Over de absolute convergentie van reeksen van Dirichlet

Wiskunde. — N. G. DE BRUIJN: *Over de absolute convergentie van reeksen van* DIRICHLET. (Aangeboden door Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Aangeboden in de zitting van 30 Januari 1943.)

Zij ϱ een reëel getal, $s = \sigma + it$, en voorts $f(s)$ een voor $\sigma > \varrho$ reguliere analytische functie, die voor voldoend groote σ in een convergente reeks van DIRICHLET

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \; (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots ; \lambda_n \to \infty) \quad \ldots \quad (1)$$

kan worden uitgedrukt. We nemen verder aan, dat er een getal $k > 0$ bestaat, zoodanig dat gelijkmatig in σ geldt

$$f(\sigma + it) = O(|t|^k) \text{ voor } |t| > 1, \sigma > \varrho.$$

Als μ-functie van LINDELÖF definiëert men bij iedere $\sigma > \varrho$ de onderste grens $\mu(\sigma)$ van alle getallen μ met $f(\sigma + it) = O(|t|^{\mu})$. Deze $\mu(\sigma)$ is een convexe niet-negatieve functie van σ [1])

We veronderstellen verder nog, dat er een getal $l \geqq 0$ bestaat, zóó dat voldaan is aan

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n (l+\delta)}) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

voor iedere $\delta > 0$. (Bij de z.g. gewone reeksen van DIRICHLET ($\lambda_n = \log n$) kan b.v. $l = 1$ worden genomen).

Uit (2) volgt onmiddellijk

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} \leqq l. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Hieruit kan men nog besluiten, dat (1) voor voldoend groote σ ook absoluut convergeert; wanneer we de absolute convergentie-abcis met σ_a en de gewone met σ_g aangeven, geldt

$$-\infty \leqq \sigma_g \leqq \sigma_a < +\infty.$$

Men kan zich nu afvragen, in hoe verre men iets over de convergentie kan zeggen, wanneer de μ-functie geheel of gedeeltelijk bekend is. In deze richting hebben SCHNEE, LANDAU en BOHR bewezen [2]), dat, wanneer σ_0 een getal $> \varrho$ is en $\mu_0 = \mu(\sigma_0)$, voor de gewone convergentie-abcis σ_g van de reeks (1) geldt

$$\sigma_g \leqq \sigma_0 + \mu_0 l; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

en wanneer bovendien een getal b wordt gegeven met de eigenschap dat

$$a_n = O(e^{\lambda_n (b+\delta)}) \text{ voor iedere } \delta > 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

---

1) Zie voor de algemeene theorie van de reeksen van DIRICHLET b.v.
E. LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin (1909),
G. H. HARDY and M. RIESZ, The General Theory of DIRICHLET's Series, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, no. 18, (1915).

2) Zie E. LANDAU, Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der DIRICHLETschen Reihen, Berichte der Kgl. Sächs. Ges. der Wissenschaften, 69 (1917) S 336—343.

(zoodat $\sigma_g \leq \sigma_a \leq b + l$ triviaal is), dat

$$\sigma_g \leqslant \frac{\sigma_0 + \mu_0 (l + b)}{1 + \mu_0}. \qquad (4a)$$

Analoge ongelijkheden voor de absolute convergentie-abcis werden door K. GRANDJOT[3]) aangetoond. Met dezelfde veronderstellingen bewees deze, dat

$$\sigma_a \leqslant \sigma_0 + \mu_0 l + \frac{l}{2} \frac{1 + 2\mu_0}{1 + \mu_0}, \qquad (6)$$

en, wanneer (5) wordt aangenomen, dat

$$\sigma_a \leqslant \frac{\sigma_0 + \mu_0 (l + b)}{1 + \mu_0} + \frac{l}{2} \frac{1 + 2\mu_0}{1 + \mu_0}. \qquad (6a)$$

We zullen hier laten zien, dat (6) kan worden verbeterd tot

$$\sigma_a \leqslant \sigma_0 + \mu_0 l + \tfrac{1}{2} l. \qquad (7)$$

Bovendien is (6a) òf triviaal (wegens $\sigma_a \leq b + l$), òf niet scherper dan (7), hetgeen men gemakkelijk constateert.

