt verder wegens $y + a\tau \equiv y(\tau)$, dat

$$\prod_{\mu(p)\geqq\lambda(p)} p^{\nu(p)} \equiv \prod_{\mu(p)\geqq\lambda(p)} p^{\mu(p)} \quad (\text{mod } N).$$

Daar voor elke p met p/N geldt $\mu(p) < \lambda_0(p) \leqq \lambda(p)$, zijn verder beide leden met N onderling ondeelbaar; voor beide leden heeft χ dus dezelfde van nul verschillende waarde. Nu levert (10) op

$$|f(y+a\tau)-f(y)| \leqq \alpha \,|\prod_{\mu(p)\geqq\lambda(p)} G(p^{\nu(p)}) - \prod_{\mu(p)\geqq\lambda(p)} G(p^{\mu(p)})|. \quad (12)$$

Gemakshalve formuleeren we de eenvoudig te bewijzen

Hulpstelling 1. *Zijn* $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$; $\delta_1, \ldots, \delta_h$ *complexe getallen met* $|\delta_1| + \ldots + |\delta_h| \leqq 1$, *en zijn voor* $k = 1, \ldots, h$ *alle producten van* k *verschillende* σ's *in absolute waarde* $\leqq \alpha$, *dan is*

$$|(\sigma_1+\delta_1)\ldots(\sigma_h+\delta_h)-\sigma_1\ldots\sigma_h| \leqq 2\alpha(|\delta_1| + \ldots + |\delta_h|).$$

Zijn $p_1, \ldots, p_h$ de verschillende priemgetallen met $\mu(p) \geqq \lambda(p)$, dan zetten we

$$\sigma_i = G(p_i^{\mu(p_i)}), \quad \delta_i = G(p_i^{\nu(p_i)}) - \sigma_i \quad (i = 1, \ldots, h).$$

Als $p_i \leqq x$, dan is volgens (6) (wegens $\mu(p_i) \geqq \lambda_0(p_i)$ en $\nu(p_i) \geqq \lambda_0(p_i)$): $|\delta_i| < \frac{1}{4}\varepsilon x^{-1}\alpha^{-2}$.

Verder is voor alle i

$$|\delta_i| \leqq |G(p_i^{\nu(p_i)}) - 1| + |G(p_i^{\mu(p_i)}) - 1| \leqq 2b(p),$$

[1]) In de producten doorloopt p alle priemgetallen die aan de onder het productsymbool aangegeven voorwaarden voldoen.

dus volgens (5):

$$\sum_{\substack{1 \leqq i \leqq h \\ p_i > x}} | \delta_i | < \frac{\varepsilon}{4\alpha^2}.$$

Daar het aantal priemgetallen p_i met $p_i \leqq x$ kleiner dan x is, is

$$\sum_{i=1}^{h} | \delta_i | < x \, . \, \frac{\varepsilon}{4x\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{4\alpha^2} = \frac{\varepsilon}{2\alpha^2} < 1.$$

Hulpstelling 1 levert nu te tezamen met (12)

$$| f(y + a\tau) - f(y) | < \alpha \, . \, 2\alpha \, . \, \frac{\varepsilon}{2\alpha^2} = \varepsilon.$$

§ 3.

Minder eenvoudig is het bewijs van het tweede gedeelte van Stelling 1: *Bij een multiplicatieve bijnaperiodieke functie $f(n)$ bestaat een natuurlijk getal N en een restkarakter χ mod N, zóó dat aan* (1) *t.e.m.* (3) *is voldaan.*

Uit de bijnaperiodiciteit volgt, dat $| f |$ begrensd is; de bovenste grens van $| f |$ geven we weer met α aan. Verder zij bij ieder priemgetal p de onderste grens van de rij 1, $| f(p) |$, $| f(p^2) |, \ldots$ door $g(p)$ voorgesteld. Dan geldt

Hulpstelling 2. *Voor hoogstens een eindig aantal p's is $g(p) = 0$. Het product van deze p's noemen we P (evt. $P = 1$). Verder is*

$$\beta = \prod_{(p, \mathrm{P})=1} g(p) > 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Voor $(n, \mathrm{P}) = 1$ *geldt* $| f(n) | \geqq \beta$.

