

Vergelijkingsstudie van discrete regelaars

Citation for published version (APA):

Smeets, E. L. J. (1992). *Vergelijkingsstudie van discrete regelaars*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Vakgroep Produktietechnologie : WPB; Vol. WPA1358). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Vergelijkingsstudie van discrete regelaars

Onderzoeksrapport WPA-1358

E.L.J. Smeets

Eindhoven, juli 1992
Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Werktuigbouwkunde
Vakgroep WPA/WOC
Leerstoel Precision Engineering

Begeleider : Ir. P.C. Mulders
Hoogleraar : Prof.dr.ir. P.H.J. Schellekens

Samenvatting

In het kader van een onderzoeksopdracht is een studie gedaan naar discrete regelaars, welke in dit rapport wordt beschreven. De achtergrond van deze studie is het opnemen van een digitale computer in de regelkring van een rotatie-translatie robot. Deze computer gedraagt zich dan als een discrete regelaar.

Hoofdthema van de studie was het vinden van een methode om continue regelaars om te zetten naar discrete equivalenten. Bij het kennen van een dergelijke methode kan het ontwerpen van een regelaar in het continue domein blijven gebeuren, hetgeen voordelen biedt. Er blijken drie methoden te bestaan om de omzetting te realiseren, te weten : de numerieke integratie methode, de polen nulpunten plaatsing en de houdcircuit methode. Deze methoden zijn in dit rapport getoetst op hun toepasbaarheid. Dit is gebeurd aan de hand van een PD-regelaar en een PID-regelaar.

De drie methoden zijn ook getest op hun gevoeligheid voor variaties in de grootte van de sampletijd. Regelaars die minder gevoelig zijn voor dergelijke variaties stellen minder hoge eisen aan de rekencapaciteiten van een processor.

In het kader van deze studie is ook onderzoek gedaan naar de toepasbaarheid van de software programma's PSI/e en TRIP als simulatieprogramma. PSI/e en TRIP blijken de hooggespannen verwachtingen niet waar te kunnen maken.

Inhoud

1	Discrete systemen	
1.1	Inleiding	1
1.2	Definitie en omschrijving	1
1.3	Signaalbemonstering	3
1.4	Behandeling van discrete signalen	4
2	Transformaties	
2.1	Inleiding	6
2.2	Laplace transformatie	6
2.3	Z-transformatie	6
3	Omzetting van continue overdrachtsfuncties naar discrete equivalenten	
3.1	Inleiding	8
3.2	Omzetting via numerieke integratie	8
3.3	Omzetting via polen-nulpunten plaatsing	9
3.4	Omzetting via een houd circuit	10
4	Implementatie van de omzettingsmethoden op verschillende regelaars	
4.1	PD-regelaar	12
4.1.1	Implementatie van de numerieke integratie methode	12
4.1.2	Implementatie van de polen-nulpunten plaatsing	13
4.1.3	Implementatie van de houd circuit methode	13
4.2	PID-regelaar	14
4.2.1	Implementatie van de numerieke integratie methode	14
4.1.2	Implementatie van de polen-nulpunten plaatsing	15
4.1.3	Implementatie van de houd circuit methode	16

5	Vergelijking van de omzettingsmethoden aan de hand van het Bode-diagram	
5.1	Vergelijking PD-regelaar	17
5.2	Vergelijking PID-regelaar	19
5.3	Invloed van de sampletijd	21
6	Evaluatie	
6.1	Evaluatie resultaten	22
6.2	Evaluatie Psi/e & Trip als simulatie programma	22
7	Konklusies en aanbevelingen	24
8	Referenties	25
9	Bijlagen	27
	Bijlage 1 : Laplace- en Z-transformatie	28
	Bijlage 2 : Numerieke integratie methoden	31
	Bijlage 3 : Afleiding omzetting via numerieke integratie	33
	Bijlage 4 : Stabiliteit van de discrete regelaars	35
	Bijlage 5 : Invloed sampletijd : resultaten	37
	Bijlage 6 : Bode diagram gemaakt met TRIP	42

1 Discrete systemen

1.1 Inleiding

Digitale computers worden door regeltechnici gebruikt voor verschillende doeleinden. Ten eerste worden digitale computers toegepast voor simulatie en voor het berekenen van systeem dynamica. Aangezien de meeste fysische systemen van hogere orde zijn en niet-lineaire elementen bevatten, is het vaak onmogelijk om analytisch een dergelijk complex systeem te analyseren en te ontwerpen. Computersimulaties worden ook gebruikt om analytisch verkregen resultaten te analyseren en te controleren.

Een ander belangrijke toepassing van digitale computers in de moderne regeltechniek is die, waarbij ze gebruikt worden als regelaar of als processor.

Omdat veel van de geregelde processen analoge elementen bevatten, kunnen signalen in digitaal geregelde systemen zowel analoog als digitaal zijn. Het is daarom dat de signaalomzetting analoog naar digitaal en omgekeerd zo belangrijk is. In dit rapport zal hier kort iets over gezegd worden.

1.2 Definitie en omschrijving

Voordat begonnen wordt met de beschrijving van discrete systemen, eerst iets over de tegenhanger, de continue systemen. Hét kenmerk van continue systemen is dat op elk tijdstip de grootte van alle signalen bekend is. De systemen worden beschreven met behulp van differentiaal vergelijkingen. De elementen in het systeem hebben een analoge ingang en een analoge uitgang, terwijl de verwerking van de signalen continu plaats vindt.

Vaak echter zal het handiger zijn, en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk, om in een systeem discrete elementen te gebruiken. In dat geval is slechts op bepaalde, discrete tijdstippen informatie over signalen in het regelsysteem bekend. We hebben dan te maken met bemonsterde signalen. Per definitie zijn systemen met signaalbemonstering, *systemen waarin een signaal (signalen) op één of meerdere plaatsen in het systeem op discrete tijdstippen voorhanden is (zijn) of bemonsterd wordt (worden)*. Verbruggen [3]. Een andere naam voor dergelijke systemen is intermitterende systemen.

In dergelijke systemen zijn discrete elementen gebruikt, waaraan informatie op discrete tijdstippen wordt aangeboden en die zelf op discrete tijdstippen informatie verwerken en afgeven. Zij worden beschreven door differentievergelijkingen. Indien deze informatie digitaal wordt aangeboden en verwerkt, spreken we van digitale elementen en digitale systemen. Het verschil tussen discreet en digitaal ligt in het feit dat bij digitale systemen niet alleen de tijd wordt gediscrètiseerd maar ook de amplitude van het signaal (signaalkwantisering), d.w.z. dat de grootte van het signaal in een eindig aantal discrete niveaus wordt onderscheiden. Door de kwantisering wordt er ruis in het systeem geïntroduceerd aangezien er afwijkingen ten opzichte van het werkelijke signaal optreden. De gekwantiseerde grootte van het signaal is immers over het algemeen niet gelijk aan de werkelijke grootte van het signaal. Discretisering in de tijd beïnvloedt voornamelijk het dynamische gedrag van de regelkring, terwijl de discretisering in de amplitude voornamelijk de nauwkeurigheid van de te regelen grootte beïnvloedt.

Discrete systemen zijn te verdelen in systemen met inherente signaalbemonstering en systemen met opzettelijke signaalbemonstering. Bij inherente signaalbemonstering is de bemonstering een eigenschap van het systeem zelf. Tal van voorbeelden zijn hiervan te geven, zoals het radarsignaal dat slechts eenmaal per omwenteling van de radarantenne nieuwe informatie bevat. Een ander voorbeeld is een economisch systeem waarbij de voorraad een discreet signaal is, omdat deze slechts op bepaalde tijdstippen beschikbaar is.

Bij systemen met opzettelijke signaalbemonstering worden een of meer elementen aangebracht die met discontinue signalen werken. Voorbeelden hiervan vindt men vooral in toepassingen waarbij een computer gebruikt wordt. Overigens is de grens tussen inherent en opzettelijk soms discutabel, zeker bij computer toepassingen. Discrete signalen zijn namelijk inherent aan een computer en het wel of niet toepassen van een computer in een regelproces, is tegenwoordig geen vrij te kiezen optie maar een logisch gevolg van de ontwikkeling van de techniek. Men kan zich dus afvragen of er dan nog gesproken mag worden van *opzettelijke* signaalbemonstering.

1.3 Signaalbemonstering

Een bemonsteraar in een digitaal of discreet systeem, is een apparaat dat een analoge signaal converteert naar een discreet signaal, in de vorm van een amplitude-gemoduleerd puls-treintje. Een van de belangrijkste toepassingen van een bemonsteraar is om snelbewegende signalen gedurende discrete tijdstippen te "bevriezen".

Het bemonsteren kan op een aantal manieren gerealiseerd worden, Kuo [2] :

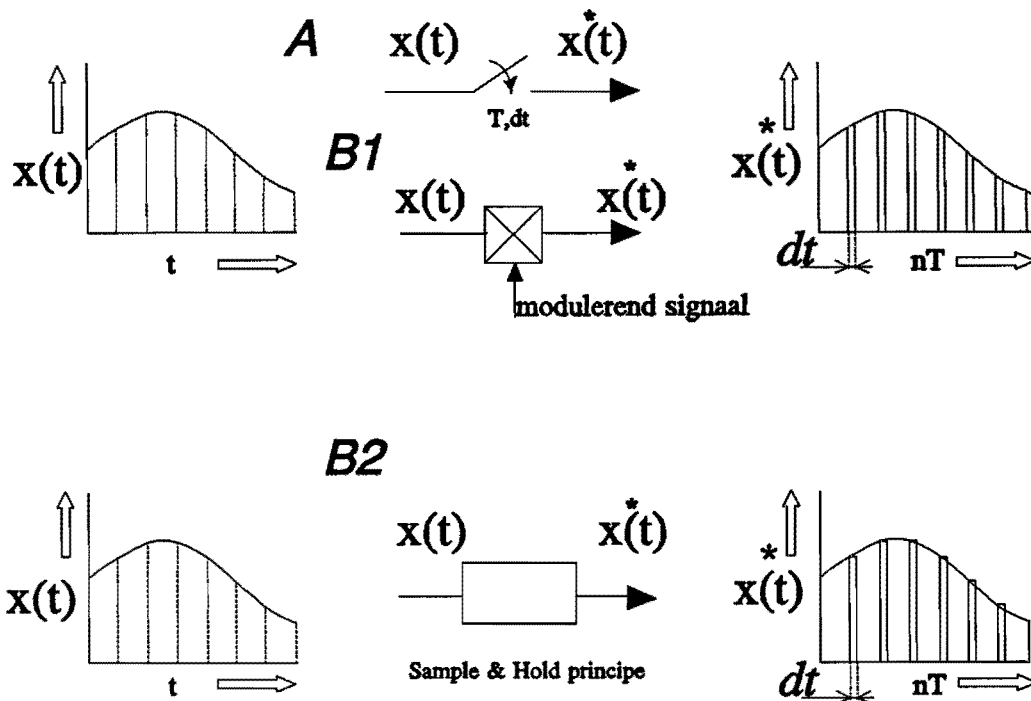
- a Door middel van een schakelaar (Eng : sampler) die elk interval T gedurende een tijd dt gesloten wordt. Gedurende de bemonsteringstijd dt wordt het continue signaal exakt gevolgd (zie fig 1 A).
- b Door middel van een modulator. Verschillende modulaties zijn denkbaar maar het meest bruikbaar is het principe waarbij de draaggolf een eenheidspulsreeks is en het continue signaal wordt gemoduleerd in amplitude. De hoogte van de pulsen aan de uitgang is dan gelijk aan de grootte van het ingangssignaal op de bemonsteringstijdstippen. Dit wordt pulsamplitude modulatie genoemd.

Hierbij doen zich twee mogelijkheden voor, te weten :

- De amplitude van de puls volgt exakt het continue signaal gedurende de bemonsteringstijd (zie fig 1 B1).
- De amplitude van de puls wordt bepaald door de waarde van het continue signaal op de bemonsteringstijdstippen en verandert niet gedurende de bemonstering. Dit wordt een *sample and hold* schakelaar genoemd (zie fig 1 B2).

Omwille van praktische redenen is de *sample and hold* schakelaar het meest toegepaste principe van bemonsteren.

Overigens hoeft de tijd tussen de bemonsteringen niet konstant te zijn. Terwille van de eenvoud zullen in dit rapport alleen signalen worden bekeken, die op equidistante tijdstippen worden gesampled, dit wil zeggen het tijdsinterval tussen de bemonsteringen is konstant.



Figuur 1. Principes van signaalbemonstering.

1.4 Behandeling van discrete signalen

Zoals al is gezegd zijn discrete signalen in sommige gevallen inherent aan het systeem. Het is duidelijk dat het modelleren, bewerken of het verwerken van dergelijke systemen, het gebruik van discrete elementen met zich mee brengt.

Echter, waarom zou men analoge signalen in stukken knippen? Dat is namelijk wat er gebeurt bij discretiseren. Welnu, er zijn verscheidene redenen te geven om een signaal te bemonsteren. De belangrijkste zijn:

- Discrete signalen hebben grote voordelen t.o.v. analoge signalen bij transport en verwerking. De verwerking en de overdracht is nauwkeuriger en betrouwbaarder. Opslag in het geheugen is eenvoudiger en de reproduceerbaarheid van het signaal is beter.
- Verschillende grootheden kunnen nauwkeuriger en sneller (dus goedkoper!) digitaal worden gemeten dan analoog. De meting wordt dan gereduceerd tot een telling. Voorbeelden hiervan zijn toerental, hoekverdraaiing en tijdsduur.

- Toepassen van digitale technieken maakt het gebruik van 'timesharing' mogelijk. Omdat slechts een klein deel van de bemonsteringsperiode voor de bemonstering van het signaal nodig is, kunnen meerdere systemen achtereenvolgens worden bemonsterd. Zo kan er zeer efficiënt gebruik worden gemaakt van de computer.
- Omdat een meting slechts gedurende een kortere tijd plaats vindt wordt de belasting op een meetinstrument verkleind. Dit komt de levensduur van meetsystemen ten goede.