Enkele jaren later bewees K. GRANDJOT[4]), dat (6) en (6a) ook dan nog waar blijven, wanneer $\mu_0 = \mu(\sigma_0)$ door het niet grootere getal $\nu_0 = \nu(\sigma_0)$ wordt vervangen, waarbij $\nu(\sigma)$ de onderste grens beteekent van de getallen ν, die aan

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 \, dt = O(T^{2\nu})$$

voldoen.

De ongelijkheid (7) laat dezelfde verscherping toe; we zullen hier dus bewijzen, dat

$$\sigma_a \leqslant \sigma_0 + \nu_0 l + \tfrac{1}{2} l. \qquad (8)$$

Wanneer $l = 0$ is, levert (8) $\sigma_a \leq \sigma_0$ voor iedere $\sigma_0 > \varrho$, dus $\sigma_a \leq \varrho$. Is $l > 0$, dan is (8) niet meer te verscherpen, d.w.z. bij ieder stel getallen ϱ, $\sigma_0 > \varrho, \nu_0 \geq 0$ is een reeks van DIRICHLET te vinden, die aan de eerder genoemde voorwaarden voldoet, en waarvan de absolute convergentie-abcis $\sigma_0 + \nu_0 l + \frac{1}{2} l$ is; als voorbeeld geven we

$$f(s) = \zeta(w)(1 - 2^{1-w}) = 1 - \frac{1}{2^w} + \frac{1}{3^w} - \ldots,$$

waarin $w = \dfrac{s - \sigma_0}{l} - \nu_0 + \frac{1}{2}$. (De ν-functie van $\zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ is bekend[5]), nl. $\nu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ voor $\sigma \leq \frac{1}{2}$, $\nu(\sigma) = 0$ voor $\sigma \geq \frac{1}{2}$).

Ook wanneer er een b gegeven is, die aan (5) voldoet, is (8) niet meer te verbeteren, tenzij $\sigma_0 + \nu_0 l + \frac{1}{2} l$ grooter is dan de „triviale" grens $b + l$ voor de absolute convergentie-abcis.

---

[3]) Ueber das absolute Konvergenzproblem der DIRICHLETschen Reihen, Inaugural-Dissertation. Göttingen 1922.

[4]) Untersuchungen über DIRICHLETsche Reihen, Math. Zeitschrift **26** (1927) Satz 10.

[5]) Zie [1]) of ook E. C. TITCHMARSH, The Zeta-Function of Riemann, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, no. 27 (1930).

In het volgende gebruiken we de in den aanhef (t.e.m. (3)) genoemde veronderstellingen, die we niet zullen herhalen. Verder beteekent steeds

δ een (niet steeds hetzelfde) willekeurig klein positief getal,

C een (niet steeds hetzelfde) voldoend groot positief getal, dat wel van de δ's mag afhangen, doch niet van de grootheden m, n, x, T, T_1. Ook het O-symbool moet hier met behulp van een dergelijke C worden geïnterpreteerd.

We bewijzen eerst drie hulpstellingen.

Hulpstelling 1. Gelijkmatig in n ($n \geqq 1$ en geheel) geldt:

$$\sum_{\substack{\lambda_m \leqq x \\ m \neq n}} \frac{1}{|\lambda_m - \lambda_n|} = O\left(e^{x(l+\delta)}\right). \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Bewijs. Volgens (3) is het aantal termen hier $O(e^{x(l+\delta)})$, we kunnen ons dus tot het geval $\lambda_n \leqq x+1$ beperken. Uit (2) volgt $|\lambda_m - \lambda_n| \geqq C\,|m-n|\,e^{-\lambda(l+\delta)}$, waarin $\lambda = \operatorname{Max}(\lambda_n, \lambda_m) \leqq x+1$; de reeks (9) is dus

$$O\left(e^{x(l+\delta)} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \leqq y}} \frac{1}{|m-n|}\right),$$

waarin y het aantal m's met $\lambda_m \leqq x$ beteekent. De laatste som is dus

$$O(\log y) = O(x(l+\delta)) = O(x),$$

waaruit het gestelde (met een andere δ) volgt.