Bewijs. L zij een natuurlijk getal zóó, dat er in ieder interval $x \leqq \tau < x + \mathrm{L}$ een getal τ ligt, dat verschuivingsgetal is bij $\varepsilon = \frac{1}{2}$. We laten nu zien: *Zijn $m_1, \ldots, m_{\mathrm{L}}$ twee aan twee onderling ondeelbare natuurlijke getallen, dan is voor minstens één ervan* $| f(m_i) | > \frac{1}{2}\alpha^{-1}$.

Zij nl. y een oplossing van het stelsel

$$y + k \equiv m_k \pmod{m_k^2} \quad (k = 1, \ldots, \mathrm{L}).$$

Onder de getallen $y, y + 1, \ldots, y + \mathrm{L} - 1$ bevindt zich minstens één τ, die verschuivingsgetal is bij $\frac{1}{2}$, dus er is een k met

$1 \leqq k \leqq L$ en $|f(y+k) - f(1)| < \frac{1}{2}$, dus $|f(y+k)| > \frac{1}{2}$.

We zetten bij deze k

$$y + k = m_k (m_k v + 1).$$

Daar $(m_k, m_k v + 1) = 1$ is, geldt

$$\tfrac{1}{2} < |f(y+k)| = |f(m_k)| \cdot |f(m_k v + 1)| \leqq \alpha |f(m_k)|,$$

dus $|f(m_k)| > \frac{1}{2}\alpha^{-1}$.

Is $g(p) = 0$, dan is er een macht $m = p^\lambda$ van p met $|f(p^\lambda)| < \frac{1}{2\alpha}$; blijkens het voorgaande kan dat hoogstens bij $L - 1$ verschillende priemgetallen het geval zijn.

Vervolgens onderstellen we $\prod_{(p, P)=1} g(p) = 0$. Dan zijn er priemgetallen $p_{11}, \ldots, p_{1s_1}, p_{21}, \ldots, p_{2s_2}, \ldots, p_{L1}, \ldots, p_{Ls_L}$ (alle verschillend) met

$$\prod_{j=1}^{s_k} g(p_{kj}) < \frac{1}{4\alpha} \quad (k = 1, \ldots, L). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Bij iedere k en j $(1 \leqq k \leqq L,\ 1 \leqq j \leqq s_k)$ is verder een λ_{kj} te vinden met

$$|f(p_{kj}^{\lambda_{kj}})| \leqq 2^{s_k^{-1}} g(p_{kj}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zetten we nog $m_k = \prod_{j=1}^{s_k} p_{kj}^{\lambda_{kj}}$, dan is wegens (14) en (15)

$$|f(m_k)| \leqq \tfrac{1}{2}\alpha^{-1} \ (k = 1, \ldots, L). \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

De getallen $m_1, \ldots, m_L$ zijn bovendien twee aan twee onderling ondeelbaar, zoodat (16) in strijd is met de bewering aan het begin van dit bewijs. Hiermee is (13) bewezen.

Tenslotte is voor iedere n:

$$|f(n)| \geqq \prod_{p/n} g(p) \geqq \beta,$$

want voor alle p is $g(p) \leqq 1$.

Hulpstelling 3. *Zijn m en n natuurlijke getallen en is m even, dan is er minstens één restklasse x mod n met $(x, n) = 1$, $(m + x, n) = 1$.*

B e w i j s. Het is voldoende dit te bewijzen voor het geval, dat n een macht van een priemgetal is: $n = p^\lambda$. Dan voldoet minstens één van de waarden $x = 1$ of $x = 2$.

H u l p s t e l l i n g 4. *Is* $\varepsilon > 0$, τ *een even verschuivingsgetal bij* ε, *zijn* a *en* x *natuurlijke getallen met* $(a, P) = 1$ *en* $(a, x) = 1$, *dan is*

$$|f(x + a\tau) - f(x)| \leqq \beta^{-1}\varepsilon.$$

B e w i j s. Zij ε_1 een van ε onafhankelijk positief getal en $\tau_1{}^*$ een verschuivingsgetal bij ε_1. We splitsen in $\tau_1{}^*$ alle niet op a deelbare factoren af: $\tau_1{}^* = \tau_1\tau_2$, waarin $(\tau_1, a) = 1$ is, terwijl τ_2 uitsluitend priemfactoren van a bevat. We kunnen nu een natuurlijk getal z bepalen met

$$\left.\begin{array}{c}(z, aPx(x+a\tau)) = 1,\ (zx+\tau,\ a) = 1,\ za \equiv -1\ (\tau_1 P),\\ 0 < z \leqq a\tau_1 Px(x+a\tau).\end{array}\right\} \quad (17)$$

