Een constitutieve vergelijking voor incompressibel, isotroop elastisch materiaalgedrag

WFW 88.012

EEN CONSTITUTIEVE VERGELIJKING VOOR INCOMPRESSIBEL, ISOTROOP ELASTISCH MATERIAALGEDRAG

P.A.A. van Hoogstraten

mei 1988

VAKGROEP FUNDAMENTELE WERKTUIGKUNDE
TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

EEN CONSTITUTIEVE VERGELIJKING VOOR INCOMPRESSIBEL, ISOTROOP, ELASTISCH MATERIAALGEDRAG

In deze notitie wordt een constitutieve vergelijking voor incompressibel, elastisch, isotroop materiaalgedrag afgeleid, die bijvoorbeeld kan worden toegepast bij isotherme deformaties van rubberachtige materialen. Deze notitie is gebaseerd op een aantal dictaten over continuumsmechanica ([1] t/m [4]).

In de afleiding wordt een Lagrange-formulering toegepast: Een relevante grootheid wordt bepaald als functie van steeds hetzelfde materiële punt. De grootheid wordt als het ware beschouwd door een waarnemer, die met dit materiële punt is verbonden. In de Euler-formulering daarentegen bevindt de waarnemer zich op een vast punt in de ruimte.

Literatuur

[1] F.E.Veldpaus
Inleiding Continuumsmechanica
dictaat nr.4612 Vakgroep Fundamentele Werktuigkunde
Technische Universiteit Eindhoven

[2] C.Oomens, P.Schreurs
Constitutieve vergelijkingen voor kunststoffen en biologische materialen
intern rapport WFW-87.073 Vakgroep Fundamentele Werktuigkunde
Technische Universiteit Eindhoven

[3] A.Huson, C.W.J.Oomens, A.A.H.J.Sauren
Biologische materialen
dictaat nr.4589 Vakgroep Fundamentele Werktuigkunde
Technische Universiteit Eindhoven

[4] A.A.F. v.d. Ven
Continuumsmechanica I
dictaat nr.2356 onderafdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven

[5] Treloar, L.R.C. (1944)
Stress-strain data for vulcanized rubber under
various types of deformations
Trans.Faraday Soc., 40 : pp.59-70

[6] Mooney, M. (1940)
A theory of large elastic deformation
J.of Appl.Phys., 11 : pp.582-592

[7] MARC User Information Manual (Volume A) Versie K3

[8] MARC Element Library (Volume B) Versie K3

[9] MARC Program Input (Volume C) Versie K3

Inhoudsopgave

1 De beschrijving van de deformatie van een lichaam

1.1 Inleiding

Voor een deformerend lichaam B wordt onderscheid gemaakt tussen een tweetal toestanden: De referentietoestand op het tijdstip t_0 en de huidige of momentane toestand op het tijdstip t_m.

In de driedimensionale ruimte wordt een vast punt, de zogenaamde oorsprong O gekozen. Een willekeurig punt P van lichaam B wordt aan deze oorsprong gekoppeld met de zogenaamde positie-vector $\vec{x}$.
Lichaam B kan worden opgevat als de verzameling van alle materiële punten P, die elk kunnen worden gekenmerkt met een label $\underset{\sim}{\xi}$.

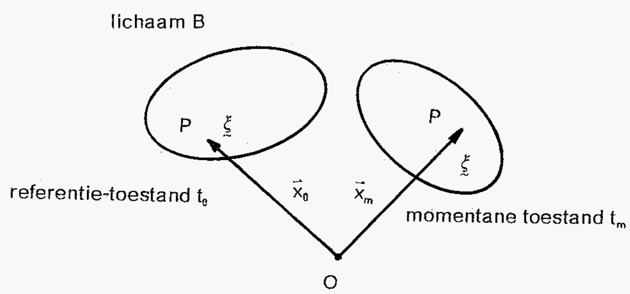


fig.1 : referentie- en momentane toestand

De positievector $\vec{x}$ van punt P is dus een functie van het label $\underset{\sim}{\xi}$ van P en de tijd t. De huidige toestand t_m kan worden opgevat als de verzameling van alle positievectoren van alle materiële punten op het tijdstip t_m:

$$\text{huidige toestand } G(t) = \{\vec{x} = \vec{X}(\underset{\sim}{\xi}\,, t) \mid \forall\, \underset{\sim}{\xi} \in B\} \qquad (1.1.1)$$

In een Lagrange-formulering kan een materieel punt in plaats van met zijn label $\underset{\sim}{\xi}$ ook worden gekenmerkt met zijn positievector $\vec{x}_0$ in de referentie-configuratie:

$$\vec{x} = \vec{X}(\underset{\sim}{\xi}\,, t) = \vec{X}(\vec{x}_0\,, t) \qquad (1.1.2)$$

1.2 De deformatietensor

De deformatietensor **F** (ook wel deformatiegradiënt genoemd) is een tweede orde tensor, die de geometrie van een lichaam in de referentie-toestand afbeeldt op de geometrie in de huidige toestand.

Beschouwen we de positievectoren van twee naburige punten P en Q, dan kan de verschilvector van deze twee positievectoren in de referentie-toestand worden weergegeven met $d\vec{x}_0$ en in de momentane toestand met $d\vec{x}_m$.

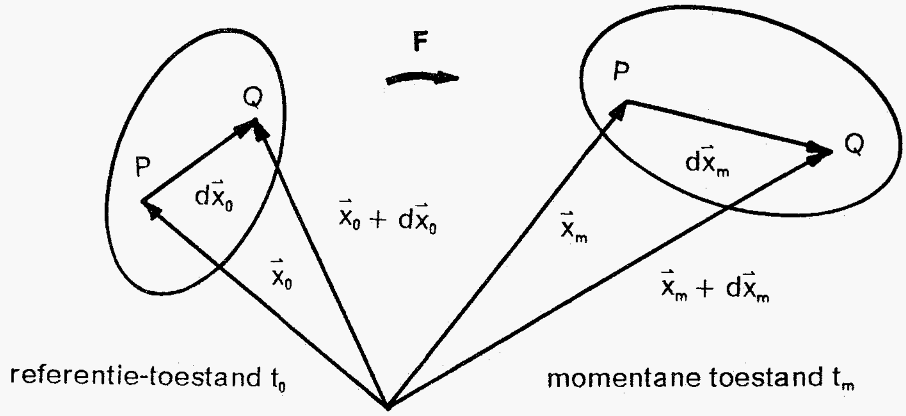


fig.2 : deformatietensor **F**

In bijlage B.1 is geformuleerd dat voor een vectorveld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}_0\ , t)$ de verschilvector $d\vec{a}$ tussen twee naburige punten met de positievectoren $\vec{x}_0$ en $\vec{x}_0 + d\vec{x}_0$ gelijk is aan:

$$d\vec{a} = d\vec{x}_0 \cdot (\vec{\nabla}_0\vec{a}) = \vec{a}(\vec{x}_0 + d\vec{x}_0) - \vec{a}(\vec{x}_0) \quad ; \ \|d\vec{x}_0\| \rightarrow 0 \qquad (1.2.1)$$

Met behulp van relatie (1.2.1) kan voor het vectorveld $\vec{x}_m = \vec{x}_m(\vec{x}_0\ , t\ )$ worden gevonden:

$$d\vec{x}_m = d\vec{x}_0 \cdot (\vec{\nabla}_0\vec{x}_m) = (\vec{\nabla}_0\vec{x}_m)^c \cdot d\vec{x}_0 = \mathbf{F} \cdot d\vec{x}_0 \qquad (1.2.2)$$

In deze formule stelt $\vec{\nabla}_0$ de gradiënt t.o.v. de referentie-toestand voor.

Deformatietensor **F** is dus gedefinieerd als de geconjugeerde van de gradiënt (ten opzichte van de referentietoestand) van het positie-vectorveld. Onder de aanname dat er geen toe- of afname van de hoeveelheid materiaal van het lichaam zal plaatsvinden, volgt dat de inverse tensor $\mathbf{F}^{-1}$ bestaat en dat **F** dus regulier is ; Het is dan immers geometrisch gezien altijd mogelijk om de momentane toestand terug te transformeren tot de referentie-toestand.

De determinant van de deformatie-tensor speelt een grote rol bij incompressibele media: In bijlage B.2 wordt afgeleid dat de determinant van **F** gelijk is aan de verhouding van het volume van het lichaam in de huidige toestand en het volume in de referentie-toestand. De determinant van **F** wordt daarom vaak de volume-veranderingsfactor J genoemd. Bij incompressibele media vindt geen volume-verandering plaats. Er geldt dan:

$$\text{incompressibele media} : \quad J = \det(\mathbf{F}) = 1 \qquad (1.2.3)$$

In bijlage B.3 tenslotte is afgeleid dat de gradiënt-operatoren t.o.v. de referentie toestand en t.o.v. de momentane toestand aan elkaar gerelateerd zijn door de deformatie-tensor:

$$\vec{\nabla}_m = \mathbf{F}^{-c} \cdot \vec{\nabla}_0 \iff \vec{\nabla}_0 = \mathbf{F}^{c} \cdot \vec{\nabla}_m \qquad (1.2.4)$$

1.3 De rechtse Cauchy-Green rektensor

De deformatie van een lichaam bestaat enerzijds uit verlenging van materiële lijnstukjes van dit lichaam en anderzijds uit afschuiving tussen deze lijnstukjes onderling.

Een tensor, die alle informatie over deze verlenging en afschuiving bevat, is de zogenaamde rechtse Cauchy-Green-rektensor **C** :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{F} \tag{1.3.1}$$

Om dit te illustreren, worden in de referentie-configuratie twee materiële lijnstukjes in punt P beschouwd: $d\vec{x}_{10}$ en $d\vec{x}_{20}$.

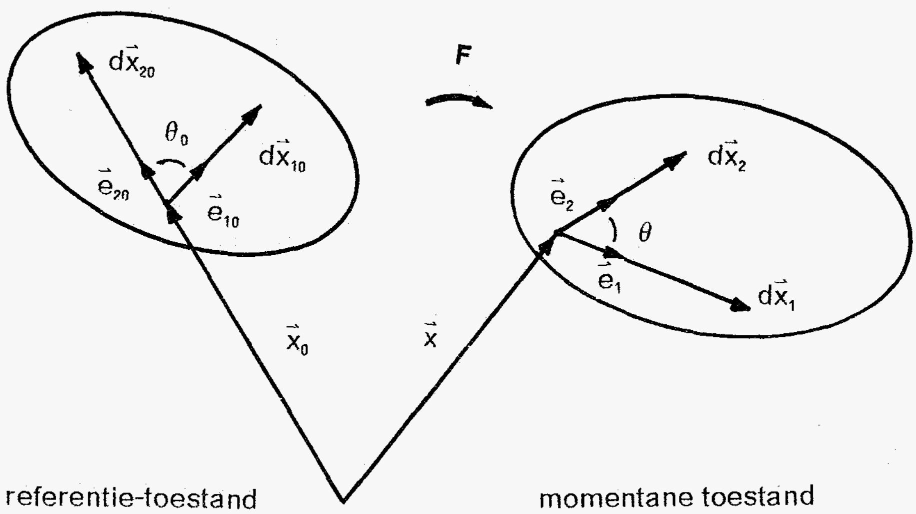


fig.3 : verlenging en afschuiving van een lichaam

Er geldt:

$$d\vec{x}_{i0} = ds_{i0}\vec{e}_{i0} \tag{1.3.2}$$
$$\| \vec{e}_{i0} \| = 1 \quad ; \; ds_{i0} = \| d\vec{x}_{i0} \| \quad (i = 1,2)$$

Het lijnstukje $d\vec{x}_{i0}$ gaat in de momentane configuratie over in $d\vec{x}_i$:

$$d\vec{x}_i = \mathbf{F} \cdot d\vec{x}_{i0} = ds_i\vec{e}_i \tag{1.3.3}$$

De verlengingsfactor λ_i van dit lijnstukje wordt gegeven door:

$$\lambda_i = \frac{ds_i}{ds_{i0}} = \sqrt{\vec{e}_0 \cdot \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{e}_0} = \sqrt{\vec{e}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_0} \tag{1.3.4}$$

Met behulp van de definitie van het inwendige produkt van twee vectoren kan worden afgeleid dat in de referentie-configuratie voor de hoek θ_0 tussen de vectoren $d\vec{x}_{10}$ en $d\vec{x}_{20}$ moet gelden:

$$\cos(\theta_0) = \frac{d\vec{x}_{10} \cdot d\vec{x}_{20}}{\|d\vec{x}_{10}\| \cdot \|d\vec{x}_{20}\|} = \vec{e}_{10} \cdot \vec{e}_{20} \tag{1.3.5}$$

In de huidige configuratie is de hoek tussen $d\vec{x}_1$ en $d\vec{x}_2$ gelijk aan θ:

$$\cos(\theta) = \frac{d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2}{\|d\vec{x}_1\| \cdot \|d\vec{x}_2\|} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \tag{1.3.6}$$

Voor de hoekverandering $(\theta - \theta_0)$ kan de volgende relatie worden afgeleid:

$$\sin(\theta - \theta_0) = - \frac{\vec{e}_{10} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_{20}}{\sqrt{\vec{e}_{10} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_{10}} \sqrt{\vec{e}_{20} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_{20}}} \tag{1.3.7}$$

Tensor **C** bevat dus alle informatie m.b.t. de verlenging van en de hoekverandering tussen willekeurige materiële lijnstukjes in een punt P.

