De bepaling van de eigenwaarden en eigenvectoren van een dubbel-symmetrische matrix

De bepaling van de eigenwaarden en eigenvectoren van een dubbel-symetrische matrix.

Doel : We stellen ons ten doel de eigenwaarden en eigenvectoren te bepalen van een dubbelsymmetrische matrix $A \equiv (a_{ij})$. Onder een dubbelsymmetrische matrix van $(n-1)^2$ elementen a_{ij} verstaan we een matrix, waarvoor geldt $a_{ij} = a_{ji} = a_{n-i,n-j} = a_{n-j,n-i}$. De symmetrie heeft dus betrekking op beide diagonalen.

Eigenwaardeproblemen met dergelijke matrices komen voor (of zijn althans gemakkelijk te verkrijgen) bij het bepalen van de eigentrillingen van symmetrische constructies *) of bij het bepalen van kritische toerentallen van symmetrische assen, beide met een eindig aantal graden van vrijheid.

Het blijkt, dat we ons doel kunnen bereiken door het bepalen van de eigenwaarden en eigenvectoren van twee symmetrische matrices B en C. Is n even, dan telt B $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ elementen en C $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$ elementen. Is n oneven, dan tellen beide matrices $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ elementen. De elementen van B en C zijn zeer eenvoudig uit die van A af te leiden. Het probleem wordt hierdoor dus wezenlijk bekort.

Voorlopig beperken we ons tot systemen, waarvan alle eigenwaarden λ verschillend zijn.

Stelling : Van een dubbelsymmetrische matrix met verschillende eigenwaarden zijn alle eigenvectoren hetzij symmetrisch, hetzij antimetrisch. Hierbij verstaan we onder een symmetrische vector een vector $\underline{y_i}$, waarvoor geldt $y_i = + y_{n-i}$, voor een antimetrische vector geldt $y_i = - y_{n-i}$.

Bewijs : Stellen we $k = n - i$ en $l = n - j$ dan is dus $a_{ij} = a_{ji} = a_{kl} = a_{lk}$ dan gaat het stelsel vergelijkingen $(a_{ij} - \lambda . \delta_{ij})y_j = 0$ (1) over in het stelsel $(a_{kj} - \lambda \delta_{kj})y_j = 0$ indien we eerst de laatste vergelijking opschrijven, daarna de een na laatste enz.

Draaien we in iedere vergelijking nu ook nog de volgorde van alle termen om, dan ontstaat het stelsel $(a_{kl} - \lambda \delta_{kl})y_l = 0$ (2).

We noemen nu $^{(m)}\eta_j$ de eigenvector van het stelsel (1) behorende bij de eigenwaarde $^{(m)}\lambda$. Het eerste element van deze vector zij $^{(m)}\eta_1$, het laatste $^{(m)}\eta_{n-1}$. Stel $^{(m)}\eta_{n-1} = p\,^{(m)}\eta_1$. (3).

*) Hierbij moet echter de restrictie worden gemaakt, dat ten hoogste één massa zich in het symmetrievlak mag bevinden.

Het stelsel (2) zal uiteraard dezelfde eigenvector bezitten, nu echter met de elementen in omgekeerde volgorde. Duiden we deze elementen aan met ${}^{(m)}\eta_i'$ dan is dus $p.{}^{(m)}\eta_{n-1}' = {}^{(m)}\eta_1'$ (4).

Daar echter iedere term van de stelsels (1) en (2) volkomen identiek zijn bij een dubbelsymmetrische matrix moeten de eigenvectoren ${}^{(m)}\eta_j$ en ${}^{(m)}\eta_i'$ behorende bij ${}^{(m)}\lambda$ op een constante factor na gelijk zijn, met andere woorden is in overeenstemming met (3).

${}^{(m)}\eta_{n-1}' = p.{}^{(m)}\eta_1'$ (5).

Uit (4) en (5) volgt $p^2 = 1$, dus $p = \pm 1$.