Uiteraard zijn er ook nadelen aan het opzettelijk bemonsteren van signalen verbonden :

- De systemen worden gekompliceerder en daardoor ook duurder. Er dienen namelijk extra omzettingen plaats te vinden (van analoog naar digitaal en omgekeerd).
- Door het bemonsteren ontstaan hogere harmonischen in het systeem. Hierdoor kan er slijtage aan onderdelen ontstaan en kan er verzadiging optreden in versterkers en dergelijke.
- De stabiliteit van een systeem is na bemonstering doorgaans slechter dan van een continu systeem. Door het bemonsteren ontstaat een dode tijd in het systeem (het systeem reageert 'trager').

2 Transformatie

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal in het kort aandacht worden besteed aan transformatie technieken, welke gebruikt worden voor het bestuderen van het gedrag van regelsystemen. De belangrijkste transformatie is de omzetting van differentiaal- of differentie vergelijkingen in het tijddomein, naar algebraïsche vergelijkingen in het frequentiedomein. Deze transformatie levert nuttige informatie op in de vorm van polen, nulpunten en overdrachtfuncties.

2.2 Laplace transformatie

Zoals in het vorige hoofdstuk al is vermeld, wordt een continue regelaar beschreven door een differentiaal vergelijking. Met behulp van Laplace transformatie kan men een differentiaalvergelijking omzetten naar een vergelijking in het frequentiedomein. Beschouw de functie $f(t)$ welke nul is voor $t < 0$. De Laplace getransformeerde van $f(t)$ is $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, gedefinieerd door :

$$F(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt ; \quad \text{Overdijk [6] e.a.}$$

Zie bijlage 1 voor eigenschappen van de Laplace transformatie plus een tabel met Laplace getransformeerden van vaak voorkomende tijdfuncties.

2.3 Z-transformatie

De functie van de Z-transformatie bij discrete systemen is identiek aan die van de Laplace transformatie bij continue systemen. Voor de afleiding van de Z-transformatie wordt uitgegaan van een continu signaal dat wordt beschreven door $f(t)$. Bemonsteren geeft een gesampled signaal dat wordt beschreven door $f^*(t)$. Laplace transformatie van dit signaal wordt gedefinieerd als :

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-ksT}$$

Aangezien $F^*(s)$ de factor e^{-sT} bevat, is dit geen rationale functie van s , Kuo [2].

Zo'n rationale functie is gewenst, omdat het berekenen van de inverse Laplace transformatie anders moeilijkheden oplevert. Daarom heeft men de variabele z geïntroduceerd, welke gelijk is aan : $z = e^{sT}$ (Dus $s = 1/T \cdot \ln z$). Hieruit volgt :

$$F(z) = [F^*(s)]|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} ; \quad \text{Kuo [2] e.a.}$$

$F(z)$ is wel een rationale functie in z .

Zie bijlage 1 voor eigenschappen van de Z -transformatie plus een tabel met Z -getransformeerden van vaak voorkomende tijdfuncties.

De Z -transformatie is een goed instrument bij het beschrijven van lineaire discrete of digitale systemen, maar kent zijn beperkingen. In sommige gevallen moet het gebruik en de resultaten van de Z -transformatie met argwaan worden bekeken.

Bij de toepassing ervan moeten daarom de volgende punten in gedachten worden gehouden, Kuo [2] :

- 1 De afleiding van de Z -transformatie is gebaseerd op de aanname dat het bemonsterd signaal wordt benaderd door een trein van impulsen. Het oppervlak van deze impulsen, moet dan gelijk zijn aan de grootte van het input-signaal van de bemonsteraar op de bemonsteringstijdstippen. Deze aanname is alleen dan geldig, indien de sampleduur klein is vergeleken met de significante tijdconstante van het systeem.
- 2 De Z -getransformeerde van de output van een lineair systeem, $Y(z)$, beschrijft alleen de waarden van de tijdsvfunctie op de bemonsteringstijdstippen. De inverse Z -getransformeerde, $y(nT)$, beschrijft dus $y(t)$ alleen op de tijdstippen $t=nT$.
- 3 Het aantal polen van een systeem dat beschreven wordt in het s -domein, moet tenminste 1 groter zijn dan het aantal nulpunten. Dit komt overeen met de eis dat de impulsresponsie van $Y(s)$ geen discontinuïteit mag vertonen op tijdstip $t=0$. Anders zal de systeemresponsie verkregen door de Z -transformatie methode onbetrouwbaar zijn en in sommige gevallen zelfs fout. Later meer hierover.

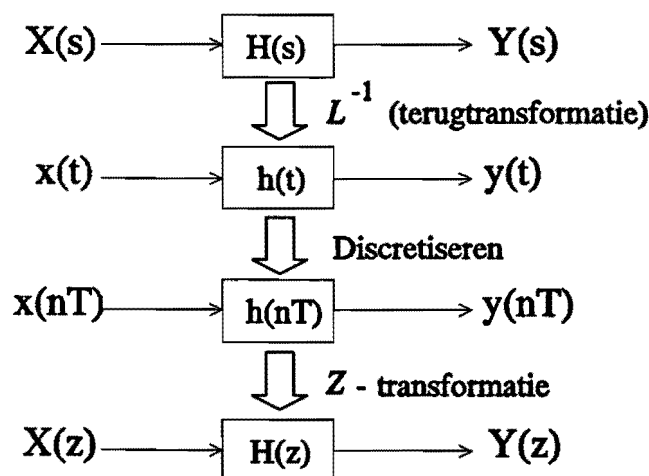
3 Omzetting van continue overdrachtsfuncties naar discrete equivalenten

3.1 Inleiding

Het ontwerpen van continue regelaars kent een rijke historie. Verscheidene technieken zijn ontwikkeld en worden alom toegepast, Min [4]. Voor het beschrijven van discrete regelaars is het daarom wenselijk een methode te kennen waarmee men de discrete equivalent van een continue regelaar kan bepalen. Zodoende kan het ontwerpen van de regelaar in het continue domein blijven gebeuren. De discrete equivalent is te berekenen volgens 3 methoden, Franklin [1], Deze methoden zullen in dit hoofdstuk worden besproken.

3.2 Omzetting via numerieke integratie

Het idee achter deze omzettings methode is om een continue regelaar te beschrijven met een differentiaalvergelijking. Deze differentiaalvergelijking wordt vervolgens gediscretiseerd en omgeschreven tot een differentievergelijking. Onderstaande figuur verduidelijkt deze omzetting :



Figuur 2. Grafische weergave van de numerieke integratie methode.

Het discretiseren gaat via numerieke integratie en kan op verschillende manieren gebeuren. De eenvoudigste en meest toegepaste manieren zijn :

- Euler voorwaarts oftewel de rechthoekige voorwaartse benadering

- Euler achterwaarts oftewel de rechthoekige achterwaartse benadering
- Trapezium regel

Voor meer informatie hierover wordt verwezen naar bijlage 2.

Met behulp van deze benaderingen vinden we de equivalenties zoals weergegeven in tabel 1.

Integratiemethode	Benadering
Euler voorwaarts	$s \sim \frac{z-1}{T} \quad (1)$
Euler achterwaarts	$s \sim \frac{z-1}{zT} \quad (2)$
Trapezium regel	$s \sim \frac{2z-1}{Tz+1} \quad (3)$

Tabel 1. Relatie tussen s en z via numerieke integratie

Voor de afleiding van de tabel wordt verwezen naar bijlage 3.

Numerieke integratie als omzettingmethode zal in hoofdstuk 4 worden verduidelijkt aan de hand van de implementatie van een aantal regelaars.

3.3 Omzetting via polen-nulpunten plaatsing

Wanneer de Z-transformatie op een continue regelaar wordt uitgevoerd, blijkt dat de polen van de discrete regelaar een relatie hebben met de polen van de continue regelaar volgens : $z = e^{sT}$. Voor de nulpunten van de discrete regelaar geldt echter niet zo'n direkte relatie. Het idee achter deze omzettingmethode is om de nulpunten, zoals die bekend zijn van de continue regelaar, ook om te zetten via de relatie : $z = e^{sT}$. Om de polen-nulpunten plaatsing succesvol uit te kunnen voeren moeten een aantal spelregels in acht genomen worden. Hierbij wordt met $H(s)$ een continue regelaar aangeduid en met $H(z)$ een discrete regelaar :

- 1 Alle polen van $H(s)$ worden in het Z-domein geplaatst volgens $z = e^{sT}$. Dus een pool in $s = -a$ wordt in het Z-domein afgebeeld in $z = e^{-aT}$.
- 2 Alle eindige nulpunten van $H(s)$ worden afgebeeld via $z = e^{sT}$.
- 3 De nulpunten van $H(s)$ die in $s = \infty$ liggen worden bij $H(z)$ geplaatst in $z = -1$. Overigens kan het wenselijk zijn om bij de discrete regelaar een tijdvertraging in te bouwen, bijvoorbeeld om de berekeningen goed uit te voeren gedurende een sampleduur. In dat geval kan men een nulpunt dat gelegen is in $s = \infty$ afbeelden in $z = \infty$. In dat geval is bij $H(z)$ het aantal nulpunten dus één kleiner dan het aantal polen.
- 4 De versterkingsamplitude van $H(z)$ wordt zodanig *gekozen* dat deze gelijk is aan de versterkingsfaktor van $H(s)$ bij een bepaalde frequentie. Meestal wordt voor deze frequentie $j\omega = 0$ genomen, zodat $H(s)|_{s=0} = H(z)|_{z=1}$.

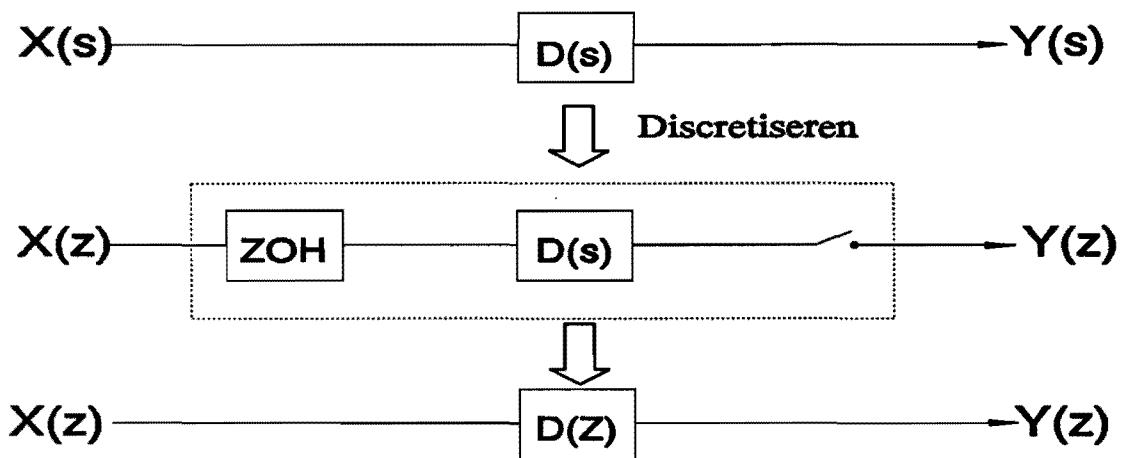
3.4 Omzetting via een houd circuit

Bij deze techniek wordt een continue regelaar geplaatst in een discreet systeem. Uiteraard moeten er dan aanpassingen gedaan worden in de vorm van een houd circuit en een sampler om de continue regelaar te kunnen laten functioneren. De continue regelaar met de aanpassingen zijn het equivalent van de discrete regelaar. Figuur 3 verduidelijkt het geheel waarbij er een nulde orde benadering is gebruikt als houd circuit (Zero Order Hold genaamd). De omzettings relatie luidt dus :

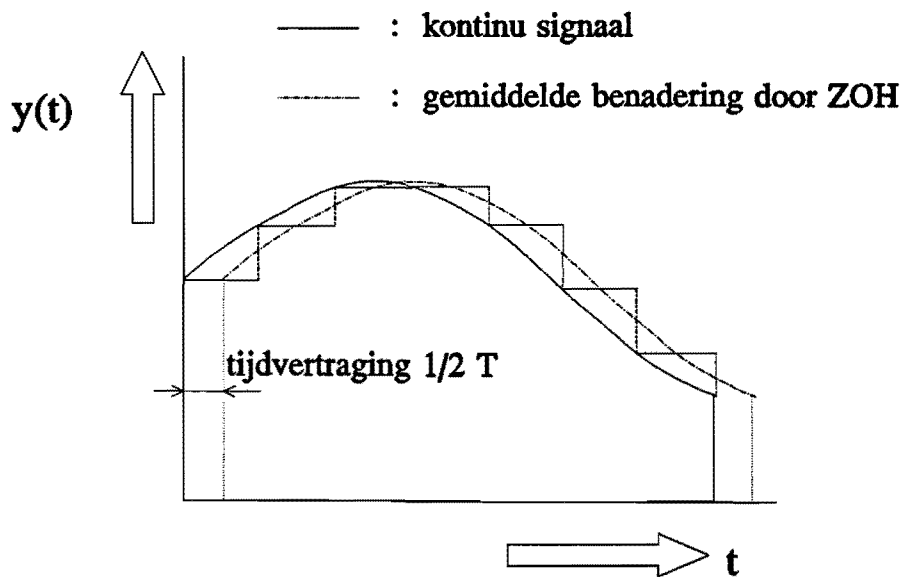
$$D(z) = Z [ZOH \cdot D(s)] = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{D(s)}{s} \right] \quad (4)$$

De equivalentie is niet exakt, aangezien er door de ZOH een tijdvertraging optreedt van een halve sampleduur ($\frac{1}{2}T$); zie figuur 4. Dit is weer recht te breien door in het continue systeem een element $e^{-0.5sT}$ te stoppen. Hierdoor wordt een dode tijd van $\frac{1}{2}T$ seconde in het systeem gebracht.

N.B. : In de rest van dit rapport wordt met de omzetting via een houdcircuit bedoeld : omzetting via een nulde orde houdcircuit (ZOH).



Figuur 3. Grafische weergave van de omzetting via een nulde orde houd circuit.



