Van alles en nog wat over gebonden variabelen in wiskundige taal

Van alles en nog wat over gebonden variabelen in wiskundige taal

PROF. DR. N. G. DE BRUIJN

1 We nemen aan dat de lezer wel weet wat gebonden variabelen zijn. Een letter (bijv. x) die in een formule optreedt kan *gebonden* worden door een *binder*. Een binder is een speciaal symbool dat de naam van de door de binder gebonden variabele bij zich draagt. Voorbeeld: in '$2^n > n^{1000}$' is n een variabele, en door het symbool '$\exists_{n\in\mathbb{N}}$' wordt de variabele gebonden. In het resultaat '$\exists_{n\in\mathbb{N}} 2^n > n^{1000}$' is n geen variabele meer, want een variabele in een formule is een letter waarvoor uitdrukkingen (van een zeker soort) kunnen worden ingevuld zonder de formule onleesbaar te maken. In $2^n > n^{1000}$ kan men n door 3 vervangen (dan komt er iets dat wel fout maar toch leesbaar is). Maar iets als $\exists_{3\in\mathbb{N}} 2^3 > 3^{1000}$ kunnen we niet lezen! De gebonden variabele (ook wel *dummy* genoemd) mag wel door een andere *letter* worden vervangen, mits overal tegelijk: '$\exists_{k\in\mathbb{N}} 2^k > k^{1000}$' betekent precies hetzelfde als '$\exists_{n\in\mathbb{N}} 2^n > n^{1000}$'. We maken natuurlijk de beperking dat de gekozen letter niet al eerder een duidelijke betekenis had.

2 Even iets over de keus van de dummy. Men kan liberaal zijn tegenover herhaald gebruik van eenzelfde letter, zolang bij elke letter uit de formule maar duidelijk is of het al dan niet een gebonden variabele is, en zo ja, wat de bindingsplaats is. We kunnen ons ook best een duidelijk beeld vormen zonder namen voor dymmies te kiezen: vervang alle dummies door sterretjes en teken een pijl van elk sterretje naar het bijbehorende bindingssterretje). Voorbeeld:

$$\exists_{*\in\mathbb{R}}\Big(\sum_{*=1}^{m} *^{*}\Big(\sum_{*=1}^{*}\frac{*^{*}}{*!}\Big) > m\Big) \qquad (1)$$

Noemen we de dummies x, n, k dan ontstaat de meer vertrouwde vorm

$$\exists_{x\in\mathbb{R}}\Big(\sum_{n=1}^{m} x^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k}}{k!}\Big) > m\Big)$$

De enige vrije variabele is hier m.

3 Wie de situaties met de binders en de gebondenen eenmaal kent, ontdekt er steeds meer. Er is bijvoorbeeld geen reden om de zaak te beperken tot formules, want in gewone zinnen komt het even goed voor. Voorbeeld: 'Voor elk negatief reëel getal x geldt $2x < x^2$'. De binder is hier zoiets als 'Voor elk negatief reëel getal x'.
In het bijzonder noemen we de binding bij introductie van een variabele. (Zie het artikel 'Wees contextbewust in WOT', Euclides, 1979/1980, blz. 7). De binder is dan zoiets als 'laat x een reëel getal voorstellen'. Zulke binders kan men door contextvlaggen aangeven. De in de binder ten tonele gevoerde letter kan overal binnen de context gebruikt worden. Met deze opvatting kan men zeggen dat er in de wiskunde helemaal geen vrije variabelen voorkomen: alle als vrije variabelen beschouwde letters zijn eigenlijk nog door contextvlaggen gebonden.

4 Kijken we nu naar de grammatica dan hebben we twee dingen te beoordelen. Ten eerste: tot welke grammaticale categorie behoort de uitdrukking die door de binder gebonden wordt? Ten tweede: tot welke grammaticale categorie behoort de uitdrukking nadat de binder erbij gezet is? In het stukje 'Grammatica van WOT' (Euclides, 1979/1980, blz. 66) hadden we als grammaticale categorieën *namen*, *substantieven*, *kernzinnen* en *adjectieven*. Het gaat ons hierbij niet alleen om uitdrukkingen die geheel met formules zijn opgebouwd maar ook om constructies van taalkundige aard.
Een paar binders zullen we buiten beschouwing laten omdat het bindingsresultaat niet tot één van de vier grammaticale categorieën hoort. De contextvlag bijvoorbeeld zet een kernzin of een groep kernzinnen om in iets dat voorlopig buiten onze grammaticale indeling valt. Ook de vraagbinder ('Welke $x \in \mathbb{R}$ voldoet aan ... ?') en de opdrachtbinder ('Zoek een $x \in \mathbb{R}$ met ...') moeten om die reden buiten beschouwing blijven.

