

Warmteoverdracht door straling

Citation for published version (APA):

Nieuwenhuizen, J. K. (1980). Warmteoverdracht door straling. *Polytechnisch tijdschrift. Werktuigbouw*, 35(6), 364-371.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1980

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

WARMTEOVERDRACHT DOOR STRALING

1973.

1973.

stimie-
rgani-
lettall-
ür Ar-

Vibra-

ickge-
ubrin-
rtlinie,

tem
en er
eco-
etho-
geen
lijpen
e dra-

el als
in be-
nkele
okas-

ideld,
nder
in het
zhu-
spe-
rf ko-
dacht
nten

onse-
n de
dstuk
ialen,
boek.
itera-
n een
lande

ont-
r ma-

welis-
ien is,
an de
innen
voor
eten-
werk
doen.
HTS-
rijven
e ma-

groen

prof. ir. J.K. Nieuwenhuizen

afdeling der Werktuigbouw
TH-Eindhoven

Dit artikel bevat een samenvatting van de theorie die van belang is voor de werktuigbouwer die is belast met het ontwerpen van apparatuur waarin warmteoverdracht door middel van straling plaatsvindt.

Inleiding

Zoals aan de meeste lezers bekend is kan thermische energie (warmte) op drie verschillende manieren van het ene lichaam naar het andere overgaan:

- door *geleiding*, waarbij de warmte zich door de materie verplaatst onder invloed van een temperatuurgradiënt;
- door *convectie*, waarbij de warmte zich door de ruimte verplaatst doordat zij gebonden is aan een zich verplaatende hoeveelheid stof;
- door *straling*, waarbij de warmte zich verplaatst onder invloed van een temperatuurverschil, zonder op enigerlei wijze aan materie te zijn gebonden.

Deze drie vormen hebben gemeen dat warmte slechts wordt verplaatst van een plaats van hoge temperatuur naar een van lage, maar de eigenlijke verschijnselen zijn geheel verschillend. De meeste ingenieurs zijn redelijk vertrouwd met geleiding en convectie; termen als 'wet van Fourier', 'Nusselt-Reynolds-Prandtl-relaties' en dergelijke slaan in de regel wel aan. Zodra stralingswarmteoverdracht ter sprake komt voelen velen zich echter veel minder zeker. Dit artikel is juist voor deze mensen bedoeld. Het bevat voor een groot deel stof die in het curriculum van de afdeling Werktuigbouwkunde van de TH-Eindhoven wordt gedoceerd. De veronderstelling dat meer mensen dan alleen THE studenten in deze stof zijn geïnteresseerd, bracht de schrijver er toe dit artikel ter publicatie voor te dragen.

warmteoverdracht door straling

Elk stukje materie, ongeacht of het nu vast, vloeibaar of gasvormig is, straalt, mits de temperatuur er van hoger is dan het absolute nulpunt, energie uit. Dit is dus geheel anders dan bij andere vormen van warmtetransport, waar de energie alleen stroomt als er een temperatuurverschil bestaat. Warmteoverdracht door straling vindt ook plaats in vacuüm (zelfs meer dan in een gas), terwijl de aanwezigheid van materie een eis is voor de andere vormen van warmteoverdracht. Daardoor gaat ieder warmteoverdrachtproces gepaard met warmteoverdracht door middel van straling. Echter neemt de warmteoverdracht door straling veel sneller toe met de temperatuur, zodat bij hoge temperatuur deze vorm zeker zal gaan overheersen.

Warmtestraling is elektromagnetische straling. Deze verplaatst zich door de ruimte met de voortplantingssnel-

heid van elektromagnetische golven, dat is ongeveer $2,98 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ in vacuüm. Het menselijk oog kan slechts elektromagnetische straling waarnemen als de frequentie daarvan ligt tussen ongeveer $4,25 \times 10^{14}$ en $7,5 \times 10^{14}$ Hz. Tabel I bevat een ruwe opgave van de frequenties van enige typen elektromagnetische golven.

In een homogeen medium planten elektromagnetische golven zich rechtlijnig voort. Treffen zij een overgang van twee media van verschillende 'optische' dichtheid, dan wordt de straal in het algemeen in tweeën gesplitst; een deel wordt gereflecteerd, het andere deel treedt het tweede medium binnen.

Reflectie vindt zodanig plaats dat de teruggekaatste golf dezelfde hoek met de normaal op het scheidingsvlak maakt als de aankomende en de drie genoemde lijnen in een vlak liggen. Op een ruw oppervlak varieert de richting van de normaal bijzonder sterk van plaats tot plaats, zodat ogenschijnlijk een diffuse reflectie plaatsvindt.

Beschouw nu een straal die door medium 1 loopt in de richting van medium 2. De hoeveelheid energie die per eenheid van tijd en per eenheid van oppervlak het scheidingsvlak bereikt noemen we de aankomende warmtestroomdichtheid. We gebruiken er het symbool ' q_i ' voor. Een deel van q_i , laat zeggen ρq_i ($0 \leq \rho \leq 1$) zal worden gereflecteerd, een ander deel zal het medium 2 binnendringen. Dit laatste deel zal weer voor een deel in 2 worden geabsorbeerd; laat dat αq_i zijn ($0 \leq \alpha \leq 1$) en laat de hoeveelheid die door het hele medium 2 doorloopt τq_i zijn.