Dit zien we als volgt in. Wegens $(a, x) = 1$ is er een y met $xy \equiv 1(a)$. Volgens hulpstelling 3 is er, daar $y\tau$ even is, een getal z_0 met $(z_0, a) = 1$ en $(z_0 + y\tau, a) = 1$. Uit de laatste relatie volgt verder $(xz_0 + xy\tau, a) = 1$, dus $(xz_0 + \tau, a) = 1$.

We bepalen nu een getal z_1 met

$$z_1 \equiv z_0 \quad (a), \quad z_1 a \equiv -1 \quad (\tau_1 P).$$

Dit is mogelijk, daar $(a, \tau_1 P) = 1$. Uit $(z_0, a) = 1$ volgt bovendien dat $(z_1, a\tau_1 P) = 1$. Er bestaat dus een getal z met

$$z \equiv z_1(a\tau_1 P), \quad (z, x(x + a\tau)) = 1, \quad 0 < z \leqq a\tau_1 Px(x + a\tau).$$

Gemakkelijk gaat men na, dat deze z aan (17) voldoet. Zetten we $za = b\tau_1 P - 1$, dan is

$$0 < b \leqq 2a^2x(x + a\tau). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Aangezien $(z, x + a\tau) = 1$ en $(z, x) = 1$, is

$$|f(z)| \cdot |f(x + a\tau) - f(x)| = |f(zx + za\tau) - f(zx)|.$$

Verder is wegens $(z, P) = 1$: $|f(z)| \geqq \beta$ (Hulpst. 2), dus

$$|f(x+a\tau) - f(x)| \leqq \beta^{-1}|f(zx + b\tau_1 P\tau - \tau) - f(zx + b\tau_1 P\tau)| + \\ + \beta^{-1}|f(zx + b\tau_1 P\tau) - f(zx)|. \quad (19)$$

De eerste term van het rechterlid is, daar τ verschuivingsgetal bij ε is, $\leqq \beta^{-1}\varepsilon$. Voor de schatting van de tweede term merken we op, dat $(a, \mathrm{P}) = 1$, $(a, zx) = 1$, $(a, zx + b\tau_1\mathrm{P}\tau) = 1$ (want $b\tau_1\mathrm{P}\tau = za\tau + \tau \equiv \tau(a)$ en $(a, zx + \tau) = 1$). De priemfactoren van τ_2 zijn alle op a deelbaar, dus ook τ_2 is met $\mathrm{P}zx(zx + b\tau_1\mathrm{P}\tau)$ onderling ondeelbaar. Ergo $|f(\tau_2)| \geqq \beta$ en

$$|f(zx + b\tau_1\mathrm{P}\tau) - f(zx)| \leqq \beta^{-1}|f(zx\tau_2 + b\tau_1{}^*\mathrm{P}\tau) - f(zx\tau_2)| \leqq$$

$$\leqq \beta^{-1} \sum_{k=1}^{b\mathrm{P}\tau} |f(zx\tau_2 + k\tau_1{}^*) - f(zx\tau_2 + k\tau_1{}^* - \tau_1{}^*)| \leqq \beta^{-1} b\mathrm{P}\tau\varepsilon_1.$$

Uit (19) en (18) volgt nu

$$|f(x + a\tau) - f(x)| \leqq \beta^{-1}\varepsilon + 2\beta^{-2}a^2x(x + a\tau)\mathrm{P}\tau\varepsilon_1.$$

Daar $2\beta^{-2}a^2x(x + a\tau)\mathrm{P}\tau$ niet van ε_1 afhangt, volgt hieruit het gestelde wegens de willekeur van ε_1.