De rechtse Cauchy-Green-rektensor is symmetrisch. Ook is deze tensor positief definiet, omdat voor alle vectoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ geldt:

$$\vec{a} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{a} > 0 \tag{1.3.8}$$

Tensor **C** kan dankzij deze twee eigenschappen worden geschreven in de volgende zogenaamde spectrale representatie:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \, \vec{n}_{0i}\vec{n}_{0i} \tag{1.3.9}$$

Een symmetrische tensor blijkt namelijk te kunnen worden opgevat als de som van slechts drie bepaalde dyadische produkten:

De vectoren $\vec{n}_{0i}$ (i = 1,2,3) zijn drie onderling loodrechte eenheidsvectoren en de scalairen λ_i^2 (i = 1,2,3) zijn positieve getallen, die voldoen aan het eigenwaarde-probleem:

$$\mathbf{C} \cdot \vec{n}_{0i} = \lambda_i^2 \cdot \vec{n}_{0i} \tag{1.3.10}$$

De vectoren $\vec{n}_{0i}$ zijn dus eigenvectoren van **C** en de scalairen λ_i^2 zijn de bijbehorende eigenwaarden. De eigenwaarden van **C** blijken gelijk te zijn aan het kwadraat van de verlengingsfactoren van lijnstukjes, die in de referentie-toestand gericht zijn langs de eigenvectoren van **C**. De hoeken tussen deze onderling loodrechte vectoren blijven tijdens de deformatie recht en er vindt dus geen afschuiving tussen deze vectoren plaats. Door deze eigenschappen worden de vectoren $\vec{n}_{0i}$ hoofdrekrichtingen genoemd en de scalairen λ_i de bijbehorende hoofdverlengingsfactoren.

1.4 Polaire decompositie van de deformatietensor

De deformatietensor **F** kan worden gesplitst in twee tensoren:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \, . \, \mathbf{U} \tag{1.4.1}$$

Deze decompositie kan worden toegelicht aan de hand van een hoofdrekblokje, een blokje materiaal dat wordt opgespannen door de eigenvectoren $\vec{n}_{0i}$ $(i = 1,2,3)$ van **C**.

Tensor **R** is een rotatie-tensor: deze roteert het hoofdrekblokje als star lichaam. Tensor **R** is orthogonaal; zijn inverse $\mathbf{R}^{-1}$ is gelijk aan zijn geconjugeerde $\mathbf{R}^{c}$. De determinant van **R** is gelijk aan $+1$.

Tensor **U** wordt de verlengingstensor genoemd. De ribben van een hoofdrekblokje veranderen als gevolg van deze tensor wel van lengte, maar het hoofdrekblokje blijft daarbij rechthoekig en behoudt zijn oriëntatie. De verlengingstensor is symmetrisch en is als volgt gedefinieerd:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{n}_{0i} \vec{n}_{0i} \quad ; \quad \mathbf{U} \, . \, \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \tag{1.4.2}$$

Het toepassen van deformatietensor **F** op een hoofdrekblokje bestaat dus uit het oprekken van dit blokje, gevolgd door een starre rotatie ervan. Een en ander is weergegeven in de onderstaande figuur:

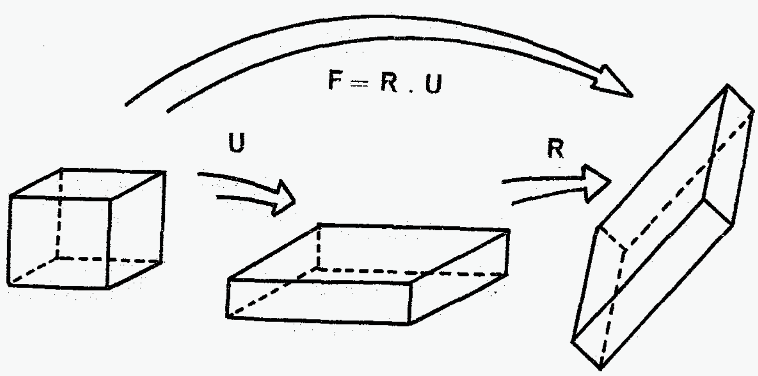


fig.4 : polaire decompositie van de deformatietensor

1.5 De Green-Lagrange-rektensor

De rek ε van een materieel lijnstukje in een willekeurige richting $\vec{e}_0$ ($\|\vec{e}_0\| = 1$) wordt bepaald met de volgende vergelijking:

$$\varepsilon(\vec{e}_0) = \vec{e}_0 \,.\, \mathbf{E} \,.\, \vec{e}_0 \tag{1.5.1}$$

In deze relatie stelt **E** een te kiezen rektensor voor, die de rekdefinitie vastlegt. Terwille van de fysische interpretatie wordt bij grote deformaties voor **E** vaak de Green-Lagrange-rektensor gekozen: Dit is de enige bekende rektensor waarvoor geldt dat de rek van een lijnstukje in een willekeurige richting volgens (1.5.1) gelijk is aan de verlenging van dit lijnstukje gedeeld door de oorspronkelijke lengte. Voor alle andere bekende rektensoren geldt dat de rek volgens (1.5.1) in de hoofdrek-richtingen wel gelijk is aan de verlenging gedeeld door de oorspronkelijke lengte, terwijl dit voor niet-hoofdrek-richtingen niet het geval is. De Green-Lagrange-rektensor heeft de volgende definitie:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^c \,.\, \mathbf{F} - \mathbf{I}) \qquad (1.5.2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

met : $\mathbf{I}$ = de eenheidstensor

1.6 De deformatie-snelheidstensor

Vaak speelt de snelheid waarmee de lengte en de richting van een materieel lijnstukje verandert een grote rol. Deze snelheid volgt uit differentiatie naar de tijd van vergelijking:

$$d\vec{x}_m = \mathbf{F} \cdot d\vec{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{F} = (\vec{\nabla}_0 \vec{x}_m)^c \tag{1.6.1}$$

Na enig rekenwerk levert deze differentiatie de volgende relatie op:

$$(\dot{d\vec{x}_m}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}_m \tag{1.6.2}$$

De tensor $\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ blijkt te splitsen in een tweetal tensoren:

$$(\dot{d\vec{x}_m}) = \mathbf{D} \cdot d\vec{x}_m + \Omega \cdot d\vec{x}_m \tag{1.6.3}$$

Tensor **D** is symmetrisch en wordt de deformatie-snelheidstensor genoemd. **D** is een maat voor de snelheid waarmee lijnstukjes, gericht langs de eigenvectoren van **D** oprekken. De zogenaamde rotatie-snelheidstensor of spintensor Ω is een maat voor de rotatiesnelheid van deze lijnstukjes. Deze tensor is scheefsymmetrisch.

Voor de tijdsafgeleide van de Green-Lagrange-rektensor blijkt te gelden:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \tag{1.6.4}$$

Voor de tijdsafgeleide van de volumeveranderingsfactor J geldt:

$$\dot{J} = J \, \mathrm{tr}(\mathbf{D}) \tag{1.6.5}$$

2 De behoudswetten

2.1 Definities

In dit hoofdstuk wordt een lichaam B beschouwd met een volume V(t) en een buiten-oppervlak A(t). De dichtheid van dit lichaam (de hoeveelheid massa per volume-eenheid) is een functie van de tijd en de positie in het lichaam en wordt aangegeven met $\rho(\vec{x},t)$. In de referentie-toestand worden de genoemde grootheden voorzien van een benedenindex 0.

In het lichaam wordt een willekeurig te kiezen snedevlak aangebracht. Het beschouwde deel $\overline{B}$ van lichaam B heeft een volume $\overline{V}(t)$ en een oppervlak $\overline{A}(t)$.

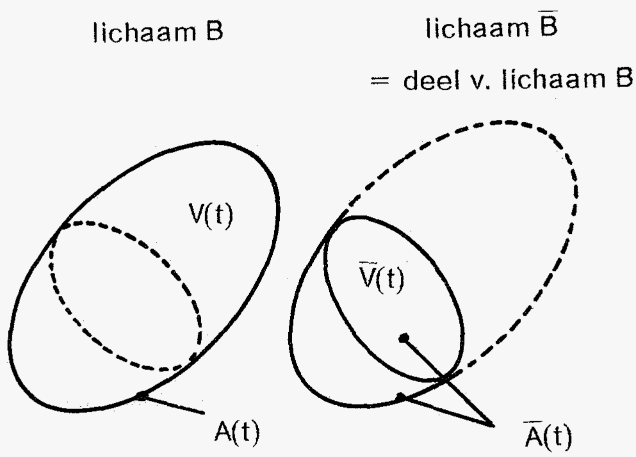


fig.5 : beschouwde deel van het lichaam

De belastingen, die op het beschouwde deel van het lichaam werken, kunnen worden verdeeld in contact-akties (uitgeoefend door het resterende deel van lichaam B of door omringende lichamen, die direkt in contact staan met $\overline{B}$) en in akties op afstand (bijvoorbeeld als gevolg van de aardgravitatie). Er wordt aangenomen, dat contact-akties alleen leiden tot oppervlakte-krachten $\vec{p}(\vec{x},t)$, aangrijpend op $\overline{A}$. Akties op afstand zullen resulteren in volumekrachten $\vec{q}(\vec{x},t)$, werkend op $\overline{V}$. Alleen in zeer bijzondere gevallen zijn deze aannamen aanvechtbaar.

Voor de totale resulterende kracht $\vec{K}(t)$ op deel $\overline{B}$ geldt:

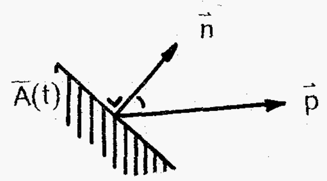
$$\vec{K}(t) = \int_{\overline{V}(t)} \rho\, \vec{q}\, d\overline{V} + \int_{\overline{A}(t)} \vec{p}\, d\overline{A} \tag{2.1.1}$$

Voor het totale resulterende moment $\vec{M}(t)$ ten opzichte van het vaste punt O geldt:

$$\vec{M}(t) = \int_{\overline{V}(t)} \rho\, (\vec{x} \times \vec{q})\, d\overline{V} + \int_{\overline{A}(t)} (\vec{x} \times \vec{p})\, d\overline{A} \tag{2.1.2}$$

De vector $\vec{p}$ wordt spanningsvector genoemd. In een willekeurig punt P op oppervlak $\overline{A}$ kan een spanningstensor σ worden gedefinieerd, die voldoet aan :

$$\vec{p} = \sigma \,.\, \vec{n} \tag{2.1.3}$$



Vector $\vec{n}$ is de eenheidsbuitennormaal op oppervlak $\overline{A}$ in punt P. Tensor σ wordt de Cauchy-spanningstensor genoemd en is een maat voor de ware spanning in punt P, dus de spanning met betrekking op het huidige oppervlak.

In de volgende drie paragrafen zullen de wetten van behoud van massa, impuls en impulsmoment worden geformuleerd. Deze wetten zullen worden gegeven in een globale vorm, m.b.t. het totale lichaam, en in een lokale vorm, geldend in elk punt P van dit lichaam.

2.2 Behoud van massa

Voor een willekeurig te kiezen deel $\bar{B}$ van lichaam B geldt dat de hoeveelheid massa konstant is. In paragraaf 1.2 is aangenomen dat er geen toe- of afname van de hoeveelheid materie zal plaatsvinden. Er moet dus gelden:

$$\int_{\bar{V}(t)} \rho(\vec{x},t)\, d\bar{V} = \int_{\bar{V}_0} \rho_0\, d\bar{V}_0 \qquad (2.2.1)$$

globale wet van behoud van massa

Met het gegeven, dat de volumeveranderingsfactor J (de determinant van de deformatie-tensor) gelijk is aan de verhouding van het volume in de huidige toestand en het volume in de referentie-toestand, kan de lokale vorm van (2.2.1) eenvoudig worden afgeleid:

$$\rho\, J = \rho_0 \qquad (2.2.2)$$

lokale wet van behoud van massa

In paragraaf 1.6 is geponeerd dat:

$$\dot{J} = J\, \mathrm{tr}\,(\mathbf{D}) \qquad (2.2.3)$$

Na differentiatie van relatie (2.2.2) naar de tijd en substitutie van (2.2.3) wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$\dot{\rho} + \rho\, \mathrm{tr}\,(\mathbf{D}) = 0 \qquad (2.2.4)$$

2.3 Behoud van impuls

De totale impuls van lichaam $\bar{B}$ is gelijk aan :

$$\vec{i}(t) = \int_{\bar{V}(t)} \rho \, \vec{v} \, d\bar{V} \tag{2.3.1}$$

De wet van behoud van impuls schrijft voor dat de resulterende kracht $\vec{K}(t)$ op $\bar{B}$ gelijk is aan de impulsverandering van het lichaam:

$$\vec{K}(t) = \frac{d\,\vec{i}(t)}{dt} = \int_{\bar{V}(t)} \rho \, \vec{q} \, d\bar{V} + \int_{\bar{A}(t)} \vec{p} \, d\bar{A} \tag{2.3.2}$$

globale wet van behoud van impuls

In bijlage B.4 is de volgende niet-triviale relatie afgeleid:

$$\frac{d\,\vec{i}(t)}{dt} = \int_{\bar{V}(t)} \rho \, \dot{\vec{v}} \, d\bar{V} \tag{2.3.3}$$