Dan volgt, op grond van de wet van behoud van energie: $\rho + \alpha + \tau = 1$

Voor vaste stoffen is τ meestal $\cong 0$, voor gasen α in de regel $\cong 0$.

tabel I. Frequenties van enige typen elektromagnetische golven.

	orde van grootte van de frequentie
γ -straling	3×10^{20}
röntgen	3×10^{18}
ultraviolet	3×10^{16}
zichtbaar licht	3×10^{15}
infrarood	3×10^{13}
korte radiogolven	3×10^{10}
normale radiogolven	3×10^6

Een lichaam waarvan α exact 1 is noemen we een (ideaal) zwart lichaam. Alle erop vallende straling wordt er door geabsorbeerd. Ideale zwarte lichamen bestaan niet, maar er zijn wel materialen bekend die straling van een bepaalde frequentie vrijwel geheel absorberen.

de wet van Kirchhoff

Veronderstel dat in een lichaam, dat is gemaakt van een stof die vrijwel 'zwart' straalt, een holle ruimte zit. Het lichaam heeft overal de temperatuur T . In die ruimte zit een klein schijfje: zolang als zijn temperatuur van T verschilt, zal er warmte stromen van het 'zwarte' lichaam naar de schijf, of omgekeerd, zodat uiteindelijk het geheel overal dezelfde temperatuur zal hebben. Blijkbaar is dan de hoeveelheid warmte, die door het schijfje wordt uitgezonden, gelijk aan die welke er door wordt geabsorbeerd. Dit zou ook het geval zijn als de schijf ideaal zwart zou zijn; klaarblijkelijk is dus de hoeveelheid warmte die het schijfje absorbeert in verhouding tot wat een 'zwart' schijfje zou absorberen, gelijk aan de hoeveelheid die het uitzendt in vergelijking tot wat een 'zwart' schijfje zou uitzenden.

Als we nu de emissiviteit ϵ definiëren als

$$\epsilon = \frac{q}{q_{\text{zwart}}}$$

dan volgt: $\epsilon = \alpha$

en daar $\alpha \leq 1$ moet $\epsilon \leq 1$ zijn.

Elektromagnetische straling heeft een duidelijk richting-effect; het transport van energie kan in de ene richting vele malen groter zijn dan in de andere.

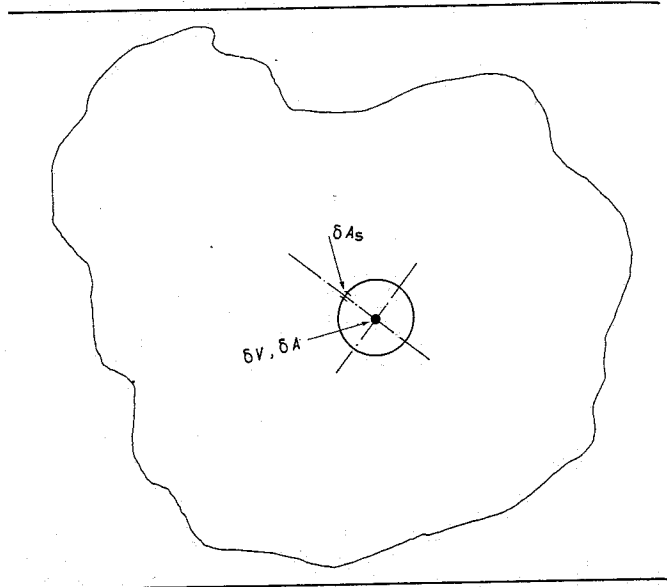
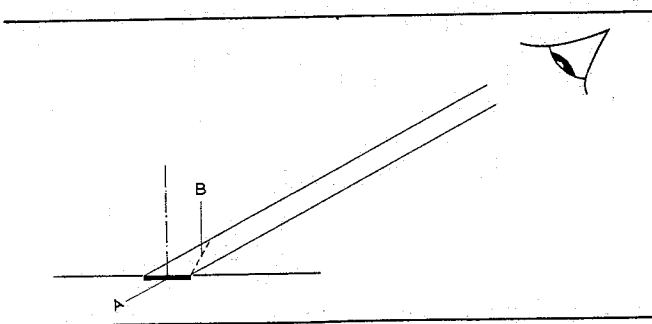
Onder de stralingsintensiteit I verstaan we de hoeveelheid energie die per eenheid van tijd stroomt door een eenheid van oppervlak in richtingen gelegen binnen een eenheid van ruimtehoek. Blijkbaar is ook

$$I = \frac{dq}{d\omega}$$

een functie van ω . I wordt uitgedrukt in $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{steradial}^{-1}$.

De waarde van I hangt sterk af van de emissiviteit van

1. De waarnemer is nooit in staat uit te maken of de straling die hij ontvangt afkomstig is van het oppervlak A of een eventueel bestaand oppervlak B.



2. Volume-elementje δV en een bolletje eromheen in een holle ruimte.

het lichaam dat de straling opwekt. Met $I_{b(T)\perp}$ bedoelen we de intensiteit van de straling die een zwart lichaam van temperatuur T uitzendt in een richting loodrecht op zijn oppervlak.

Daarbij heeft een zwart lichaam nog de eigenschap dat de intensiteit van de straling in enige richting proportioneel is met de grootte van het oppervlak, geprojecteerd in die richting. Daarom zal de waarnemer getoond in figuur 1 nooit in staat zijn uit te maken of de straling die hij ontvangt afkomstig is van het oppervlak A of van een eventueel bestaand oppervlak B.

de wet van Stefan-Boltzmann

Laten we nu de holle ruimte uit de vorige paragraaf nogmaals beschouwen. Grens daarbinnen een volume-elementje δV af en een klein bolletje eromheen. De straal van de bol is aanzienlijk groter dan enige afmeting van het volume-element, maar op zichzelf vele malen kleiner dan de kleinste afmeting van de holle ruimte (fig. 2).

