Over een door wrijving geëcxiteerd precessieverschijnsel

WE-59-3

OVER EEN DOOR WRIJVING GEËXCITEERD PRECESSIEVERSCHIJNSEL

door ir G. Groeneveld

Technische Hogeschool Eindhoven

SUMMARY:

A description and analysis is given of the whirling motion of a motor with rotating shaft and disk, as excited by friction of an object, pressed against the disk. The motor is fixed at one point of its axis of symmetry and restrained by springs against rotation round axes, perpendicular to the axis of symmetry. When the object is pressed against one side of the disk, a fast whirl in the same direction as the rotation of the shaft and disk is excited, when the object is pressed against the other side a slow whirl in the opposite direction builds up. Damping is taken into account. There is close agreement between theory and experiment.

-----

1. INLEIDING.

In het boek "Mechanical Vibrations" van J.P. den Hartog wordt een qualitatieve beschrijving gegeven van zelfexcitatie van een precessiebeweging.1)
In onderstaand artikel worden na invoering van een aantal linearisaties de bewegingsvergelijkingen voor dit verschijnsel opgesteld en opgelost.
In fig. 1 is schematisch de opstelling van het te beschrijven systeem weergegeven. Een electromotor is bevestigd aan een horizontale plaat, welke alzijdig symmetrisch verend aan een vast frame is opgehangen. Het punt O van de schijf is een vast punt

1) J.P. den Hartog: "Mechanical Vibrations," 4e druk, Mc Graw-Hill 1956, pp. 294, 295.

van het frame. Motorhuis en plaat draaien niet om hun eigen as. Op de as OS van de motor is een schijf bevestigd, die met constante hoeksnelheid Ω door de motor wordt aangedreven. Tegen deze schijf wordt een wrijvingslichaam gedrukt op een constante afstand b van de vertikaal door O. Dit wrijvingslichaam wordt massaloos verondersteld; de aandrukking geschiedt door middel van een veer en kan zowel aan de bovenzijde als aan de onderzijde (gestippeld getekend) geschieden.
Zonder wrijvingslichaam kan de motoras bewegingen om de Z-as uitvoeren, die samengesteld gedacht kunnen worden uit een langzame rotatie tegen de draaizin van de schijf in (tegenlopende precessie) en een snelle rotatie met dezelfde draaizin als de schijf (meelopende precessie).
Wordt het wrijvingslichaam boven op de schijf gedrukt, dan zal de meelopende precessie weggedempt worden; de tegenlopende precessie zal daarentegen juist ontstaan, mits de steeds aanwezige demping klein genoeg is.
Wordt het wrijvingslichaam onder tegen de schijf gedrukt, dan wordt de meelopende precessie geëxciteerd en de tegenlopende onderdrukt.
In dit artikel worden de kleine bewegingen beschreven van de motoras OS ten opzichte van de vertikale ruststand OT.
Naast de berekeningen zijn in het laboratorium voor Technische Mechanica van de Technische Hogeschool te Eindhoven proeven gedaan met een model.

2. NOMENCLATUUR.

Naast de in fig. 1 en in bovenstaande tekst aangegeven grootheden worden verder gebruikt (in volgorde van hun voorkomen in de tekst):

X', Y', Z'		= hulpassenkruis door het vaste punt O; hoofdtraagheidsassen van motor en schijf.
$\omega_{x'}, \omega_{y'}$	$[T^{-1}]$	= hoeksnelheid van de beweging van motor en schijf om de X'-as, resp. de Y'-as.
D_x, D_y	$[KLT]$	= impulsmoment van de bewegende delen om de X-as, resp. de Y-as.
$D_{x'}, D_{y'}, D_{z'}$	$[KLT]$	= impulsmoment van de bewegende delen om de X'-as, de Y'-as, resp. de Z'-as.
$P_1' \pm P_1 x$	$[K]$	= drukkracht, door het wrijvingslichaam op de schijf uitgeoefend, indien de motoras een kleine uitwijking x heeft.
$P_2' \pm P_2 x$	$[K]$	= wrijvingskracht, idem.
P_1, P_2	$[KL^{-1}]$	