5 Sommige binders zetten *namen* in *namen* om. Zo zet bijvoorbeeld de binder $\sum_{n=1}^{m}$ de naam $n^2 + 1$ om in de naam $\sum_{n=1}^{m} (n^2 + 1)$. Het betreft hier namen voor gehele getallen.
Ook de *functiebinder*, die we in navolging van Freudenthal met $\curlyvee$ aangeven, zet namen in namen om. Zo stelt $\curlyvee_{x \in \mathbb{R}} (x^2 + 1)$ de functie met domein $\mathbb{R}$ voor die, voor elke x uit het domein, aan x toevoegt $x^2 + 1$. Er is alles voor te zeggen deze notatie in het schoolonderwijs te brengen. Dat is belangrijker dan het gebruik van de symbolen $\forall$ en $\exists$, want die kan men nog heel goed met woorden omschrijven. Zo'n omschrijving in woorden is voor $\curlyvee$ (en ook voor de daarmee samenhangende $\sum$ en lim) omslachtig en onbeholpen.

6 De *verzamelingsvormende binder* zet een kernzin in een naam om. Als notatie beveelt Freudenthal aan $\uparrow$. In woorden is de binder bijvoorbeeld 'de verzameling van de reële getallen x met', en dat wordt genoteerd door $\uparrow_{x \in \mathbb{R}}$.
In plaats van bijvoorbeeld $\uparrow_{x \in \mathbb{R}}(x^2 + x < 5)$ is gebruikelijk $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + x < 5\}$. Laatstgenoemde is een akelige notatie omdat die zo van de andere

bindingsnotaties afwijkt, en ook omdat die zo lijkt op die andere akelige notatie $\{x^2 + x \mid -8 < x < 6\}$.
Een binder die heel gemakkelijk met behulp van de verzamelingsvormer te schrijven zou zijn is 'het aantal gehele getallen k met'. Deze wordt wel eens met $\#_{k \in \mathbb{Z}}$ aangegeven.

7 De bekende binders $\forall_{x \in \mathbb{R}}$, $\exists_{x \in \mathbb{R}}$ zetten *kernzinnen* in *kernzinnen* om. In woorden luiden ze bijvoorbeeld 'voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt' en 'er is een $x \in \mathbb{R}$ met'. Er zijn er nog meer in gebruik, meestal alleen met taalconstructies aangegeven. We noemen 'voor precies één $x \in \mathbb{R}$ geldt', 'voor geen enkele $x \in \mathbb{R}$ geldt', 'met ten hoogste eindig vele uitzonderingen gel~~d~~ voor elke $x \in \mathbb{R}$'.
dt

8 In WOT bestaan ook bindingsconstructies die aan een kernzin een substantief toevoegen. Men hanteert bijvoorbeeld 'geheel getal k met $k^2 < 1000$' met evenveel gemak als andere samengestelde substantieven (zoals 'op m gelegen punt').
Laat ons deze binder in formule brengen met een symbool S met subscript. We krijgen zo

$$S_{k \in \mathbb{Z}}(k^2 < 1000), \tag{2}$$

waarmee we hetzelfde substantief aanduiden als 'geheel getal k met $k^2 < 1000$' of 'geheel getal waarvan het kwadraat < 1000 is'.
Men gebruikt langademige substantieven als (2) liefst zo weinig mogelijk. Meestal wordt er met behulp van een definitie een nieuw kort substantief voor geschapen. Zo kan men, als n een geheel getal aanduidt, het korte substantief 'deler van n' invoeren ter vervanging van