Ook wordt in deze bijlage afgeleid dat de totale resulterende kracht op $\bar{B}$ te schrijven is als :

$$\vec{K}(t) = \int_{\bar{V}(t)} (\rho \, \vec{q} + \vec{\nabla} \, . \, \sigma^c) \, d\bar{V} \tag{2.3.4}$$

Als (2.3.3) en (2.3.4) worden gesubstitueerd in (2.3.2) en wordt geëist dat deze relatie moet gelden voor elk willekeurig deel $\bar{B}$ van B dan volgt:

$$\vec{\nabla} \, . \, \sigma^c + \rho \, \vec{q} = \rho \, \dot{\vec{v}} \tag{2.3.5}$$

lokale wet van behoud van impuls

2.4 Behoud van impulsmoment

Het totale impulsmoment van lichaam $\overline{B}$ t.o.v. van een vast punt O is gelijk aan :

$$\vec{L}(t) = \int_{\overline{V}(t)} \vec{x} \times (\rho\, \vec{v})\, d\overline{V} \qquad (2.4.1)$$

Volgens de wet van behoud van impulsmoment is het resulterende moment $\vec{M}(t)$ op lichaam $\overline{B}$ gelijk aan de verandering van het impulsmoment:

$$\vec{M}(t) = \frac{d\,\vec{L}(t)}{dt} = \int_{\overline{V}(t)} \rho\, (\vec{x} \times \vec{q})\, d\overline{V} + \int_{\overline{A}(t)} \vec{x} \times \vec{p}\, d\overline{A} \qquad (2.4.2)$$

globale wet van behoud van impulsmoment

Na een vrij omvangrijke afleiding kan een zeer eenvoudige vorm voor de lokale wet van behoud van impulsmoment worden afgeleid: Deze wet zegt niets anders dan dat de Cauchy-spanningstensor in elk punt symmetrisch moet zijn:

$$\sigma = \sigma^{c} \qquad (2.4.3)$$

lokale wet van behoud van impulsmoment

3 De constitutieve vergelijking

3.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk zijn een drietal lokale behoudswetten geformuleerd, die in elk punt P van een deformerend lichaam moeten gelden.

wet van behoud van massa	: 1	vergelijking
wet van behoud van impuls	: 3	vergelijkingen
wet van behoud van impulsmoment	: 3	vergelijkingen

De wet van massabehoud is een scalaire vergelijking. De andere twee behoudswetten hebben een vectoriële aard en resulteren elk in drie vergelijkingen.

Wanneer de belangrijke aanname wordt gedaan, dat thermische grootheden geen rol spelen tijdens de deformatie, kunnen in elk punt P van lichaam B met label $\underset{\sim}{\xi}$ dertien onbekenden worden onderscheiden, te weten:

de dichtheid ρ	: in matrixrepresentatie 1 component
de positievector $\vec{x}$	: in matrixrepresentatie 3 componenten
de Cauchy-spanningstensor σ	: in matrixrepresentatie 9 componenten

Voor het beschrijven van een isotherme deformatie van een lichaam zijn dus zeven vergelijkingen voorhanden, terwijl dertien onbekenden kunnen worden onderscheiden. Wil men komen tot een oplosbaar stelsel vergelijkingen, dan zullen dus nog zes vergelijkingen moeten worden geformuleerd; de zogenaamde constitutieve vergelijkingen.

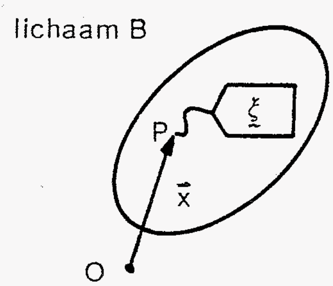
3.2 Algemene constitutieve principes

In deze paragraaf zullen een aantal constitutieve principes worden behandeld, waaraan de constitutieve relaties moeten voldoen.

Het principe van equipresentie *Zolang niet het tegendeel is bewezen, moeten alle afhankelijke variabelen afhangen van alle onafhankelijke variabelen.*

Zoals gebruikelijk wordt aangenomen, dat de positievector en de dichtheid onafhankelijke variabelen zijn en dat de Cauchy-spanningstensor van deze variabelen afhankelijk is.

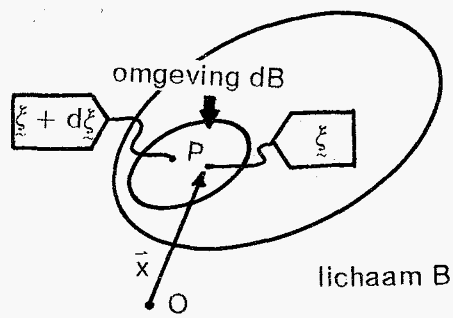
Het bepaaldheidsprincipe *De afhankelijke variabelen in een punt P met label $\underset{\sim}{\xi}$ in toestand t zijn een functie van de onafhankelijke variabelen in alle punten van het lichaam, gedurende de totale deformatie- en temperatuur-geschiedenis.*



Wanneer thermische grootheden geen rol spelen, volgt uit dit principe:

$$\sigma(\underset{\sim}{\xi}, t) = \mathbf{N}\{\rho(\underset{\sim}{\psi}, \tau), \vec{X}(\underset{\sim}{\psi}, \tau) \mid \forall \underset{\sim}{\psi} \in B, \tau \leq t\} \tag{3.2.1}$$

Het principe van lokale werking
De afhankelijke variabelen in een punt P met label ξ in toestand t zijn alleen een functie van de onafhankelijke variabelen in de directe omgeving van dit punt gedurende de totale deformatie- en temperatuur-geschiedenis.



Toepassing van dit principe op een isotherme deformatie levert:

$$\sigma(\underset{\sim}{\xi}, t) = \mathbf{N}\{\rho(\underset{\sim}{\psi} + d\underset{\sim}{\psi}, \tau), \vec{x}(\underset{\sim}{\psi} + d\underset{\sim}{\psi}, \tau), \mid \forall \underset{\sim}{\psi} + d\underset{\sim}{\psi} \in dB, \tau \leq t\}$$

De dichtheid en de positievector in punten in de nauwe omgeving van punt P van het lichaam worden bepaald door de deformatie-tensor **F** in dat punt. Het principe van lokale werking resulteert daarom in de volgende vereenvoudiging:

$$\sigma(\underset{\sim}{\xi}, t) = \mathbf{N}\{\vec{x}(\underset{\sim}{\xi}, \tau), \mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}, \tau) \mid \tau \leq t\} \qquad (3.2.2)$$

Het objectiviteitsprincipe
De constitutieve vergelijkingen van een materiaal zijn onafhankelijk van de plaats waarvan dit materiaal wordt waargenomen. De constitutieve relaties moeten dus onveranderd gelden na een extra starre translatie en/of rotatie van het lichaam.

Als starre translaties geen invloed mogen hebben op de constitutieve vergelijkingen mag de positievector $\vec{x}$ niet expliciet voorkomen in deze vergelijkingen:

$$\sigma(\underset{\sim}{\xi}, t) = \mathbf{N}\{\mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}, \tau) \mid \tau \leq t\} \qquad (3.2.3)$$

Wanneer het beschouwde lichaam een starre rotatie met rotatietensor **Q** ondergaat, gaat de deformatietensor **F** over in tensor $\mathbf{F}^*$ en de Cauchy-spanningstensor σ in tensor σ^* :

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \,.\, \mathbf{F}$$

$$\sigma^* = \mathbf{Q} \,.\, \sigma \,.\, \mathbf{Q}^c$$

Ook voor $\mathbf{F}^*$ en σ^* moet de constitutieve relatie (3.2.3) gelden :

$$\begin{aligned} \sigma^*(\underset{\sim}{\xi}\,, t) &= \mathbf{N}\{\, \mathbf{F}^*(\underset{\sim}{\xi}\,, \tau) \mid \tau \leq t\} \\ &= \mathbf{N}\{\, \mathbf{Q} \,.\, \mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}\,, \tau) \mid \tau \leq t\} \\ &= \mathbf{Q} \,.\, \sigma \,.\, \mathbf{Q}^c \end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

Na voorvermenigvuldiging met **Q** en navermenigvuldiging met $\mathbf{Q}^c$ van het linker- en rechterlid van relatie (3.2.2) volgt:

$$\mathbf{Q} \,.\, \sigma \,.\, \mathbf{Q}^c = \mathbf{Q} \,.\, \mathbf{N}\{\, \mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}\,, \tau) \mid \tau \leq t\} \,.\, \mathbf{Q}^c \qquad (3.2.5)$$

Vergelijken we relatie (3.2.4) met relatie (3.2.5) dan volgt daaruit de voorwaarde waaraan een constitutieve relatie moet voldoen, wil deze objectief zijn voor starre rotaties **Q** :

$$\mathbf{N}\{\, \mathbf{Q} \,.\, \mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}\,, \tau) \mid \tau \leq t\} = \mathbf{Q} \,.\, \mathbf{N}\{\, \mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}\,, \tau) \mid \tau \leq t\} \,.\, \mathbf{Q}^c \qquad (3.2.6)$$

<u>Het principe van de thermodynamische toelaatbaarheid</u>
Een proces is thermodynamisch toelaatbaar als voldaan wordt aan:
* *de behoudswetten*
* *de eerste hoofdwet van de thermodynamica (behoud van energie)*
* *de tweede hoofdwet van de thermodynamica (Clausius-Duhem-ongelijkheid)*

Omdat de aanname is gedaan, dat thermische grootheden geen rol spelen, is het principe van de thermodynamische toelaatbaarheid niet van wezenlijk belang. De eerste hoofdwet biedt echter de mogelijkheid om de specifieke inwendige energie te definiëren, waarvan gebruik kan worden gemaakt bij het afleiden van een constitutieve vergelijking voor elastisch materiaalgedrag.

3.3 De specifieke inwendige energie

De eerste hoofdwet van de thermodynamica kan als volgt worden geformuleerd:

$$\Pi_t + \Pi_e = \dot{U}_k + \dot{U}_i \tag{3.3.1}$$

De som van het toegevoerde thermische vermogen Π_t en het toegevoerde mechanische vermogen Π_e is gelijk aan de som van de momentane verandering van de kinetische energie U_k en de momentane verandering van de inwendige energie U_i

toegevoerd thermisch vermogen

Aangezien thermische grootheden geen rol spelen, mag het toegevoerd themisch vermogen gelijk aan nul worden gesteld.

toegevoerd mechanisch vemogen

Voor de resulterende externe kracht $\vec{K}(t)$ op lichaam B is in paragraaf 2.1 afgeleid:

$$\vec{K}(t) = \int_{V(t)} \rho\, \vec{q}\, dV + \int_{A(t)} \vec{p}\, dA = \int_{V(t)} (\rho\, \vec{q} + \vec{\nabla} \cdot \sigma^c)\, dV$$

Het vermogen, dat door deze kracht wordt geleverd is gelijk aan het toegevoerde mechanische vermogen $\Pi_e(t)$:

$$\Pi_e(t) = \int_{V(t)} (\rho\, \vec{q} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\sigma^c \cdot \vec{v}))\, dV \tag{3.3.2}$$

Met behulp van een aantal wiskundige bewerkingen kan (3.3.2) opnieuw worden geformuleerd:

$$\Pi_e(t) = \int_{V(t)} [(\rho\, \vec{q} + \vec{\nabla} \cdot \sigma^c) \cdot \vec{v} + \sigma : \mathbf{D}]\, dV \tag{3.3.3}$$

met: $\sigma : \mathbf{D} = \mathrm{tr}(\sigma \cdot \mathbf{D})$ (= trace of spoor van $\sigma \cdot \mathbf{D}$)

$\mathbf{D}$ = deformatie-snelheidstensor (zie paragraaf 1.6)

Volgens de lokale wet van behoud van impuls geldt:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma^c + \rho \vec{q} = \rho \dot{\vec{v}}$$

dus:

$$\Pi_e(t) = \int_{V(t)} [\rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \sigma : \mathbf{D}] \, dV \tag{3.3.4}$$

kinetische energie

De kinetische energie $U_k(t)$ van een lichaam kan worden berekend met de volgende formule:

$$U_k(t) = \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dV \tag{3.3.5}$$

Voor de tijdsafgeleide van de kinetische energie geldt:

$$\dot{U}_k(t) = \int_{V(t)} \rho \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \, dV \tag{3.3.6}$$

Deze vergelijking volgt niet vanzelfsprekend uit (3.3.5) maar wordt verkregen na een afleiding, analoog aan de afleiding die wordt gegeven in bijlage B.4

inwendige energie

Met behulp van de uitdrukking voor de tijdsafgeleide van de kinetische energie kan een nieuwe uitdrukking voor het toegevoerd mechanisch vermogen worden verkregen:

$$\Pi_e(t) = \dot{U}_k(t) + \int_{V(t)} \sigma : \mathbf{D} \, dV \tag{3.3.7}$$

Na substitutie van deze relatie in de eerste hoofdwet van de thermodynamica volgt voor de tijdsafgeleide van de inwendige energie:

$$\dot{U}_i(t) = \int_{V(t)} \sigma : \mathbf{D}\, dV = \int_{V_0} J\, \sigma : \mathbf{D}\, dV_0 \qquad (3.3.8)$$