Figuur 4. Tijdvertraging t.g.v ZOH-reconstructie

4 Implementatie van de omzettingmethoden op verschillende regelaars

4.1 Tamme PD-regelaar

Een continue tamme PD-regelaar heeft de volgende algemene vorm :

$$D(s) = \frac{\tau s + 1}{a \tau s + 1} = \frac{1}{a} \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{a\tau}} \quad (5)$$

Stel $a = 1/10$ en $\tau = 1$. Hieruit volgt voor de regelaar :

$$D(s) = 10 \frac{s+1}{s+10} \quad (6)$$

4.1.1 Implementatie van de numerieke integratie methode

De resultaten van de omzetting m.b.v. de formules (1), (2) en (3) staan vermeld in tabel 2. In de laatste kolom zijn gegevens ingevuld ($a = 0.1$; $\tau = 1$; $T = 0.1$ s).

Benadering	D(z) algemeen	D(z) ingevuld
Euler voorw.	$\frac{1}{a} \frac{z - (1 - \frac{T}{\tau})}{z - (1 - \frac{T}{a\tau})} \quad (7)$	$10 \frac{z - 0.9}{z} \quad (8)$
Euler achterw.	$\frac{a\tau + aT}{a^2\tau + aT} \cdot \frac{z - \frac{\tau}{\tau+T}}{z - \frac{a\tau}{a\tau+T}} \quad (9)$	$5.5 \frac{z - 0.901}{z - 0.5} \quad (10)$
Trapezium	$\frac{2 + \frac{T}{\tau}}{a(2 + \frac{T}{a\tau})} \cdot \frac{z - \frac{2 - \frac{T}{\tau}}{2 + \frac{T}{\tau}}}{z - \frac{2 - \frac{T}{a\tau}}{2 + \frac{T}{a\tau}}} \quad (11)$	$7 \frac{z - 0.905}{z - 0.33} \quad (12)$

Tabel 2. Implementatie numerieke integratie methoden bij de PD-regelaar

4.1.2 Implementatie van de polen- nulpunten plaatsing

Uit (4) volgt dat de continue regelaar een nulpunt heeft in $s = -1/\tau$ en een pool in $s = -1/a\tau$.

* Toepassen van de regels 1 en 2 uit § 3.3 levert voor de discrete regelaar $D(z)$:

nulpunt in $z = e^{-T/\tau}$

pool in $z = e^{-T/a\tau} \rightarrow$

$$D(z) = K \cdot \frac{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{a\tau}}} \quad (13)$$

* Uitwerken van regel 4 uit § 3.3 geeft :

$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \rightarrow$

$$\frac{1}{a} \frac{1}{s} = K \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{a\tau}}} \rightarrow K = \frac{1 - e^{-\frac{T}{a\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (14)$$

Hieruit volgt voor $D(z)$:

$$D(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{a\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot \frac{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{a\tau}}}$$

Invullen gegevens ($a = 0.1$; $\tau = 1$; $T = 0.1$ s) :

$$D(z) = 6.643 \frac{z - 0.905}{z - 0.368} \quad (16)$$

4.1.3 Implementatie van de houd circuit methode

Volgens § 3.4 gaat deze methode van omzetten, bij gebruik van een ZOH, via :

$$D(z) = Z [\text{ZOH} \cdot D(s)] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{D(s)}{s} \right] \quad (4)$$

Invullen (5) in (4) geeft :

$$D(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{a} \frac{s + \frac{1}{a\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right] \quad (17)$$

$$D(z) = (1-z^{-1})Z \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{a} + \frac{a-1}{a^2\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{a\tau}} \right) \right] = (1-z^{-1})Z \left[\frac{1}{s} - \frac{a-1}{a} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{a\tau}} \right]$$

$$D(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{a-1}{a} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{a\tau}}} \right) \rightarrow D(z) = \frac{1}{a} \cdot \frac{z - (ae^{-\frac{T}{a\tau}} - a + 1)}{z - e^{-\frac{T}{a\tau}}} \quad (18)$$

Invullen van de gegevens levert :

$$D(z) = 10 \frac{z - 0.937}{z - 0.367} \quad (19)$$

4.2 PID-regelaar

Een continue PID-regelaar is van de vorm :

$$D(s) = k(1 + \tau_d s) \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = k \left(\frac{(1 + \tau_d s)(1 + \tau_i s)}{\tau_i s} \right) = k \left(\frac{\tau_i \tau_d s^2 + (\tau_i + \tau_d)s + 1}{\tau_i s} \right) \quad (20)$$

Stel : $\tau_i = 2$; $\tau_d = 5$; $k = 1$; $T = 0.1$, ingevuld geeft dit :

$$D(s) = \frac{10s^2 + 7s + 1}{2s} \quad (21)$$

4.2.1 Implementatie van de numerieke integratie methode

Tabel 3 geeft $D(z)$ zoals berekend met behulp van de formules (1), (2) en (3). Ook de resultaten na invullen van de gegevens zijn vermeld ($\tau_i = 2$; $\tau_d = 5$; $k = 1$).

Tabel 3. Implementatie numerieke integratie methoden bij de PID-regelaar.

Int. meth.	$D(z)_{\text{algemeen}}$ en $D(z)_{\text{gegevens ingevuld}} (\tau_i = 2 ; \tau_d = 5 ; k = 1 ; T = 0.1)$
Euler voorw	$k \left(\frac{\tau_d \tau_i z^2 + (T\tau_i - 2\tau_d \tau_i + \tau_d T)z - T\tau_i + T^2 + \tau_d \tau_i - \tau_d T}{T\tau_i(z-1)} \right) \quad (22)$
	$5 \frac{10z^2 - 19.3z + 9.31}{z - 1} \quad (23)$

Euler achtw	$k \left(\frac{(\tau_i T + T^2 + \tau_d \tau_i + \tau_d T) z^2 - (T \tau_i + 2 \tau_d \tau_i + \tau_d T) z + \tau_d \tau_i}{\tau_i T z (z-1)} \right) \quad (24)$ $5 \frac{10.71 z^2 - 20.7 z + 10}{z(z-1)} \quad (25)$
Trapezium	$k \frac{(2 \tau_i T + T^2 + 4 \tau_i \tau_d + 2 \tau_d T) z^2 + (2 T^2 - 8 \tau_i \tau_d) z - 2 \tau_i T + T^2 + 4 \tau_i \tau_d - 2 \tau_d T}{2 \tau_i T (z-1)(z+1)} \quad (26)$ $2.5 \frac{41.41 z^2 - 79.98 z + 38.61}{z^2 - 1} \quad (27)$

Vervolg tabel 3

4.2.2 Implementatie van de polen- nulpunten plaatsing

Uit (19) volgt voor de continue PID-regelaar :

nulpunt in : $s = -1/\tau_i$ en $s = -1/\tau_d$

pool in : $s = 0$

* Toepassen van de regels 1 en 2 uit § 3.3 levert voor de discrete regelaar $D(z)$:

nulpunt in $z = e^{-T/\tau_i}$ en $z = e^{-T/\tau_d}$

pool in $z = 1$ →

$$D(z) = A \tau_i \tau_d \frac{(z - e^{-T/\tau_i})(z - e^{-T/\tau_d})}{(z-1)} \quad \text{met } A \tau_i \tau_d = \text{versterkingsamplitude} \quad (28)$$

en $A =$ nader te bepalen konstante

* Het toepassen van regel 4 uit § 3.3 kan hier niet zonder meer aangezien de amplitude van $D(s)|_{s=0}$ voor een PID-regelaar niet gedefinieerd is (gaat naar oneindig). Voor het bepalen van de konstante A moet een andere frequentie genomen worden, bijvoorbeeld $s = 1$. De op te lossen vergelijking wordt dan :

$$D(s)|_{s=1} = D(z)|_{z=e^T} ; \quad (z = e^{sT})$$

Uitwerken van deze vergelijking levert :

$$A = k \cdot \frac{(\tau_i \tau_d + \tau_i + \tau_d + 1)}{\tau_i} \cdot \frac{e^T - 1}{\tau_i \tau_d (e^T - e^{-\frac{T}{\tau_i}})(e^T - e^{-\frac{T}{\tau_d}})} \quad (29)$$

Invullen van de parameters k , τ_i , τ_d en T in de formules (28) en (29) geeft :

$$D(z) = 49.2 \frac{(z - 0.951)(z - 0.980)}{(z - 1)} \quad (30)$$

4.2.3 Implementatie van de houd circuit methode

De omzetting gaat, bij gebruik van een ZOH, weer volgens :

$$D(z) = Z [\text{ZOH} \cdot D(s)] = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{D(s)}{s} \right] \quad (4)$$

Invullen (19) in (4) geeft :

$$D(z) = k \left(\frac{(\tau_i + \tau_d + \tau_i \tau_d)z^2 + (T - \tau_i - \tau_d - 2\tau_i \tau_d)z + \tau_i \tau_d}{\tau_i z (z - 1)} \right) \quad (31)$$

Invullen van de bekende gegevens levert :

$$D(z) = \frac{17 z^2 - 26.9z + 10}{2z^2 - 2z} \quad (32)$$

5 Vergelijking van de omzettingmethoden aan de hand van de Bode-diagrammen

5.1 Vergelijking PD-regelaar

Met behulp van het programma Matlab is in figuur 5 het Bode-diagram getekend van de continue tamme PD-regelaar $D(s)$:

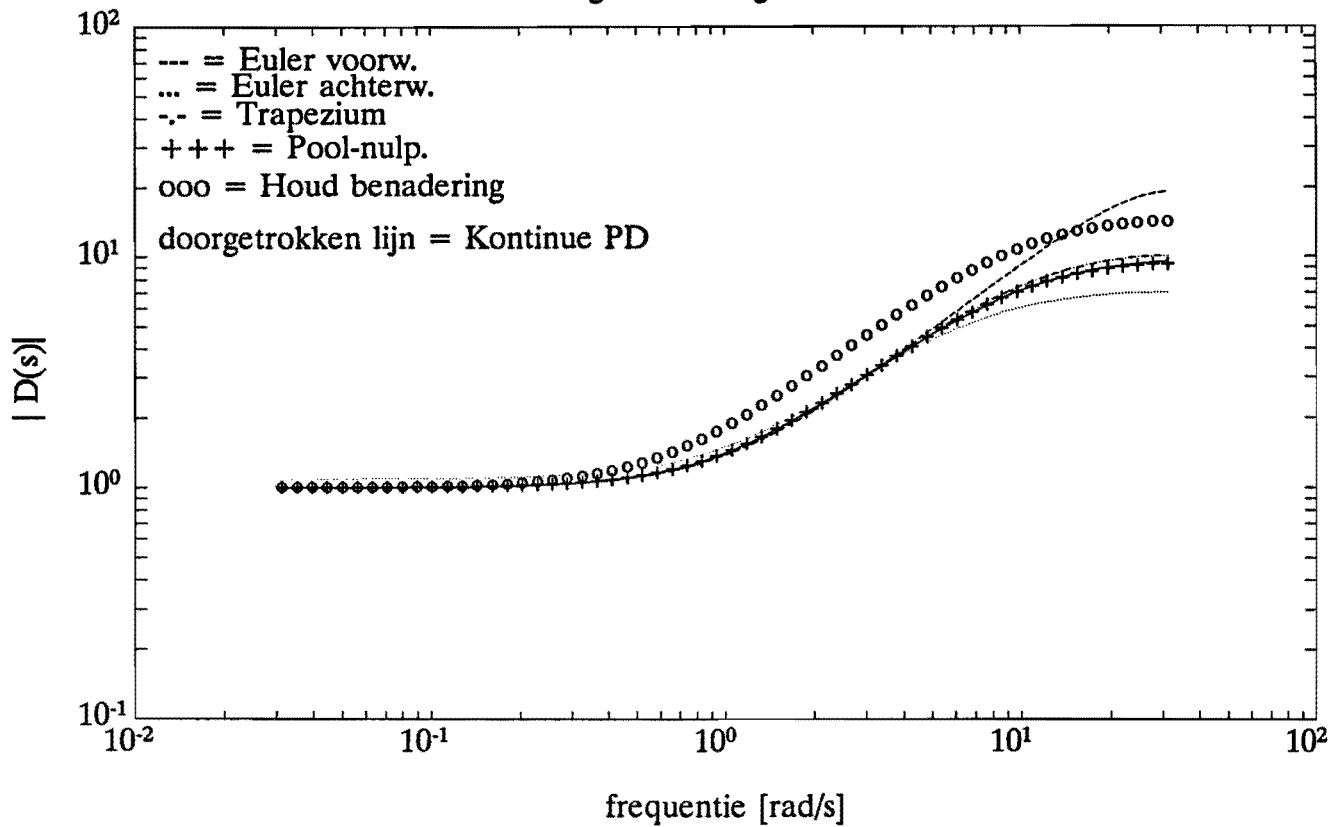
$$D(s) = 10 \frac{s+1}{s+10} \quad (6)$$

In dezelfde figuur zijn ook de Bode-diagrammen getekend van de discrete PD-regelaars, zoals deze berekend zijn via de verschillende omzettingmethoden. De sampletijd T is steeds 0.1 seconde. De overdrachtsfuncties die hierbij horen zijn te vinden in de formules (8), (10), (12), (16) en (19).