$$S_{k \in \mathbb{Z}}(\exists_{m \in \mathbb{Z}}\, km = n). \tag{3}$$

In gangbare substantiefdefinities wordt zoiets in woorden gezegd. Dat is op vele manieren mogelijk, maar (3) geeft een soort standaardnotatie, die ons doet inzien dat het voor de betekenis van het substantief onbelangrijk is welke literaire vorm men aan (3) geeft.
De substantiefbinder S is nauw verwant aan de verzamelingsbinder. Als we het symbool $K^{\downarrow}$ gebruiken om het substantief aan te geven dat bij de klasse K hoort (zie het artikel Grammatica van WOT) dan is

$$S_{x \in \mathbb{R}}(x^2 + x < 5) = (\uparrow_{x \in \mathbb{R}}(x^2 + x < 5))^{\downarrow}.$$

9 Tussendoor even iets over de notatie van het domein van de binder. Bij (3) wordt $k \in \mathbb{Z}$ het *subscript* genoemd, $\mathbb{Z}$ het *domein* en k de *dummy*. Vele binders hebben deze vorm. Alleen de zeer oude zien er anders uit. De sigmanotatie heeft dat ongelukkige gelijkteken in het subscript, de limietnotatie geeft met het subscript $n \to \infty$ heel wat anders aan dan het domein. Ook de integraalnotatie $\int_a^b \ldots dx$ past slecht in het moderne notatiesysteem.

We zullen als nieuwigheid invoeren dat we subscripts toelaten waarbij de dummy getypeerd wordt door een substantief. Dit kan handig zijn doordat het ons dichter bij de omgangstaal brengt. In overeenstemming met het artikel 'Grammatica van WOT' beschouwen we '$k \in \mathbb{Z}$' en 'k: geheel getal' als volkomen gelijkwaardig. We laten het gebruik zien in een voorbeeld waarin ook de contexindicatie ten tonele verschijnt. We hebben ter beschikking (als l en m lijnen zijn) de kernzin 'l staat loodrecht op m' en willen nu de volgende substantiefdefinitie geven: 'Als m een lijn is, dan heet elke lijn die loodrecht op m staat een loodlijn op m'. Dit is nu te schrijven als

$$\triangleright_{m:\,\text{lijn}}\,\textit{Definitie}\text{: loodlijn op } m := S_{l:\,\text{lijn}}(l \text{ staat loodrecht op } m).$$

(Het symbool $:=$ betekent 'is gedefiniëerd als').

10 Van de binder S zijn in het gangbare WOT allerlei taalkundige omschrijvingen in gebruik die duidelijk genoeg zijn en niet moeilijk. Lastiger is het taalgebruik bij de binding die we *despecificatie* zullen noemen. We gaan daarbij uit van een substantief dat een letter als parameter bevat. Nemen we als voorbeeld het langademige substantief 'functie die in het punt x de waarde nul aanneemt'. Hierin stelt x een reëel getal voor. We kunnen specificeren door een naam voor x in te vullen en er bijv. van te maken 'functie die in het punt 5 de waarde 0 aanneemt'. Daarentegen *despecificeren* we door over te gaan op het substantief 'functie die ergens de waarde nul aanneemt' of 'functie die in het een of andere punt x de waarde nul aanneemt'. Zulke uitdrukkingen zijn onbeholpen en onduidelijk. We missen een goed taalmiddel. Laat ons een standaardnotatie voorstellen door het effect van de despecificatie aan te geven met

$$\text{desp}_{x:\,\text{reëel getal}}(\text{functie die in het punt } x \text{ de waarde nul aanneemt}).$$

Een tweede voorbeeld. Laat in de context 'n : natuurlijk getal' het substantief 'n-dimensionale vectorruimte' zijn ingevoerd. Dan definiëren we daarna het substantief

$$\text{desp}_{n:\text{nat. get.}}(n\text{-dimensionale vectorruimte}) \tag{4}$$

en dat kan men bijv. 'eindig-dimensionale vectorruimte' noemen.
De despecificatie komt ook buiten de wiskunde voor. Kijk maar:

$$\text{desp}_{f:\,\text{fiets}}(\text{wiel van } f). \tag{5}$$

Men zou dat 'fietswiel' willen noemen, maar dat kan ook 'wiel vóór een fiets' betekenen. Duidelijker is 'wiel van een fiets'.