Met deze formule kan de specifieke energie ϕ worden gedefinieerd:

$$\dot{U}_i(t) = \int_{V(t)} \rho \dot{\phi}\, dV = \int_{V_0} \rho_0\, \dot{\phi}\, dV_0 \qquad (3.3.9)$$

dus:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \sigma : \mathbf{D} \qquad (3.3.10)$$

3.4 Elastisch materiaalgedrag

Bij elastisch materiaalgedrag bezit het materiaal geen enkele geheugenwerking. In de constitutieve vergelijkingen voor elastisch materiaalgedrag mogen daarom alleen momentane grootheden voorkomen.
Vergelijking (3.2.3) gaat voor elastisch materiaal-gedrag dus over in:

$$\sigma(\underset{\sim}{\xi}\,,\mathrm{t}) = \mathbf{N}\{\,\mathbf{F}(\underset{\sim}{\xi}\,,\mathrm{t})\} \quad \text{of: } \sigma = \mathbf{N}\,\{\mathbf{F}\} \tag{3.4.1}$$

$$\text{onder voorwaarde:} \quad \mathbf{N}\,\{\mathbf{Q}\,.\,\mathbf{F}\} = \mathbf{Q}\,.\,\mathbf{N}\,\{\mathbf{F}\}\,.\,\mathbf{Q}^{c}$$

De specifieke inwendige energie voldoet volgens zijn definitie aan:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\rho}\,\sigma : \mathbf{D} \tag{3.4.2}$$

Omdat voor elastisch materiaalgedrag zowel de Cauchy-spanningstensor als de deformatie-snelheidstensor op tijdstip t worden bepaald door de deformatie-tensor **F** op dit tijdstip, mag worden gesteld dat de specifieke inwendige energie op tijdstip t ook volledig wordt bepaald door $\mathbf{F}(t)$. De specifieke energie is een objectieve grootheid. Als **Q** een starre rotatie-tensor voorstelt, moet dus gelden:

$$\phi\,(\mathbf{Q}\,.\,\mathbf{F}) = \phi\,(\mathbf{F}) \tag{3.4.3}$$

Wanneer wordt verondersteld dat de specifieke energie afhangt van de Green-Lagrange-rektensor $\mathbf{E}\,(=\frac{1}{2}\,(\,\mathbf{F}^{c}\,.\,\mathbf{F} - \mathbf{I}))$ wordt altijd aan deze objectiviteits-eis voldaan. Dus wordt aangenomen dat:

$$\phi = \phi\,(\mathbf{E}) \tag{3.4.4}$$

Voor het differentiëren van de specifieke inwendige energie naar de Green-Lagrange-rektensor geldt per definitie:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}} = \lim_{\Delta\mathbf{E}\to 0} \Delta\mathbf{E}^{-1}\,\{\,\phi(\mathbf{E}+\Delta\mathbf{E}) - \phi(\mathbf{E})\,\} \tag{3.4.5}$$

terwijl de definitie van de tijdsafgeleide van ϕ als volgt luidt:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\partial \phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \qquad (3.4.6)$$

Gelijkstelling van (3.4.2) met (3.4.6) levert:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{1}{\rho}\, \sigma : \mathbf{D} \qquad (3.4.7)$$

Voor de tijdsafgeleide $\dot{\mathbf{E}}$ is in paragraaf 1.6 gevonden:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{c} \,.\, \mathbf{D} \,.\, \mathbf{F} \qquad (3.4.8)$$

Voor het uitwerken van (3.4.7) worden de volgende rekenregels voor het dubbelinwendig produkt van tweede orde tensoren gebruikt:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) = \mathbf{B} : \mathbf{A} \qquad (3.4.9)$$
$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \,.\, \mathbf{C} = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} : \mathbf{C}$$

Substitutie van (3.4.8) in (3.4.7) en toepassing van bovenstaande rekenregels levert de volgende vergelijking

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\rho}\, \sigma : \mathbf{D} = (\mathbf{F} \,.\, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} \,.\, \mathbf{F}^{c}) : \mathbf{D} \qquad (3.4.10)$$

en met behulp van de lokale wet van massabehoud $J\rho = \rho_0$ volgt:

$$J\, \mathbf{F}^{-1} \,.\, \sigma \,.\, \mathbf{F}^{-c} = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} \qquad (3.4.11)$$

Het linkerlid van deze vergelijking wordt doorgaans de tweede Piola-Kirchhoff-spanningstensor $\mathbf{P}_2$ genoemd. Voor elastisch materiaalgedrag is nu de volgende constitutieve vergelijking afgeleid:

$$\mathbf{P}_2 = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} \qquad (3.4.12)$$

En omdat $\mathbf{E}$ gelijk is aan $\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ geldt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} \,.\, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} \quad ; \quad \mathbf{P}_2 = 2\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}} \qquad (3.4.13)$$

3.5 Isotroop elastisch materiaalgedrag

Een lichaam gedraagt zich isotroop wanneer in elk materieel punt van dit lichaam de materiaaleigenschappen onafhankelijk zijn van de richting waarin deze worden beschouwd.

Een rubber is een drie-dimensionaal netwerk van polymeer-moleculen. Daardoor is de aanname van isotropie voor rubbers vaak gerechtvaardigd.

Te bewijzen is dat de specifieke inwendige energie $\phi(\mathbf{C})$ voor elastisch materiaal onder de aanname van isotropie alleen afhankelijk mag zijn van de invarianten van $\mathbf{C}$:

$$\text{isotropie:} \quad \phi = \phi(J_1, J_2, J_3) \tag{3.5.1}$$

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{C}) &= \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}) \\ J_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2}\,\{ (\mathrm{tr}\,\mathbf{C})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^2) \} \\ J_3(\mathbf{C}) &= \det\,(\mathbf{C}) \end{aligned}$$

Analoog aan formule (3.4.6) geldt:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \tag{3.5.2}$$

Differentiatie naar de tijd van formule (3.5.1) levert:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial J_1}\,\dot{J}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial J_2}\,\dot{J}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial J_3}\,\dot{J}_3 \tag{3.5.3}$$

In bijlage B.6 wordt deze formule uitgewerkt. Daarbij wordt gebruik gemaakt van het Cayley-Hamilton-theorema, dat in bijlage B.5 is afgeleid. Het resultaat van deze uitwerking is de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial J_1}\,\frac{\partial J_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2}\,\frac{\partial J_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial J_3}\,\frac{\partial J_3}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial J_1}\,[\,\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}\,] + \frac{\partial \phi}{\partial J_2}\,[\,J_1\,\mathbf{I} - \mathbf{C}] : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \phi}{\partial J_3}\,[\,\mathbf{C}^2 - J_1\,\mathbf{C} + J_2\,\mathbf{I}\,] : \dot{\mathbf{C}} \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Vergelijking van (3.5.4) met (3.5.2) levert een uitdrukking voor de afgeleide van de specifieke inwendige energie naar de rechtse Cauchy-Green-rektensor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \phi}{\partial J_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} [\, J_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}] + \frac{\partial \phi}{\partial J_3} [\, \mathbf{C}^2 - J_1 \mathbf{C} + J_2 \mathbf{I} \,] \qquad (3.5.5)$$

Voor een isotroop elastische materiaal geldt voor de tweede Piola-Kirchhoff-spanningstensor uit de vorige paragraaf:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 = 2\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}} &= 2\rho_0 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial J_1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_1 + \frac{\partial \phi}{\partial J_3} J_2 \right\} \mathbf{I} \\ &+ 2\rho_0 \left\{ - \frac{\partial \phi}{\partial J_2} - \frac{\partial \phi}{\partial J_3} J_1 \right\} \mathbf{C} \\ &+ 2\rho_0 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial J_3} \right\} \mathbf{C}^2 \end{aligned} \qquad (3.5.6)$$

3.6 Incompressibel, isotroop elastisch materiaalgedrag

Voor een incompressibel materiaal geldt dat er geen sprake is van volume-verandering. De volume-veranderingsfactor J is dus gelijk aan 1.

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \det(\mathbf{F}) = 1 \tag{3.6.1}$$

Omdat de determinant van **C** gelijk is aan het kwadraat van de determinant van **F** geldt:

$$J_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = 1 \tag{3.6.2}$$

Daar de derde invariant van **C** konstant is, mag de specifieke inwendige energie ϕ alleen afhankelijk zijn van de eerste en tweede invariant van **C**:

$$\text{incompressibiliteit:} \qquad \phi = \phi(J_1, J_2) \tag{3.6.3}$$

$$J_1(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C})$$
$$J_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\,\{(\mathrm{tr}\,\mathbf{C})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^2)\}$$

Voor de tweede Piola-Kirchhoff-spanningstensor (formule 3.5.6) volgt dan:

$$\mathbf{P}_2 = 2\rho_0 \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial J_1} + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\, J_1 \right) \mathbf{I} - \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\, \mathbf{C} \right\} \tag{3.6.4}$$

De tweede Piola-Kirchhoff-spanningstensor is in paragraaf 3.4 gedefinieerd als:

$$\mathbf{P}_2 = J\,\mathbf{F}^{-1} \,.\, \sigma \,.\, \mathbf{F}^{-c}$$

Voor een incompressibel materiaal ($J = 1$) geldt de volgende relatie voor de Cauchy-spanningstensor:

$$\sigma = \frac{1}{J}\,\mathbf{F} \,.\, \mathbf{P}_2 \,.\, \mathbf{F}^c = \mathbf{F} \,.\, \mathbf{P}_2 \,.\, \mathbf{F}^c$$

$$= 2\rho_0 \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial J_1} + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\, J_1 \right) \mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c - \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\, \mathbf{F} \,.\, \mathbf{C} \,.\, \mathbf{F}^c \right\} \tag{3.6.5}$$

De rechtse Cauchy-Green-rektensor is gelijk aan $\mathbf{F}^c \,.\, \mathbf{F}$ Naast deze rechtse Cauchy-Green-rektensor kan een linkse Cauchy-Green-rektensor **B** worden gedefinieerd:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c \tag{3.6.6}$$

In bijlage B.7 is afgeleid, dat de drie invarianten van **B** en **C** identiek zijn, dus:

$$\sigma = 2\rho_0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial J_1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_1 \right) \mathbf{B} - \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \mathbf{B}^2 \right\} \tag{3.6.7}$$

$$J_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{B})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \{ (\mathrm{tr}\, \mathbf{C})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^2) \} = \frac{1}{2} \{ (\mathrm{tr}\, \mathbf{B})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{B}^2) \}$$

De Cauchy-spanningstensor σ kan worden gesplitst in een tweetal tensoren:

$$\sigma = \sigma^d + \sigma^h = \sigma^d - p\mathbf{I} \tag{3.6.8}$$

$\sigma^d = \sigma - \frac{1}{3} (\mathrm{tr}\, \sigma)\mathbf{I}$ = deviatorische deel van σ
$\sigma^h = -p\mathbf{I}$ = hydrostatisch deel van σ
p = hydrostatische druk

Voor compressibel elastisch materiaal is bekend dat het deviatorisch deel σ^d is gerelateerd aan de vormverandering van het beschouwde lichaam en dat het hydrostatisch deel σ^h is gerelateerd aan de volume-verandering.

In het geval van incompressibel materiaalgedrag kan de genoemde decompositie ook worden uitgevoerd. Het deviatorisch deel van de Cauchy-spanningstensor zal weer de vormverandering van het lichaam bepalen. De hydrostatische druk p zal nu echter als onbekende moeten worden beschouwd; In een incompressibel materiaal treedt als gevolg van een willekeurig te kiezen hydrostatische spanning geen volume-verandering op.

Het deviatorisch deel van σ luidt voor een incompressibel isotroop elastisch materiaal als volgt:

$$\sigma^d = \sigma - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\sigma)\,\mathbf{I}$$

$$= 2\rho_0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial J_1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_1 \right)\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{B})\,\mathbf{I}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial J_2}\left(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{B}^2)\,\mathbf{I}\right) \right\} \qquad (3.6.9)$$

Met behulp van de definities voor de eerste en tweede invariant van **B** kan deze vergelijking worden herschreven tot:

(3.6.10)

$$\sigma^d = 2\rho_0 \left\{ \left(-\frac{\partial \phi}{\partial J_2} \right) \mathbf{B}^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial J_1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_1 \right) \mathbf{B} + \left(-\frac{1}{3}\frac{\partial \phi}{\partial J_1} J_1 - \frac{2}{3}\frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_2 \right) \mathbf{I} \right\}$$

Voor incompressibel, isotroop elastisch materiaal is nu de volgende constitutieve relatie op te stellen:

(3.6.11)

incompressibel isotroop elastisch materiaalgedrag

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\rho_0 \left\{ \left(-\frac{\partial \phi}{\partial J_2} \right) \mathbf{B}^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial J_1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_1 \right) \mathbf{B} + \left(-\frac{1}{3}\frac{\partial \phi}{\partial J_1} J_1 - \frac{2}{3}\frac{\partial \phi}{\partial J_2} J_2 \right) \mathbf{I} \right\}$$

$$J_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{B})$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left\{ (\mathrm{tr}\,\mathbf{B})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{B}^2) \right\}$$

3.7 Enkele voorbeelden van incompressibel, isotroop elastisch materiaalgedrag

In de literatuur worden een groot aantal funkties voorgesteld, die de specifieke inwendige energie $\phi = \phi(J_1, J_2)$ voor incompressibel isotroop elastisch materiaal beschrijven. Naast enkele meer exotische funktievoorschriften blijken veel voorstellen een variant te zijn van de volgende algemene funktie:

$$\phi = \phi(J_1\,, J_2) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}\,(J_1 - 3)^i\,(J_2 - 3)^j \quad ; \; c_{00} = 0 \tag{3.7.1}$$

Voor dit funktievoorschrift geldt dat de specifieke inwendige energie gelijk aan nul is wanneer er geen deformatie plaatsvindt; dan is de linker Cauchy-Green-rektensor **B** immers gelijk aan de eenheids-tensor **I**, waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{I}) &= \mathrm{tr}\,(\mathbf{I}) = 3 \\ J_2(\mathbf{I}) &= \frac{1}{2}\,\{\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{I})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{I}^2)\,\} = 3 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Twee eenvoudige voorbeelden van (3.7.1) zijn geformuleerd door Treloar [5] en Mooney en Rivlin [6]. Een complexere variant is geïmplementeerd in het Eindige Elementen pakket MARC [7].