De hoeveelheid energie die het oppervlakelementje δA_s van de bol per eenheid van tijd en per eenheid van ruimtehoek in radiale richting naar binnen verlaat is:

$$I_{b(T)\perp} \cdot \delta A_s$$

Van deze energie passeert dan δV de hoeveelheid

$$\frac{I_{b(T)\perp} \cdot \delta A_s \cdot \delta A}{r^2}$$

zodat op elk moment de energie die afkomstig is van δA_s en aanwezig is binnen δV gelijk is aan:

$$\frac{I_{b(T)\perp} \cdot \delta A_s \cdot \delta A}{r^2} \cdot \frac{\delta L}{c}$$

(waarin δL de lengte van δV is gemeten in de richting

loodrecht binn

$\delta u =$

en de me:

$$\frac{\partial u}{\partial V}$$

Volg

nen

Besc

en v

Als a

volg

ener

zige

$\delta Q =$

$= V$

De e

$\delta S =$

en, c

$\delta s =$

maa

$\frac{1}{T}$

$\frac{1}{T}$

of: u

$I_{b(T)\perp}$

zoda

op h

de v

de v

War

sche

met

het r

quer

Deze

siteri

De v

Zij g

rech

loodrecht op δA) waarmee de totale hoeveelheid energie binnen δV wordt:

$$\delta u = \int_{A_s=0}^{4\pi r^2} \frac{I_{b(\pi)\perp} \cdot \delta A_s \cdot \delta V}{r^2 c} = \frac{4\pi}{c} \cdot I_{b(\pi)\perp} \cdot \delta V$$

en de hoeveelheid stralingsenergie per eenheid van volume:

$$\frac{\partial u}{\partial V} = \frac{4\pi}{c} \cdot I_{b(\pi)\perp}$$

Volgens Maxwell's elektromagnetische golftheorie oefenen die golven een druk p uit die gelijk is aan $\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial V}$.

Beschouw nu een holle cilinder met dwarsdoorsnede A_c en volume $V_c = A_c \cdot l$.

Als aan die cilinder warmte wordt toegevoerd, wordt die volgens een eerste hoofdwet gebruikt om de inwendige energie te verhogen en arbeid op de in de cilinder aanwezige zuiger uit te oefenen:

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta U + \delta A = U \delta V_c + V_c \delta U + p \delta V_c = \\ &= V_c \delta U + \frac{4}{3} U \delta V_c \end{aligned}$$

De entropie neemt toe met:

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{V_c}{T} \delta U + \frac{4}{3} \frac{U}{T} \delta V_c$$

en, daar u slechts van de temperatuur afhangt:

$$\delta S = \frac{V_c}{T} \frac{du}{dT} \delta T + \frac{4}{3} \frac{u}{T} \delta V_c$$

maar, daar S een 'totale differentiaal' is:

$$\frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{4}{3} \frac{u}{T^2}$$

of: $u = \text{constante} \times T^4$

$I_{b(\pi)\perp} = \text{constante} \times T^4$

zodat de straling, geëmitteerd in een richting loodrecht op het oppervlak van een zwarte straler evenredig is met de vierde macht van de absolute temperatuur.

de wet van Planck

Warmtestraling is altijd opgebouwd uit golven van verschillende frequenties, zodat de energie uitgezonden met één bepaalde frequentie oneindig klein is. Daarom is het nodig te spreken over energiestroom per eenheid frequentie of wel per eenheid van golflengte, dus van $\frac{dI}{d\lambda}$.

Deze grootte is de 'monochromatische warmte intensiteit'.

De wet van Planck geldt slechts voor zwarte lichamen. Zij geeft de monochromatische warmteintensiteit loodrecht op het oppervlak als:

$$\frac{d I_{b(\pi)\perp}}{d\lambda} = \frac{2 C_1}{(\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1))}$$

of:

$$\frac{1}{T^5} \frac{dI}{d\lambda} = \frac{2 C_1}{(\lambda T)^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}$$

waarin:

$$C_1 = c^2 h = 0,59525 \times 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$C_2 = \frac{ch}{k} = 1,4387 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Dus

$$\begin{aligned} I_{b(\pi)\perp} &= \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\lambda} d\lambda \\ &= \frac{12}{90} \pi^4 \frac{C_1}{C_2^4} T^4 = 1,8045 \times 10^{-8} T^4 \\ &\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{steradiaal}^{-1} \end{aligned}$$

Daar nu voor een zwart lichaam:

$$I_{b\varphi} = I_{b\perp} \times \cos \varphi$$

volgt:

$$q = \pi I_{b\perp} = (5,670 \pm 0,003) \times 10^{-8} \cdot T^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

De constante met de waarde:

$$(5,670 \pm 0,003) \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

staat bekend als de constante van Stefan-Boltzmann. We zullen er het symbool σ voor gebruiken.

grijze stralers en selectieve stralers

Ideale zwarte lichamen bestaan niet. Er zijn echter wel stoffen die in iedere frequentie iedere richting en bij iedere temperatuur een vaste fractie (ϵ) uitzenden van wat een zwart lichaam onder precies dezelfde condities zou hebben uitgezonden. Deze stoffen noemen we grijze stralers. We noemen ϵ de emissiviteit, $0 \leq \epsilon \leq 1$.

Andere stoffen, zoals verscheidenen gassen, absorberen selectief, dat wil zeggen zij absorberen (en emitteren) slechts in bepaalde frequentiebanden. Binnen zo'n band kan de absorbtiviteit 1 zijn. Daar de monochromatische warmteintensiteit van een zwart lichaam in iedere frequentie van de temperatuur afhangt en dat bovendien geen vaste fractie van de totaal geëmitteerde straling is, hangt ϵ nu sterk af van de temperatuur.

zicht-factoren

Beschouw twee oppervlakte-elementen δA_1 en δA_2 , die ieder voor zich deel uitmaken van het oppervlak van een zwart lichaam, maar niet noodzakelijk hetzelfde.

Van de straling die δA_1 verlaat bereikt slechts dat aandeel δA_2 dat gericht is binnen de ruimtehoek ω_{12} . ω_{12} is de tophoek van de kegel die δA_2 als grondvlak en (het zwaartepunt van het elementie) δA_1 tot top heeft.