Hulpstelling 5. *Bij iedere ε is er een getal τ zóó, dat alle getallen $\tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ verschuivingsgetallen bij ε zijn (m.a.w. f is grensperiodiek). Een τ met deze eigenschap noemen we een ε-periode.*

Bewijs. Zij τ' een verschuivingsgetal bij $\frac{1}{4}\varepsilon\beta$, dus $\tau_1 = 2\tau'$ een even verschuivingsgetal bij $\frac{1}{2}\varepsilon\beta$. We zullen nu bewijzen dat voor alle c en x geldt $(\tau = 2\tau_1)$

$$|f(x + c\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon. \quad \ldots \quad (20)$$

Zetten we $n = \mathrm{P}(x + 2c\tau_1)x$, dan is er volgens hulpst. 3 een b met $(b, n) = 1$, $(b + 2c, n) = 1$. We passen nu tweemaal hulpst. 4 toe:

$$|f(x + 2c\tau_1 + b\tau_1) - f(x + 2c\tau_1)| \leqq \beta^{-1} \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon\beta = \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

en $|f(x + (2c + b)\tau) - f(x)| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Uit deze ongelijkheden volgt (20).

Hulpstelling 6. *Is $0 < \varepsilon < 1$, en τ een ε-periode, dan bestaat er een restkarakter ψ mod τ zóó, dat er bij elke $\varepsilon' > 0$ een $Q = Q(\varepsilon')$ te vinden is, waarvoor geldt*

$$|f(y) - \psi(y)| < \varepsilon' \text{ voor alle } y \text{ met } (y, Q\tau) = 1.$$

Bewijs. Daar τ een ε-periode is, is voor alle y met $y \equiv 1(\tau)$

$$|f(y) - 1| < \varepsilon < 1.$$

Verstaan we onder $\mathrm{Log}\, f(y)$ de hoofdwaarde van de log, en is $y_1 \equiv y_2 \equiv 1(\tau)$, $(y_1, y_2) = 1$, dan geldt

$$\mathrm{Log}\, f(y_1) + \mathrm{Log}\, f(y_2) \equiv \mathrm{Log}\, f(y_1y_2) \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i).$$

Wegens $|\operatorname{Im} \operatorname{Log} f(y)| < \frac{1}{2}\pi$ voor $y=y_1$, $y=y_2$ en $y=y_1y_2$, volgt hieruit

$$\operatorname{Log} f(y_1) + \operatorname{Log} f(y_2) = \operatorname{Log} f(y_1y_2) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Zij nu γ de bovenste grens van de getallen $\operatorname{Re} \operatorname{Log} f(k\tau+1)$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots$ en Q_1 een getal met $Q_1 \equiv 1(\tau)$, $\operatorname{Re} \operatorname{Log} f(Q_1) > \gamma - \frac{1}{2}\varepsilon''$ ($\varepsilon'' = \log(1 + \frac{1}{2}\varepsilon'\beta)$). Voor $y \equiv 1(\tau)$, $(y, Q_1) = 1$ geldt nu wegens (21)

$$\operatorname{Re} \operatorname{Log} f(y) = \operatorname{Re} \operatorname{Log} f(Q_1y) - \\ - \operatorname{Re} \operatorname{Log} f(Q_1) < \gamma - \gamma + \tfrac{1}{2}\varepsilon'' = \tfrac{1}{2}\varepsilon''.$$

Op dezelfde manier bepalen we getallen Q_2, Q_3, Q_4, zóó dat

$$\operatorname{Re} \operatorname{Log} f(y) > -\tfrac{1}{2}\varepsilon'' \text{ voor } y \equiv 1(\tau),\ (y, Q_2) = 1,$$
$$\operatorname{Im} \operatorname{Log} f(y) < \tfrac{1}{2}\varepsilon'' \text{ voor } y \equiv 1(\tau),\ (y, Q_3) = 1,$$
$$\operatorname{Im} \operatorname{Log} f(y) > -\tfrac{1}{2}\varepsilon'' \text{ voor } y \equiv 1(\tau),\ (y, Q_4) = 1.$$

Zetten we nu $Q(\varepsilon') = Q = Q_1Q_2Q_3Q_4$, dan is voor $y \equiv 1(\tau)$, $(y, Q) = 1$

$$|\operatorname{Log} f(y)| < \varepsilon'',$$

zoodat

$$|f(y) - 1| < \tfrac{1}{2}\varepsilon'\beta. \quad (22)$$

Is vervolgens $x_1 \equiv x_2(\tau)$, $(x_1, \tau Q) = (x_2, \tau Q) = 1$ en z een getal met $zx_1 \equiv zx_2 \equiv 1(\tau)$, $(z, x_1x_2PQ) = 1$ (P heeft de beteekenis uit hulpst. 1), dan is