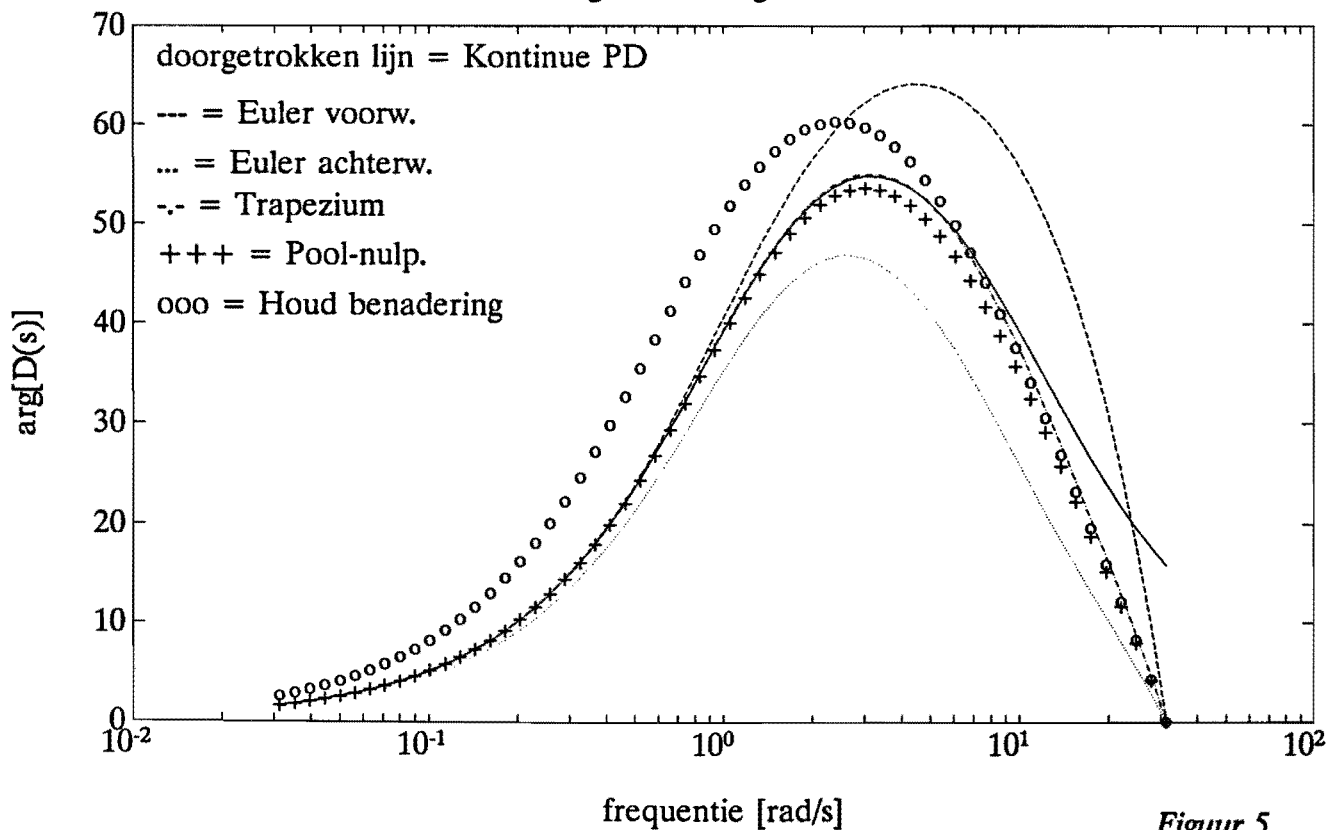
Uit het amplitude diagram blijkt dat alle benaderingen de karakteristiek van de continue PD-regelaar goed volgen, waarbij de polen-nulpunten plaatsing en de trapezium benadering, vrijwel perfect zijn.

In het fase diagram zijn grotere verschillen te zien. De polen-nulpunten plaatsing en de trapezium benadering blijven de karakteristiek van de continue PD-regelaar het langste volgen. Het argument van de continue regelaar gaat voor hogere frequenties naar 0, terwijl het argument van de discrete equivalenten naar $-\infty$ gaat !

Bode diagram PD-regelaar T = 0.1 s



Bode diagram PD-regelaar T = 0.1 s



Figuur 5

5.2 Vergelijking PID-regelaar

In figuur 6 is het Bode-diagram getekend van de continue PID-regelaar $D(s)$:

$$D(s) = \frac{10s^2 + 7s + 1}{2s} \quad (21)$$

In dezelfde figuur zijn ook de Bode-diagrammen getekend van de discrete PID-regelaars zoals deze berekend zijn via de verschillende omzettingmethoden. De sampletijd T is steeds 0.1 seconde. De overdrachtsfuncties die hierbij horen zijn te vinden in de formules (23), (25), (27), (30) en (32).

Wat in figuur 6 meteen opvalt is dat het Bode-diagram van de PID-regelaar, berekend via een houd circuit, veel afwijkt van de andere Bode-diagrammen. Dit kan verklaard worden met behulp van § 2.3. Hierin worden de beperkingen van de Z -transformatie besproken. Punt 3 van deze paragraaf stelt dat het aantal polen van de overdrachtsfunctie $H(s)$ tenminste één groter moet zijn dan het aantal nulpunten, wil de Z -transformatie betrouwbaar zijn. Welnu, dit is niet het geval bij deze omzettingmethode :

$$D(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{D(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[k \frac{(1 + \tau_d s)(1 + \tau_i s)}{\tau_i s^2}\right] \quad (33)$$

Met de bekende waarden voor k , τ_i , τ_d ingevuld wordt dit:

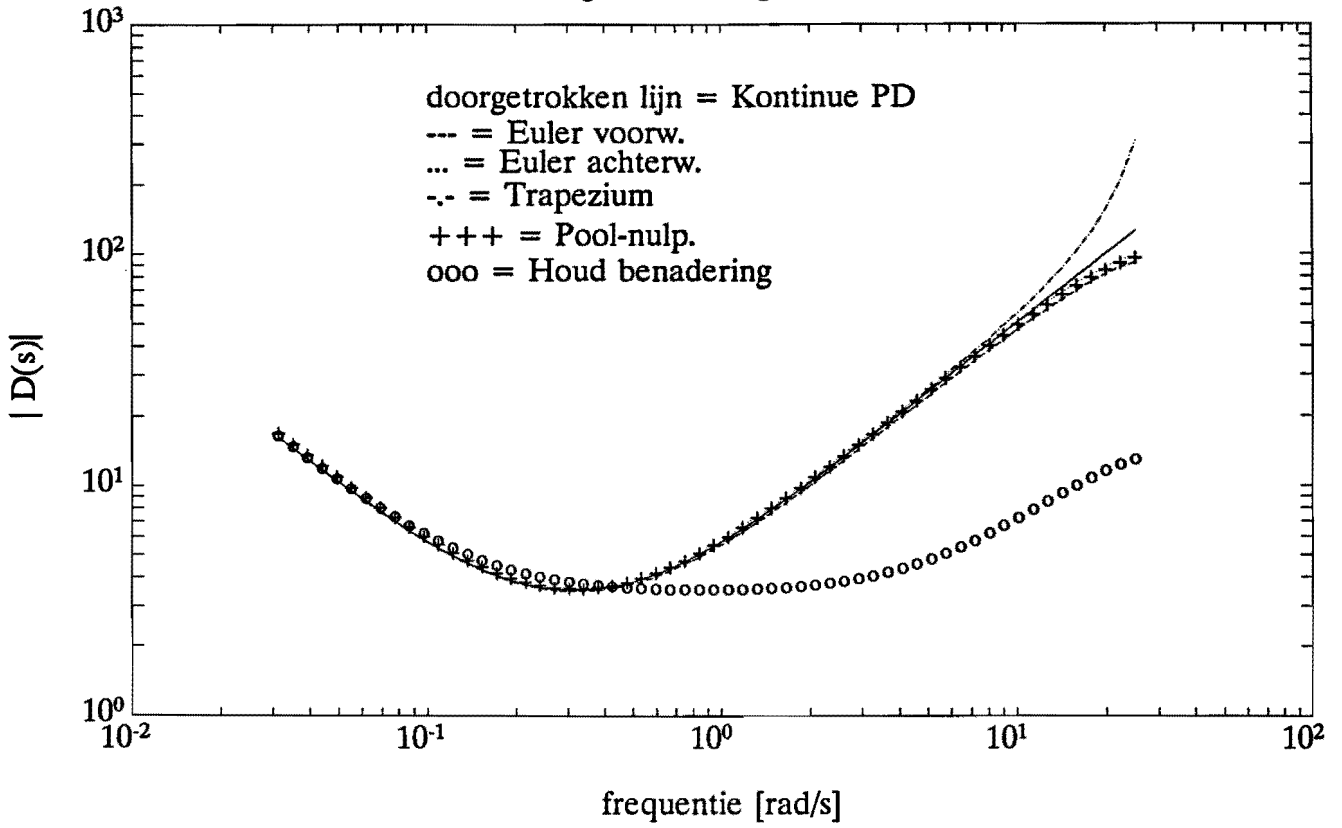
$$D(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{10s^2 + 7s + 1}{2s^2}\right] \quad (34)$$

Het gedeelte dat tussen rechte haken staat en de Z -transformatie moet ondergaan, heeft 2 nulpunten en 2 polen. Dit zou een verklaring kunnen zijn voor het afwijkende Bode-diagram van deze PID-regelaar. De konklusie is in ieder geval dat de omzetting via het houd circuit niet geschikt is voor een PID-regelaar.

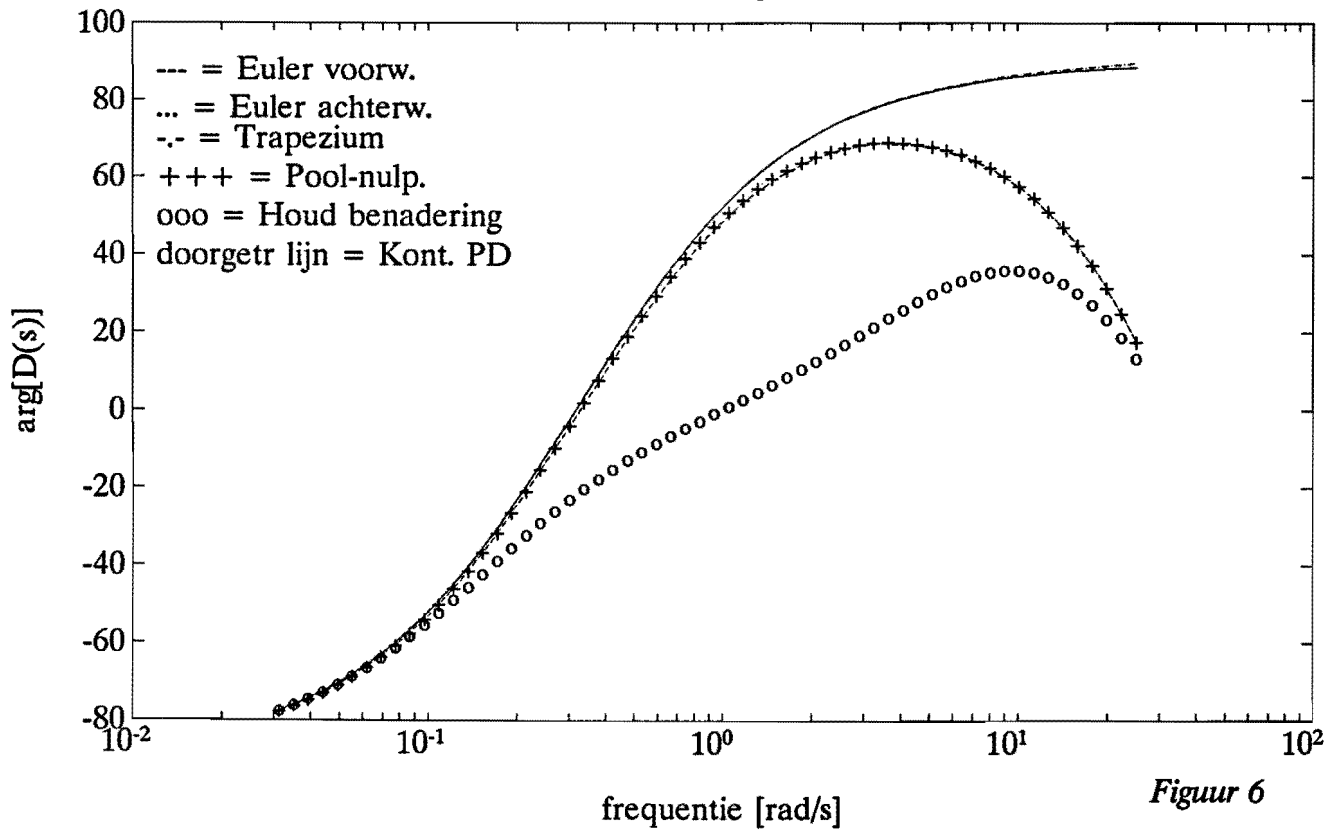
Uit het amplitude diagram blijkt dat de andere benaderingen, de karakteristiek van de continue PID-regelaar zeer goed volgen. De beste benaderingen geven : Euler voorwaarts, Euler achterwaarts en polen-nulpunten plaatsing.

Bij het fase diagram volgt de trapezium benadering perfect de karakteristiek van de continue regelaar , wat wel opvallend is. Hun argument gaat naar 90° voor hoge frequenties, terwijl het argument van de anderen kleiner dan nul wordt voor hoge frequenties.

Bode diagram PID-regelaar, T = 0.1 s



Bode diagram PID-regelaar, T = 0.1 s



Figuur 6

5.3 Invloed van de sampletijd

Met behulp van het programma Matlab is op experimentele wijze de invloed van de sampletijd bij de PD-regelaar onderzocht. In bijlage 5 zijn de resultaten gegeven van de simulaties, welke in het kort hier worden besproken.

De karakteristieken in de Bode-diagrammen lopen niet even ver door. Deze worden namelijk afgebroken bij de Shannon frequentie $\omega_b = \frac{1}{2}\omega_s = \pi/T$.

Bij de Euler voorwaarts benadering (figuur 9) en bij de omzetting via het houdcircuit (figuur 13) is de invloed van de sampletijd zeer duidelijk. Alleen bij een sampletijd van 0.01 s wordt de continue PD-regelaar goed gevolgd. De omzetting via de Euler voorwaarts benadering kan bij grote waarden voor de sampletijd zelfs instabiel worden. Zie hiervoor bijlage 4.

Bij de Euler achterwaarts benadering (figuur 10) is de invloed van de sampletijd nog steeds aanzienlijk, maar duidelijk minder dan bij de twee reeds genoemde omzettingsmethoden.

Bij de trapezium benadering (figuur 11) en bij de polen nulpunten plaatsing (figuur 12) is de invloed van de sampletijd verbazingwekkend klein. Alleen (!) bij $T = 0.5$ seconden wordt de continue PD-regelaar slecht gevolgd.