Hulpstelling 2.[6]) Zij $\sigma_1 > \sigma_0 > \varrho$, en $L(\sigma)$ de lineaire functie van σ, gedefiniëerd door $L(\sigma_0) = \nu(\sigma_0)$, $L(\sigma_1) = \nu(\sigma_1)$; δ een positief (van σ onafhankelijk) getal. Dan geldt gelijkmatig in $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$, $|T| > 1$:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2\, dt = O\left(T^{2L(\sigma)+\delta}\right).$$

Hulpstelling 3. Is $\sigma_0 > \varrho$, $\nu = \nu(\sigma_0)$, $\sigma_1 > \operatorname{Max}(\sigma_0 + l\nu + \frac{l}{2}, \sigma_a)$, dan is $\sigma_a \leqq \sigma_2$, waarin

$$\sigma_2 = \sigma_0 + l\nu + \frac{l}{2} + \frac{\nu}{\nu+1}\left(\sigma_1 - \sigma_0 - l\nu - \frac{l}{2}\right).$$

Bewijs. We kunnen onderstellen, dat $\sigma_0 = 0$, $\varrho < 0$ (dat is steeds door de transformatie $s^* = s - \sigma_0$ te bereiken).

We zetten $b_n = \frac{|a_n|}{a_n}$ als $a_n \neq 0$; $b_n = 1$ als $a_n = 0$, (dus steeds $|b_n| = 1$, $a_n b_n = |a_n|$); en verder voor $\sigma > \varrho$ $x > 0$

$$h(s, x) = f(s) \sum_{\lambda_m \leqq x} b_m e^{\lambda_m s}.$$

Is T een positief getal, dat we later als functie van x zullen vastleggen, dan integreeren we $h(s, x)$ over den rechthoek $ABCD$, met hoekpunten $A = \sigma_1 - iT$, $B = \sigma_1 + iT$,

---

6) Vgl. loc. cit. [4]), Satz 11.

$C = iT$, $D = -iT$: de stukken AB, BC, CD, DA noemen we opvolgend I, II, III, IV, zoodat

$$\int_{I} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

I. Voor $a \gtrless 0$ geldt

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{iat}\, dt = O\left(\frac{1}{|a|\, T}\right),$$

zoodat

$$\left. \begin{aligned} & \left| \frac{1}{2iT} \int_{I} - \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m\, b_m \right| < C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_m \leqq x \\ m \neq n}} e^{(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_1} \frac{|a_n|}{T\, |\lambda_m - \lambda_n|} < \\ & \qquad < C e^{x\sigma_1} \cdot e^{x(l+\delta)} \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n \sigma} = O\left(\frac{e^{x(\sigma_1 + l + \delta)}}{T}\right); \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

want de reeks in het voorlaatste lid is wegens $\sigma_1 > \sigma_a$ convergent.