Nemen we genoemde constante factor gelijk aan p, dan volgt tenslotte ${}^{(m)}\eta_i' = p^{(m)}\eta_j$, terwijl algemeen geldt ${}^{(m)}\eta_i' = {}^{(m)}\eta_{n-j}$, dus $p^{(m)}\eta_j = {}^{(m)}\eta_{n-j}$.

Voor p = + 1 in deze eigenvector symmetrisch, voor p = -1 is zij antimetrisch.

Bepaling van de symmetrische eigenvectoren en de bijbehorende eigenwaarden.

Tellen we in het stelsel (1) de i^e vergelijking en de $(n-i)^e$ vergelijking bij elkaar op en delen we door 2, dan ontstaan de volgende n-1 vergelijkingen : (n-i is wederom = k gesteld) $\left(\frac{a_{ij} + a_{kj}}{2} - \lambda \frac{\delta_{ij} + \delta_{kj}}{2}\right) y_j = 0$ (6).
In deze vergelijkingen is de factor van de term y_j gelijk aan de factor van de term y_l $(l-j=1)$, immers

$$\frac{a_{ij} + a_{kj}}{2} = \frac{a_{kl} + a_{il}}{2} = \frac{a_{il} + a_{kl}}{2} \quad \text{en}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{ij} + \delta_{kj}}{2} &= 0 \text{ voor } i \neq j \text{ en } k \neq j \text{ en dus } k \neq l \text{ en } i \neq l \\ &= \tfrac{1}{2} \text{ voor } i = j \text{ en } k \neq j \text{ en dus } k = l \text{ en } i \neq l \\ &= \tfrac{1}{2} \text{ voor } i \neq j \text{ en } k = j \text{ en dus } k \neq l \text{ en } i = l \\ &= 1 \text{ voor } i = j = k \qquad \text{en dus } k = l = i \end{aligned}$$

terwijl ook

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{il} + \delta_{kl}}{2} &= 0 \text{ voor } i \neq l \text{ en } k \neq l \\ &= \tfrac{1}{2} \text{ voor } i = l \text{ en } k \neq l \\ &= \tfrac{1}{2} \text{ voor } i \neq l \text{ en } k = l \\ &= 1 \text{ voor } i = l = k \end{aligned}$$

We stellen nu a priori $y_j = y_l$ en zoeken dus uitsluitend naar de symmetrische eigenvectoren en de bijbehorende eigenwaarden.
Is n oneven, dan kunnen we de termen van iedere vergelijking twee aan twee optellen en verkrijgen

$$\left\{ a_{ij} + a_{kj} - \lambda \left(\delta_{ij} + \delta_{kj}\right)\right\} y_j = 0 \text{ met } j = 1 \dots \frac{n-1}{2}$$

Dit zijn n-1 vergelijkingen, die echter twee aan twee identiek zijn (de i^e en de k^e). We kunnen dus de helft van deze vergelijkingen wegstrepen en houden over $\left(a_{ij} + a_{kj} - \lambda \delta_{ij}\right) y_j = 0$. We kunnen de factor $\delta_{ij} + \delta_{kj}$ vervangen door δ_{ij} op grond van het feit, dat voor $i = 1 \dots \frac{n-1}{2}$ steeds geldt $k = \frac{n+1}{2} \dots$ $n-1 \neq j$ met $\begin{cases} j = 1 \dots \frac{n-1}{2} \\ i = 1 \dots \frac{n-1}{2} \end{cases}$