6 Evaluatie

6.1 Evaluatie resultaten

De in dit rapport beschreven methoden voor het vinden van een discrete equivalent van een continue regelaar zijn gebaseerd op het werk van Franklin en Powell [11] en [1]. De grondslagen hiervoor zijn al eerder gelegd, namelijk in het boek van Ragazzini en Franklin [10] uit 1958 (!). Ondanks het grote aanbod van boeken over digitale regelsystemen en het ontwerpen daarvan, is er in de literatuur nauwelijks iets te vinden over de eerder genoemde methoden. Wel worden er methoden voor het ontwerpen van digitale regelaars besproken, welke meestal zijn gebaseerd op methoden voor het ontwerpen van continue regelaars. Persoonlijk ben ik van mening dat het ontwerpen van een regelaar in het continue domein en deze vervolgens omzetten naar het discrete domein, op zijn minst een goed alternatief hiervoor is en wellicht de voorkeur verdient. Alleen wanneer een systeem in zijn geheel discreet is kan het misschien handiger zijn om direkt te ontwerpen in het z-domein.

Het overzicht dat in dit rapport is gegeven, is overigens niet compleet. Bij de numerieke integratie methoden is gebruik gemaakt van de drie meest eenvoudige benaderingen. Nauwkeurigere en hogere orde benadering (zoals Euler-Cauchy of Runga-Kutta) geven ongetwijfeld een beter resultaat. Bij de omzetting via een houdcircuit is gebruik gemaakt van een nulde orde houdcircuit. Een eerste orde of polygonale houdcircuit zal waarschijnlijk ook een beter resultaat geven.

Uitgezonderd de houdcircuit omzetting, zijn de methoden in principe geschikt voor ieder soort filter. Het verdient echter de aanbeveling hier nader onderzoek naar te doen.

6.2 Evaluatie Psi/e en Trip als simulatieprogramma

Het programma PSI/e (van den Bosch [13]) is een programma waarmee men kan modelleren en simuleren. Het programmeren gebeurt in een editor. Deze editor kent een starre structuur die aan de ene kant gebruikersvriendelijk is, maar aan de andere kant grote beperkingen oplegt aan het programmeren. Voor een geoefende gebruiker zal dit een nadeel zijn. Een ander nadeel van het programma is de beperkte grafische ondersteuning, zowel kwalitatief als kwantitatief. Het direkt opslaan van plaatjes is

bijvoorbeeld niet mogelijk.

Voor mijn onderzoeksopdracht heeft PSI/e geen rol van betekenis gespeeld aangezien ik niet aan het simuleren van de RT-robot ben toegekomen. Was dit wel het geval geweest, dan had ik gebruik gemaakt van het programma Matlab. Behalve de eerder genoemde nadelen, heeft PSI/e te weinig 'capaciteiten' om een dergelijk ingewikkeld en niet-lineair model aan te kunnen.

Het programma TRIP (van den Bosch [14]) is net als PSI/e ontwikkeld aan de Technische Universiteit Delft. Het is een rekenprogramma waarmee op eenvoudige wijze transformaties kunnen worden uitgevoerd. Helaas is programmeren in TRIP niet mogelijk; men kan alleen numerieke waarden ingeven. Verder zijn de grafische mogelijkheden van TRIP zeer beperkt. In principe waren alle afbeeldingen die in dit rapport gemaakt zijn met behulp van Matlab ook te maken met TRIP. Uit esthetisch oogpunt is dit niet gedaan. Om een vergelijking te kunnen maken, zijn in bijlage 6 de figuren 14 en 15 opgenomen. Deze figuren zijn gemaakt met behulp van TRIP en geven dezelfde karakteristieken weer als respectievelijk figuur 5 uit § 5.1 en figuur 6 uit § 5.2. Bij de transformatie van het s-domein naar het z-domein, maakt TRIP overigens gebruik van de omzetting via een houdcircuit.

7 Konklusies en aanbevelingen

Er blijken drie methoden te bestaan om een continue regelaar direkt te transformeren in een discrete regelaar, te weten : de numerieke integratie methode, de polen-nulpunten plaatsing en de omzetting via een houdcircuit. De numerieke integratie methode maakt gebruik van benadering. De volgende benaderingen zijn onderzocht : Euler voorwaarts, Euler achterwaarts en de trapezium regel. Bij de omzetting via een houdcircuit is gebruik gemaakt van een nulde orde houdcircuit. Alle methoden zijn in dit rapport getoetst op hun toepasbaarheid.

De numerieke integratie methode is het makkelijkst uit te voeren. Zij maakt gebruik van een vaste relatie tussen s en z .

De polen-nulpunten plaatsing is ook zeer eenvoudig toe te passen, behalve wanneer de amplitude van de overdrachtsfunctie niet gedefinieerd is voor $s = 0$ (bijvoorbeeld bij een PID-regelaar).

Wanneer het volgen van de continue regelaar in het frequentie domein als vergelijkingsmaat wordt genomen, geven de discrete equivalenten verkregen via de polen-nulpunten plaatsing en via de trapezium regel het beste resultaat. Het slechtste resultaat geven de omzetting via een houdcircuit en de Euler voorwaarts benadering. Hierbij dient nog te worden opgemerkt dat de houdcircuit methode niet geschikt is voor continue regelaars met meer nulpunten dan polen (bijvoorbeeld een PID-regelaar). Dit vanwege de tekortkomingen van de Z -transformatie.

Voor grote sampletijden is de stabiliteit van een discrete regelaar verkregen via de Euler voorwaarts methode niet gegarandeerd. De polen-nulpunten plaatsing en de trapezium benadering zijn het minst gevoelig voor variaties in de sampletijd.

Aanbevolen wordt om het effect van nauwkeurigere numerieke benaderingen (bijvoorbeeld Runge-Kutta) te onderzoeken. Verder kan worden onderzocht of het toepassen van een eerste orde of polygonale houdcircuit zin heeft. Ook is het verstandig om de kwaliteiten van de discrete regelaars in het tijddomein te onderzoeken. Bijvoorbeeld kan gekeken worden naar doorschot, statische afwijking etcetera. Verwacht wordt dat de resultaten hiervan niet veel zullen afwijken van de bevindingen in het frequentie domein.

8 Referenties

- 1 Franklin G.F., Powell J.D., Workman M.L.,
Digital control of dynamic systems, second edition
Addison-Wesley Publishing company, Amsterdam, 1990.
- 2 Kuo, B.C.,
Digital control systems
Holt, Rinehart and Winston, London, 1980.
- 3 Verbruggen H.B.,
Digitale regelsystemen
Delft University Press, Delft, 1982.
- 4 Min J.L., Schrage J.J.,
Ontwerpen van analoge en digitale regelsystemen
Nijgh & Van Ditmar, 's-Gravenhage, 1987, derde druk.
- 5 Mulders P.C.,
Geavanceerde besturingstechnologie
TUE diktaat nr 4603, Eindhoven, 1991.
- 6 Overdijk D.A.,
Fouriertheorie, stochastiek en signaalverwerking
TUE diktaat nr 2323, Eindhoven, 1984.
- 7 Lonij H.M.M.,
Digitale regeltechniek
post HTO cursus, blok 2, Eindhoven, 1987.

- 8 Hostetter G.H.,
Digital control system design
Holt, Rinehart and Winston, London, 1988.
- 9 Middleton R.H., Goodwin G.C.,
Digital control and estimation
Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, 1990.
- 10 Ragazzini J.R., Franklin G.F.,
Sampled-data control systems
Mcgraw-Hill, London, 1958.
- 11 Franklin G.F., Powell J.D.,
Digital control of dynamic systems
Addison-Wesley Publishing Company, Amsterdam 1980.
- 12 PC-Matlab User's Guide
The Mathworks Inc., Sherborn, 1987.
- 13 Bosch P.P.J. van den,
Modeling and simulation with PSI/e
BOZA automatisering, Pijnacker, 1990.
- 14 Bosch P.P.J. van den,
Linear system analysis and design with TRIP
BOZA automatisering, Pijnacker, 1989.

9 Bijlagen

Laplace en Z-transformatie

Tabel 1: Laplace- en Z-getransformeerden van vaak voorkomende tijdsfuncties.
 Alle tijdsfuncties gelden voor $t > 0$. (bron : Mulders [5])

Continue tijdsfunctie	Laplace transformatie	Bemonsterde tijdsfunctie	z-Transformatie
$\delta(t)$	1	$\delta(nT)$	1
$\delta(t-kT)$	e^{-skT}	$\delta(nT - kT)$	z^{-k}
1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	(nT)	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(nT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{s^{k+1}}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial a^k} e^{-anT}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-anT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$(nT)e^{-anT}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$e^{-at} \frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} e^{-anT}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin n\omega T$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos n\omega T$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-anT} \sin n\omega T$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-anT} \cos n\omega T$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Tabel 2: Eigenschappen van de Laplace transformatie. (bron : Overdijk [6])

<u>Tijdsdomein</u>	<u>s-domein</u>
$x(t)$	$X(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$
$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$
$x(at) \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0)$	$\frac{1}{a} X(s/a)$
$x(t-t_0) \epsilon(t-t_0) \quad (t_0 \in \mathbb{R}, t_0 \geq 0)$	$e^{-st_0} X(s)$
$e^{\beta t} x(t) \quad (\beta \in \mathbb{C})$	$X(s-\beta)$
$x^{(n)}(t)$	$s^n X(s) - s^{n-1} x(0^+) - \dots - x^{(n-1)}(0^+)$
$\int_{0^+}^{t^-} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
$tx(t)$	$-X'(s)$
$\frac{x(t)}{t} \quad (\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t)}{t} \text{ bestaat})$	$\int_s^{\infty} X(\sigma) d\sigma$
$(x * y)(t) = \epsilon(t) \int_{0^+}^{t^-} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$X(s)Y(s)$

Tabel 3: Eigenschappen van de Z-transformatie. (bron : Verbruggen [3])

I. Lineariteitstheorema's	
a. $f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(z) \pm F_2(z)$
b. $\alpha f(t)$	$\alpha F(z)$
II. Reële verschuivingstheorema's	
a. $f(t - mT)$	$z^{-m} F(z)$
b. $f(t + mT)$	$z^m [F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) z^{-k}]$
III. Komplexe verschuivingstheorema's	
$e^{\pm \alpha t} f(t)$	$F(ze^{\pm \alpha T})$
IV. Differenties	
a. $\Delta^n f(nT)$	$(z-1)^n F(z) - z \sum_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \Delta^k f(0)$
b. $\nabla^n f(nT)$	$(1-z^{-1})^n F(z)$
V. Sommatieregel	
$g(nT) = \sum_{k=0}^n f(kT)$	$G(z) = \frac{z}{z-1} F(z)$
VI. Vermenigvuldiging met $a^{\pm n}$	
$a^n f(t)$	$F(a^{-1} z)$
$a^{-n} f(t)$	$F(az)$
VII. Schaafeigenschap	
$f(at)$	$F(z^a)$
VIII. Vermenigvuldiging met $t^{\pm m}$	
$t^m f(t)$	$\left(-zT \frac{d}{dz}\right)^m F(z)$
$t^{-m} f(t)$	$-\frac{1}{T} \int_0^z \frac{1}{\xi_m} \int_0^{\xi_m} \frac{1}{\xi_{m-1}} \dots \int_0^{\xi_2} \frac{1}{\xi_1} F(\xi_1) d\xi_1 \dots d\xi_m$
IX. Limietwaardetheorema's	
a. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
b. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$

Numerieke integratie methoden

Bij numerieke integratie methoden gebruikt men alleen de funktiewaarde op discrete tijdstippen. Er gaat dus informatie verloren en men spreekt daarom van benaderingen. In de loop der tijd zijn verschillende benaderingsmethoden uitgedacht, uiteenlopend van zeer simpele tot zeer ingewikkelde en nauwkeurige benaderingen. De meest eenvoudige en tevens meest toegepaste worden hier besproken.

$x(t)$ is een continu signaal.

Men wil nu $x(t)$ integreren in de tijd :

$$J = \int_0^t x(t) dt$$

Hierbij mag alleen gebruik worden gemaakt van de discrete waarden :

$$x(0), \dots, x(t_{n-1}), x(t_n)$$

Het probleem kan worden teruggebracht tot het vinden van een benadering van het oppervlak onder de curve $x(t)$ tussen de tijdstippen t_{k-1} en t_k . Verschillende benaderingen zijn mogelijk. De meest toegepaste benaderingen (met $T = t_k - t_{k-1}$) zijn de volgende :

- Voorwaartse Euler benadering :

$$J = \sum_{k=1}^n x_k \cdot T \quad (35)$$

- Achterwaartse Euler benadering :

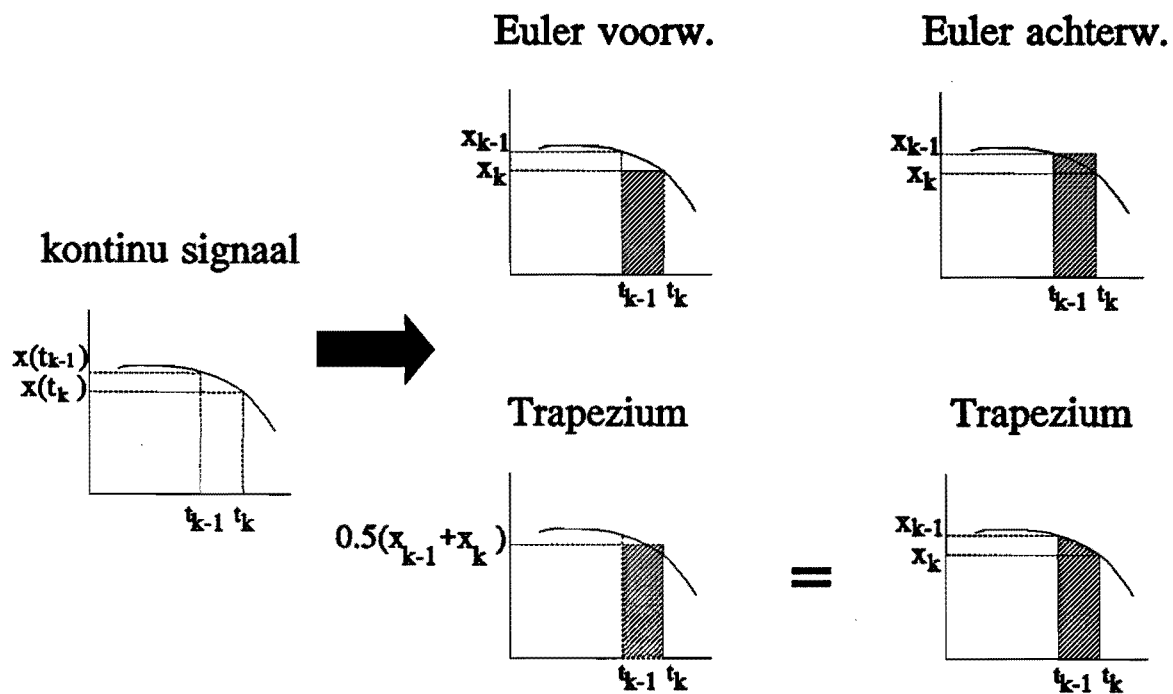
$$J = \sum_{k=1}^n x_{k-1} \cdot T \quad (36)$$

- Trapezium benadering :

$$J = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_k) \cdot T \quad (37)$$

Deze benaderingswijzen worden verduidelijkt met behulp van figuur 7

In deze figuur is duidelijk te zien dat de trapezium benadering de meest nauwkeurige is.