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqq \beta^{-1}|f(zx_1)-f(zx_2)| < \beta^{-1} . 2 . \tfrac{1}{2}\varepsilon'\beta = \varepsilon'. \quad (23)$$

Zij nu $(x, \tau) = 1$, en $x_1, x_2, x_3, \ldots$ een rij twee aan twee onderling ondeelbare getallen uit de restklasse $x \bmod \tau$, dan is er bij iedere ε' een n aan te geven, zóó dat voor $i > n$, $j > n$ geldt $(x_i, \tau Q(\varepsilon')) = (x_j, \tau Q(\varepsilon')) = 1$, dus

$$|f(x_i) - f(x_j)| < \varepsilon'.$$

Volgens het kenmerk van CAUCHY bestaat dus $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i)$; deze limiet noemen we $\psi(x)$. Gemakkelijk ziet men in dat $\psi(x)$ alleen van de restklasse van $x \bmod \tau$ en niet van de keuze van de rij (x_i) afhangt. Toepassing van (23) levert

$$|f(x) - \psi(x)| < \varepsilon' \text{ voor } (x, \tau Q(\varepsilon')) = 1.$$

Uit (22) blijkt $\psi(1) = 1$. Zetten we nog $\psi(x) = 0$ als $(x, \tau) \neq 1$, dan behoeven we nog slechts aan te toonen dat ψ volledig multiplicatief is. Zijn x_1 en x_2 beide met τ onderling ondeelbaar, dan zijn er getallen y_1, y_2 met $(y_1, y_2) = 1$, $y_1 \equiv x_1(\tau)$, $y_2 \equiv x_2(\tau)$, $(y_1y_2, Q(\varepsilon')) = 1$, dus

$$| f(y_1) - \psi(x_1) | \leqq \varepsilon',$$
$$| f(y_2) - \psi(x_2) | \leqq \varepsilon',$$
$$| f(y_1y_2) - \psi(x_1x_2) | \leqq \varepsilon'.$$

Wegens $f(y_1y_2) = f(y_1)f(y_2)$ en de willekeur van ε' volgt hieruit $\psi(x_1x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$.

Hulpstelling 7. *Het product der priemgetallen p die aan $\liminf\limits_{n\to\infty} | f(p^n) | = 0$ voldoen stellen we door P^* voor (dus P^*/P). Dan geldt:*

1°. *Is $(c, P^*) \neq 1$, dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f(c^n) = 0$.*

2°. *Is $(c, P^*) = 1$, dan bestaat*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(c^{n+1})}{f(c^n)} \quad \textit{en is} \neq 0.$$

Stellen we deze limiet door $\chi(c)$ voor, dan bestaat ook

$$\lim_{n\to\infty} f(c^n)\chi(c)^{-n} \quad \textit{en is} \neq 0.$$

Zetten we nog $\chi(c) = 0$ als $(c, P^*) \neq 1$, dan is χ een restkarakter modulo een getal N, dat de priemfactoren van P^* en geen andere bevat.

Bewijs. Zij weer $0 < \varepsilon < 1$ en τ een ε-periode; ε en τ blijven in het volgende vast. Vervolgens is ε_1 een positief getal waarover later nog kan worden beschikt; $Q = Q(\varepsilon_1)$ een daarbij volgens hulpst. 6 behoorend getal en τ_1 een ε_1-periode. We zetten

$$\tau_1 = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\lambda_i} \quad \text{en} \quad k_0 = \operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq s} \lambda_i.$$

Bij ieder natuurlijk getal c bestaat er nu een b met $(b, \tau Qc) = 1$ en

$$c^{k+n} \equiv c^k b^n(\tau_1) \quad \textit{voor } k \geqq k_0 \textit{ en } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Bij iedere i $(1 \leqq i \leqq s)$ is nl. de congruentie

$$c^{k+1} \equiv c^k b_i \ (p_i^{\lambda_i})$$

oplosbaar met niet door p_i deelbare b_i (als $c \not\equiv 0(p_i)$, dan is dit een eenduidig oplosbare congruentie; als p_i/c dan voldoet $b_i = 1$ wegens $k \geqq \lambda_i$). Er bestaat nu een b met

$$(b,\ \tau Qc) = 1 \text{ en } b \equiv b_i(p_i^{\lambda_i}) \quad (1 \leqq i \leqq s).$$

Deze b voldoet aan

$$c^{k+1} \equiv c^k b\ (\tau_1).$$

Door iteratie verkrijgt men hieruit (24).