Indien n even is dan verloopt de procedure vrijwel geheel hetzelfde; alleen de middelste term en de middelste vergelijking worden anders behandeld.
Het stelsel (6) blijft onveranderd als we de middelste vergelijking ($i = k = \frac{n}{2}$) gewoon laten staan.
We moeten nu echter a priori stellen $y_j = y_l$ voor $j = 1 \dots \frac{n}{2} - 1$, terwijl in iedere vergelijking de term met $y_{n/2}$ ongewijzigd blijft. Hierdoor verkrijgen we het vergelijkingen-stelsel

$$\left.\begin{aligned} &\left(a_{ij} + a_{kj} - \lambda\delta_{ij}\right) y_j + a_{\frac{n}{2}}\, y_{\frac{n}{2}} = 0 \\ \text{en } &2a_{\frac{n}{2},j}\, y_j + \left(a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} - \lambda\right) y_{\frac{n}{2}} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ met } \left\{\begin{aligned} j &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n}{2} - 1 \\ i &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n}{2} - 1 \end{aligned}\right.$$

We zien, dat de matrix van dit eigenwaarde probleem niet meer symmetrisch is (en dus de eigenvectoren niet meer orthogonaal zijn). Wil men dit ondervangen, dan moet men een nieuwe coördinaat invoeren volgens $y_{\frac{n}{2}} = z\sqrt{2}$ en moet men de laatste vergelijking door $\sqrt{2}$ delen. Men krijgt dan het stelsel

$$\left.\begin{aligned} &\left(a_{ij} + a_{kj} - \lambda\delta_{ij}\right) y_j + a_{i,\frac{n}{2}} \sqrt{2}\, z = 0 \\ \text{en } &a_{\frac{n}{2},j} \sqrt{2}\, y_j + \left(a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} - \lambda\right) z = 0 \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} j &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n}{2} - 1 \\ i &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n}{2} - 1 \end{aligned}\right.$$

De matrix $B = \left(l_{ij}\right)$ vinden we dus uit de matrix $A = \left(a_{ij}\right)$ als volgt :

Voor n even :

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{n-i,j} \qquad \left\{\begin{aligned} i &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n-1}{2} \\ j &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n-1}{2} \end{aligned}\right.$$

Voor n oneven :

$$\left.\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij} + a_{n-i,j} \\ b_{i,\frac{n}{2}} &= a_{i,\frac{n}{2}} \sqrt{2} \\ b_{\frac{n}{2},j} &= a_{\frac{n}{2},j} \sqrt{2} \\ b_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} &= a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \end{aligned}\right| \qquad \left\{\begin{aligned} i &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n}{2} - 1 \\ j &= 1 \ldots\ldots \tfrac{n}{2} - 1 \end{aligned}\right.$$

Hierbij moet men bedenken, dat in dit laatste geval de middelste term van de symmetrische eigenvector gelijk is aan $\sqrt{2} \times$ de laatste term van de eigenvector van B.

Bepaling van de antimetrische eigenvectoren en de bijbehorende eigenwaarden.

Trekken we in het stelsel (1) de $(n-i)^e$ vergelijking af van de i^e vergelijking en delen we door 2, dan ontstaan de volgende n-1 vergelijkingen

$$\left(\frac{a_{ij} - a_{kj}}{2} - \lambda\frac{\delta_{ij} - \delta_{kj}}{2}\right) y_j = 0 \qquad (7)$$

Overeenkomstige overwegingen als bij het stelsel (6) tonen aan, dat nu de factor van de term y_j gelijk is aan de factor van de term y_l, vermenigvuldigd met (-1). (n-j=l).

We stellen nu, bij de antimetrische eigenvectoren $y_l = - y_j$.

Het twee aan twee bij elkaar voegen van de termen van iedere vergelijking levert nu, als n oneven is :

$$\left\{a_{ij} - a_{kj} - \lambda\left(\delta_{ij} - \delta_{kj}\right)\right\} y_j = 0 \qquad \text{met } j = 1.....\frac{n-1}{2}$$

In dit geval zijn de i^e en k^e vergelijking identiek op het teken na; we kunnen dus wederom de helft wegstrepen en houden over

$$\left(a_{ij} + a_{kj} - \lambda\,\delta_{ij}\right) y_j = 0 \qquad \text{met } \begin{cases} j = 1....\frac{n-1}{2} \\ i = 1....\frac{n-1}{2} \end{cases}$$

Is n even, dan voeren we bovenstaande handelingen consequent uit, ook voor de middelste termen en de middelste vergelijking. Deze term en deze vergelijking gaan dan uitsluitend uit nullen bestaan.