Figuur 7. Grafische weergave numerieke integratie benaderingen.

Afleiding omzetting via numerieke integratie

Voor de afleiding van de omzetting via numerieke integratie wordt uitgegaan van een integrator als overdrachtsfunctie :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad sY(s) = X(s)$$

$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}$ (Laplace terugtransformatie) \rightarrow

$$y'(t) = x(t)$$

- 1 Benadering via Euler voorwaarts oftewel de voorwaartse rechthoekige benadering.

$$y'(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

Voor kleine T geldt :

$$y'(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T} = x(t)$$

Discretiseren : $t = nT$

$$y(nT+T) = y(nT) + x(nT)T \quad \rightarrow \quad y(nT) = y(nT-T) + x(nT-T)T$$

Z-transformatie :

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}X(z)T \quad \rightarrow \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}T}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{Dus } \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{z-1} \quad ; \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow s \sim \frac{z-1}{T} \quad (1)$$

2 Benadering via Euler achterwaarts oftewel de achterwaartse rechthoekige benadering.

Voor kleine T geldt :

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t) - y(t-T)}{T} = x(t)$$

Discretiseren : $t = nT$

$$y(nT) = y(nT-T) + x(nT)T$$

Z-transformatie :

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z)T \rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{1-z^{-1}}$$

$$\text{Dus } \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{zT}{z-1} \quad ; \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow s \sim \frac{z-1}{zT} \quad (2)$$

3 Benadering via de trapezium benadering.

$$\frac{y(t) - y(t-T)}{T} = \frac{1}{2}[x(t) + x(t-T)]$$

Discretiseren : $t = nT$

$$y(nT) = y(nT-T) + \left(\frac{x(nT) + x(nT-T)}{2}\right)T$$

Z-transformatie :

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{1}{2}(X(z) + z^{-1}X(z))T$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{T}{2}$$

$$\rightarrow s \sim \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{2}{T} \quad (3)$$

Stabiliteit van de discrete regelaars

Om de stabiliteit van de numerieke omzettingmethoden te testen, kan gekeken worden naar de afbeelding van de linker helft van het s-vlak, in het z-vlak. Uitgangspunt hierbij, zijn de formules (1), (2) en (3) uit § 3.2. Hieruit moet z worden opgelost in termen van s. Dit levert :

$$\text{Euler voorwaarts} \quad : \quad z \sim 1 + sT \quad (38)$$

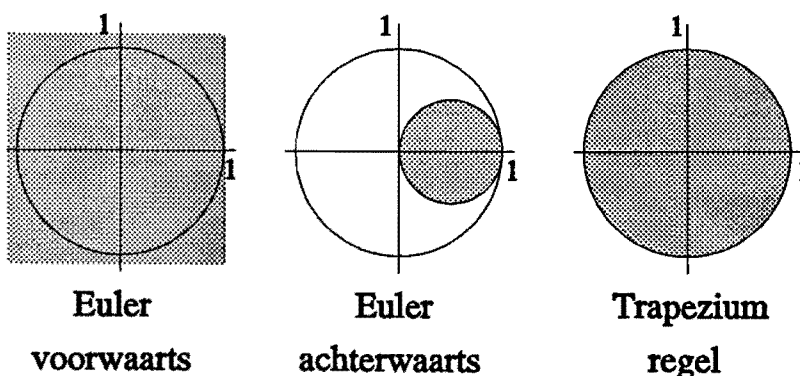
Euler achterwaarts :

$$z \sim \frac{1}{1 - sT} \quad (39)$$

Trapezium :

$$z \sim \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \quad (40)$$

In het s-vlak is het gebied links van de ($s = j\omega$)-as, het stabiele gebied. Invullen van $s = j\omega$ in bovenstaande relaties, geeft na grafische interpretatie, de donkere vlakken in figuur 8. In deze figuur is ook de eenheidscirkel getekend, welke de grens aan geeft tussen stabiliteit en instabiliteit in het z-vlak. Een directe vergelijking is nu dus mogelijk.



Figuur 8. Afbeelding van het stabiele s-vlak in het z-vlak.

Uit de figuur blijkt, dat via de Euler voorwaarts omzetting, een stabiele continue regelaar kan worden omgezet in een instabiele discrete regelaar. Om dit te

illustreeren, wordt formule (7) uit § 4.1.1 aangehaald :

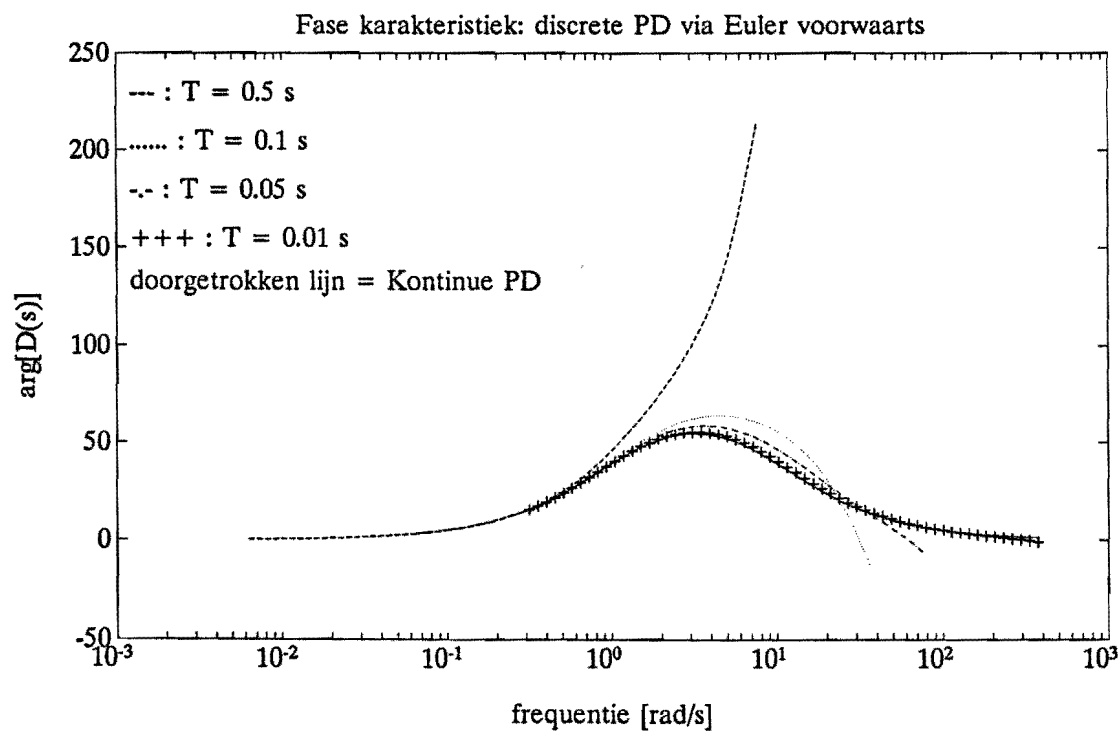
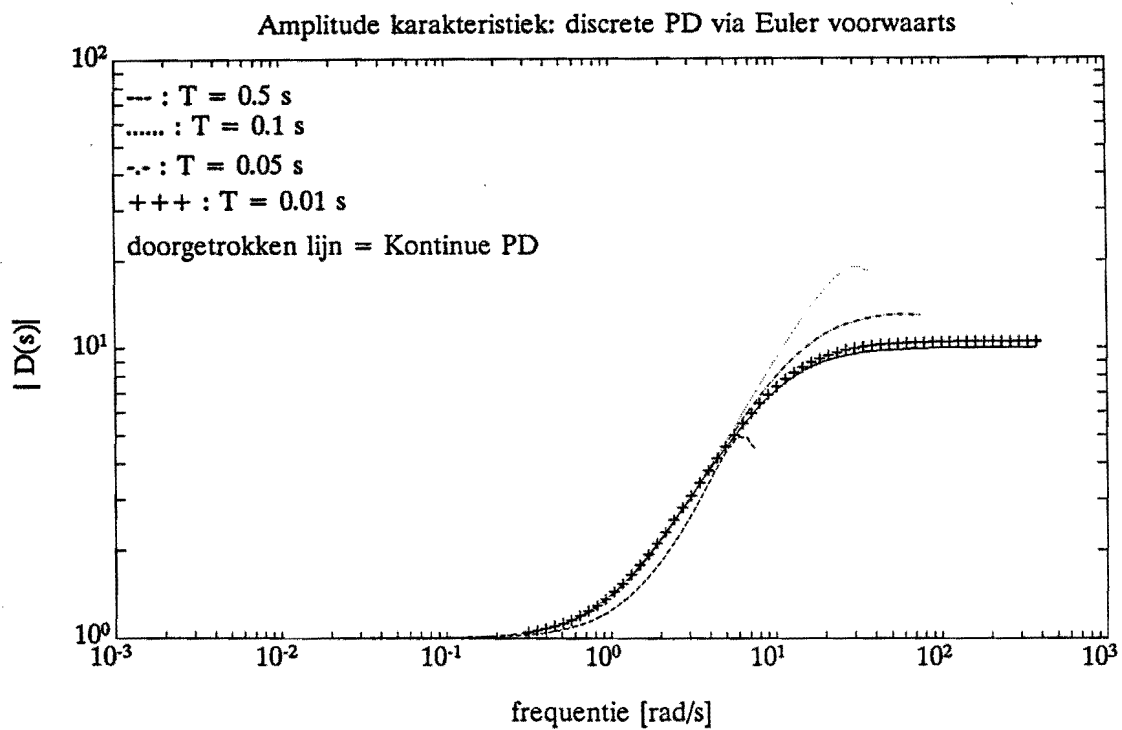
$$\text{Euler voorwaarts benadering van een continue PD-regelaar : } D(z) = \frac{1}{a} \frac{z - (1 - \frac{T}{\tau})}{z - (1 - \frac{T}{a\tau})} \quad (7)$$

Wanneer nu $|1 - T/a\tau| > 1$ is, ligt de pool buiten de eenheidscirkel en is de regelaar niet stabiel. Invullen van de reeds eerder gebruikte gegevens ($\tau = 1$ en $a = 0.1$) levert: $T = 0.1$ seconde als minimale sampletijd voor een stabiele regelaar. Dit blijkt ook wel uit figuur 9 (bijlage 5), waarin de Bode-diagrammen zijn getekend van de Euler voorwaarts omzetting bij verschillende sampletijden. De omzetting met $T = 0.5$ seconden vertoont duidelijk verschijnselen van instabiliteit, vooral in het fase diagram.

