Oplossingsmethodieken voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen

Citation for published version (APA):
Beijers, A. P. A. M. (1971). *Oplossingsmethodieken voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen: memo*. (DCT rapporten; Vol. 1971.043). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:
Gepubliceerd: 01/01/1971

Document Version:
Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

WE-71-~~38~~ 43

MEMO

OPLOSSINGSMETHODIEKEN VOOR STELSELS NIET LINEAIRE VERGELIJKINGEN

A. P. A. M. BEIJERS 30-3 '71

I Beschrijving oplossingsmethodes

Stel we hebben het volgende stelsel niet-lineaire vergelijkingen:

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1 \ldots\ldots x_n) &= b_1\\
F_2(x_1 \ldots\ldots x_n) &= b_2\\
&\vdots\\
F_n(x_1 \ldots\ldots x_n) &= b_n
\end{aligned}
$$

Dit schrijven we als volgt:

$$F_k(x_j) = b_k \qquad \begin{array}{l} k=1\ldots\ldots n\\ j=1\ldots\ldots n\end{array} \qquad (I1)$$

Stel nu, dat we bij een bepaald rechterlid b_k^0 de oplossing x_j^0 exakt kennen:

$$F_k(x_j^0) = b_k^0 \qquad (I2)$$

We verhogen het rechterlid b_k^0 met een stap Δb_k^0 en we berekenen de bijbehorende Δx_j als volgt:

$$F_k(x_j^0 + \Delta x_j^0) = b_k^0 + \Delta b_k^0$$

$$F_k(x_j^0) + \left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^0} \Delta x_j^0 + \ldots\ldots\ldots = b_k^0 + \Delta b_k^0 \qquad (I3)$$

De hogere afgeleides worden verwaarloosd, zodat geldt:

$$F_k(x_j^0) + \left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^0} \Delta x_j^0 = b_k^0 + \Delta b_k^0 \qquad (I4)$$

Op (I4) berusten 2 oplossingsmethodiekjes:

IV Newton-Raphson met stapsgewijze iteratie.

Het bleek, dat het Newton-Raphson proces kan divergeren. Om dit te voorkomen, brengen we het rechterlid stapsgewijs aan. Na elke stap wordt nu naar de exakte oplossing geïtereerd. De startwaarde voor het iteratieproces wordt met de gemodificeerde Newton-Raphson-methode berekend.

$$\left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{n,t}} \Delta x_j^{n,t} = \Delta b_k^{n} + b_k^{n} - F_k\left(x_j^{n,t}\right)$$

$x_j^{n,t}$ = oplossing na n stappen en t iteraties na stap n

Δb_k^n = stapgrootte voor de n^{de} stap. Bij iteratie is Δb_k^n gelijk aan de nulvektor.

b_k^n = grootte van het rechterlid na n stappen.

V Toepassing op de elementenmethode

$$F_\alpha(u_\beta) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_i^k S_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_j^k}{\partial u_p^k} L_{p\alpha}^k$$

$$b_\alpha = \sum_{k=1}^{N} f_p^k L_{p\alpha}^k = f_\alpha$$

$$\varepsilon_i^k = \varepsilon_i^k(u_1 \ldots\ldots u_n) \qquad \delta\varepsilon_i^k = \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} L_{p\alpha}^k \delta u_\alpha$$

De Newton-Raphson methode met stapsgewijze iteratie kunnen we nu in de volgende formulevorm beschrijven:

$$\sum_{k=1}^{N}\left[L_{\alpha p}^k \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} S_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_j^k}{\partial u_q^k} L_{q\beta}^k + L_{\alpha p}^k \varepsilon_i^k S_{ij}^k \frac{\partial^2 \varepsilon_j^k}{\partial u_q^k \partial u_p^k} L_{q\beta}^k\right]_{u=u^{n,t}} \Delta u_\beta^{n,t} = \qquad (V\,1)$$

$$\Delta f_\alpha^n + f_\alpha^n - \sum_{k=1}^{N}\left[\varepsilon_i^k S_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_j^k}{\partial u_p^k} L_{p\alpha}^k\right]_{u=u^{n,t}}$$

I Incremental approach

We veronderstellen, dat bij elke Δb_k° gevonden Δx_j° de exakte als volgt geformuleerd kan worden:

$$x_j^\circ{}_{nieuw} = x_j^\circ{}_{oud} + \Delta x_j^\circ$$

Dit levert dan de volgende vergelijking op

$$\left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^\circ} \Delta x_j^\circ = \Delta b_k^\circ \qquad (I\,5)$$

Het oplossingsproces verloopt nu als volgt:

0 Kies startwaarde voor x_j° en breng de eerste stap in het rechterlid aan te weten Δb_k°

2 Los het stelsel op $(I\,5)$.

$$x_j^\circ{}_{nieuw} = x_j^\circ{}_{oud} + \Delta x_j^\circ$$

3 Los het stelsel $(I\,5)$ nu op met $x_j^\circ{}_{nieuw}$ etc.

II Gemodificeerd Newton-Raphson

Als we ervan uitgaan, dat we een benaderingsoplossing construeren, kan het nooit zo zijn, dat het verschil

$$F_k(x_j^\circ) - b_k^\circ$$

precies gelijk aan de nulvektor is, zodat we deze term niet mogen weglaten in $(I\,4)$. We kunnen nu $(I\,4)$ als volgt schrijven:

$$\left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^\circ} \Delta x_j^\circ = \Delta b_k^\circ + b_k^\circ - F_k(x_j^\circ) \qquad (I\,6)$$

$$b_k^o = b_{1k} + b_{2k} + \dots\dots$$

In feite wordt hier het rechterlid gecorrigeerd met de grootte

$$\left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^o} - b_k^o$$

om een betere oplossing te verkrijgen.

III. Newton Raphson

De Newton-Raphson methode is principieel anders dan de hiervoor beschreven oplossingsmethodes. Het rechterlid b_k wordt namelijk in één keer aangebracht. Verder kiezen we een startwaarde voor x_j te weten x_j^o. Deze x_j^o is slechts een schatting voor de exakte oplossing. Een betere schatting kunnen we als volgt verkrijgen:

$$F_k(x_j^o + \Delta x_j^o) = b_k$$

$$F_k(x_j^o) + \left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^o} \Delta x_j^o + \dots\dots = b_k \qquad (I\,7)$$

Hogere orde afgeleiden worden verwaarloosd:

$$\left(\frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^o} \Delta x_j^o = b_k - F_k(x_j^o) \qquad (I\,8)$$

Dit proces wordt zo vaak herhaald, tot het verschil $b_k - F_k(x_j)$ voldoende dicht bij nul ligt.

opm: Het is te bewijzen, dat het een 2e orde iteratieproces is.