Aangezien τ_1 een ε_1-periode is, geldt

$$|\,f(c^{k+n}) - f(c^k b^n)\,| \leqq \varepsilon_1 \quad (k \geqq k_0,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Daar $(b, c) = 1$ is, is $f(c^k b^n) = f(c^k)f(b^n)$. Verder is volgens hulpst. 6 $|\,f(b^n) - \psi(b^n)\,| \leqq \varepsilon_1$, dus

$$|\,f(c^{k+n}) - f(c^k)\psi(b^n)\,| \leqq \varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_1 \quad (k \geqq k_0,\ n \geqq 0). \quad (25)$$

1°. Is $(c,\ P^*) \neq 1$, dus $\liminf\limits_{n\to\infty} f(c^n) = 0$, dan is er een $k_1 \geqq k_0$ met $|\,f(c^{k_1})\,| < \varepsilon_1$. Uit (25) volgt nu dat voor $m \geqq \mathrm{Max}\,(k_0, k_1)$ geldt $|\,f(c^m)\,| \leqq 2\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_1$. Daar ε_1 willekeurig is, levert dit $\lim\limits_{n\to\infty} f(c^n) = 0$.

2°. We bewijzen eerst, dat er positieve getallen k_0' en δ bestaan met

$$|\,f(c^k)\,| > \delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

voor alle $k \geqq k_0'$ en c met $(c,\ P^*) = 1$. We passen daartoe hulpst. 2 toe: is $P = P^* \prod\limits_{i=1}^{r} p_i$ en $c = c_0 \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{\mu_i}$ met $(c_0, P) = 1$ (de p_i hebben een andere beteekenis dan aan het begin van dit bewijs), dan geldt $|\,f(c_0)\,| \geqq \beta$. Daar de p_i niet deelbaar op P^* zijn, is $\liminf\limits_{n\to\infty} |\,f(p_i^{\,n})\,| > 0$; bij elke i is er dus een k_i en een $\delta_i > 0$ zóó dat $|\,f(p_i^{\,k})\,| > \delta_i$ voor $k \geqq k_i$. Met $k_0' = \mathrm{Max}_{1 \leqq i \leqq r}\, k_i$ en $\delta = \beta\delta_1 \ldots \delta_r$ is nu aan (26) voldaan.

Uit (25) volgt nu voor $(c,\ P^*) = 1$ $(n = 1)$:

$$\left|\frac{f(c^{k+1})}{f(c^k)} - \psi(b)\right| < \frac{\varepsilon_1(1 + \alpha)}{\delta} \quad (k \geqq \mathrm{Max}\,(k_0, k_0')) \ . \quad (27)$$

Hierin hangt b nog van τ_1 dus van ε_1 af. We hebben echter

$\psi(b)^{\varphi(\tau)} = 1$ (φ is de indicator van EULER). Is nu $\varepsilon_1 < \dfrac{\delta}{(1+\alpha)\varphi(\tau)}$, dan is $\psi(b)$ wegens (27) eenduidig bepaald en hangt uitsluitend van c af. Zetten we nu $\chi(c) = \psi(b)$ $((c, P^*) = 1)$, dan volgt uit (27) onmiddellijk

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(c^{k+1})}{f(c^k)} = \chi(c);$$

we merken hierbij op dat het rechterlid een eenheidswortel is: $\chi(c)^{\varphi(\tau)} = 1$.

Voor voldoend kleine ε_1 is in (25) $\psi(b) = \chi(c)$, dus voor voldoend groote k

$$|f(c^{k+n})\chi(c)^{-k-n} - f(c^k)\chi(c)^{-k}| < \varepsilon_1(1+\alpha) \quad (n \geqq 0).$$

Volgens het kenmerk van CAUCHY bestaat nu $\lim\limits_{n\to\infty} f(c^n)\chi(c)^{-n}$ [1]).