III. Wegens de ongelijkheid van SCHWARTZ is

$$\left. \begin{aligned} & \left| \frac{1}{2iT} \int_{III} \right|^2 \leqq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(it)|^2\, dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{\lambda_m \leqq x} b_m\, e^{\lambda_m i t} \Big|^2 dt < \\ & \qquad < C\, T^{2\nu+\delta} \left\{ \sum_{\lambda_m \leqq x} |b_m|^2 + \sum_{\lambda_n \leqq x} \sum_{\substack{\lambda_m \leqq x \\ m \neq n}} \frac{1}{T\, |\lambda_m - \lambda_n|} \right\} = \\ & \qquad\qquad = O\left\{ T^{2\nu+\delta}\, e^{x(l+\delta)} \left(1 + \frac{e^{x(l+\delta)}}{T}\right) \right\}. \end{aligned} \right\} \qquad (12)$$

II en IV. We zetten

$$g(t) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} h(\sigma + it)\, d\sigma,$$

zoodat

$$\int_{II} = -g(T), \quad \int_{IV} = g(-T).$$

Voor $T_1 > 0$ is nu

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^{2T_1} g(t)\, dt \right| \leqq \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} d\sigma \left| \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^{2T_1} h(\sigma + it)\, dt \right|, \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (13)$$

terwijl

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^{2T_1} h(\sigma+it)\, dt \right|^2 \leqq \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^{2T_1} |f(\sigma+it)|^2\, dt \cdot \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^{2T_1} \Big| \sum_{\lambda_m \leqq x} b_m\, e^{\lambda_m(\sigma+it)} \Big|^2\, dt.$$

Met de notatie van Hulpstelling 2 is

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1}^{2T_1} |f(\sigma + it)|^2\, dt = O(T_1^{2L(\sigma)+\delta}),$$

terwijl

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1}^{2T_1} \Big|\sum_{\lambda_m \leqq x} b_m e^{\lambda_m(\sigma+it)}\Big|^2 dt < C e^{2x\sigma}\Big\{\sum_{\lambda_m \leqq x} |b_m|^2 +$$

$$+ \sum_{\lambda_n \leqq x}\ \sum_{\substack{\lambda_m \leqq x \\ m \neq n}} \frac{e^{2x\sigma}}{T_1\,|\lambda_m - \lambda_n|}\Big\} = O\Big\{e^{2x\sigma + x(l+\delta)}\Big(1 + \frac{e^{x(l+\delta)}}{T_1}\Big)\Big\}.$$

Kiezen we nu $T_1 = e^{x\frac{\sigma_1 + \frac{1}{2}l}{\nu+1}}$, dan is wegens $\sigma_1 > l\nu + \frac{1}{2}l$: $T_1^{-1} = O(e^{-xl})$, zoodat gelijkmatig in σ geldt $(0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1)$

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1}^{2T_1} h(\sigma + it)\, dt = O(T_1^{L(\sigma)+\delta}\, e^{x(\sigma + \frac{1}{2}l + \delta)}) = O(T_1\, e^{x(H(\sigma)+\delta)}),$$

waarin

$$H(\sigma) = (L(\sigma) - 1)\frac{\sigma_1 + \frac{1}{2}l}{\nu + 1} + \sigma + \tfrac{1}{2}l.$$

Verder is $L(\sigma_1) = \nu(\sigma_1) = 0$ (wegens $\sigma_1 > \sigma_a$), dus

$$H(\sigma_1) = \frac{\nu}{\nu+1}(\sigma_1 + \tfrac{1}{2}l) = \sigma_2 - \tfrac{1}{2}l, \text{ en (daar } \sigma_1 + \tfrac{1}{2}l > (\nu+1)\,l)$$

$$H(0) = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}(\sigma_1 + \tfrac{1}{2}l) + \tfrac{1}{2}l < \frac{\nu}{\nu+1}(\sigma_1 + \tfrac{1}{2}l) = \sigma_2 - \tfrac{1}{2}l.$$

$H(\sigma)$ is lineair, zoodat $H(\sigma) \leqq \sigma_2 - \frac{1}{2}l$ voor $0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$. Uit (13) volgt nu

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1}^{2T_1} g(t)\, dt = O(T_1\, e^{x(\sigma_2 - \frac{1}{2}l + \delta)}); \quad \dots\dots \quad (14)$$

hetzelfde geldt voor $\frac{1}{T_1}\int_{T_1}^{2T_1} g(-t)\, dt$.