Voor de grootte van ω_{12} vinden we:

$$\delta \omega_{12} = \frac{\delta A_2 \cos \varphi_{21}}{s_{12}^2}$$

waarbij s_{12} de afstand is van δA_1 tot δA_2 (of meer precies, van hun zwaartepunten).
 Voor de stralingswarmte die van δA_1 tot δA_2 gaat vinden we zo

$$dQ = I_{\varphi,1} \delta A_1 \frac{\delta A_2 \cos \varphi_{21}}{s_{12}^2}$$

$$= I_{L,1} \frac{\cos \varphi_{12} \cos \varphi_{21}}{s_{12}^2} \delta A_1 \delta A_2$$

Zodat, daar $I_{L,1}$ slechts afhangt van de temperatuur T_1 , voor een iets groter oppervlak ΔA_1 , respectievelijk ΔA_2 moet gelden:

$$Q = I_{L,1} \int_{\Delta A_1} \delta A_1 \int_{\Delta A_2} \delta A_2 \frac{\cos \varphi_{12} \cos \varphi_{21}}{s_{12}^2}$$

We definiëren F_{12} en F_{21} als volgt:

$$\Delta A_1 \cdot F_{12} \equiv \Delta A_2 \cdot F_{21} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\Delta A_1} \delta A_1 \int_{\Delta A_2} \delta A_2 \frac{\cos \varphi_{12} \cos \varphi_{21}}{s_{12}^2}$$

of, meer algemeen:

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi \Delta A_i} \int \delta A_i \int \delta A_j \frac{\cos \varphi_{ij} \cos \varphi_{ji}}{s_{ij}^2}$$

zodat

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \pi \Delta A_1 F_{12} I_{L,1}$$

$$Q_{2 \rightarrow 1} = \pi \Delta A_2 F_{21} I_{L,2}$$

en

$$Q_{1 \rightarrow 2}^{netto} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1}$$

$$= \pi \Delta A_1 F_{12} (I_{L,1} - I_{L,2})$$

$$= \sigma \Delta A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$= \sigma \Delta A_2 F_{21} (T_1^4 - T_2^4)$$

Voorts moet men bedenken dat indien A_2 de gehele ruimtehoek boven A_1 vult:

$$\Delta A_1 F_{12} = \frac{1}{\pi} \int \delta A_1 \int \delta A_2 \frac{\cos \varphi_{12} \cos \varphi_{21}}{s_{12}^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \delta A_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_{12} \cos \varphi_{12} \delta \varphi_{12}$$

$$= \Delta A_1$$

$$\text{of } F_{12} = 1$$

Evenzo vinden we dat indien een deel van de ruimte begrensd wordt door oppervlakten er moet gelden

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$$

In de literatuur vinden we veelal zicht-factoren voor gevallen waarbij de geometrie haast tweedimensionaal is, bijvoorbeeld warmteuitwisseling door middel van straling tussen een groot vlak en een lange, er aan evenwijdige cilinder.

Wij willen nu eerst nagaan in hoeverre die formules bruikbaar zijn voor de meest reële gevallen, bijvoorbeeld bij configuraties die niet zeer langgerekt zijn. En indien ze niet, of niet geheel direct bruikbaar zijn willen we nagaan of ze met behulp van een correctiefactor voor gebruik geschikt te maken zijn.

Daartoe beschouwen we twee stroken, getoond in figuur 3. De vlakken waarvan de stroken deel uitmaken snijden elkaar onder een hoek α ; de stroken liggen evenwijdig

met die snijlijn. Lijnen van constante-x-coördinaat lopen evenwijdig aan de snijlijn, die van constante-y-coördinaat staan er loodrecht op. Dan geldt:

$$\cos \varphi_{12} = \cos \varphi_{12 \perp} \times \frac{s_{12 \perp}}{s_{12}}$$

$$\cos \varphi_{21} = \cos \varphi_{21 \perp} \times \frac{s_{12 \perp}}{s_{12}}$$

$$(s_{12})^2 = (s_{12 \perp})^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\varphi_{12 \perp} + \varphi_{21 \perp} = \alpha$$

en

$$\Delta A_1 \cdot F_{12} = \Delta A_2 \cdot F_{21} = \frac{1}{\pi} \int \delta A_1 \int \delta A_2 \frac{\cos \varphi_{12} \cos \varphi_{21}}{(s_{12})^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} \delta x_1 \int \delta x_2 \frac{\cos \varphi_{12 \perp} \cos \varphi_{21 \perp}}{(s_{12 \perp})^2} \times$$

$$\times \int_{y_{1a}}^{y_{1b}} \delta y_1 \int_{y_{2a}}^{y_{2b}} \delta y_2 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{s_{12 \perp}}\right)^2\right]^2}$$

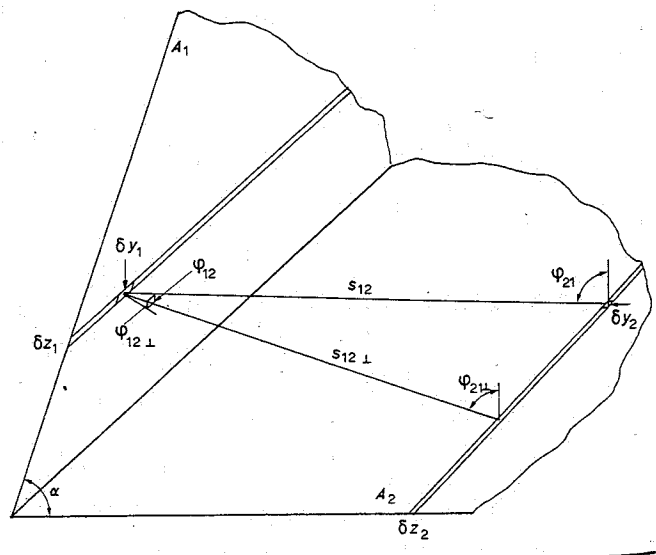
$$= \frac{1}{\pi} \int \delta x_1 \int \delta x_2 \frac{\cos \varphi_{12 \perp} \cos \varphi_{21 \perp}}{2 (s_{12 \perp})} \times$$

$$\times \left[(y_2 - y_1) \arctg \frac{y_2 - y_1}{s_{12 \perp}} \right] \Big|_{y_1 = y_{1a}}^{y_{1b}} \Big|_{y_2 = y_{2a}}^{y_{2b}}$$