W_x, W_y	[K]	= componenten van $P_1' \pm P_2 x$ in de negatieve X-richting resp. de negatieve Y-richting.
M_x, M_y	[KL]	= moment van alle uitwendige krachten om de X-as, resp. de Y-as.
c	[KL]	= veerstijfheid van de ophanging; terugstelmoment per radiaal uitbuiging.
G	[K]	= gewicht van de bewegende delen.
β	[KLT]	= demping van het systeem; dempingsmoment per eenheid van hoeksnelheid van het systeem om de X-as, resp. de Y-as.
I_1	[KLT^2]	= massatraagheidsmoment van de bewegende delen ten opzichte van de X'-as en ten opzichte van de Y'-as.
I_2	[KLT^2]	= massatraagheidsmoment van de rotor met schijf ten opzichte van de Z'-as.
Ω	[T^{-1}]	= hoeksnelheid van de rotor met schijf om de Z'-as.
p	[KT^2]	$= \frac{I_1}{\ell}$
q	[KT]	$= \frac{I_2 \Omega}{\ell}$
r	[K]	$= \frac{c + Ga}{\ell}$
s	[K]	$= P_2 \ell$
s'	[K]	$= P_1 b$
u	[KT]	$= \frac{\beta}{\ell}$
A, B, A_1, A_2, φ_1, φ_2		= integratieconstanten.
$\zeta = \xi + i\eta$		= complexe eigenfrequentie.
t	[T]	= tijd.
ω_1, ω_2	[T^{-1}]	= hoeksnelheid van de meelopende resp. de tegenlopende precessie bij afwezigheid van demping en van wrijvingslichaam.
ε_1, ε_2, δ_1, δ_2	[T^{-1}]	= eerste benadering van de verandering van ω_1 en ω_2 tengevolge van de demping resp. de druk en de wrijving van het wrijvingslichaam.

Tussen haken zijn geplaatst de dimensies van de grootheden in een technisch eenhedenstelsel.

3. KEUZE VAN ASSENKRUIS EN COÖRDINATEN.

Een vast rechtsdraaiend assenkruis wordt gekozen met de oorsprong in O, de Z-as vertikaal naar beneden en het XOZ-vlak door de lijn, waarlangs het wrijvingslichaam beweegt.
De plaats van de motoras wordt gekenmerkt door de coördinaten x en y van het punt S.
Voorts wordt tijdelijk een assenkruis gebruikt langs drie hoofdtraagheidsassen van motor en schijf (fig. 2).
As OX' ligt hiervan in het XOZ-vlak; as OZ' is de as van de motor en as OY' staat loodrecht op beide.

4. GEVOLGEN VAN DE LINEARISERING.

Aangezien slechts kleine uitwijkingen van de motoras ten opzichte van de vertikale stand zullen worden beschreven ($x \ll \ell$, $y \ll \ell$), zijn de hoeken tussen X- en X'-as, tussen Y- en Y'-as en tussen Z- en Z'-as klein. Evenzo zijn de hoeken die bijvoorbeeld de Z'-as maakt met de X-as en de Y-as ongeveer 90°. Hetzelfde geldt voor de overige hoeken. In het bijzonder is de cosinus van de hoek tussen de Z'-as en de X-as gelijk aan $\frac{x}{\ell}$ en de cosinus van de hoek tussen de Z'-as en de Y-as gelijk aan $\frac{y}{\ell}$, terwijl $\omega_{x'} \approx -\frac{y}{\ell}$ en $\omega_{y'} \approx \frac{x}{\ell}$. (1)

Onder deze aannamen kan worden gesteld, dat:

$$D_x \approx D_{x'} + \frac{x}{\ell} D_{z'} \quad \text{en:}$$
$$D_y \approx D_{y'} + \frac{y}{\ell} D_{z'} \tag{2}$$

($D_{z'}$ kan veel groter zijn dan $D_{x'}$ en $D_{y'}$. Ofschoon de factoren $\frac{x}{\ell}$ en $\frac{y}{\ell}$ klein zijn, mogen de termen $\frac{x}{\ell} D_{z'}$ en $\frac{y}{\ell} D_{z'}$ dus niet worden weggelaten).

Als verder gevolg van de linearisering kan worden gesteld, dat de drukkracht (en bij constante wrijvingscoëfficiënt dus ook de wrijvingskracht), die door het wrijvingslichaam op de schijf wordt uitgeoefend, lineair afhankelijk is van x en onafhankelijk van y.
Het bewijs hiervan volgt ogenblikkelijk uit de figuren 3a en 3b. In figuur 3a is de situatie bij een uitwijking x van de Z'-as getekend; in fig. 3b de situatie bij een uitwijking y van deze as. De drukkracht is evenredig met de kracht in de veer van het wrijvingslichaam en dus met de verplaatsing van dit lichaam.

Voor de drukkracht kan dus worden geschreven $P_1' \pm P_1 x$; voor de wrijvingskracht $P_2' \pm P_2 x$.

Hierin, evenals in alle volgende vergelijkingen, geldt steeds het bovenste teken voor aandrukken van het wrijvingslichaam aan de bovenzijde van de schijf, het onderste teken voor aandrukken aan de onderzijde.