Het Neo-Hookean materiaalgedrag van Treloar

Treloar stelt de volgende funktie voor de specifieke inwendige energie voor:

$$\phi = c_{10}\,(J_1 - 3) \tag{3.7.3}$$

Dit funktievoorschrift resulteert in de volgende constitutieve relatie:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\,p\mathbf{I} + 2\,\rho_0\,\{\,c_{10}\,\mathbf{B} - \frac{1}{3}\,c_{10}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{B})\,\mathbf{I}\,\} \\ &= -\,p\mathbf{I} + 2\,C_1\,\{\,\mathbf{B} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{B})\,\mathbf{I}\,\} \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

Het Mooney-Rivlin materiaalgedrag

Ook het Mooney-Rivlin-materiaalgedrag is een variant van (3.7.1):

$$\phi = c_{10}(J_1 - 3) + c_{01}(J_2 - 3) \tag{3.7.5}$$

Substitutie van dit funktievoorschrift in de algemene formulering voor incompressibel, isotroop elastisch materiaalgedrag geeft:

$$\begin{aligned} \sigma &= - p\mathbf{I} + 2\rho_0 \{ \, (c_{10} + c_{01} \operatorname{tr}(\mathbf{B})) (\mathbf{B} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \mathbf{I}) - c_{01} (\mathbf{B}^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}^2) \mathbf{I}) \, \} \\ &= - p\mathbf{I} + 2 \{ \, (C_1 + C_2 \operatorname{tr}(\mathbf{B})) (\mathbf{B} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \mathbf{I}) - C_2 (\mathbf{B}^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}^2) \mathbf{I}) \, \} \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

Wanneer C_2 gelijk aan nul wordt gekozen, komt het Mooney-Rivlin materiaalgedrag overeen met het Neo-Hookean gedrag.

Het elastomeer-materiaalgedrag in MARC

In het Eindige Elementen pakket MARC [7,8,9] is een uitgebreidere variant van (3.7.1) geïmplementeerd: de zg. derde orde deformatie-formulering van Jamus, Green en Simpson. Voor de specifieke energie geldt dan:

$$\phi = c_{10}(J_1 - 3) + c_{01}(J_2 - 3) + c_{11}(J_1 - 3)(J_2 - 3) + c_{20}(J_1 - 3)^2 + c_{30}(J_1 - 3)^3 \tag{3.7.7}$$

Het Mooney-Rivlin materiaalgedrag volgt uit deze formulering door c_{11}, c_{20} en c_{30} gelijk aan nul te stellen. Is de coëfficiënt c_{01} ook gelijk aan nul dan wordt het Neo-Hookean gedrag verkregen.

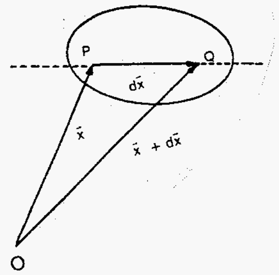
BIJLAGEN

Bijlage B.1: Gradiënt-operatoren

Gradiënt-operatoren geven een maat weer voor de verandering van grootheden in twee naburige punten op een bepaald tijdstip t.

<u>scalaire grootheden</u>

Een willekeurige scalaire grootheid wordt verondersteld afhankelijk te zijn van de positievector $\vec{x}$ en het tijdstip t. De punten P en Q zijn twee naburige punten van lichaam B, met respektievelijk de positievectoren $\vec{x}$ en $\vec{x} + d\vec{x}$ in toestand t.



Voor het verschil da van de scalaire grootheid in deze twee punten geldt:

$$da = a(\vec{x} + d\vec{x},t) - a(\vec{x},t) \qquad \text{(B.1.1)}$$

De gradiënt $\vec{\nabla}$ is gedefinieerd als een operator die, werkend op grootheid a, een vector $\vec{\nabla}a$ oplevert, zodanig dat het inwendig produkt van de vectoren $\vec{\nabla}a$ en $\vec{x}$ gelijk is aan het verschil da van de scalaire grootheid in de twee naburige punten. Dus:

$$a(\vec{x} + d\vec{x},t) - a(\vec{x},t) = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}a \quad ; \; \|d\vec{x}\| \rightarrow 0 \qquad \text{(B.1.2)}$$

Beschouwen we nu de scalaire grootheid a ten opzichte van de Cartesische basis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ dan geldt:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i \qquad \text{(B.1.3)}$$

$$d\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} dx_i\vec{e}_i \qquad \text{(B.1.4)}$$

en:

$$\vec{dx} \,.\, \vec{\nabla} a = da = a(x_1 + dx_1\,,\, x_2 + dx_2\,,\, x_3 + dx_3) - a(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} dx_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \tag{B.1.5}$$

$$= \vec{dx}_i \,.\, (\sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i})\, a$$

Voor de gradiënt-operator $\vec{\nabla}$ volgt dus:

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{B.1.6}$$

<u>vectorvelden</u>

Vervangen we de scalaire grootheid $a = a(\vec{x},t)$ door een vectorveld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x},t)$ dan kan analoog aan het voorafgaande weer gebruik worden gemaakt van een gradiënt-operator om het verschil $d\vec{a}$ te bepalen:

$$d\vec{a} = \vec{a}(\vec{x} + d\vec{x},t) - \vec{a}(\vec{x},t) = d\vec{x} \,.\, \vec{\nabla}\vec{a} \tag{B.1.7}$$

De gradiënt $\vec{\nabla}\vec{a}$ is een tweede orde tensor. Ten opzichte van een Cartesische basis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ geldt weer:

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{B.1.8}$$

Hoewel $\vec{\nabla}$ een operator is, kan deze vaak worden opgevat als een vector. Zo kan een inwendig produkt van $\vec{\nabla}$ en $\vec{a}$ worden gedefinieerd:

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{a} = \mathrm{div}(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{3} e_i \,.\, \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad ; \; a_i = \vec{a} \,.\, \vec{e}_i \tag{B.1.9}$$

Dit inwendige produkt wordt de divergentie van $\vec{a}$ genoemd.

Bijlage B.2: De volumeveranderingsfactor J

Alvorens in te gaan op de volumeveranderingsfactor J volgen eerst twee wiskundige stellingen:

de determinant van een tensor

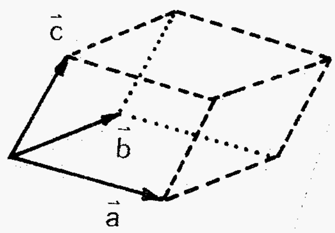
De determinant van een tensor is een zogenaamde invariant: de waarde van de determinant is onafhankelijk van het gekozen assenstelsel en wordt door de tensor zelf vastgelegd. Voor een willekeurige tensor **A** kan de determinant worden berekend met de volgende formule:

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} (\mathbf{A} \cdot \vec{a}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{b}) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{c}) \qquad \text{(B.2.1)}$$

waarbij $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ de gekozen basis voorstelt.

Inhoud van een parallellopipedum

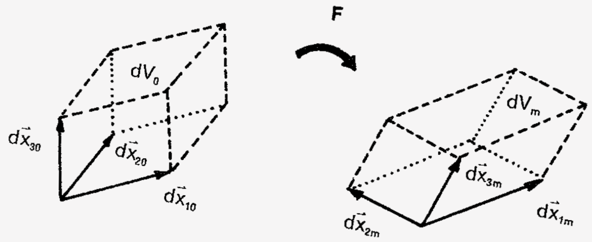
Een parallellopipedum wordt opgespannen door een set van drie onafhankelijke rechtsdraaiende vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.



Met behulp van de definities van het inwendig en uitwendig produkt kan worden afgeleid dat de inhoud van dit parallellopipedum gelijk is aan het zogenaamde tripelprodukt van $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

$$\text{Inhoud} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \qquad \text{(B.2.2)}$$

Beschouwen we nu een blokje materiaal dat in de referentie-configuratie wordt opgespannen door de vectoren $d\vec{x}_{10}$, $d\vec{x}_{20}$ en $d\vec{x}_{30}$.



In de momentane configuratie wordt dit blokje opgespannen door de vectoren $d\vec{x}_{1m}$, $d\vec{x}_{2m}$ en $d\vec{x}_{3m}$ met:

$$d\vec{x}_{im} = \mathbf{F} \cdot d\vec{x}_{i0} \qquad ; \; (i = 1,2,3) \tag{B.2.3}$$

Het volume van het blokje is in de referentie-toestand :

$$dV_0 = d\vec{x}_{10} \cdot d\vec{x}_{20} \times d\vec{x}_{30} \tag{B.2.4}$$

en in de momentane toestand:

$$dV_m = d\vec{x}_{1m} \cdot d\vec{x}_{2m} \times d\vec{x}_{3m} \tag{B.2.5}$$

Berekenen we de determinant van **F** t.o.v. de basis $\{d\vec{x}_{10}, d\vec{x}_{20}, d\vec{x}_{30}\}$ dan volgt:

$$\det(\mathbf{F}) = \frac{(\mathbf{F} \cdot d\vec{x}_{10}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{x}_{20}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{x}_{30})}{d\vec{x}_{10} \cdot d\vec{x}_{20} \times d\vec{x}_{30}} = \frac{dV_m}{dV_0} \tag{B.2.6}$$

De determinant van **F** kan dus worden beschouwd als de volume-veranderingsfactor J van de referentie-toestand naar de huidige toestand:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV_m}{dV_0} \tag{B.2.7}$$

Bijlage B.3: Gradiënt-operatoren t.o.v. de referentie-toestand en t.o.v. de huidige toestand

De deformatietensor **F** is gedefinieerd als:

$$d\vec{x}_m = \mathbf{F} \cdot d\vec{x}_0 = (\vec{\nabla}_0\vec{x}_m)^c \cdot d\vec{x}_0 = d\vec{x}_0 \cdot (\vec{\nabla}_0\vec{x}_m) \qquad \text{(B.3.1)}$$

waarin $\vec{\nabla}_0$ de gradiëntoperator t.o.v. de referentie-toestand voorstelt. T.o.v. de Cartesische basis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ is deze te schrijven als:

$$\vec{\nabla}_0 = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_{0i}} \qquad \text{(B.3.2)}$$

De gradiëntoperator t.o.v. de huidige toestand is dan:

$$\vec{\nabla}_m = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_{mi}} \quad ; \quad \vec{x}_m = \sum_{i=1}^{3} x_{mi}\vec{e}_i \qquad \text{(B.3.3)}$$

Uit (B.3.3) volgt eenvoudig dat:

$$\vec{\nabla}_m\vec{x}_m = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\vec{e}_i = \mathbf{I} \quad ; \; \mathbf{I} \text{ is de eenheidstensor} \qquad \text{(B.3.4)}$$

Voor $d\vec{x}_m$ mag worden geschreven:

$$\begin{aligned} d\vec{x}_m &= d\vec{x}_0 \cdot \vec{\nabla}_0\vec{x}_m = d\vec{x}_0 \cdot \vec{\nabla}_0\vec{x}_m \cdot \mathbf{I} = \\ &= d\vec{x}_0 \cdot \vec{\nabla}_0\vec{x}_m \cdot \vec{\nabla}_m\vec{x}_m \end{aligned} \qquad \text{(B.3.5)}$$

Vergelijken we uitdrukking (B.3.5) met (B.3.1) dan volgt:

$$\begin{aligned} d\vec{x}_0 \cdot \vec{\nabla}_0\vec{x}_m \cdot \vec{\nabla}_m\vec{x}_m = d\vec{x}_0 \cdot \vec{\nabla}_0\vec{x}_m \quad &\Leftrightarrow \\ \vec{\nabla}_0\vec{x}_m \cdot \vec{\nabla}_m = \vec{\nabla}_0 \quad &\Leftrightarrow \\ \vec{\nabla}_m = (\vec{\nabla}_0\vec{x}_m)^{-1} \cdot \vec{\nabla}_0 = \mathbf{F}^{-c} \cdot \vec{\nabla}_0 & \end{aligned} \qquad \text{(B.3.6)}$$

Voor de gradiëntoperatoren geldt dus:

$$\vec{\nabla}_m = \mathbf{F}^{-c} \cdot \vec{\nabla}_0 \quad \text{en} \quad \vec{\nabla}_0 = \mathbf{F}^{c} \cdot \vec{\nabla}_m \qquad \text{(B.3.6)}$$