Daar $g(t)$ continu is, kunnen we $T = T(x)$ zoo bepalen, dat $T_1 \leqq T \leqq 2\,T_1$ en

$$|g(T) - g(-T)| \leqq \frac{1}{T_1}\left|\int_{T_1}^{2T_1}\{g(t) - g(-t)\}\, dt\right|;$$

we hebben dus volgens (14)

$$\left|\frac{1}{2iT}\int_{II} + \frac{1}{2iT}\int_{IV}\right| = O(e^{x(\sigma_2 - \frac{1}{2}l + \delta)}) = O(e^{x(\sigma_2 + \delta)}). \quad \dots \quad (15)$$

De resttermen in (11) en (12) zijn eveneens $O(e^{x(\sigma_2+\delta)})$, zoodat volgens (10):

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} |a_n| = O(e^{x(\sigma_2+\delta)}),$$

en hieruit volgt op bekende wijze, dat de reeks $\sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n s}$ voor $\sigma > \sigma_2$ convergeert.

Stelling. Is $\sigma_0 > \varrho$, $\nu = \nu(\sigma_0)$, dan is (1) absoluut convergent voor $\sigma > \sigma_0 + l\nu + \frac{1}{2} l$.

Bewijs. In elk geval is $\sigma_a < \infty$. Was $\sigma_a > \sigma_0 + l\nu + \frac{1}{2} l = \sigma^*$, dan konden we een $\sigma_1 > \sigma_a$ kiezen, zóó, dat σ_2, gedefiniëerd zooals in Hulpstelling 3, kleiner is dan σ_a, want

$$\sigma_2 - \sigma^* = \frac{\nu}{\nu+1}(\sigma_1 - \sigma^*).$$

Toepassing van Hulpstelling 3 zou dan echter opleveren $\sigma_a \leqq \sigma_2$, in strijd met het voorgaande.

Is omgekeerd de absolute convergentie-abcis σ_a bekend, dan volgt uit $\sigma_a \leqq \sigma^*$ onmiddellijk een eenvoudige schatting naar beneden voor $\nu(\sigma)$. Deze schatting is weer scherp, zooals uit het voorbeeld $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ blijkt.

Zusammenfassung.

Ist $f(s)$ $(s = \sigma + it)$ eine in $\sigma \geqq \sigma_0$ reguläre Funktion, die für hinreichend grosses σ in eine konvergente DIRICHLETsche Reihe (1) (mit der Nebenbedingung (2)) entwickelbar ist, gibt es zweitens eine positive Zahl k, derart dass für $\sigma \geqq \sigma_0$, $|t| > 1$ die Abschäizung

$$f(s) = O(|t|^k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

gilt, und gilt überdies

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma_0 + it)|^2\, dt = O(T^{2\nu}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

so ist (1) absolut konvergent für $\sigma > \sigma_0 + \nu l + \frac{1}{2} l$.

Summary.

Be $f(s)$ $(s = \sigma + it)$ for $\sigma \geqq \sigma_0$ a regular function, for sufficiently large values of σ developable into an absolutely convergent DIRICHLET series (with the complementary condition (2)). If there is a positive number k such that the estimation (16) holds for $\sigma \geqq \sigma_0$, $|t| > 1$, and if (17) is true, then (1) is absolutely convergent for $\sigma > \sigma_0 + \nu l + \frac{1}{2} l$.

Résumé.

Soit $f(s)$ $(s = \sigma + it)$ une fonction holomorphe pour $\sigma \geqq \sigma_0$ qui permet un développement DIRICHLET du type (1) (avec la condition complémentaire (2)) pour des valeurs σ suffisamment élevées. S'il existe un nombre positif k tel que l'estimation (16) est valable pour $\sigma \geqq \sigma_0$, $|t| > 1$ et si on a en plus (17), la série (1) est absolument convergente pour $\sigma > \sigma_0 + \nu l + \frac{1}{2} l$.