Indien $y_{1a} = y_{2a} = y_a$ en $y_{1b} = y_{2b} = y_b$ volgt:

$$\Delta A_1 F_{12} = (y_b - y_a) \int \delta x_1 \int \delta x_2 \frac{\cos \varphi_{12 \perp} \cos \varphi_{21 \perp}}{2 s_{12 \perp}} \times \left\{ \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y_b - y_a}{s_{12 \perp}} \right\}$$

3. Twee stroken uit vlakken die elkaar snijden onder een hoek α .



4. T

en in

($y_b -$

Zoda

niëre

$\Delta b_1 \cdot$

volgt

Δb_1

Voor

δx_2

zoda

$\Delta b_1 \cdot$

$= \frac{1}{2}$

en d

als d

In af

gede

$F \equiv$

ook

$F =$

+ (C

+ \int

x_1

x_2

- \int

x_2

+ \int

x_1

x_2

+ \int

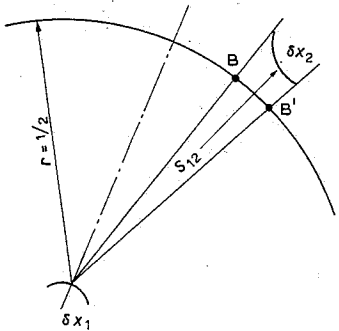
x_1

+ \int

x_1

x_2

open
te-y-



$\varphi_{21} =$

4. Tweedimensionale configuratiefactor.

en indien $y_b - y_a \gg s_{12\perp}$ benadert $\Delta A_1 F_{12}$ de waarde $(y_b - y_a) \int \delta x_1 \int \delta x_2 \frac{\cos \varphi_{12} \cos \varphi_{21}}{2 s_{12\perp}}$

Zodat, als we de tweedimensionale zichtfactor \bar{F}_{12} definiëren als:

$$\Delta b_1 \cdot \bar{F}_{12} = \frac{\Delta A_1 F_{12}}{y_b - y_a}$$

volgt:

$$\Delta b_1 \bar{F}_{12} = \int \delta x_1 \int \delta x_2 \frac{\cos \varphi_{12\perp} \cos \varphi_{21\perp}}{2 s_{12\perp}}$$

Voorts dient men nog te bedenken dat (fig. 4):

$$\frac{\delta x_2 \cos \varphi_{21\perp}}{s_{12}} = \delta \varphi_{12\perp}$$

zodat:

$$\begin{aligned} \Delta b_1 \cdot \bar{F}_{12} &= \int \delta x_1 \int \frac{\cos \varphi_{12\perp}}{2} \delta \varphi_{12\perp} \\ &= \frac{1}{2} \int \delta x_1 \sin \varphi_{12\perp} \Big|_{\varphi_{12a}}^{\varphi_{12b}} \end{aligned}$$

en dus \bar{F}_{12} heel eenvoudig grafisch kan worden bepaald als de projectie van BB' op (het verlengde van) δx_1 . In appendix I is aangetoond dat indien een functie F is gedefinieerd als:

$$F \equiv \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} dx_1 \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot H \cdot dx_2$$

ook geldt:

$$\begin{aligned} F &= (G \cdot H)_{x_{1b}, x_{2b}} - (G \cdot H)_{x_{1a}, x_{2b}} - (G \cdot H)_{x_{1b}, x_{2a}} + \\ &+ (G \cdot H)_{x_{1a}, x_{2a}} - \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} G_{x_1, x_{2b}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)_{x_1, x_{2b}} dx_1 \\ &+ \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} G_{x_1, x_{2a}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)_{x_1, x_{2a}} dx_1 \\ &- \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} G_{x_{1b}, x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)_{x_{1b}, x_2} dx_2 \\ &+ \int_{x_1 = x_{2a}}^{x_{2b}} G_{x_{1a}, x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)_{x_{1a}, x_2} dx_2 \\ &+ \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} \int_{x_{2a}}^{x_{2b}} G_{x_1, x_2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_1, x_2} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Als nu:

$$G \equiv \int \delta x_1 \int \delta x_2 \frac{\cos \varphi_{12\perp} \cdot \cos \varphi_{21\perp}}{2 s_{12\perp}}$$

en dus:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\cos \varphi_{12\perp} \cdot \cos \varphi_{21\perp}}{2 s_{12\perp}}$$

en:

$$H \equiv \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y_b - y_a}{s_{12\perp}}$$

zodat:

$$\frac{\Delta A_1 F_{12}}{y_b - y_a} = \int \delta x_1 \int \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot H \cdot \delta x_2$$

$$\text{en } G_{x_{1b}, x_{2b}} = \Delta b_1 \bar{F}_{12}$$

dan volgt:

$$\frac{A_1 F_{12}}{y_b - y_a} = \Delta b_1 \bar{F}_{12} \cdot \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y_b - y_a}{s_{12\perp}}$$

$$+ \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} G_{x_1, x_{2b}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_b - y_a}{(s_{12\perp})^2 + (y_b - y_a)^2} \frac{\partial s_{12\perp}}{\partial x_1} \delta x_1$$

$$+ \int_{x_{2a}}^{x_{2b}} G_{x_{1b}, x_2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_b - y_a}{(s_{12\perp})^2 + (y_b - y_a)^2} \frac{\partial s_{12\perp}}{\partial x_2} \delta x_2$$

$$+ \int dx_1 \int G_{x_1, x_2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(y_b - y_a) s_{12\perp}}{[(s_{12\perp})^2 + (y_b - y_a)^2]^2} \cdot \frac{\partial s_{12\perp}}{\partial x_1} \frac{\partial s_{12\perp}}{\partial x_2} dx_2$$

$$\cong \Delta b_1 \bar{F}_{12} \cdot \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y_b - y_a}{s_{12\perp}}$$

voorbeelden

1. Beschouw een twee-dimensionaal geval van een ruimte, ingesloten door drie niet-concave evenwijdige vlakken (fig. 5).

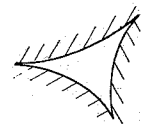
Dan geldt:

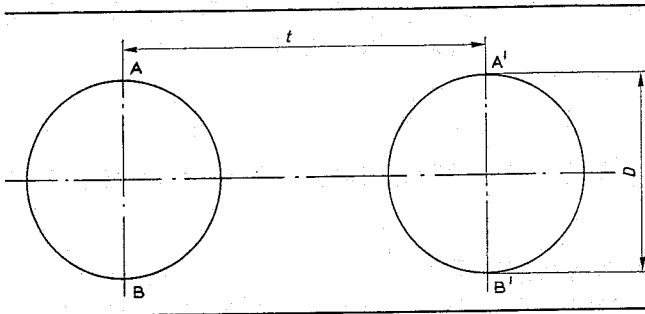
$$\begin{aligned} F_{ii} &= 0 \\ F_{ii} + F_{ij} + F_{ik} &= 1 \\ \Delta A_i F_{ij} - \Delta A_j F_{ji} &= 0 \text{ voor iedere } i, j. \end{aligned}$$

zodat:

$$F_{ij} = \frac{\Delta A_i + \Delta A_j - \Delta A_k}{2 \Delta A_i}$$

5. Twee-dimensionaal geval van ruimte, ingesloten door drie niet-concave evenwijdige vlakken.





6. Twee oneindig lange buizen met buitendiameter D en steek t .

2. Beschouw twee oneindig lange buizen zoals in figuur 6.

Dan is:

$$F_{AB \rightarrow A'B'} = F_{AB \rightarrow AB'} - F_{AB \rightarrow AA'}$$

$$= \frac{(AB' + BA') - (AA' + BB')}{2 AB}$$

of

$$F_{tt} = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{D}{t} + \sqrt{\left(\frac{t}{D}\right)^2 - 1} - \frac{t}{D} \right]$$

en bijgevolg:

$$F_{gt} = \frac{\Delta A_t}{\Delta A_g} F_{tg} = \frac{\Delta A_t}{\Delta A_g} \frac{1 - F_{tt}}{2}$$

$$= 1 + \frac{D}{t} \arccos \frac{D}{t} - \sqrt{1 - \left(\frac{D}{t}\right)^2}$$

warmteuitwisseling door middel van straling tussen twee grijze, concave ($F_{ii} = 0$) oppervlakken A_1 en A_2

Beschouw twee oppervlakken A_1 en A_2 , die deel uitmaken van lichamen uit een materiaal met emissiviteit ϵ_1 respectievelijk ϵ_2 . De temperatuur van elk deel van het oppervlak A_1 is T_1 , van A_2 is dat T_2 .

De hoeveelheid straling die A_1 in eerste instantie verlaat is $A_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4$, die warmtestroom noemen we kortheids-halve $Q_{0,1}$. A_2 onderschept daarvan de fractie F_{12} , het restant, $F_{13} Q_{0,1}$ verdwijnt.

Van $F_{12} \cdot Q_{0,1}$ absorbeert A_2 de fractie ϵ_2 , het restant $(1 - \epsilon_2) F_{12} Q_{0,1}$ wordt door A_2 , verdeeld volgens de wet van Lambert, heruitgezonden. Daarmee krijgen we het schema van figuur 7.

Zodat

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \epsilon_2 F_{12} Q_{0,1} \left[1 + (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21} + \dots + \dots + \dots \right]$$

$$= \frac{\epsilon_2 F_{12} Q_{0,1}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

$$Q_{1 \rightarrow 3} = \frac{F_{13} Q_{0,1}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

$$Q_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = \frac{F_{23} (1 - \epsilon_2) F_{12} Q_{0,1}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

$$Q_{1, \text{uit}}^{\text{net}} = Q_{0,1} - \frac{\epsilon_1 F_{21} (1 - \epsilon_2) F_{12} Q_{0,1}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}} =$$

$$= \frac{1 - (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}} Q_{0,1}$$

Daarbij is:

$$- Q_{1, \text{uit}}^{\text{net}} + Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 3} + Q_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = 0$$

Evenzo volgt:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{\epsilon_1 F_{21} Q_{0,2}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{F_{23} Q_{0,2}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

$$Q_{2 \rightarrow 1 \rightarrow 3} = \frac{F_{13} (1 - \epsilon_2) F_{21} Q_{0,2}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

$$Q_{2, \text{uit}}^{\text{net}} = \frac{1 - (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}} Q_{0,2}$$

en daar $Q_{0,1} = \epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4$ en $Q_{0,2} = \epsilon_2 A_2 \sigma T_2^4$

$$Q_{1 \rightarrow 2}^{\text{net}} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma A_1 F_{12} \epsilon_1 \epsilon_2 (T_1^4 - T_2^4)}{1 - (1 - \epsilon_2) (1 - \epsilon_1) F_{12} F_{21}}$$