Een van de vergelijkingen verdwijnt, doch daarvoor in de plaats komt de voorwaarde $y_{\frac{n}{2}} = 0$ bij antimetrische eigenwaarden.

De matrix $C = \left(c_{ij}\right)$ vinden we dus uit de matrix $A = \left(a_{ij}\right)$ als volgt :

$c_{ij} = a_{ij} - a_{n-i,j}$, waarin

$\left.\begin{matrix} i = 1...\frac{n-1}{2} \\ j = 1...\frac{n-1}{2} \end{matrix}\right\}$ als n oneven is en

$\left.\begin{matrix} i = 1...\frac{n}{2} - 1 \\ j = 1...\frac{n}{2} - 1 \end{matrix}\right\}$ als n even is.

In het laatste geval geldt steeds voor de antimetrische eigenvector :

$y_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = 0.$

Samenvallende eigenwaarden.

Indien de matrix A een aantal s gelijke eigenwaarden heeft, dan behoeft niet iedere eigenvector symmetrisch of antimetrisch te zijn. De eigenvectoren behorende bij deze gelijke eigenwaarden spannen samen een s-dimensionale ruimte op en er zijn steeds s onafhankelijke eigenvectoren te vinden. Ook is iedere vector in deze ruimte eigenvector. We kunnen nu gemakkelijk aantonen, dat iedere niet-symmetrische en niet-antimetrische eigenvector kan worden geschreven als lineaire combinatie van een symmetrische eigenvector en een antimetrische. Immers indien $\underline{z}_j'$ ze een vector is met elementen z_j', dan is ook $\underline{z}_j''$ met als elementen $z_j'' = z_{n-j}'$ een eigenvector van de matrix A. Men bewijst dit weer door de volgorde van alle vergelijkingen van het stelsel (1) en van alle termen van deze vergelijkingen te verwisselen. Dus zijn de lineaire combinaties van $\underline{z}_j'$ en $\underline{z}_j''$ eigenvectoren : $y_j' = \underline{z}_j' + \underline{z}_j''$ met elementen $y_j' = z_j' + z_{n-j}'$ (symmetrisch) en $\underline{y}_j'' = \underline{z}_j' - \underline{z}_j''$ met elementen $y_j'' = z_j' - z_{n-j}'$ (antimetrisch).

Omgekeerd geldt nu, dat $\underline{z}_j' = \dfrac{y_j' + y_j''}{2}$.

Er bestaat dus geen enkele vector in de s-dimensionale ruimte, die niet als lineaire combinatie van een symmetrische-en een antimetrische vector kan worden geschreven, met andere woorden er is een basis in deze ruimte, die bestaat uit alleen symmetrische en antimetrische vectoren.

De symmetrische eigenvectoren worden weer gevonden met behulp van de matrix B, de antimetrische met behulp van de matrix C.

Er is bovendien geen enkele wetenschap over het al dan niet aanwezig zijn van samenvallende eigenwaarden nodig om met behulp van B en C alle eigenwaarden en eigenvectoren van A te vinden.