De wrijvingskracht $P_2' \pm P_2 x$ krijgt, bij een positieve uitwijking y, een richtingsverandering (fig. 3c) en dientengevolge een component in de negatieve X-richting, groot $W_x = \frac{y}{b}\left(P_2' \pm P_2 x\right)$. Aangezien het echter niet nodig is P_2' groter te maken dan de maximale absolute waarde van $P_2 x$, is dus W_x evenredig met de factor xy en dus verwaarloosbaar klein ten opzichte van $W_y \approx P_2' \pm P_2 x$.

5. BEWEGINGSVERGELIJKINGEN.

Uitgegaan wordt van de impulsmomentstelling om de vaste assen OX en OY.

$$M_x = \dot{D}_x \quad \text{en} \quad M_y = \dot{D}_y \tag{3}$$

Hierin zijn, met gebruikmaking van (1) en (2):

$$\left.\begin{aligned} M_x &= c\frac{y}{\ell} + G\frac{a}{\ell}y + P_2'\ell \pm P_2 x\ell + \beta\frac{\dot{y}}{\ell} \\ M_y &= -c\frac{x}{\ell} - G\frac{a}{\ell}x \mp P_1' b - P_1 xb - \beta\frac{\dot{x}}{\ell} \\ D_x &= -I_1\frac{\dot{y}}{\ell} + I_2\Omega\frac{x}{\ell} \\ D_y &= I_1\frac{\dot{x}}{\ell} + I_2\Omega\frac{y}{\ell} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Invullen van (4) in (3) en rangschikken levert de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{I_1}{\ell}\ddot{y} - \frac{I_2\Omega}{\ell}\dot{x} + \frac{\beta}{\ell}\dot{y} \pm P_2\ell x + \frac{c+Ga}{\ell}y &= -P_2'\ell \\ \frac{I_1}{\ell}\ddot{x} + \frac{I_2\Omega}{\ell}\dot{y} + \frac{\beta}{\ell}\dot{x} + P_1 bx + \frac{c+Ga}{\ell}x &= \mp P_1' b \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

6. PARTICULIERE OPLOSSING.

Het is gemakkelijk in te zien dat

$$x = \mp\frac{P_1' b\ell}{c+Ga+P_1 b\ell} \; ; \quad y = \left(\frac{P_1' P_2 b\ell}{c+Ga+P_1 b\ell} - P_2'\right)\frac{\ell^2}{c+Ga} \tag{6}$$

een oplossing is van het stelsel (5).

Met $P_1'b \ll c+Ga$ en $P_2'\ell \ll c+Ga$ is dit een constante zeer kleine uitwijking ($|x| \ll \ell$; $|y| \ll \ell$), die kan worden verwaarloosd. Door het aanbrengen van een voorspanning in de ophangveren (onder gelijkblijvende stijfheid) kan er bovendien voor worden gezorgd dat de rechterleden van de vergelijkingen (5) precies = 0 worden.

Interessanter is de algemene oplossing van het homogene stelsel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{I_1}{\ell}\ddot{y} - \frac{I_2\Omega}{\ell}\dot{x} + \frac{\beta}{\ell}\dot{y} \pm P_2\ell x + \frac{c+Ga}{\ell}y &= 0 \\ \frac{I_1}{\ell}\ddot{x} + \frac{I_2\Omega}{\ell}\dot{y} + \frac{\beta}{\ell}\dot{x} + P_1 bx + \frac{c+Ga}{\ell}x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

7. AFKORTINGEN.

De volgende afkortingen worden nu ingevoerd:

$\frac{I_1}{\ell} = p$	$[KT^2]$	(traagheidsmoment)
$\frac{I_2\Omega}{\ell} = q$	$[KT]$	(toerental)
$\frac{c+Ga}{\ell} = r$	$[K]$	(veerstijfheid)
$P_2\ell = s$	$[K]$	(wrijving)
$P_1 b = s'$	$[K]$	(aandrukking)
$\frac{\beta}{\ell} = u$	$[KT]$	(demping).