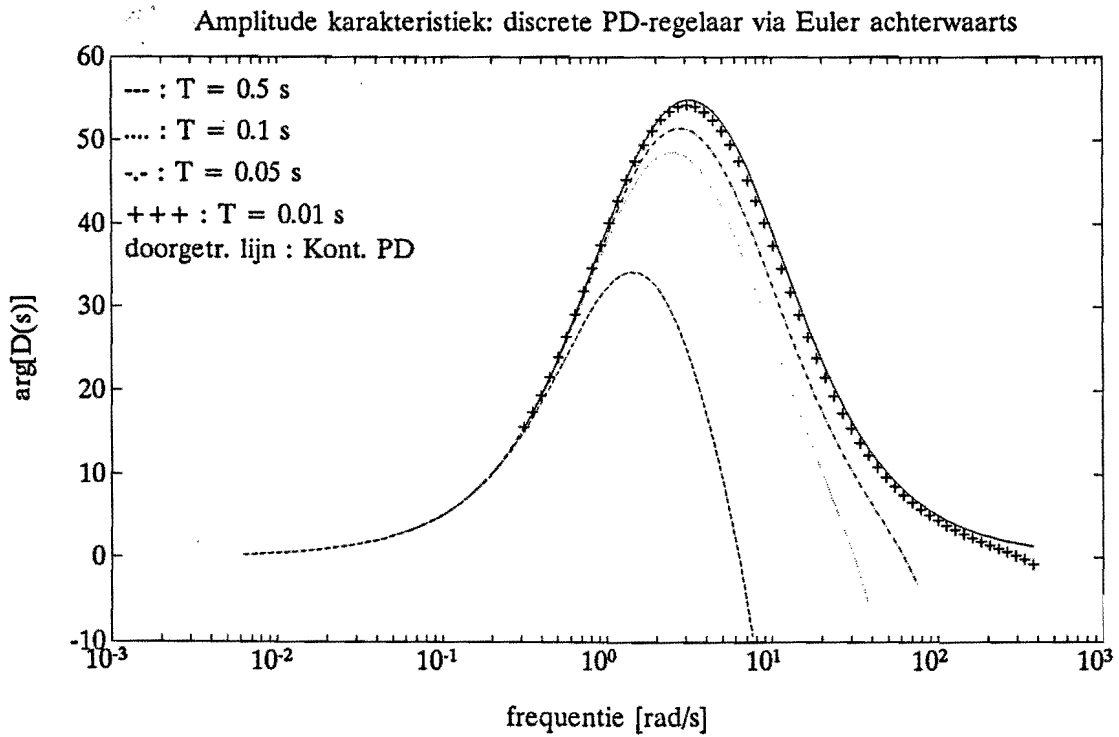
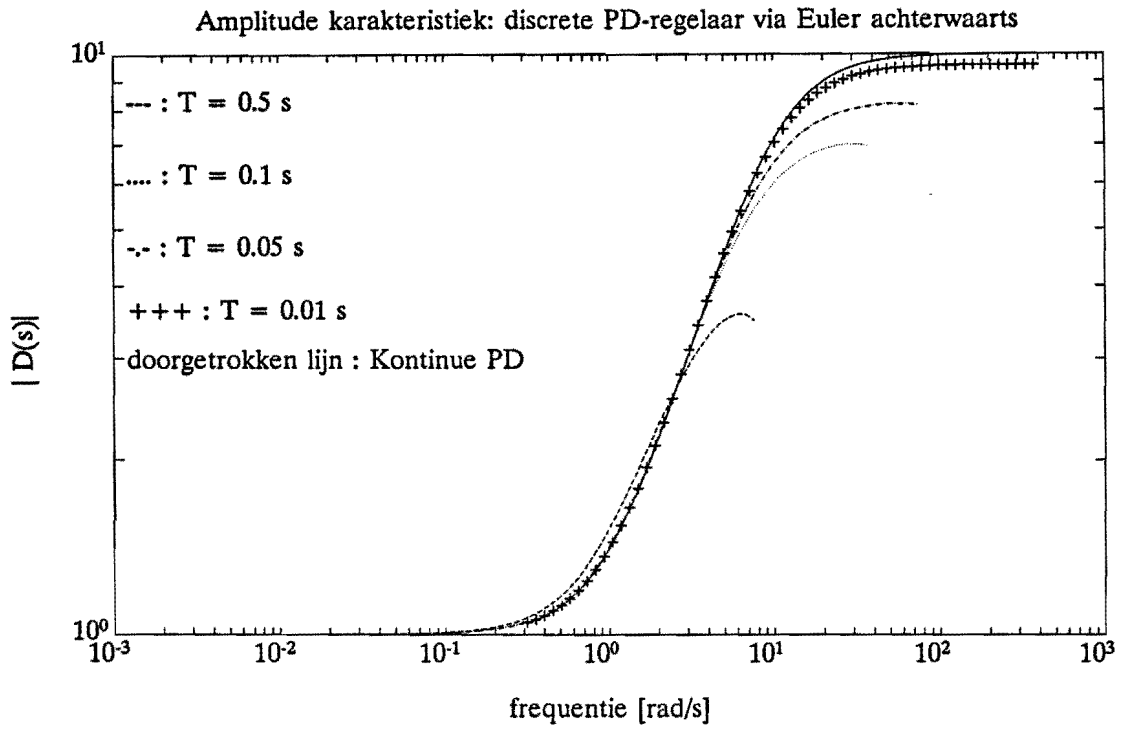
De Euler achterwaarts en de trapezium omzetting garanderen, zoals figuur 8 toont, wél stabiliteit. Bij de trapezium omzetting wordt het stabiele gebied in het s -vlak, zelfs exakt afgebeeld op het stabiele gebied in het z -vlak. Bestudering van de formules (9) en (11) uit § 4.1.1 bevestigt de garantie voor stabiliteit bij deze twee omzettingmethoden.

Bij de omzettingmethoden via polen-nulpunten plaatsing en via een houd-circuit is de vraag over stabiliteit niet aan de orde. Een stabiele continue regelaar wordt altijd omgezet in een stabiele discrete regelaar. Dit is inherent aan deze omzettingmethoden.

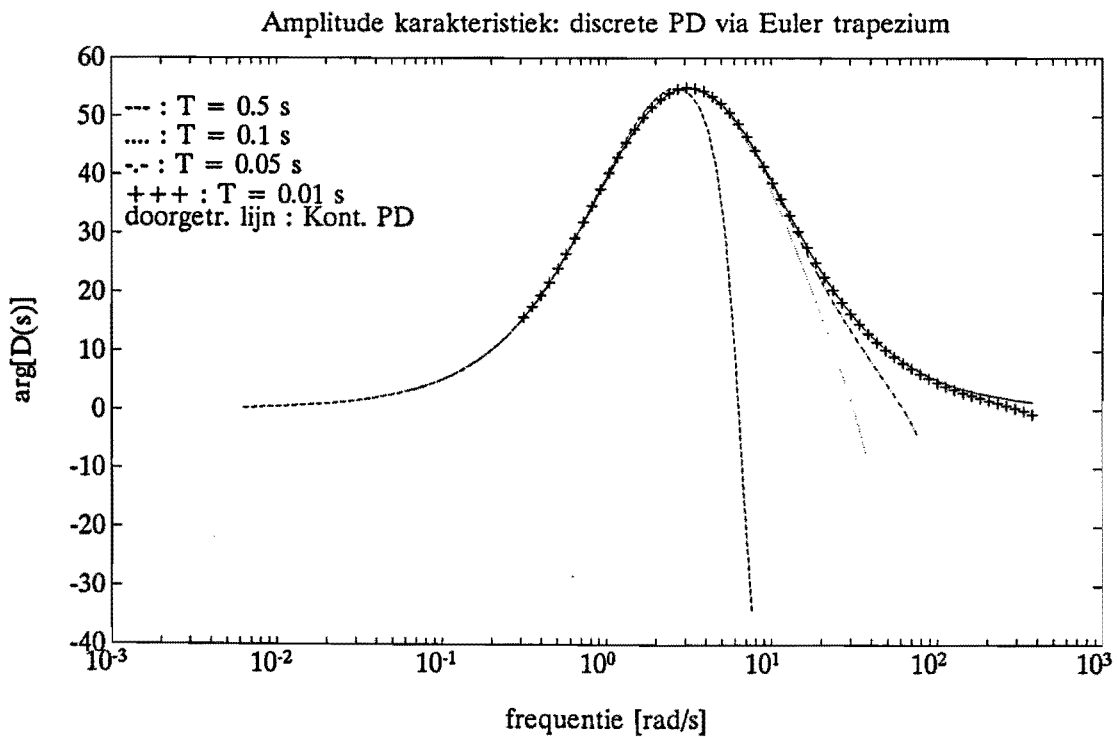
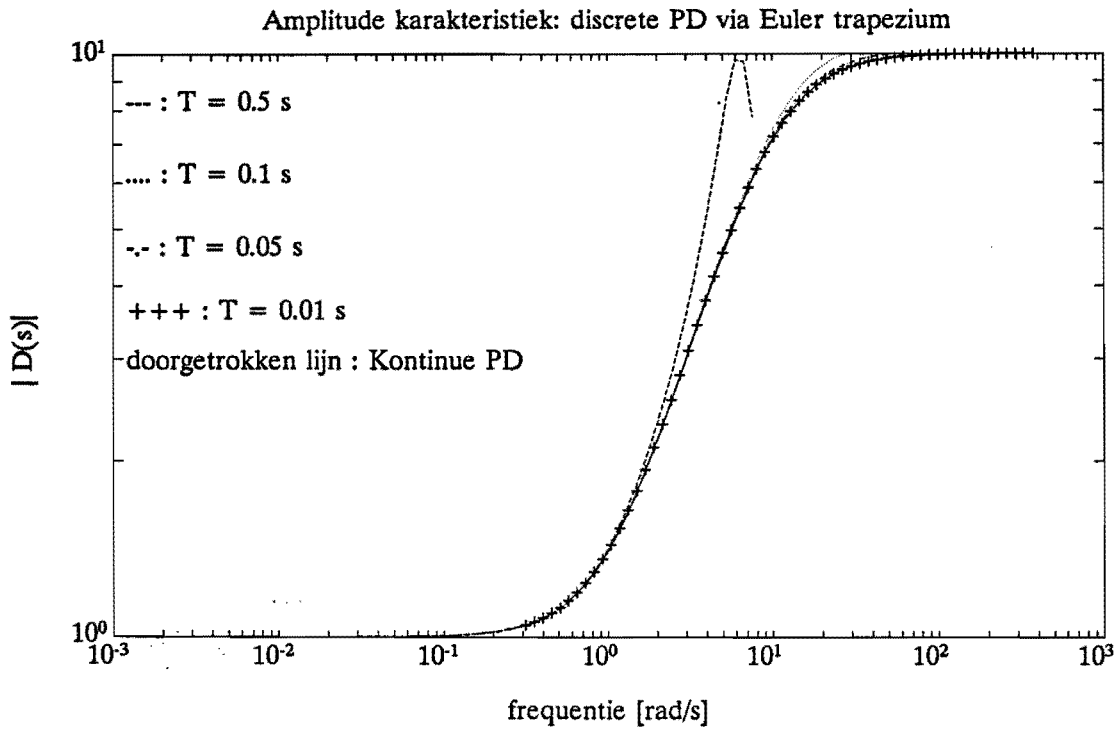
Invloed sampletijd: resultaten



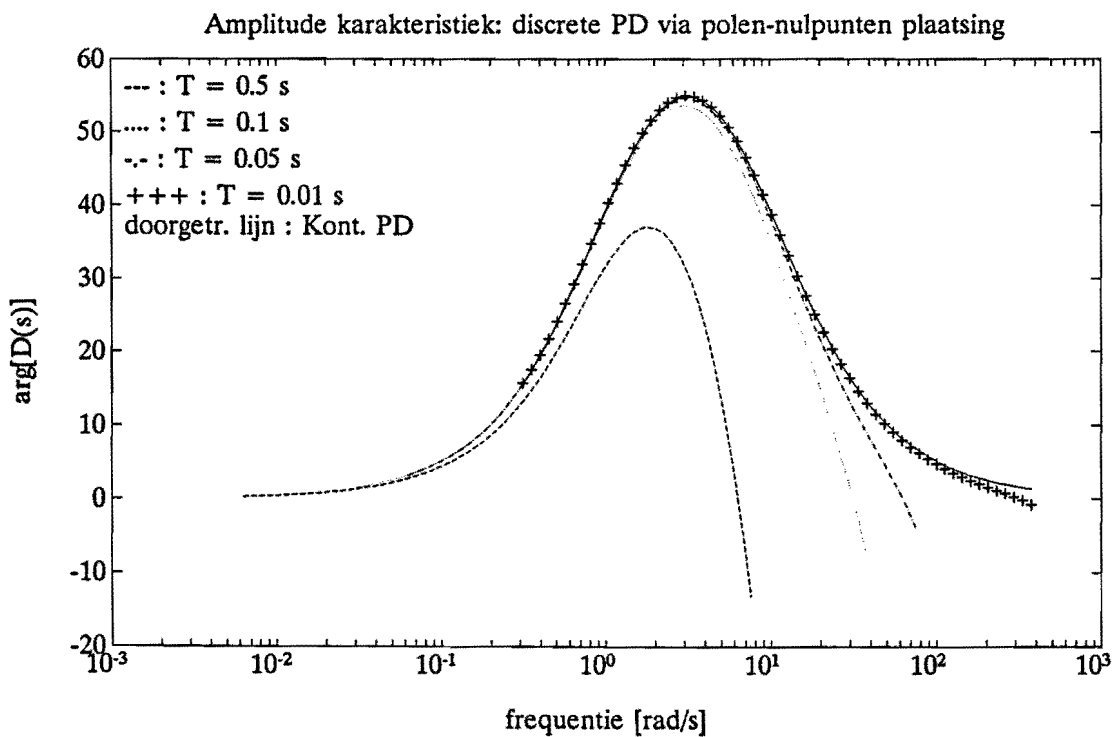
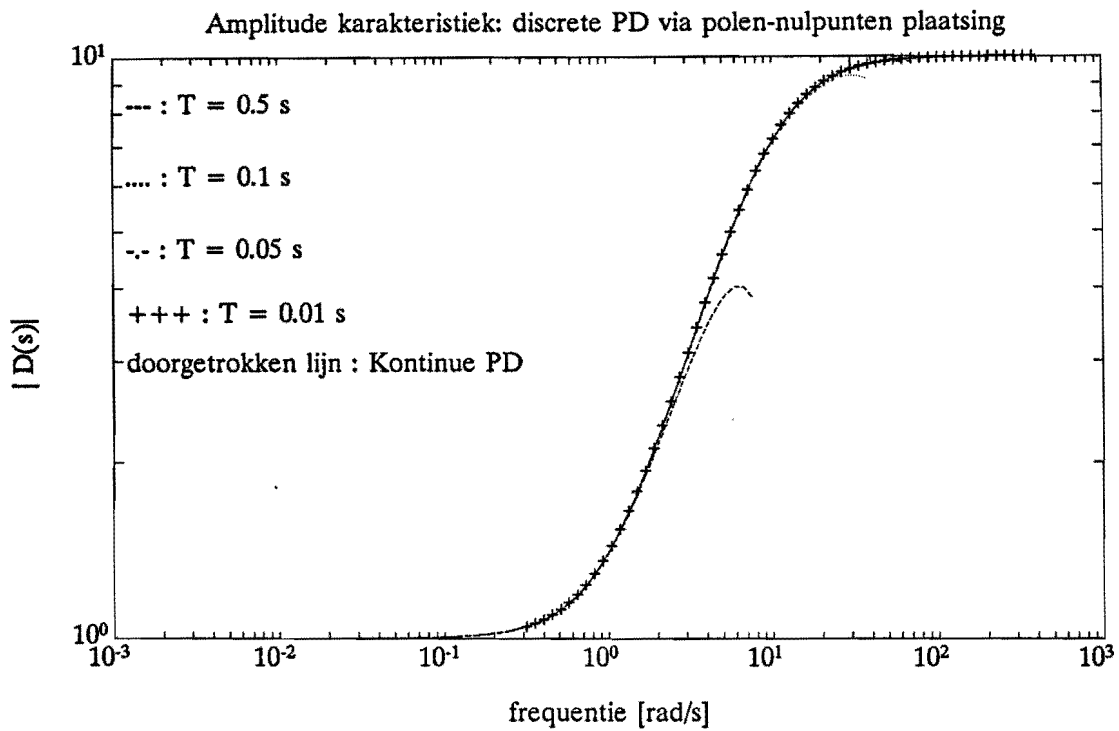
Figuur 9