Nemen we $\chi(c) = 0$ als $(c, P^*) \neq 1$, dan is $\chi(c)$ multiplicatief, aangezien f dat is. $\chi(c)$ is echter ook volledig multiplicatief, want als $(p, P^*) = 1$, dan is $(m = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\chi(p^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(p^{nm+m})}{f(p^{nm})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(p^{nm+m})}{f(p^{nm+m-1})} \cdots \lim_{n\to\infty} \frac{f(p^{nm+1})}{f(p^{nm})} = \chi(p)^m.$$

Om de periodiciteit van $\chi(c)$ te laten zien, nemen we weer $\varepsilon_1 < \dfrac{\delta}{(1+\alpha)\varphi(\tau)}$ en beweren dat dan $P^*\tau_1$ een periode van χ is. We kunnen volstaan met voor $(c, P^*) = 1$ te bewijzen $\chi(c + P^*\tau_1) = \chi(c)$. Gemakkelijk ziet men in dat aan b ook nog de beperking $(b, c + P^*\tau_1) = 1$ kan worden opgelegd. Daar b ook voldoet aan

$$(c + P^*\tau_1)^{k+n} \equiv (c + P^*\tau_1)^k b^n \pmod{\tau_1} \, (k \geqq k_0,\ n \geqq 0),$$

geldt (24), dus ook (27) zoowel voor c als voor $c + P^*\tau_1$. Aangezien, zoals eerder opgemerkt werd, $\psi(b)$ eenduidig

---

[1]) Deze limiet is niet nul, want anders was er een p met p/c en $\liminf |f(p^n)| = 0$, dus p/P^*, in strijd met $(c, P^*) = 1$.

bepaald is wegens de aan ε_1 opgelegde restrictie, is $\chi(c+P^*\tau_1) = \psi(b) = \chi(c)$. Hieruit volgt dan χ periodiek is mod $P^*\tau_1$.

Laat nu N de kleinste positieve periode van χ zijn. Alle priemfactoren van N zijn dan op P^* deelbaar: Was nl. $(p, P^*) = 1$ en p/N, $N = N'p$, dan was voor alle x ($\chi(p)$ is een eenheidswortel!)

$$\chi(x + N') - \chi(x) = \bar{\chi}(p)(\chi(xp + N) - \chi(xp)) = 0,$$

zoodat N' ook een periode zou zijn, in strijd met de minimaal eigenschap van N. Omgekeerd volgt uit p/P^* steeds p/N: Was zulks voor een p/P^* nl. niet het geval, dan was er een a met $ap \equiv 1$ (N); $\chi(p) = 0$ en $\chi(1) = 1$ leverden dan een contradictie.

Ergo: $\chi(c)$ is periodiek mod N, volledig multiplicatief en dan en alleen dan $= 0$, als c met N onderling deelbaar is; χ is dus een restkarakter mod N. Hiermee is hulpst. 7 volledig bewezen.

Hulpstelling 8. *Er bestaat een Q_0, zóó dat* $(G(m) = \bar{\chi}(m)f(m))$

$$|\, G(y) - 1 \,| < \tfrac{1}{2} \text{ voor alle } y \text{ met } (y, Q_0) = 1.$$

Bewijs. In het volgende hebben ε, τ en ψ de beteekenis uit hulpst. 6 en blijven vast. Voor ε' nemen we een positief getal $< \dfrac{1}{4\varphi(\tau)}$.

Volgens hulpst. 6 geldt als $(y, \tau Q(\varepsilon')) = 1$ is:

$$|\, \bar{\chi}(y)^k f(y^k) - \bar{\chi}(y)^k \psi(y)^k \,| \leqq \varepsilon' \text{ voor alle } k \geqq 0. \qquad (28)$$

Onderstellen we $(y, N) = 1$, dan bestaat volgens hulpst. 7 $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{\chi}(y)^k f(y^k) = l(y)$; voor voldoend groote k is dus

$$|\, \bar{\chi}(y)^k f(y)^k - l(y) \,| < \varepsilon',$$

zoodat

$$|\, l(y) - (\bar{\chi}(y)\psi(y))^k \,| < 2\varepsilon' < \frac{1}{2\varphi(\tau)}.$$

Hierin is $\bar{\chi}(y)\,\psi(y)$ een $\varphi(\tau)$-demachtseenheidswortel, zoodat $\bar{\chi}(y)\psi(y) = 1$ moet zijn. Nu levert (28) het gestelde ($k = 1$, $Q_0 = NQ(\varepsilon')\tau$).