De tussen haakjes geplaatste woorden zijn geen exacte beschrijving van de grootheden p t/m u. Wel bezitten ze een direct verband met deze letters.
Het stelsel (7) gaat nu over in:

$$\left.\begin{aligned} p\ddot{y} - q\dot{x} + ry \pm sx + u\dot{y} &= 0 \\ p\ddot{x} + q\dot{y} + rx + s'x + u\dot{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

8. AFBEELDING VAN DE EEIGENWAARDEN IN HET COMPLEXE VLAK.

Gezocht worden oplossingen van het stelsel (8) van de vorm

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}\, A e^{\zeta t} \\ y &= \mathrm{Re}\, B e^{\zeta t} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

waarin A, B en ζ complexe constanten kunnen zijn.
Invullen van deze oplossing in de differentiaalvergelijkingen levert twee homogene vergelijkingen in A en B, waaraan slechts voor bepaalde waarden van ζ , de eigenwaarden, kan worden voldaan (afgezien van de triviale oplossing $A = B = 0$, dus $x = y = 0$).
De betekenis van $\zeta = \xi + i\eta$ is evident.
Indien $\xi < 0$ neemt de amplitude van de beweging af; indien $\xi = 0$ ($\eta \neq 0$), dan zijn de componenten van de oplossing, x en y, harmonische bewegingen met constante amplitude; indien $\xi > 0$, dan neemt de amplitude toe en is de beweging instabiel.

9. HET ONGEDEMPTE SYSTEEM ZONDER WRIJVINGSLICHAAM.

Stelt men $s = s' = u = 0$ en vult men (9) in het zo verkregen stelsel (8) in, dan volgt, na deling door $e^{\zeta t}$:

$$\left.\begin{aligned} -Aq\zeta + B(p\zeta^2 + r) &= 0 \\ A(p\zeta^2 + r) + Bq\zeta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Opdat niet $A = B = 0$, moet, zoals na enig rekenen volgt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1^2 &= \left(i\,\frac{\sqrt{q^2 + 4\,rp} + q}{2\,p} \right)^2 = (i\,\omega_1)^2 \\ \zeta_2^2 &= \left(i\,\frac{\sqrt{q^2 + 4\,rp} - q}{2\,p} \right)^2 = (i\,\omega_2)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

(zie fig. 4)

Aangezien ζ_1 en ζ_2 zuiver imaginair zijn, kan worden geschreven

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (12)$$

Uit de tweede vergelijking van het stelsel (8) vindt men dan na één keer integreren:

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (12)$$

Kiest men de beginvoorwaarden zodanig, dat $A_2 = 0$, dan ontstaat in bovenaanzicht dus fig. 5a, een snelle, met de draairichting van Ω meelopende precessie; kiest men de beginvoorwaarden zodanig, dat $A_1 = 0$, dan ontstaat fig. 5b, een langzame, tegen de draairichting

van Ω in lopende precessie.
Substitutie van p, q en r in ω_1 en ω_2 geeft ω_1 en ω_2 als functie van Ω;

$$\left.\begin{aligned} |\omega_1| &= \frac{\sqrt{I_2^2\,\Omega^2 + 4\left(\frac{c+Ga}{\ell}\right)I_1} + I_2\,\Omega}{2\,I_1} \\ |\omega_2| &= \frac{\sqrt{I_2^2\,\Omega^2 + 4\left(\frac{c+Ga}{\ell}\right)I_1} - I_2\,\Omega}{2\,I_1} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Fig. 6 geeft een afbeelding van ω_1 en ω_2 als functie van Ω.
Hierin is het teken van ω_1 en ω_2 in overeenstemming gebracht met de projectie van Ω op de Z-as.

10. HET GEDEMPTE SYSTEEM ZONDER WRIJVINGSLICHAAM.

Voor het systeem (8) met s = s' = 0 en u zeer klein wordt de oplossing geschreven in de vorm:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}\; Ae^{(i\omega+\varepsilon)t} \\ y &= \mathrm{Re}\; Be^{(i\omega+\varepsilon)t} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Hierin wordt $i\omega$ gelijk genomen aan de oplossingen ζ van het ongedempte systeem, zodat dus ε de kleine afwijking ten opzichte van dat systeem voorstelt.
Vult men (14) in het nu verkregen systeem (8) in, dan krijgt men, na verwaarlozing van ε^2 en hogere machten van ε:

$$\varepsilon = - \frac{\omega^2\,p - r}{2\,\omega^2\,p^2 - q^2 - 2\,pr} \cdot u \qquad (15)$$

Invullen van $\omega = \omega_1$ resp. $\omega = \omega_2$ levert:

$$\varepsilon_1 = - \frac{\sqrt{q^2 + 4\,rp} + q}{2\,p\sqrt{q^2 + 4\,rp}} \cdot u \qquad \text{en}$$

$$\varepsilon_2 = - \frac{\sqrt{q^2 + 4\,rp} - q}{2\,p\sqrt{q^2 + 4\,rp}} \cdot u \qquad (16)$$

(zie fig. 7)

Opgemerkt moet worden dat de (snellere) meelopende precessie sneller zal dempen dan de tegenlopende precessie.