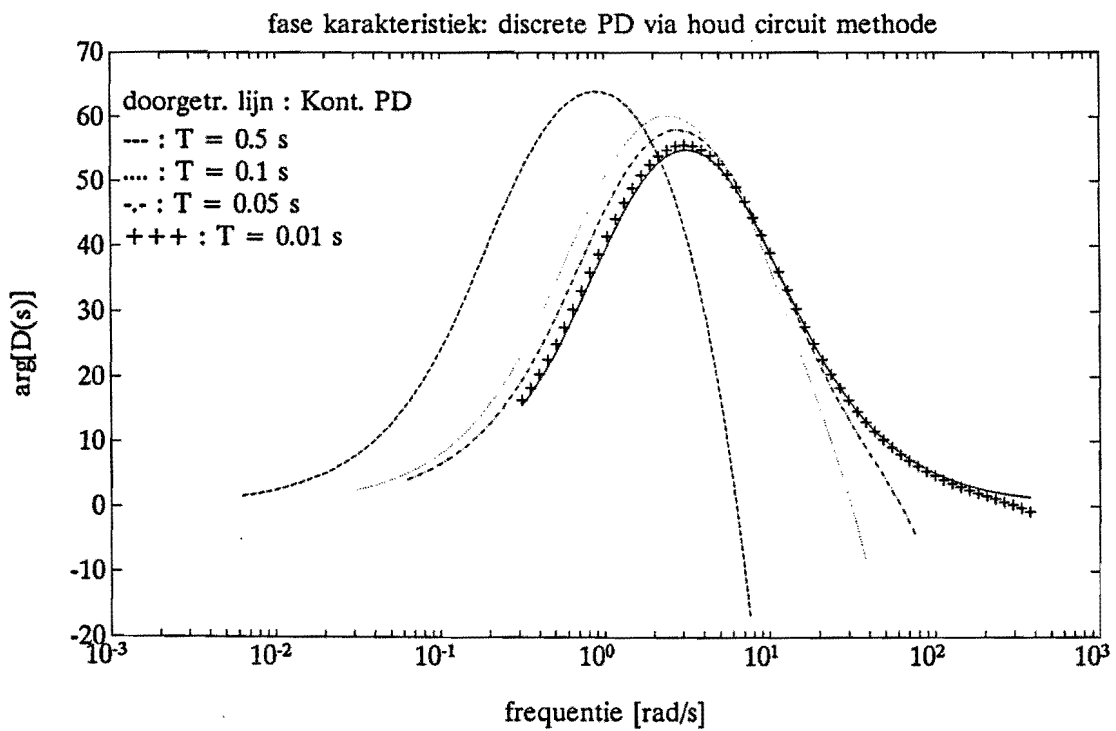
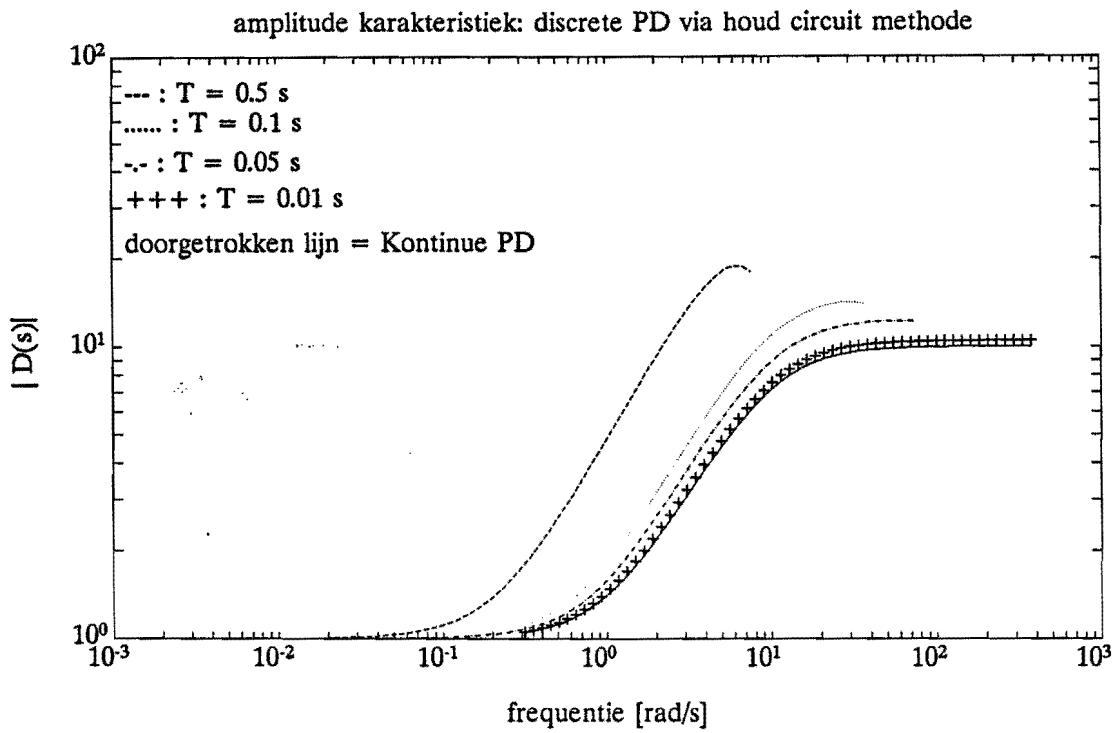
Figuur 10



Figuur 11



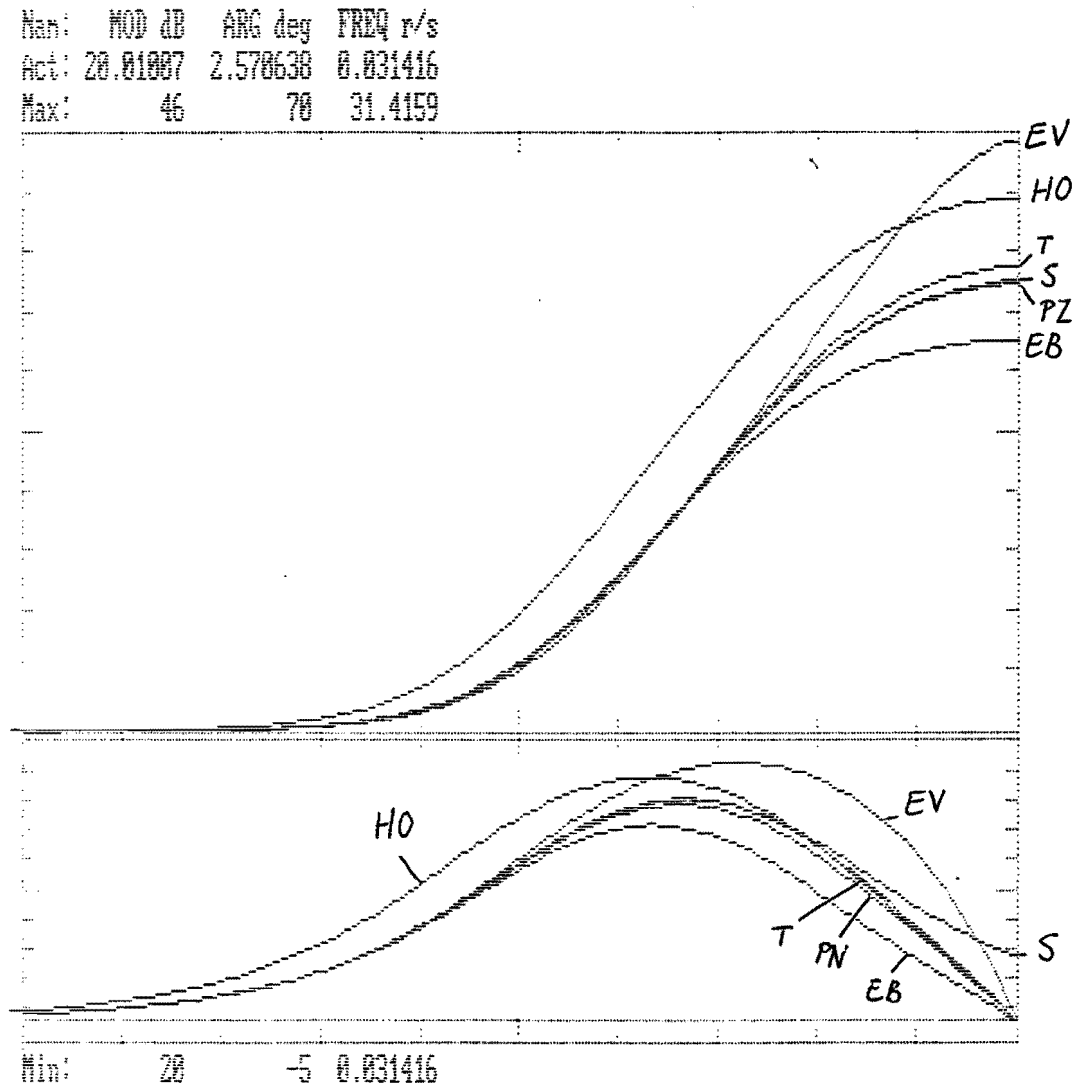
Figuur 12



Figuur 13

Bode diagram gemaakt met TRIP

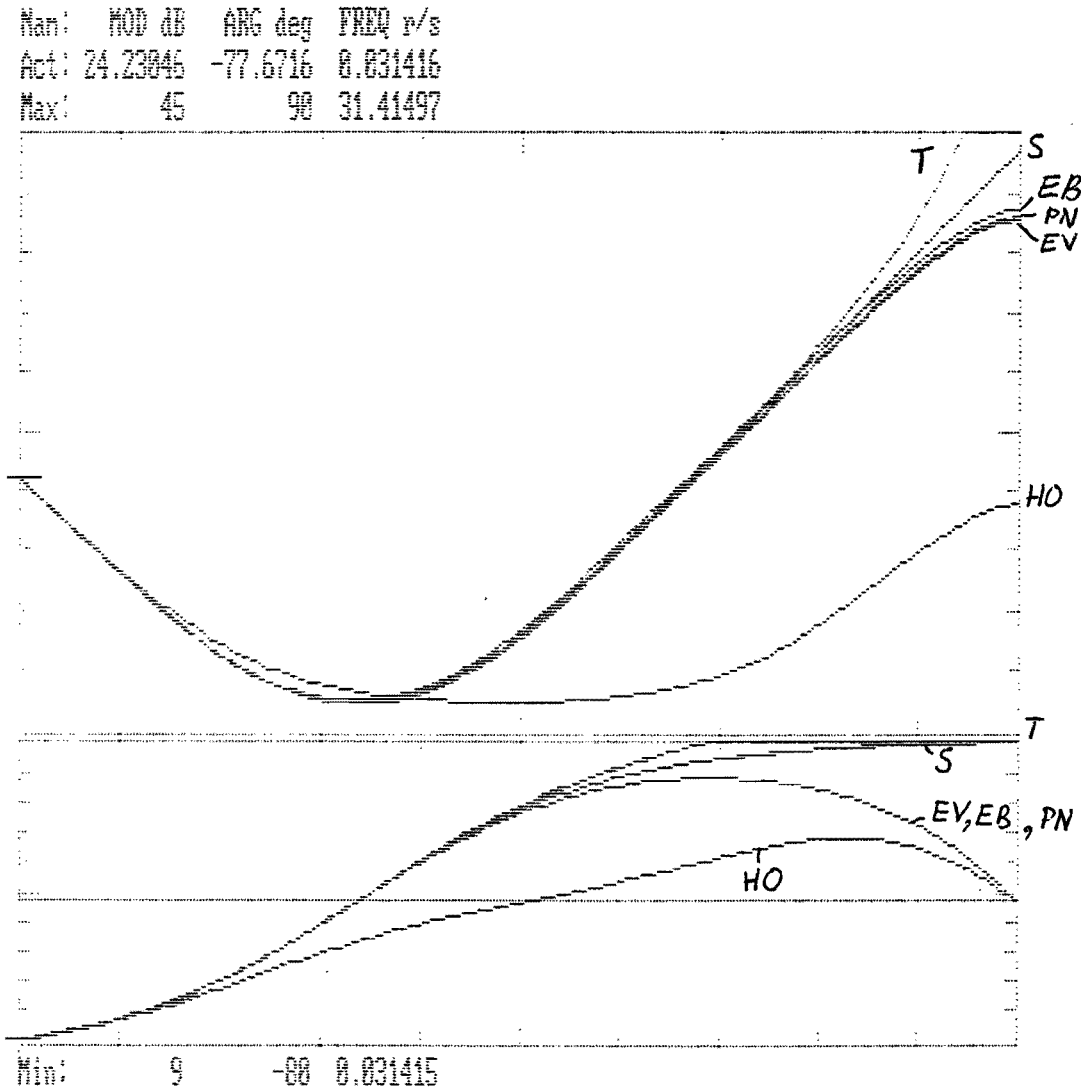
Discrete PD regelaar met $a = 0.1$, $\tau = 1$ en $T = 0.1$ s. Vergelijk deze figuur met figuur 5 uit § 5.1.



Figuur 14

- met :
- EV = Euler voorwaarts
 - EB = Euler achterwaarts
 - T = Trapezium regel
 - PN = Polen-nulpunten plaatsing
 - HO = Houdcircuit methode
 - S = continue PD-regelaar

Discrete PID regelaar met $k = 1$, $\tau_i = 2$, $\tau_d = 5$ en $T = 0.1$. Vergelijk deze figuur met figuur 6 uit § 5.2.



Figuur 15

- met :
- EV = Euler voorwaarts
 - EB = Euler achterwaarts
 - T = Trapezium regel
 - PN = Polen-nulpunten plaatsing
 - HO = Houdcircuit methode
 - S = continue PID-regelaar