Bijlage B.4: Afleiding van de lokale wet van behoud van impuls

De totale impuls van lichaam $\overline{B}$ wordt gegeven door:

$$\vec{i}(t) = \int_{\overline{V}(t)} \rho \, \vec{v} \, d\overline{V} \tag{B.4.1}$$

Voor de volumeveranderingsfactor J geldt:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{d\overline{V}}{d\overline{V}_0} \tag{B.4.2}$$

dus:

$$\vec{i}(t) = \int_{\overline{V}_0} \rho \, J \, \vec{v} \, d\overline{V}_0 \tag{B.4.3}$$

Differentiatie van deze relatie naar de tijd levert:

$$\frac{d\,\vec{i}(t)}{dt} = \int_{\overline{V}_0} (\dot{\rho}\, J + \rho \, \dot{J}) \, \vec{v} \, d\overline{V}_0 + \int_{\overline{V}_0} \rho \, J \, \dot{\vec{v}} \, d\overline{V}_0 \tag{B.4.4}$$

Toepassing van relatie $\dot{J} = J \, \mathrm{tr}(\mathbf{D})$ (zie 1.6.5) en van relatie (B.4.2) levert:

$$\frac{d\,\vec{i}(t)}{dt} = \int_{\overline{V}_0} J \, (\dot{\rho} + \rho \, \mathrm{tr}(\mathbf{D})\,) \, d\overline{V}_0 + \int_{\overline{V}(t)} \rho \, \dot{\vec{v}} \, d\overline{V} \tag{B.4.5}$$

Uit de lokale wet van behoud van massa is formule (2.2.4) afgeleid:

$$\dot{\rho} + \rho \, \mathrm{tr}(\mathbf{D}) = 0 \tag{2.2.4}$$

Dus geldt dat de eerste integraal in (B.4.5) gelijk aan nul is:

$$\frac{d\,\vec{i}(t)}{dt} = \int_{\overline{V}(t)} \rho \, \dot{\vec{v}} \, d\overline{V} \tag{B.4.6}$$

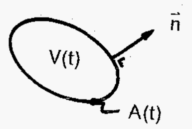
De globale wet van behoud van impuls kan nu als volgt worden geformuleerd:

$$\frac{d\,\vec{i}(t)}{dt} = \int_{\overline{V}(t)} \rho \, \dot{\vec{v}} \, d\overline{V} = \int_{\overline{V}(t)} \rho \, \vec{q} \, d\overline{V} + \int_{\overline{A}(t)} \vec{p} \, d\overline{A} \tag{B.4.7}$$

Met behulp van de divergentie-stelling van Gauss kan de oppervlakte-integraal in deze vergelijking worden omgewerkt tot een volume-integraal:

Divergentie-stelling van Gauss

Vector $\vec{n}$ is de eenheids-buitennormaal in een willekeurig punt op het oppervlak $A(t)$ van een lichaam. Het volume van dit lichaam is $V(t)$.



In ieder punt van het volume is in iedere toestand t een tweede orde tensor **A**, *een vector $\vec{a}$ en een scalar α gedefinieerd, evenals de gradiënt $\vec{\nabla}$. Dan geldt:*

$$\int_A \vec{n} \cdot \mathbf{A}\, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}\, dV$$

$$\int_A \vec{n} \cdot \vec{a}\, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a}\, dV$$

$$\int_A \vec{n}\alpha\, dA = \int_V \vec{\nabla}\alpha\, dV$$

De stelling van Gauss wordt als volgt toegepast op de oppervlakte- integraal:

$$\int_{\bar{A}(t)} \vec{p}\, d\bar{A} = \int_{\bar{A}(t)} \sigma \cdot \vec{n}\, d\bar{A} = \int_{\bar{A}(t)} \vec{n} \cdot \sigma^c\, d\bar{A} = \int_{\bar{V}(t)} \vec{\nabla} \cdot \sigma^c\, d\bar{V} \qquad \text{(B.4.9)}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de relatie $\vec{p} = \sigma \cdot \vec{n}$ (2.1.3). De lokale wet van behoud van impuls wordt nu uit (B.4.10) gevonden door te eisen dat voor elk willekeurig deelvolume $\bar{V}$ aan deze vergelijking moet worden voldaan. Dan volgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma^c + \rho\, \vec{q} = \rho\, \dot{\vec{v}} \qquad \text{(B.4.10)}$$

Bijlage B.5: De invarianten van een tweede orde tensor

Voor het eigenwaarde-probleem $\mathbf{A} \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a}$ bestaan niet-triviale oplossingen voor eigenvector $\vec{a}$ dan en alleen dan wanneer geldt dat de determinant van $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ gelijk aan nul is. De bijbehorende vergelijking wordt de karakteristieke vergelijking van tensor $\mathbf{A}$ genoemd:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad \text{(B.5.1)}$$

De oplossingen voor λ zijn de eigenwaarden van $\mathbf{A}$. De karakteristieke vergelijking kan worden uitgewerkt tot:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad \text{(B.5.2)}$$

De scalairen I_i $(i = 1,2,3)$ zijn de invarianten van tensor $\mathbf{A}$. Deze grootheden worden uitsluitend bepaald door de tensor en zijn onafhankelijk van het gekozen assenstelsel waarin de tensor wordt gerepresenteerd. De invariant I_1 wordt het spoor (trace) van $\mathbf{A}$ genoemd, terwijl de derde invariant doorgaans wordt aangeduid als de determinant van $\mathbf{A}$.

Ten opzichte van de cartesische basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kunnen de invarianten van $\mathbf{A}$ als volgt worden geformuleerd:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}^c \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \cdot \mathbf{A}^c \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \cdot \mathbf{A}^c \cdot \vec{e}_3 \qquad \text{(B.5.3)} \\ I_2 &= \vec{e}_1 \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_2) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_3) + \vec{e}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_3) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_1) + \vec{e}_3 \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_1) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_2) \\ I_3 &= \det(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_1) \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_2) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{e}_1) \end{aligned}$$

Voor de tweede en de derde invariant kan worden aangetoond dat:

$$I_2 = \frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\} \qquad \text{(B.5.4)}$$

$$I_3 = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{A}^3) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) + \frac{1}{6}\mathrm{tr}^3(\mathbf{A}) \qquad \text{(B.5.5)}$$

Verder geldt:

$$\mathrm{tr}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \beta\mathrm{tr}(\mathbf{B}) \qquad \text{(B.5.6)}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{I}) = 3 \qquad \text{(B.5.7)}$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \qquad \text{(B.5.8)}$$

Het dubbelinwendig produkt van twee tweede orde tensoren **A** en **B** is gedefinieerd als de determinant van het tensorprodukt van **A** en **B** :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) \,.\, \mathrm{tr}\,(\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{B}) \,.\, \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{B} : \mathbf{A} \qquad \text{(B.5.9)}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \,.\, \mathbf{C} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B})\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{C}) = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} : \mathbf{C} \qquad \text{(B.5.10)}$$

Het Cayley-Hamilton-theorema

Het Cayley-Hamilton-theorema zegt dat een tweede orde tensor voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking. Dit is als volgt aan te tonen:

Volgens (B.5.2) geldt:

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - \mathrm{I}_1\,\lambda^2 + \mathrm{I}_2\,\lambda - \mathrm{I}_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(\lambda^3 - \mathrm{I}_1\,\lambda^2 + \mathrm{I}_2\,\lambda - \mathrm{I}_3)\,\vec{a} = \vec{0} \;\; ; \;\; \vec{a} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \\ &\lambda^3\,\vec{a} - \mathrm{I}_1\,\lambda^2\,\vec{a} + \mathrm{I}_2\,\lambda\,\vec{a} - \mathrm{I}_3\,\vec{a} = \vec{0} \;\; ; \;\; \vec{a} \neq \vec{0} \end{aligned} \qquad \text{(B.5.11)}$$

Het beschouwde eigenwaarde probleem luidt: $\mathbf{A} \,.\, \vec{a} = \lambda\vec{a}$ (B.5.12)

dus:

$$\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{A} \,.\, \vec{a}) = \mathbf{A} \,.\, \lambda\,\vec{a} = \lambda\,\mathbf{A} \,.\, \vec{a} = \lambda^2\,\vec{a} \qquad \text{(B.5.13)}$$

$$\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{A} \,.\, \vec{a})) = \mathbf{A} \,.\, \lambda^2\,\vec{a} = \lambda^2\,\mathbf{A} \,.\, \vec{a} = \lambda^3\,\vec{a} \qquad \text{(B.5.14)}$$

Substitutie van (B.5.12) t/m (B.5.14) in (B.5.11) levert:

$$(\mathbf{A}^3 - \mathrm{I}_1\,\mathbf{A}^2 + \mathrm{I}_2\,\mathbf{A} - \mathrm{I}_3\,\mathbf{I}) \,.\, \vec{a} = \vec{0} \;\; ; \vec{a} \neq \vec{0} \qquad \text{(B.5.15)}$$

dus:

$$\mathbf{A}^3 - \mathrm{I}_1\,\mathbf{A}^2 + \mathrm{I}_2\,\mathbf{A} - \mathrm{I}_3\,\mathbf{I} = \mathbf{O} \qquad \text{(B.5.16)}$$

Waarmee het Cayley-Hamilton-theorema is aangetoond. Dit theorema is gebruikt voor het afleiden van relatie (B.5.5).

Bijlage B.6: Berekening van de afgeleide naar de tijd van de specifieke inwendige energie

De specifieke inwendige energie is voor isotroop elastisch materiaal op te vatten als een funktie van de drie invarianten van **C**:

$$\phi = \phi(J_1, J_2, J_3) \tag{B.6.1}$$

$$J_1(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C})$$
$$J_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\,\{\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{C})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^2)\,\}$$
$$J_3(\mathbf{C}) = \det\,(\mathbf{C})$$

Differentiatie van (B.6.1) naar de tijd met behulp van de kettingregel levert:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial J_1}\,\dot{J}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\,\dot{J}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial J_3}\,\dot{J}_3 \tag{B.6.2}$$

Vervolgens zullen de termen $\dot{J}_1$, $\dot{J}_2$ en $\dot{J}_3$ worden bepaald.

<u>Berekening van $\dot{J}_1$</u>

Volgens de definitie van het dubbelinwendig produkt geldt:

$$J_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}(\mathbf{I}\,.\,\mathbf{C}) = \mathbf{I} : \mathbf{C}$$

Differentiatie naar de tijd levert:

$$\dot{J}_1 = \dot{\mathbf{I}} : \mathbf{C} + \mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}$$

De tijdsafgeleide van de eenheidstensor is immers de nultensor.
Voor $\dot{J}_1$ is nu gevonden:

$$\dot{J}_1 = \mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}} \tag{B.6.3}$$

Berekening van $\dot{J}_2$

Voor de tweede invariant van **C** geldt:

$$J_2 = \frac{1}{2}\{\, tr^2(\mathbf{C}) - tr(\mathbf{C}^2)\} = \frac{1}{2}\{(\mathbf{I}:\mathbf{C})(\mathbf{I}:\mathbf{C}) - \mathbf{I}:\mathbf{C}^2\}$$

Met behulp van de rekenregel **A** : **B** . **C** = **A** . **B** : **C** volgt:

$$\mathbf{I}:\mathbf{C}^2 = \mathbf{I}:\mathbf{C}\,.\,\mathbf{C} = \mathbf{I}\,.\,\mathbf{C}:\mathbf{C} = \mathbf{C}:\mathbf{C}$$

dus:

$$J_2 = \frac{1}{2}\{(\mathbf{I}:\mathbf{C})(\mathbf{I}:\mathbf{C}) - \mathbf{C}:\mathbf{C}\}$$

en:

$$\begin{aligned}\dot{J}_2 &= \frac{1}{2}\{(\mathbf{I}:\dot{\mathbf{C}})(\mathbf{I}:\mathbf{C}) + (\mathbf{I}:\mathbf{C})(\mathbf{I}:\dot{\mathbf{C}}) - \mathbf{C}:\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{C}}:\mathbf{C}\}\\ &= (\mathbf{I}:\mathbf{C})(\mathbf{I}:\dot{\mathbf{C}}) - \mathbf{C}:\dot{\mathbf{C}} = (J_1\mathbf{I} - \mathbf{C}):\dot{\mathbf{C}}\end{aligned}$$

Voor $\dot{J}_2$ geldt dus:

$$\dot{J}_2 = (J_1\,\mathbf{I} - \mathbf{C}):\dot{\mathbf{C}} \tag{B.6.4}$$

Berekening van $\dot{J}_3$

In bijlage (B.5) is het Cayley-Hamilton-theorema afgeleid:

$$\mathbf{C}^3 - J_1\,\mathbf{C}^2 + J_2\,\mathbf{C} - J_3\,\mathbf{I} = \mathbf{O} \quad\Leftrightarrow\quad J_3\,\mathbf{I} = \mathbf{C}^3 - J_1\,\mathbf{C}^2 + J_2\,\mathbf{C}$$

Het spoor van het linker- en rechterlid van deze vergelijking luidt:

$$tr(J_3\,\mathbf{I}) = J_3\,tr\,\mathbf{I} = 3\,J_3 = tr(\mathbf{C}^3) - J_1\,tr(\mathbf{C}^2) + J_2\,tr(\mathbf{C})$$