11. HET ONGEDEMPTE SYSTEEM MET WRIJVINGSLICHAAM.

Het systeem (8) met $u = 0$, s en s' zeer klein, wordt geheel behandeld als het gedempte systeem zonder wrijvingslichaam.

Nu wordt gesteld:

$$x = \mathrm{Re}\, Ae^{(i\omega+\delta)t}$$
$$y = \mathrm{Re}\, Be^{(i\omega+\delta)t} \tag{17}$$

Het blijkt dat $$\delta = \frac{\mp q}{2(2\omega^2p^2-q^2-2pr)} s + i \frac{\omega^2 p - r}{2\omega(2\omega^2p^2-q^2-2pr)} s' \tag{18}$$

Invullen van $\omega = \omega_1$ resp. $\omega = \omega_2$ levert nu:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\mp s}{2\sqrt{q^2+4rp}} + i \frac{s'}{2\sqrt{q^2+4rp}} \\ \delta_2 &= \frac{\pm s}{2\sqrt{q^2+4rp}} + i \frac{s'}{2\sqrt{q^2+4rp}} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Aangezien het bovenste teken hierin voor aandrukken aan de bovenzijde geldt, liggen de waarden van ζ in dit geval als in fig. 8a. Bij aandrukken aan de onderzijde ontstaat fig. 8b.
Het blijkt dat bij aandrukken aan de bovenzijde de tegenlopende precessie geëxciteerd wordt; bij aandrukken aan de onderzijde de meelopende precessie.

12. HET GEDEMPTE SYSTEEM MET WRIJVINGSLICHAAM.

Voor kleine waarden van s, s' en u kunnen de waarden van ε en δ van de vorige hoofdstukken opgeteld worden. Dus zal, indien $|\varepsilon_1| < |\mathrm{Re}\delta_1|$, bij aandrukken aan de onderzijde de meelopende precessie worden geëxciteerd. Evenzo wordt, indien $|\varepsilon_2| < |\mathrm{Re}\delta_2|$, de tegenlopende precessie geëxciteerd bij aandrukken aan de bovenzijde. Aangezien $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$ zal het dus moeilijker zijn, de meelopende precessie te exciteren dan de tegenlopende. Hiervoor is immers een grotere s, dus een grotere wrijving nodig. Dit kan o.a. worden bereikt door een grotere veerstijfheid van het wrijvingslichaam.

13. EXPERIMENTELE RESULTATEN.

In het laboratorium voor Technische Mechanica van de Technische Hogeschool te Eindhoven is een model gemaakt (fig. 9), waarmee de boven omschreven verschijnselen kunnen worden gedemonstreerd. Het wrijvingslichaam is een rubberdopje, gemonteerd op een bladveertje.
De overige onderdelen zijn direct herkenbaar op de foto. Het model voldoet goed aan de verwachtingen.

Het is interessant om op te merken, dat om precessie te exciteren, de veerstijfheid van het onderste wrijvingslichaam inderdaad groter moest worden genomen dan de veerstijfheid van het bovenste wrijvingslichaam.

14. CONCLUSIE.

Gezien de resultaten van het model geeft de boven omschreven theorie, met de gebruikte vereenvoudigingen en linearisaties, een goed beeld van het in "Mechanical Vibrations" beschreven verschijnsel.

15. OPMERKINGEN.

1. Plaatst men het gehele model ondersteboven, dan kan men door de veerstijfheid van de ophanging te variëren, aan r verschillende waarden, ook negatieve, geven. Dan wordt namelijk $r = \frac{c-Ga}{\ell}$.
   Voor $r < 0$ geeft de theorie enige merkwaardige resultaten, die aansluiten bij de theorie van de vertikaal staande zware tol.
2. Er is een zekere analogie op te merken tussen de bewegingsmogelijkheden van motor en schijf en de bewegingsmogelijkheden van een aan één zijde ingeklemd draaiende elastische as met op het andere einde een schijf. In Biezeno-Grammel "Technische Dynamik" 1) wordt hier gesproken van "kritische Drehzahlen im Gleichlauf und im Gegenlauf (erste Type)."
   Een uitbreiding van de analogie doet het vermoeden rijzen, dat beide vormen bijvoorbeeld door het aanlopen van de schijf zullen kunnen worden geëxciteerd.

1) Biezeno-Grammel: "Technische Dynamik" 2e druk, Springer 1953, dl II, pp. 183 t/m 187. N.b.: fig. 13 op pag. 187 houdt echter geen verband met fig. 6 van dit artikel.