Ter voltooiing van het tweede gedeelte van het bewijs van de hoofdstelling behoeven we nog slechts te laten zien dat $\sum\limits_{(p, N)=1} b(p)$ convergeert.

Bij iedere p met $(p, N) = 1$ kunnen we wegens de definitie van $b(p)$ een λ bepalen met

$$| G(p^{\lambda}) - 1 | > \tfrac{1}{2} b(p).$$

Uit de divergentie van $\Sigma\, b(p)$ zou volgen, dat er priemgetallen $p_1, \ldots, p_s$ zijn $((p_i, Q_0 N) = 1$ voor $i = 1, \ldots, s$; Q_0 heeft de beteekenis van hulpst. 8) met

$$| \operatorname{Log} G(p_1^{\lambda_1}) + \ldots + \operatorname{Log} G(p_s^{\lambda_s}) | > \log 2. \quad . \quad . \quad (29)$$

Wegens hulpst. 8 is, als $(y_1, Q_0) = (y_2, Q_0) = 1$,

$$\operatorname{Log} f(y_1) + \operatorname{Log} f(y_2) = \operatorname{Log} f(y_1 y_2)$$

(vgl. het begin van het bewijs van hulpst. 6). Nu levert (29)

$$| \operatorname{Log} G\, (p_1^{\lambda_1} \ldots p_s^{\lambda_s}) | > \log 2,$$

in strijd met hulpst. 8.

(Ingekomen 29-9-'43).

BIBLIOGRAFIE.

KURT REIDEMEISTER, Mathematik und Logik bei Plato (Hamburger Mathematische Einzelschriften 35. Heft). 20 blz. R.M. 2.40. B. G. Teubner, Leipzig-Berlijn, 1942.

REIDEMEISTER doet een — m.i. geslaagde — poging, langs den door PLATO zelf aangewezen weg, d.w.z. uitgaande van de wiskunde, de strekking van de platonische dialectiek te benaderen. De wiskunde heeft bij de vorming van den a.s. philosooph tot taak, zijn blik af te wenden van het zintuiglijk waarneembare en dien te richten naar het intelligibele, naar het zijn. De wiskunde echter geeft geen rekenschap van het zijn van het intelligibile, maar leidt de eigenschappen daarvan uit hypothesen af. Zij behoeft dus een aanvulling, die de dialectiek bedoelt te leveren.

Van deze dialectiek bezitten wij belangrijke specimina in de dialogen „Parmenides" en „Philebus". Aangezien PLATO de contradictie als kenmerk van niet-zijn beschouwt, moet van deze dialectische fragmenten een niet-contradictore interpretatieworden gegeven. Volgens REIDEMEISTER is de strekking van den „Parmenides" en van een deel van den „Philebus" kritisch: bepaalde formaliseeringen worden verworpen (voorbeeld: volgens PLATO is alle kennis kennen van een zijn; d.w.z., kent men een ware bewering $f(a)$ over een object a, dan kan men concludeeren, dat a is; nu kan men over het niet-zijn niet spreken; immers, uit „n is niet" concludeert men: „n is"). In een ander deel van den „Philebus" geeft PLATO een positief ontwerp voor de leer van de gemeenschap der ideeën. In haar positief aspect wil de dialectiek een strenge, formeele dialectiek opbouwen, die berust op de grondstelling, dat alle kennis kennis van zijn is; door deze grondstelling onderscheidt ze zich, zoo meent REIDEMEISTER (m.i. ten onrechte) van de moderne mathematische logica; een bewijs van die grondstelling, een bekeering van hem, die aan het zijn, aan het goede twijfelt, mag men van haar niet verwachten.

Het voortreffelijke boekje zou — i.h.b. voor mathematici — sterk aan leesbaarheid hebben gewonnen, als de geciteerde plaatsen waren afgedrukt en toegelicht.

E. W. Beth.