Voor de derde invariant van **C** geldt dus:

$$\begin{aligned}J_3 &= \frac{1}{3}\,tr(\mathbf{C}^3) - \frac{1}{3}\,J_1\,tr(\mathbf{C}^2) + \frac{1}{3}\,J_2\,tr(\mathbf{C})\\ &= \frac{1}{3}\,tr(\mathbf{C}^3) - \frac{1}{3}\,tr(\mathbf{C})\,tr(\mathbf{C}^2) + \frac{1}{6}\,(tr\,\mathbf{C})^2\,tr(\mathbf{C}) - \frac{1}{6}\,(tr\,\mathbf{C}^2)\,tr(\mathbf{C})\\ &= \frac{1}{3}\,tr(\mathbf{C}^3) - \frac{1}{2}\,tr(\mathbf{C})\,tr(\mathbf{C}^2) + \frac{1}{6}\,(tr\,\mathbf{C})^3\end{aligned}$$

Bij het berekenen van $\dot{J}_2$ is aangetoond dat:

$$\mathbf{I} : \mathbf{C}^2 = \mathbf{C} : \mathbf{C}$$

evenzo geldt:

$$\mathbf{I} : \mathbf{C}^3 = \mathbf{C} : \mathbf{C}^2$$

Daarmee volgt voor J_3:

$$J_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{C} : \mathbf{C}^2) - \frac{1}{2}(\mathbf{I} : \mathbf{C})(\mathbf{C} : \mathbf{C}) + \frac{1}{6}(\mathbf{I} : \mathbf{C})^3$$

Differentiatie van J_3 naar de tijd geeft:

$$\begin{aligned}
\dot{J}_3 &= \frac{1}{3}\dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^2 + \frac{1}{3}\mathbf{C} : (\dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C} + \mathbf{C} : \dot{\mathbf{C}}) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}})(\mathbf{C} : \mathbf{C}) - \frac{1}{2}(\mathbf{I} : \mathbf{C})(\dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C} + \mathbf{C} : \dot{\mathbf{C}}) + \frac{1}{6}(3(\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}})(\mathbf{I} : \mathbf{C})^2) \\
&= \mathbf{C}^2 : \dot{\mathbf{C}} - (\mathbf{I} : \mathbf{C})(\mathbf{C} : \dot{\mathbf{C}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{I} : \mathbf{C})^2(\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{C} : \mathbf{C})(\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}) \\
&= [\,\mathbf{C}^2 - (\mathbf{I} : \mathbf{C})\,\mathbf{C} + \frac{1}{2}((\mathbf{I} : \mathbf{C})^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C})\,\mathbf{I}\,] : \dot{\mathbf{C}} \\
&= [\,\mathbf{C}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{C})\,\mathbf{C} + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2(\mathbf{C}) - \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2))\,\mathbf{I}] : \dot{\mathbf{C}} \\
&= [\,\mathbf{C}^2 - J_1\,\mathbf{C} + J_2\,\mathbf{I}\,] : \dot{\mathbf{C}}
\end{aligned}$$

Voor $\dot{J}_3$ geldt dus:

$$\dot{J}_3 = [\,\mathbf{C}^2 - J_1\,\mathbf{C} + J_2\,\mathbf{I}\,] : \dot{\mathbf{C}} \tag{B.6.5}$$

Substitutie van (B.6.3) t/m (B.6.5) in (B.6.2) levert tenslotte:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{\partial\phi}{\partial J_1}\dot{J}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\dot{J}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial J_3}\dot{J}_3 \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial J_1}[\,\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}\,] + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}[\,J_1\,\mathbf{I} - \mathbf{C}] : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial\phi}{\partial J_3}[\,\mathbf{C}^2 - J_1\,\mathbf{C} + J_2\,\mathbf{I}\,] : \dot{\mathbf{C}}
\end{aligned} \tag{B.6.6}$$

Bijlage B.7: De invarianten van de rechtse en linkse Cauchy-Green-rektensor

In deze bijlage zal worden bewezen, dat de invarianten van de linkse en rechtse Cauchy-Green-rektensor aan elkaar gelijk zijn.

linkse Cauchy-Green-rektensor $= \mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^c$ (B.7.1)

rechtse Cauchy-Green-rektensor $= \mathbf{C} = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{F}$ (B.7.2)

Eerste invariant

De eerste invariant van **C** is:

$$J_1(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^c \cdot \mathbf{F}) \tag{B.7.3}$$

Voor het inwendige produkt van twee tweede orde tensoren geldt:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} : \mathbf{A} \tag{B.7.4}$$

Dus volgt voor het spoor van **C**:

$$J_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^c \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^c : \mathbf{F} = \mathbf{F} : \mathbf{F}^c = \mathrm{tr}\,(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^c) \tag{B.7.5}$$

De eerste invariant van **B** (= tr ($\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^c$)) is dus gelijk aan de eerste invariant van **C**

Tweede invariant

De tweede invariant van **C** is gedefinieerd als:

$$J_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\{\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{C}) - \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2)\} \qquad \text{(B.7.6)}$$

Met behulp van (B.7.4) is deze uitdrukking te schrijven als:

$$J_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\{\,(\mathbf{F}^c : \mathbf{F})^2 - (\mathbf{F}^c \,.\, \mathbf{F}) : (\mathbf{F}^c \,.\, \mathbf{F})\,\} \qquad \text{(B.7.7)}$$

Voor willekeurige tweede orde tensoren **A**, **B** en **C**. geldt:

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} : \mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{B} \,.\, \mathbf{C} \qquad \text{(B.7.8)}$$

dus:

$$J_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\{\,(\mathbf{F}^c : \mathbf{F})^2 - \mathbf{F}^c : (\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c \,.\, \mathbf{F})\,\}$$

Toepassing van (B.7.4) en (B.7.8) levert:

$$\begin{aligned} J_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2}\{\,(\mathbf{F} : \mathbf{F}^c)^2 - (\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c \,.\, \mathbf{F}) : \mathbf{F}^c\,\} \\ &= \frac{1}{2}\{\,(\mathbf{F} : \mathbf{F}^c)^2 - (\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c) : (\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c)\,\} \\ &= \frac{1}{2}\{\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c) - \mathrm{tr}((\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^c)^2)\,\} \\ &= \frac{1}{2}\{\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{B}^2)\,\} \end{aligned} \qquad \text{(B.7.9)}$$

Deze laatste uitdrukking is gelijk aan de tweede invariant van **B**.

Derde invariant

Voor de derde invariant geldt:

$$J_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^c . \mathbf{F}) \qquad (B.7.10)$$

Voor twee willekeurige tweede orde tensoren is de volgende vergelijking van toepassing.

$$\det(\mathbf{A} . \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B} . \mathbf{A}) \qquad (B.7.11)$$

dus: $\det(\mathbf{F}^c . \mathbf{F}) = \det(\mathbf{F} . \mathbf{F}^c) = \det(\mathbf{B}) = J_3(\mathbf{B})$

De drie invarianten van **B** en **C** zijn dus identiek.

APPENDIX A

TENSOREN

1. Het begrip tensor

Voor de beschrijving van fysische processen wordt frequent gebruik gemaakt van scalairen, vectoren en lineaire afbeeldingen. Deze grootheden worden ook wel aangeduid met respektievelijk nulde, eerste en tweede orde tensoren.

<u>scalairen (notatie: a)</u>
worden volledig bepaald door slechts één getal
(bijvoorbeeld de massa van een lichaam)

<u>vectoren (notatie: $\vec{a}$)</u>
bezitten een grootte, een richting en een zin
(bijvoorbeeld de verplaatsing of de snelheid)

<u>lineaire afbeeldingen (notatie: $\mathbf{A}$)</u>
beelden een vector af op een andere vector
(bijvoorbeeld een spiegeling)

In de driedimensionale (Euclidische) ruimte kan een of andere referentie worden gekozen; een zogenaamde basis.

* Een scalar wordt dan vastgelegd door de numerieke waarde in een bepaald eenhedenstelsel (bijvoorbeeld het aantal kilogrammen)

* Een vector wordt vastgelegd door een kolom van drie getallen, die de componenten van de vector t.o.v. de basis voorstellen (bijvoorbeeld de snelheid in x-, y- en z-richting)

* Een lineaire afbeelding wordt t.o.v. de basis vastgelegd door een matrix met 9 componenten

2. Vectoren

2.1 Enige bewerkingen met vectoren

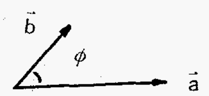
Een vector wordt gekarakteriseerd door zijn lengte, richting en zin. De lengte van een willekeurige vector $\vec{a}$ wordt weergegeven met $\|\vec{a}\|$. Is deze lengte gelijk aan 0 of 1, dan wordt gesproken van respectievelijk een nulvector $(\vec{0})$ of een eenheidsvector $(\vec{e})$

Naast de bekend veronderstelde sommatie van twee vectoren en de vermenigvuldiging van een vector met een scalar bestaan nog een aantal veel gebruikte bewerkingen met vectoren

<u>a) het inwendig produkt van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$</u>

Voor het inwendig produkt van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, die onderling een hoek ϕ maken, geldt:

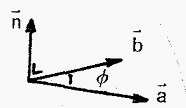
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\phi \qquad \text{(A.1)}$$



<u>b) het uitwendig produkt van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$</u>

Voor het uitwendig produkt van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, die onderling een hoek ϕ maken, geldt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin\phi\} \, \vec{n} \qquad \text{(A.2)}$$

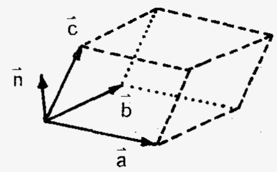


Vector $\vec{n}$ is de eenheidsvector, die loodrecht staat op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$. De zin van $\vec{n}$ wordt bepaald met de 'rechtse schroef-regel'. Het stelsel vectoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ wordt daarom rechtsdraaiend genoemd. In tegenstelling tot het inwendige produkt is het uitwendige produkt van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ weer een vector en géén scalar.

c) het tripel-produkt van drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$

Het tripel-produkt van $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ is een reëel getal, dat wordt berekend door het inwendige produkt van enerzijds het uitwendige produkt van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en anderzijds de vector $\vec{c}$ te nemen:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \ \sin\phi\} (\vec{n} \cdot \vec{c}) \qquad \text{(A.3)}$$



Het tripelprodukt van een rechtsdraaiende basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ blijkt gelijk te zijn aan het volume V van het parallellopipedum, dat wordt opgespannen door $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

d) het tensor- (of dyadisch) produkten van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Het dyadisch produkt $\vec{a}\vec{b}$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is een lineaire afbeelding (een tweede orde tensor). Wordt deze afbeelding uitgevoerd op vector $\vec{c}$ dan resulteert een vector $\vec{v}$ volgens:

$$\vec{v} = (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a} \qquad \text{(A.4)}$$

Het resultaat van deze bewerking op $\vec{c}$ is dus een vector in de richting van vector $\vec{a}$ en met een lengte, die gelijk is aan het inprodukt van $\vec{b}$ en $\vec{c}$, vermenigvuldigd met de lengte van $\vec{a}$.

De geconjugeerde van het dyadisch produkt $\vec{a}\vec{b}$ is gedefinieerd als:

$$(\vec{a}\vec{b})^c = \vec{b}\vec{a} \qquad \text{(A.5)}$$

Rekenregels

De volgende tabel bevat een aantal rekenregels voor de vier behandelde produkten. Voor de mathematische achtergronden van deze regels wordt verwezen naar [1].

inwendig produkt:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a} \tag{A.6}$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0 \tag{A.7}$$

$$(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b})\,.\,\vec{c} = \alpha\,(\vec{a}\,.\,\vec{c}) + \beta\,(\vec{b}\,.\,\vec{c}) \tag{A.8}$$

$$\text{als: } \vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{0} \quad \text{dan staat } \vec{a} \text{ loodrecht op } \vec{b} \tag{A.9}$$

uitwendig produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a} \tag{A.10}$$

$$(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}) \times \vec{c} = \alpha\,(\vec{a} \times \vec{c}) + \beta\,(\vec{b} \times \vec{c}) \tag{A.11}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\,.\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\,.\,\vec{b})\vec{c} \tag{A.12}$$

dyadisch produkt:

$$\vec{a}\vec{b}\,.\,\vec{c} = (\vec{b}\,.\,\vec{c})\vec{a} \;\neq\; \vec{b}\vec{a}\,.\,\vec{c} = (\vec{a}\,.\,\vec{c})\vec{b} \tag{A.13}$$

$$(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b})\vec{c} = \alpha\,\vec{a}\vec{c} + \beta\,\vec{b}\vec{c} \tag{A.14}$$

tripel-produkt:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})\,.\,\vec{c} &= -\,\vec{b} \times \vec{a}\,.\,\vec{c} = \vec{a}\,.\,(\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= -\,\vec{a}\,.\,(\vec{c} \times \vec{b}) = -\,(\vec{a} \times \vec{c})\,.\,\vec{b}\end{aligned} \tag{A.15}$$

2.2 Representatie van een vector t.o.v. een basis

Drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ worden lineair onafhankelijk genoemd als aan de vergelijking:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

alleen kan worden voldaan wanneer geldt dat α, β en γ gelijk zijn aan nul. De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ liggen dan niet in hetzelfde vlak. In een drie-dimensionale ruimte kan elke willekeurige vector worden beschouwd als een lineaire combinatie van een willekeurig drietal onafhankelijke vectoren. Daarom kan zo'n drietal worden opgevat als een basis van de drie-dimensionale ruimte.
Vaak worden eenheidsvectoren gekozen als basisvectoren. Wanneer deze ook nog onderling loodrecht en rechtsdraaiend zijn, wordt gesproken van een Cartesisch *assenstelsel* of een *orthonormale basis*. Een orthonormale basis zal worden weergegeven met $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Voor een orthonormale basis geldt:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 & \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 & \text{als } i \neq j \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1 & \text{als } i = j \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 & & \end{array} \qquad \text{(A.16)}$$

Voor een willekeurige vector $\vec{a}$ geldt t.o.v. de basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{\vec{e}} = \underset{\sim}{\vec{e}}^T \underset{\sim}{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i \qquad \text{(A.17)}$$

$$\underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$: een kolom met drie scalairen

$$\underset{\sim}{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$: een rij met drie scalairen

$$\underset{\sim}{\vec{e}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$: een kolom met drie vectoren

$$\underset{\sim}{\vec{e}}^T = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3]$$: een rij met drie vectoren

Voor het inwendig produkt van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ t.o.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ geldt:

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\right) . \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j\right)$$

Met behulp van (A.16) kan worden afgeleid dat:

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{a} \qquad \text{(A.18)}$$

Het dyadisch produkt $\vec{a}\vec{b}$ is te schrijven als:

$$\vec{a}\vec{b} = [\ \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\ ][\ \sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j\ ] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (a_i b_j\, \vec{e}_i \vec{e}_j) \qquad \text{(A.19)}$$

Uit deze relatie volgt de belangrijke conclusie dat een willekeurig tensorprodukt kan worden beschouwd als een lineaire combinatie van een negental dyadische produkten $\vec{e}_i\vec{e}_j$ $(i,j = 1,2,3)$ van de basisvectoren.