11 Er is een tweede soort despecificatie, die van *namen* naar *substantieven* gaat. We zullen die met *despo* aangeven (de slotletter herinnert aan 'gedespecificeerd object'). Het gangbare WOT kan dit niet altijd bevredigend uitdrukken. Laat ons proberen te zeggen dat 'priemkwadraat' hetzelfde betekent

als ‘het kwadraat van het een of andere priemgetal’. De priemkwadraten zijn dus 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, ... Is ‘het kwadraat van een priemgetal’ nu een substantief? Eigenlijk wel, maar het gedraagt zich vervelend als men er bijvoorbeeld ‘een’ of ‘elk’ voor wil zetten. We kunnen het beter meteen in formule brengen, en zeggen dat ‘priemkwadraat’ gedefiniëerd is door

$$\mathrm{despo}_{p:\,\text{priemgetal}}\, q^2. \tag{6}$$

Liever wat meer in woorden? Dat kan ook:

$$\mathrm{despo}_{p:\,\text{priemgetal}}(\text{het kwadraat van } p). \tag{7}$$

Erg belangrijk is die despo niet, althans niet in de schoolwiskunde. Maar het kan handig zijn om definities bondig uit te spreken. Overigens liggen desp en despo verwarrend dicht bij elkaar. In niet-wiskundige taal ligt vaak niet vast of iets desp dan wel despo is. Kijk maar. Het is duidelijk bij

$$\mathrm{desp}_{p:\,\text{pauw}}(\text{veer van } p)$$

$$\mathrm{despo}_{p:\,\text{speurder}}(\text{de neus van } p)$$

maar in gewone woorden verdwijnt het verschil: pauweveer, speurdersneus. Eigenlijk zijn de notaties (5) en (7) zo gek nog niet, althans voor schriftelijk gebruik.

12 Er is een zekere behoefte aan een binder die *kernzinnen* in *adjectieven* omzet, maar die staat nòch in formule nòch in taalconstructie ter beschikking. We kunnen er wel een maken en die ‘Adj’ noemen. Het adjectief dat over het reële getal x de uitspraak $x \leqq 0$ doet kunnen we daarmee voorstellen door

$$\mathrm{Adj}_{x \in \mathbb{R}}(x \leqq 0)$$

Deze notatie is goed bruikbaar in adjectiefdefinities.
Er is ook zoiets als despecificatie van een adjectief naar een adjectief, maar dat zou ons hier te ver voeren.

13 Vaak wordt bij een binding de dummy door een nevenvoorwaarde beperkt. Zonder beperking is het bijvoorbeeld ‘voor elk natuurlijk getal n geldt ...’ en de dummy wordt in zijn werkingsgebied beperkt door ‘voor elk natuurlijk getal n met $3 < n < 20\pi$ geldt ...’. Het ligt voor de hand om dit te beschrijven door $\forall_{n:\alpha} \ldots$ waarin het substantief α is gedefiniëerd als $\mathrm{desp}_{n:\,\text{nat. get.}}(3 < n < 20\pi)$, maar het kan vèèl korter met de notatie

$$\forall_{n:\,\text{nat. get.}\,|\,3 < n < 20\pi} \cdots \quad \text{of} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}\,|\,3 < n < 20\pi} \cdots$$

Als voor elk natuurlijk getal de symbolen $P(n)$ en $Q(n)$ kernzinnen zijn die de letter n mogen bevatten dan is

$$\forall_{n \in \mathbb{N} | P(n)} Q(n) \tag{9}$$

te lezen als: 'voor elk getal n dat aan $P(n)$ voldoet geldt $Q(n)$'. Heel vaak probeert men het zonder (9) te doen, nl. door

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} (P(n) \Rightarrow Q(n)) \tag{10}$$