$$= \sigma A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

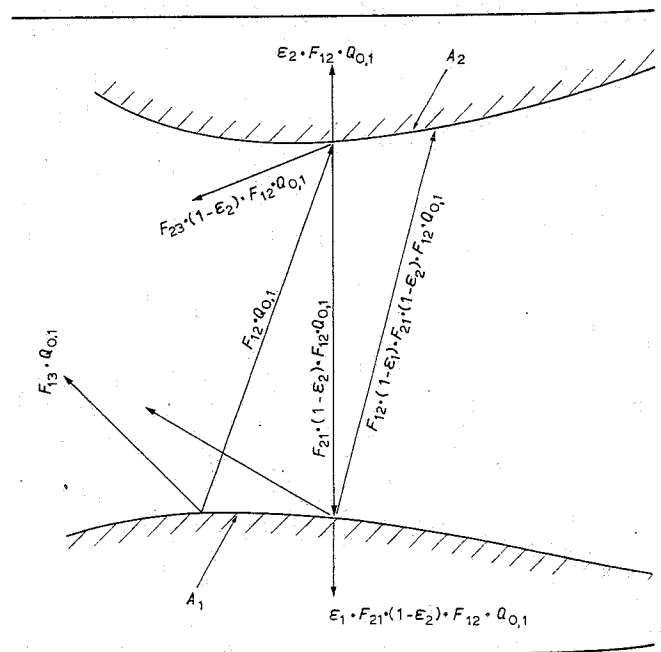
$$\text{met } F_{12} = \frac{F_{12} \epsilon_1 \epsilon_2}{1 - (1 - \epsilon_1) (1 - \epsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

Voor het geval dat $F_{ii} \neq 0$ is, wordt het geheel ingewikkelder en is dan als volgt op te lossen. Voor ieder van de oppervlakken geldt:

$$q_{\text{uit}} = (1 - \epsilon) q_{\text{in}} + \epsilon \sigma T^4$$

$$q_{\text{uit}}^{\text{net}} = q_{\text{uit}} - q_{\text{in}} = -\epsilon q_{\text{in}} + \epsilon \sigma T^4$$

7. Warmteuitwisseling door middel van straling tussen twee grijze, concave oppervlakten.



zodat
 $q_{1, \text{uit}}^{\text{net}}$
 Daar:
 1
 0
 0
 0
 0
 0
 = A
 en
 ϵ_1
 ϵ_2
 = A
 volg
 $q_{1, \text{uit}}^{\text{net}}$
 $q_{2, \text{uit}}^{\text{net}}$
 $Q_{1, \text{uit}}^{\text{net}}$
 $Q_{2, \text{uit}}^{\text{net}}$
 $Q_{1 \rightarrow 2}^{\text{net}}$
 $Q_{2 \rightarrow 1}^{\text{net}}$
 $Q_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}^{\text{net}}$
 =
 me

zodat:

$$\begin{array}{rcl}
 q_{1, \text{uit}}^{\text{net}} + q_{1, \text{in}} & - q_{1, \text{uit}} & = 0 \\
 - (1 - \varepsilon_1) q_{1, \text{in}} & + q_{1, \text{uit}} & = 0 \\
 - A_1 q_{1, \text{in}} & + A_1 F_{11} q_{1, \text{uit}} & = 0 \\
 & + A_1 F_{12} q_{1, \text{uit}} & = 0 \\
 - q_{2, \text{uit}}^{\text{net}} + q_{2, \text{in}} & - q_{2, \text{uit}} & = 0 \\
 - (1 - \varepsilon_2) q_{2, \text{in}} & - q_{2, \text{uit}} & = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\
 - A_2 q_{2, \text{in}} & + A_2 F_{21} q_{2, \text{uit}} & = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \\
 & + A_2 F_{22} q_{2, \text{uit}} & = 0 \\
 & & = 0
 \end{array}$$

Daar:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
 0 & -(1 - \varepsilon_1) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 - \varepsilon_2) & 1 \\
 0 & -A_1 & A_1 F_{11} & 0 & 0 & A_2 F_{21} \\
 0 & 0 & A_1 F_{12} & 0 & -A_2 & A_2 F_{22}
 \end{vmatrix}$$

$$= A_1 A_2 \left\{ (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - (1 - \varepsilon_1) F_{11} - (1 - \varepsilon_2) F_{22} + 1 \right\}$$

en

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
 \varepsilon_1 \sigma T_1^4 & -(1 - \varepsilon_1) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \varepsilon_2 \sigma T_2^4 & 0 & 0 & 0 & -(1 - \varepsilon_2) & 1 \\
 0 & -A_1 & A_1 F_{11} & 0 & 0 & A_2 F_{21} \\
 0 & 0 & A_1 F_{12} & 0 & -A_2 & A_2 F_{22}
 \end{vmatrix}$$

$$= A_1 A_2 \left\{ \left[(1 - \varepsilon_2) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - F_{11} - (1 - \varepsilon_2) F_{22} + 1 \right] \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma F_{12} T_2^4 \right\}$$

volgt

$$q_{1, \text{uit}}^{\text{net}} = \frac{\left[(1 - \varepsilon_2) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - F_{11} - (1 - \varepsilon_2) F_{22} + 1 \right] \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma F_{12} T_2^4}{(1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - (1 - \varepsilon_1) F_{11} - (1 - \varepsilon_2) F_{22} + 1}$$

$$q_{2, \text{uit}}^{\text{net}} = \frac{\left[(1 - \varepsilon_1) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - F_{22} - (1 - \varepsilon_1) F_{11} + 1 \right] \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma F_{21} T_1^4}{\sim}$$

$$Q_{1, \text{uit}}^{\text{net}} = A_1 q_{1, \text{uit}}^{\text{net}}$$

$$Q_{2, \text{uit}}^{\text{net}} = A_2 q_{2, \text{uit}}^{\text{net}}$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = - \frac{\partial}{\partial (T_2^4)} Q_{1, \text{uit}}^{\text{net}} \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

$$Q_{2 \rightarrow 1} = - \frac{\partial}{\partial (T_1^4)} Q_{2, \text{uit}}^{\text{net}} (T_2^4 - T_1^4)$$

$$Q_{1 \rightarrow 2}^{\text{net}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)}{(1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - (1 - \varepsilon_1) F_{11} - (1 - \varepsilon_2) F_{22} + 1}$$