3. Tweede orde tensoren

3.1 Definities en rekenregels

Tweede orde tensoren zijn lineaire afbeeldingen, die aan een willekeurige vector een nieuwe vector toevoegen. Zij worden aangegeven met een vette hoofdletter. Voor elke tweede orde tensor geldt voor alle $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en voor alle scalairen α en β:

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \vec{a}) + \beta(\mathbf{A} \cdot \vec{b}) \qquad \text{(A.20)}$$

De tweede orde eenheidstensor **I** en de tweede orde nultensor **O** zijn als volgt gedefinieerd:

$$\mathbf{I} \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad \text{voor alle } \vec{a} \qquad \text{(A.21)}$$

$$\mathbf{O} \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad \text{voor alle } \vec{a} \qquad \text{(A.22)}$$

De geconjugeerde $\mathbf{A}^c$ van tensor **A** is een tweede orde tensor, die volgt uit:

$$\vec{b} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\mathbf{A}^c \cdot \vec{b}) \quad \text{voor alle } \vec{a}, \vec{b} \qquad \text{(A.23)}$$

Een tweede orde tensor wordt:
- symmetrisch genoemd als $\mathbf{A} = \mathbf{A}^c$ en
- scheefsymmetrisch genoemd als $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^c$

Elke tweede orde tensor **A** kan worden gesplitst in een symmetrisch en een scheefsymmetrisch deel:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^c) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^c) \qquad \text{(A.24)}$$

$$\mathbf{A}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^c) = \text{ symmetrische deel van } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^z = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^c) = \text{ scheefsymmetrische deel van } \mathbf{A}$$

De inverse $\mathbf{A}^{-1}$ van tensor $\mathbf{A}$ voldoet per definitie aan de volgende vergelijking:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad \text{(A.25)}$$

Een tweede orde tensor is :

- positief definiet als : $\vec{a} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{a}) > 0$ voor alle $\vec{a} \neq \vec{0}$ (A.26)
- semi-positief definiet als : $\vec{a} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{a}) \geq 0$ voor alle $\vec{a}$ (A.27)
- orthogonaal als : $(\mathbf{A} \cdot \vec{a}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ voor alle $\vec{a}$, $\vec{b}$ (A.28)
  of: $\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{A}^c = \mathbf{A}^{-1}$

Het produkt van een tweede orde tensor met een dyadisch produkt is weer een dyadisch produkt:

$$\mathbf{A} \cdot (\vec{a}\vec{b}) = (\mathbf{A} \cdot \vec{a})\vec{b} \qquad \text{(A.29)}$$

$$(\vec{a}\vec{b}) \cdot \mathbf{A} = \vec{a}(\mathbf{A}^c \cdot \vec{b}) \qquad \text{(A.30)}$$

Ten opzichte van een rechtsdraaiende orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ is elke tweede orde tensor uit te drukken als:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad \text{(A.31)}$$

waarbij A_{ij} de componenten van de matrix-representatie van $\mathbf{A}$ voorstellen.

Voor de eenheidstensor $\mathbf{I}$ geldt: $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\vec{e}_i$ (A.32)

Rekenregels

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,.\,\vec{a} = \mathbf{A}\,.\,\vec{a}+\mathbf{B}\,.\,\vec{a} \tag{A.33}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{A.34}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \tag{A.35}$$

$$(\alpha\mathbf{A})\,.\,\vec{a} = \alpha(\mathbf{A}\,.\,\vec{a}) \tag{A.36}$$

$$(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})\,.\,\vec{a} = \mathbf{A}\,.\,(\mathbf{B}\,.\,\vec{a}) \tag{A.37}$$

$$\alpha(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\,.\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,.\,(\alpha\mathbf{B}) \tag{A.38}$$

$$\mathbf{A}\,.\,(\mathbf{B}\,.\,\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})\,.\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}\,.\,\mathbf{C} \tag{A.39}$$

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{I} = \mathbf{I}\,.\,\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{A.40}$$

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A} \tag{A.41}$$

$$(\mathbf{A}^c)^c = \mathbf{A} \tag{A.42}$$

$$(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})^c = \mathbf{B}^c\,.\,\mathbf{A}^c \tag{A.43}$$

$$(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})^c = \alpha\mathbf{A}^c+\beta\mathbf{B}^c \tag{A.44}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \tag{A.45}$$

$$(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,.\,\mathbf{A}^{-1} \tag{A.46}$$

3.2 Invarianten van een tweede orde tensor

Stel: $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ is een basis van de drie-dimensionale ruimte, terwijl **A** een willekeurige tweede orde tensor is. Dan zijn er een drietal grootheden te formuleren, die alleen afhankelijk zijn van de tensor en niet van de gekozen basis: Deze grootheden worden de invarianten van de tensor genoemd.

$$J_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 \times \vec{c}_3} \left[\vec{c}_1 \cdot \mathbf{A}^c \cdot (\vec{c}_2 \times \vec{c}_3) + \vec{c}_2 \cdot \mathbf{A}^c \cdot (\vec{c}_3 \times \vec{c}_1) + \vec{c}_3 \cdot \mathbf{A}^c \cdot (\vec{c}_1 \times \vec{c}_2)\right] \quad (A.47)$$

$$J_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 \times \vec{c}_3} \left[\vec{c}_1 \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_2) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_3) + \vec{c}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_3) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_1) + \vec{c}_3 \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_1) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_2)\right] \quad (A.48)$$

$$J_3(\mathbf{A}) = \frac{1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 \times \vec{c}_3} \left[(\mathbf{A} \cdot \vec{c}_1) \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_2) \times (\mathbf{A} \cdot \vec{c}_3)\right] \quad (A.49)$$

De eerste invariant wordt het spoor (trace) van **A** genoemd:

$$J_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) \quad (A.50)$$

De derde invariant wordt de determinant van **A** genoemd:

$$J_3(\mathbf{A}) = \det\,(\mathbf{A}) \quad (A.51)$$

Er geldt:

$$J_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^c) \quad (A.52)$$

$$\mathrm{tr}\,(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) + \beta\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{B}) \quad (A.53)$$

$$J_2(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^2 J_2(\mathbf{A}) \quad (A.54)$$

$$J_2(\mathbf{I}) = 3 \quad (A.55)$$

$$J_3(\alpha\mathbf{A}) = \det\,(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^3 J_3(\mathbf{A}) \quad (A.56)$$

$$J_3(\mathbf{I}) = \det\,(\mathbf{I}) = 1 \quad (A.57)$$

$$J_3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det\,(\mathbf{A})\,\det(\mathbf{B}) \quad (A.58)$$

$$\det\,(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det\,(\mathbf{A})} \quad (A.59)$$

Op basis van de eerste invariant van een tweede orde tensor kan het deviatorisch deel van een tensor en het dubbelinwendig produkt van twee tweede orde tensoren worden gedefinieerd:

Het deviatorisch deel van een tensor volgt uit:

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{A} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A})\,\mathbf{I} = \mathbf{A} - \frac{1}{3}\,J_1(\mathbf{A})\,\mathbf{I} \qquad (A.60)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^d = \mathbf{A}^d + \mathbf{B}^d \qquad (A.61)$$

$$(\alpha\mathbf{A})^d = \alpha(\mathbf{A}^d) \qquad (A.62)$$

$$J_1(\mathbf{A}^d) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^d) = 0 \qquad (A.63)$$

Het dubbelinwendig produkt van twee tensoren is als volgt gedefinieerd:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) \qquad (A.64)$$

rekenregels:

$$\mathbf{A}^c : \mathbf{B}^c = \mathbf{B} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{B} \qquad (A.65)$$

$$\mathbf{A} : (\beta\mathbf{B} + \gamma\mathbf{C}) = \beta\mathbf{A} : \mathbf{B} + \gamma\mathbf{A} : \mathbf{C} \qquad (A.66)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{I} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) \qquad (A.67)$$

$\mathbf{A} : \mathbf{B} = 0$ - als **A** symmetrisch en **B** scheefsymmetrisch is (A.68)
- als **A** scheefsymmetrisch en **B** symmetrisch is

Tenslotte wordt opgemerkt dat voor een orthogonale tensor **A** (waarvoor geldt dat: $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{A}^c = \mathbf{I}$) de determinant gelijk is aan +1 of -1. Als de determinant van **A** gelijk is aan +1 stelt **A** een rotatietensor voor. Is de determinant -1 dan is **A** een spiegelingstensor.

3.3 Eigenwaarden en eigenvectoren van een tweede orde tensor

De vergelijking $\mathbf{A} \cdot \vec{a} = \vec{0}$ heeft oplossingen voor $\vec{a}$ ongelijk aan de nulvector wanneer geldt dat de determinant van $\mathbf{A}$ gelijk aan nul is.

- als $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ wordt $\mathbf{A}$ regulier of inverteerbaar genoemd
- als $\det(\mathbf{A}) = 0$ wordt $\mathbf{A}$ singulier genoemd

Alleen voor reguliere tensoren bestaat een (eenduidige) inverse tensor.

Een (complexe) vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ wordt eigenvector van $\mathbf{A}$ genoemd als er een (complexe) eigenwaarde λ bestaat, zodanig dat:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \vec{n} = \vec{0} \tag{A.69}$$

Zoals hierboven is genoemd, bestaan er alleen oplossingen $\vec{n} \neq \vec{0}$ als:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{A.70}$$

Deze vergelijking wordt de karakteristieke vergelijking van $\mathbf{A}$ genoemd en kan worden omgewerkt tot:

$$\lambda^3 - J_1(\mathbf{A})\,\lambda^2 + J_2(\mathbf{A})\,\lambda - J_3(\mathbf{A}) = 0 \tag{A.71}$$

De drie oplossingen λ_1, λ_2 en λ_3 zijn òf drie reële wortels òf één reële en twee toegevoegd complexe wortels.

Voor de drie invarianten van $\mathbf{A}$ blijkt te gelden:

$$J_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{A.72}$$
$$J_2(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \tag{A.73}$$
$$J_3(\mathbf{A}) = \det\,(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{A.74}$$

De lengte van de eigenvectoren is in principe onbepaald. Het is echter gebruikelijk deze te normeren tot eenheids-vectoren

3.4 Symmetrische en scheefsymmetrische tensoren

Symmetrische tensoren $\mathbf{A}^c = \mathbf{A}$

De eigenwaarden van een symmetrische tensor zijn reëel.
De bijbehorende eigenvectoren zijn reëel en zijn onderling
- loodrecht als alle eigenwaarden verschillend zijn
- onafhankelijk als 2 of 3 eigenwaarden gelijk zijn en kunnen dan onderling loodrecht worden gekozen

Iedere symmetrische tensor $\mathbf{A} = \mathbf{A}^c$ kan worden weergegeven in een zogenaamde spectrale representatie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^c = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \vec{n}_i \vec{n}_i \qquad \text{(A.75)}$$

met: $\vec{n}_i$: eenheidseigenvector van $\mathbf{A}$
λ_i : bijbehorende eigenwaarde

De inverse van een symmetrische tensor is te berekenen met:

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} \, \vec{n}_i \vec{n}_i \qquad \text{(A.76)}$$

Scheefsymmetrische tensoren $\mathbf{A}^c = -\mathbf{A}$

Iedere scheefsymmetrische tensor heeft minstens één eigenwaarde gelijk aan nul. Bij iedere scheefsymmetrische tensor $\mathbf{A}$ bestaat een zogenaamde axiaalvector $\vec{\omega}$, die voldoet aan:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \text{voor alle } \vec{v} \qquad \text{(A.77)}$$

Voor $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^c$ geldt:

$$J_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) = 0 \qquad \text{(A.78)}$$

$$J_2(\mathbf{A}) = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \qquad \text{(A.79)}$$

$$J_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = 0 \qquad \text{(A.80)}$$