Voorbeelden :

1. Gevraagd worden de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix :

$$A = \begin{Bmatrix} 21 & 10 & 4 & 2 & 8 & 11 \\ 10 & 31 & 8 & 4 & 23 & 8 \\ 4 & 8 & 15 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 15 & 8 & 4 \\ 8 & 23 & 4 & 8 & 31 & 10 \\ 11 & 8 & 2 & 4 & 10 & 21 \end{Bmatrix} .$$

A is dubbelsymmetrisch en dus kunnen we de matrices B en C vormen :

$$B = \begin{Bmatrix} 32 & 18 & 6 \\ 18 & 54 & 12 \\ 6 & 12 & 22 \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{Bmatrix}.$$

B heeft de eigenwaarden $\lambda_1 = 68$, $\lambda_2 = 22$, $\lambda_3 = 18$ met de bijbehorende

eigenvectoren $^1\underline{y} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{Bmatrix}$, $^2\underline{y} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{Bmatrix}$, $^3\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix}$;

C heeft de eigenwaarden $\lambda_4 = 14$, $\lambda_5 = 8$, $\lambda_6 = 4$ met bijbehorende

eigenvectoren $^4\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $^5\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ en $^6\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$.

Dus heeft de matrix A de eigenwaarden $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_6$ van B en C met de bijbehorende eigenvectoren

$$^1\underline{y} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \end{Bmatrix}; \quad ^2\underline{y} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 6 \end{Bmatrix}; \quad ^3\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad ^4\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad ^5\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \text{ en } ^6\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2. Gevraagd worden de eigenwaarden en eigenvectoren van

$$\text{de matrix } A = \begin{Bmatrix} 7/2 & 1 & \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 3/2 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 & \sqrt{2} & \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 3 & 1 \\ 3/2 & 0 & \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & 7/2 \end{Bmatrix}$$

$B = \begin{Bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$ met $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$ en $^1\underline{y}_c = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $^2\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ en $^3\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

$C = \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$ met $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 1$ en $^4\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ en $^5\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

De eigenwaarden van A zijn dus $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 1$ met de bijbehorende eigenvectoren

$$^1\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad ^2\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad ^3\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad ^4\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ en } ^5\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Opgemerkt kan nog worden, dat C op zich weer een dubbelsymmetrische matrix is, waaruit kunnen worden gevormd $B' = (3)$ en $C' = (1)$ met eigenwaarden $\lambda_4 = 3$ en $\lambda_5 = 1$ en eigenvectoren $^4\underline{y} = (1)$ en $^5\underline{y} = (1)$. Hieruit volgen de eigenwaarden en eigenvectoren van C.

3. Gevraagd worden de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$A = \begin{Bmatrix} 12 & 1 & -3 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 12 & 2 & -2 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & 15 & 5 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 5 & 15 & 2 & -3 \\ 5 & 8 & -2 & 2 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & -3 & 1 & 12 \end{Bmatrix}.$$

We vinden :

$$B = \begin{Bmatrix} 14 & 6 & 2 \\ 6 & 20 & 0 \\ 2 & 0 & 20 \end{Bmatrix} \text{ met } \lambda_1 = 24,\ \lambda_2 = 20,\ \lambda_3 = 10 \text{ en } {}^{1}\underline{y} = \begin{Bmatrix} \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix},\ {}^{2}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix} \text{ en } {}^{3}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$C = \begin{Bmatrix} 10 & -4 & -8 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 10 \end{Bmatrix} \text{ met } \lambda_4 = 20,\ \lambda = 2,\ \lambda = 2 \text{ en } {}^{4}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix},\ {}^{5}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ en } {}^{6}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

De matrix A heeft dus twee dubbele eigenwaarden.

De eigenvectoren van A zijn

$${}^{1}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix},\ {}^{2}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\ {}^{3}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \end{Bmatrix},\ {}^{4}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix},\ {}^{5}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ en } {}^{6}\underline{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{doch}$$

ook ${}^{1}\underline{z} = a_1\ {}^{2}\underline{y} + a_2\ {}^{4}\underline{y}$ en ${}^{2}\underline{z} = a_3\ {}^{5}\underline{y} + a_4\ {}^{6}\underline{y}$.

De eigenvectoren ${}^{i}\underline{z}$ zijn in het algemeen noch symmetrisch noch antimetrisch.

Eindhoven, 16 juli 1963.

Groeneveld

Ir. G. Groeneveld.