$$= \sigma A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{met } F_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 F_{12}}{(1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix} \right\| - (1 - \varepsilon_1) F_{11} - (1 - \varepsilon_2) F_{22} + 1}$$

indien:

$$F_{11} = 0 \quad F_{12} = 1$$

$$F_{22} = 0 \quad F_{21} = 1$$

(twee oneindig grote vlakke platen tegenover elkaar) volgt:

$$q_{1, uit}^{net} = -q_{2, uit}^{net} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

en indien

$$F_{11} = 0 \quad F_{12} = 1$$

$$F_{21} = 0 \quad F_{22} = 1$$

dat wil zeggen dat lichaam 1 zeer klein is ten opzichte van lichaam 2 en bovendien zichzelf niet ziet, dus volgt:

$$q_{1, uit}^{net} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\epsilon_2} = \epsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4).$$

zodat de netto uitgaande warmtestroom niet afhangt van de emissiviteit van het omhullende lichaam. Vanzelfsprekend is $q_{2, uit}^{net} = 0$.

schijnbare zwartheid

Beschouw twee lichamen, begrensd door de oppervlaktelementen ΔA_1 , respectievelijk ΔA_2 (fig. 8).

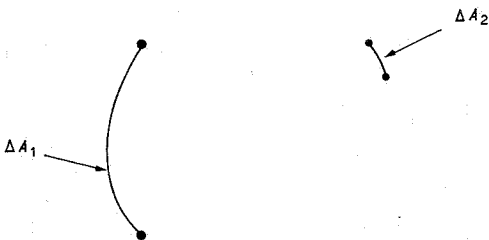
Indien we voor lichaam 2 het oppervlak ΔA_2 met behoud van de omgrenzing vergroten met $\delta \Delta A_2$, blijven F_{11} en F_{12} onveranderd, neemt F_{21} af en F_{22} toe.

Eenvoudig is te zien dat, zeker als F_{11} voldoende klein is, de waarde van

$$F_{12} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 F_{12}}{(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) \left\| \frac{F_{11} F_{12}}{F_{21} F_{22}} \right\| - (1 - \epsilon_1) F_{11} - (1 - \epsilon_2) F_{22} + 1}$$

toeneemt.

Daaruit blijkt dat de door ΔA_2 opgenomen hoeveelheid warmte toeneemt indien het oppervlak wordt verruwd, het is schijnbaar zwarter geworden.



8. Twee lichamen die zijn begrensd door de oppervlaktelementen ΔA_1 en ΔA_2 .

appendix

Beschouw de functies $G(x_1, x_2)$ en $H(x_1, x_2)$ alsmede de grootheid:

$$F \equiv \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta x_1 \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} \delta x_2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} H$$

dan volgt door partiële integratie

$$F = \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta x_1 \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} H(x_1, x_2) d \frac{\partial G}{\partial x_1(x_1, x_2)}$$

$$= \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta x_1 \left\{ H \frac{\partial G}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} - \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} \delta x_2 \right\}$$

$$= \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta G(x_1, x_{2b}) \cdot H(x_1, x_{2b}) - \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta G(x_1, x_{2a}) \cdot H(x_1, x_{2a})$$

$$- \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} \delta x_2 \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta G(x_1, x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2(x_1, x_2)}$$

$$= (G \cdot H)_{(x_{1b}, x_{2b})} - (G \cdot H)_{(x_{1a}, x_{2b})}$$

$$- (G \cdot H)_{(x_{1b}, x_{2a})} + (G \cdot H)_{(x_{1a}, x_{2a})}$$

$$- \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} G(x_1, x_{2b}) \frac{\partial H}{\partial x_1(x_1, x_{2b})} \delta x_1$$

$$+ \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} G(x_1, x_{2a}) \frac{\partial H}{\partial x_1(x_1, x_{2a})} \delta x_1$$

$$- \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} G(x_{1b}, x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2(x_{1b}, x_2)} dx_2$$

$$+ \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} G(x_{1a}, x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2(x_{1a}, x_2)} dx_2$$

$$+ \int_{x_1 = x_{1a}}^{x_{1b}} \delta x_1 \int_{x_2 = x_{2a}}^{x_{2b}} G(x_1, x_2) \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2(x_1, x_2)} \delta x_2$$

symbool	grootheid	dimensie	te gebruiken eenheid
A	oppervlak	L ²	m ²
C ₁	eerste constante van Planck	M T ⁻³	W · m ⁻²
C ₂	tweede constante van Planck	L θ	W · K
D	diameter	L	m
F ₂₁	geometrische zichtfactor, drie dimensies	-	-
F̄ ₁₂	geometrische zichtfactor twee dimensies	-	-
F	zichtfactor, gecorrigeerd voor emissiviteiten	-	-
F, G, H	functies		
I	stralingsintensiteit	M T ⁻³	W · m ⁻² · steradiaal ⁻¹
L	lengte	L	m
Q	warmtestroom	M L ² T ⁻³	W
U	inwendige energie	M L ² T ⁻²	W · s
V	volume	L ³	m ³
c	lichtsnelheid in vacuüm	L T ⁻²	m · s ⁻¹
q	warmtestroomdichtheid	M T ⁻³	W · m ⁻²
r	straal	L	m
s	afstand	L	m
t	steek	L	m
u	specifieke inwendige energie	L ² T ⁻²	W · s · kg ⁻¹
x	afstandcoördinaat	L	m
y	afstandcoördinaat	L	m
α	hoekmaat, twee dimensies	-	-
	absorptiecoëfficiënt	-	-
ε	emissiviteit	-	-
λ	golflengte	L	m
ρ	reflectiecoëfficiënt	-	-
τ	transmissiecoëfficiënt	-	-
φ	hoek ten opzichte van normaal	-	-
ω	hoekmaat, drie dimensies	-	-

het i

De o een de b ne st perst koge zijde kom voor (volg tetol 0,02 kom mee lept

1. V kout

