

# Oplossingsmethodieken voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen

**Citation for published version (APA):**

Beijers, A. P. A. M. (1971). *Oplossingsmethodieken voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen: memo*. (DCT rapporten; Vol. 1971.043). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1971

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

MEMO

OPLOSSINGSMETHODIEKEN VOOR  
STELSELS NIET LINEAIRE VERGELIJKINGEN

A. P. A. M. BEIJERS

30-3 '71

## I Beschrijving oplossingsmethodes

Stel we hebben het volgende stelsel niet-lineaire vergelijkingen:

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = b_1$$

$$F_2(x_1, \dots, x_n) = b_2$$

$$\vdots$$
$$F_n(x_1, \dots, x_n) = b_n$$

Dit schrijven we als volgt:

$$F_k(x_j) = b_k \quad \begin{array}{l} k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{array} \quad (I_1)$$

Stel nu, dat we bij een bepaald rechterlid  $b_k^0$  de oplossing  $x_j^0$  exact kennen:

$$F_k(x_j^0) = b_k^0 \quad (I_2)$$

We verhogen het rechterlid  $b_k^0$  met een stap  $\Delta b_k^0$  en we bereken de bijbehorende  $\Delta x_j^0$  als volgt:

$$F_k(x_j^0 + \Delta x_j^0) = b_k^0 + \Delta b_k^0$$

$$F_k(x_j^0) + \left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j=x_j^0} \Delta x_j^0 + \dots = b_k^0 + \Delta b_k^0 \quad (I_3)$$

De hogere afgeleides worden verwaarloosd, zodat geldt:

$$F_k(x_j^0) + \left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j=x_j^0} \Delta x_j^0 = b_k^0 + \Delta b_k^0 \quad (I_4)$$

Op (I4) beruilen 2 oplossingsmethodes:

## IV Newton-Raphson met stapsgewijze iteratie.

Het bleek, dat het Newton-Raphson proces kan divergeren. Om dit te voorkomen, brengen we het rechterlid stapsgewijs aan. Na elke stap wordt nu naar de exakte oplossing geïtereerd. De startwaarde voor het iteratieproces wordt met de gemiddelde Newton-Raphson-methode berekend.

$$\left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_j^{n,t}} \Delta x_j^{n,t} = \Delta b_k^n + b_k^n - F_k(x_j^{n,t})$$

$x_j^{n,t}$  = oplossing na  $n$  stappen en  $t$  iteraties na stap  $n$

$\Delta b_k^n$  = stapgrootte voor de  $n^{\text{de}}$  stap. Bij iteratie is  $\Delta b_k^n$  gelijk aan de nulvektor.

$b_k^n$  = grootte van het rechterlid na  $n$  stappen.

## V Toepassing op de elementenmethode

$$F_\alpha(u_\beta) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_i^k s_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} L_{p\alpha}^k$$

$$b_\alpha = \sum_{k=1}^N f_p^k L_{p\alpha}^k = f_\alpha$$

$$\varepsilon_i^k = \varepsilon_i^k(u_1, \dots, u_n) \quad \delta \varepsilon_i^k = \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} L_{p\alpha}^k \delta u_\alpha$$

De Newton-Raphson methode met stapsgewijze iteratie kunnen we nu in de volgende formulevorm beschrijven:

$$\sum_{k=1}^N \left[ \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} s_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_q^k} L_{p\beta}^k + L_{p\alpha}^k \varepsilon_i^k s_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} L_{q\beta}^k \right]_{u_k = u_k^{n,t}} \Delta u_\beta^{n,t} = \Delta f_\alpha^n + f_\alpha^n - \sum_{k=1}^N \left[ \varepsilon_i^k s_{ij}^k \frac{\partial \varepsilon_i^k}{\partial u_p^k} L_{p\alpha}^k \right]_{u_k = u_k^{n,t}} \quad (II)$$

## I Incremental approach

We veronderstellen, dat bij elke  $\Delta b_k^o$  gevonden  $\Delta x_j^o$  de exacte  $\Delta b$  volgt geformuleerd kan worden:

$$x_j^{\text{nieuw}} = x_j^{\text{oud}} + \Delta x_j^o$$

Dit levert dan de volgende vergelijking op

$$\left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_j^o} \Delta x_j^o = \Delta b_k^o \quad (I5)$$

Het oplossingsproces verloopt nu als volgt:

- ① Kies startwaarde voor  $x_j^o$  en breng de eerste stap in het rekterlid aan te weten  $\Delta b_k^o$
- ② Los het stelsel op (I5).

$$x_j^{\text{nieuw}} = x_j^{\text{oud}} + \Delta x_j^o$$

- ③ Los het stelsel (I5) nu op met  $x_j^{\text{nieuw}}$  etc.

## II Gemodificeerd Newton-Raphson

Als we ervan uitgaan, dat we een benaderingsoplossing construeren, kan het nooit zo zijn, dat het verschil

$$F_k(x_j^o) - b_k^o$$

precies gelijk aan de nul-vektor is, zodat we deze term niet mogen weglaten in (I4). We kunnen nu (I4) als volgt schrijven:

$$\left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_j^o} \Delta x_j^o = \Delta b_k^o + b_k^o - F_k(x_j^o) \quad (I6)$$

$$b_k^0 = b_{1k} + b_{2k} + \dots$$

In feite wordt hier het rechterlid gecorrigeerd met de grootte

$$\left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_j^0} - b_k^0$$

om een betere

oplossing te verkrijgen.

### III Newton Raphson

De Newton-Raphson methode is principieel anders dan de hiervoor beschreven oplossingsmethoden. Het rechterlid  $b_k$  wordt namelijk in één keer aangebracht. Verder kiezen we een startwaarde voor  $x_j$  te weten  $x_j^0$ . Deze  $x_j^0$  is slechts een schatting voor de exacte oplossing. Een betere schatting kunnen we als volgt verkrijgen:

$$F_k(x_j^0 + \Delta x_j^0) = b_k$$

$$F_k(x_j^0) + \left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_j^0} \Delta x_j^0 + \dots = b_k \quad (I7)$$

Hogere orde afgeleiden worden verwaarloosd:

$$\left( \frac{\partial F_k(x_j)}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_j^0} \Delta x_j^0 = b_k - F_k(x_j^0) \quad (I8)$$

Dit proces wordt zo vaak herhaald, tot het verschil  $b_k - F_k(x_j)$  voldoende dicht bij nul ligt.  
opm: Het is te bewijzen, dat het een 2<sup>e</sup> orde iteratieproces is.