Dit zou dan moeten worden gelezen als: 'voor elk natuurlijk getal n geldt dat als $P(n)$ waar is, ook $Q(n)$ waar is'. Dit is nogal gewrongen. Het is ook niet altijd juist: soms is $Q(n)$ pas leesbaar als $P(n)$ waar is. (Zie bijv. §5 in het eerder genoemde artikel 'Wees contextbewust in WOT'). Als bijv. $P(3)$ niet waar is, dan is $Q(3)$ onleesbaar, en dus is $P(3) \Rightarrow Q(3)$ ook onleesbaar. De uitdrukking $P(n) \Rightarrow Q(n)$ in (10) is dan geen gewone implicatie maar een gegeneraliseerde implicatie. Laten we de gegeneraliseerde implicatie buiten de schoolwiskunde houden, en $A \Rightarrow B$ alleen gebruiken als A en B onafhankelijk van elkaar leesbaar zijn!
Voor de conjunctie geldt net zo iets. Als B pas leesbaar is wanneer A waar is, mag men rustig 'A, en B' zeggen, desnoods 'A en B' maar niet 'B en A', niet '$A \wedge B$' en niet '$B \wedge A$'. Mocht blijken dat die onafhankelijkheid van A en B didactisch niet verkoopbaar is dan ligt de conclusie voor de hand: stuur alle implicaties en conjuncties van school weg!
Het voordeel van de in (8) en (9) aangegeven binding met restrictie hebben ook bij de existentiekwantor. De notatie

$$\exists_{n \in \mathbb{N} | P(n)} Q(n) \tag{11}$$

klopt met wat men zegt: 'er is een $n \in \mathbb{N}$ met $P(n)$ waarvoor $Q(n)$'. De notatie

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} (P(n) \wedge Q(n)) \tag{12}$$

is minder natuurlijk, en heeft het nadeel soms een gegeneraliseerde conjunctie te bevatten. Verder zijn (9) en (11) analoog gebouwd, maar (10) en (12) verwarrend verschillend.
Nog een paar voorbeelden:

$$\curlyvee_{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2} \log \log x \tag{13}$$

is de functie die, voor elke x met $1 < x < 2$, aan x de waarde log log x toevoegt. En met Freudenthal's notatie $\downarrow_x$ ('de éne x met') is

$$\downarrow_{x \in R | x > 0} (x^2 + x = 5) \tag{14}$$

het positieve getal x dat aan $x^2 + x = 5$ voldoet.

14 De Nederlandse taal kent verschillende bindingsconstructies waarbij de dummy ongenoemd blijft. 'Elk punt P van k heeft de eigenschap dat P op h ligt' kan worden bekort tot 'Elk punt van k ligt op h'. Het is leerzaam om

allerlei zinnen met dummy in zinnen zonder dummy om te zetten en omgekeerd. We geven nog wat voorbeelden van bindingszinnen zonder dummy. 'Er is geen priemgetal dat een zesvoud is'. 'Geen priemgetal is een zesvoud'. 'Van elk oneven getal is het kwadraat oneven'. 'Van elk oneven getal zijn alle delers oneven'. 'Elke loodlijn op m wordt door l gesneden'. 'Als een getal groter is dan 10 dan is het kwadraat van dat getal groter dan 100'. 'De cirkel c snijdt elke zijde van deze veelhoek'.
Soortgelijke voorbeelden kan men geven voor de substantiefconstructie S: 'lijnstuk waarvan het midden op m ligt', 'getal zonder echte delers', 'vierhoek met onderling loodrechte diagonalen'.
Constructies met ongenoemde dummy zijn meestal soepel en elegant, maar ook erg kwetsbaar. Als ze te hoog op elkaar worden gestapeld valt de zaak in elkaar. Een simpel voorbeeld is de man waarvan de beste vriend er met zijn vrouw vandoor ging. Ook taalkundig kunnen we dan niet meer uitmaken van wie die vrouw eigenlijk was.

Kluwerprijs 1979

Op 12 december 1979 is aan ons redaktielid Fred Goffree de Kluwerprijs 1979 uitgereikt.
De Kluwerprijs is een bekroning van een publikatie, bij voorkeur verschenen in de vijf laatstverlopen kalenderjaren, op het gebied van professionele, edukatieve of algemene uitgaven. Voor het jaar 1979 had de prijs betrekking op het gebied van het onderwijs, met name de vernieuwing van het onderwijs aan vier- tot twaalfjarigen.
Het is voor de redaktie van Euclides een groot genoegen voor de tweede keer in korte tijd Fred Goffree geluk te wensen.