Opmerking over de berekening van trillingssystemen die "rubberdemping" bezitten

WF-59/1

OPMERKING OVER DE BEREKENING VAN TRILLINGSSYSTEMEN DIE "RUBBERDEMPING" BEZITTEN.

1. INLEIDING.

De vrije trilling van een lineair trillingssysteem met 1 graad van vrijheid kan, zoals bekend, worden beschreven door de vergelijking:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \qquad (1)$$

waarin m de massa van het systeem is, k de stijfheid van de veer en c de dempingscoëfficiënt; m, k en c zijn constanten.

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

is de eigen(hoek)frequentie van het ongedempte systeem.
De bijzondere waarde

$$c = 2\,m\,\omega_e = 2\sqrt{km} = 2\frac{k}{\omega_e} \qquad (2)$$

wordt per definitie genoemd de kritische demping c_c. Het systeem volvoert bij deze waarde van de demping een z.g. aperiodieke vrije beweging. Het is de grenstoestand tussen een gedempte trilling en een "kruipen" naar de evenwichtsstand.

Voor ingewikkelder gevallen met meerdere graden van vrijheid, b.v. torsietrillingen van motoren, kan men eveneens bewegingsvergelijkingen opstellen en hiervan oplossingen bepalen.

Prof. Seyffardt bracht het volgende probleem naar voren:
Hij beschouwt het geval van gedwongen torsietrillingen in een motor; in de trillingsdemper, die gekoppeld is aan de motor, is het materiaal rubber gekozen als elastisch en dempend element. Hij merkt op, dat voor rubber wordt opgegeven $\frac{c}{c_c}$ = constant ($\frac{c}{c_c} \approx 0{,}05$) (3)

De vraag luidde: Wat moet bij een dergelijk ingewikkeld systeem genomen worden voor c_c ten einde te komen tot een voor het systeem correcte waarde van c?

2. RUBBER ALS ELASTISCH EN DEMPEND ELEMENT.

Wanneer wij dit probleem onder ogen zien, dan dringt zich de vraag op, wat de fysische betekenis is van de opgave $\frac{c}{c_c}$ = constant voor rubber.

Eigenschappen van rubber zijn o.a. onderzocht door C.W. Kosten.1) Zijn conclusie inzake het verband tussen een harmonische belasting op een rubber element en de daardoor veroorzaakte harmonische verplaatsing van het aangrijpingspunt van de belasting komt op het volgende neer:
Noem de belasting van het rubberelement $Pe^{i\omega t}$ (we zullen de complexe rekenwijze gebruiken evenals dit in de electrotechniek gebruikelijk is; willen we op een zeker tijdstip de fysische grootheid weten, dan moeten we van de complexe grootheid het reële deel nemen.)
Noem de verplaatsing $xe^{i\omega t}$.
Uit proeven volgt:

1) $$P = (\, k + i\omega c \,)x \qquad (4)$$
2) de stijfheid k is constant
3) $\frac{\omega c}{k}$, de tangens van de fasehoek δ tussen belasting en verplaatsing,

1) C.W. Kosten : "Over de elastische eigenschappen van gevulcaniseerde rubber." Diss. Delft 1942.

is in een groot frequentiegebied eveneens praktisch constant.

Men merke op, dat c niet constant is, maar met name afhankelijk is van ω.

De grootte van de genoemde fasehoek, verlieshoek genaamd, is rond 6° (afhankelijk van de rubber). Er geldt dus:

$$\delta \approx \frac{\omega c}{k} = \text{constant} \approx \frac{6}{180} \cdot \pi \approx 0{,}1 \qquad (5)$$

We zullen trachten deze uitspraak in verband te brengen met de formules (2) en (3).
We beschouwen daartoe een harmonisch aangestoten systeem, dat analoog is aan het onder 1. genoemde trillingssysteem. Elasticiteit en demping zullen worden verzorgd door rubber.
Daar (5) geldt in een groot gebied van ω, kunnen wij hierin desgewenst de bijzondere waarde ω_e invoeren en schrijven:

$$\delta = \frac{\omega_e c_e}{k} \qquad (6)$$

waarin c_e voorstelt de waarde van c voor $\omega = \omega_e$.

De definitievergelijking (2) en formule (6) leveren samen:

$$\delta = 2\frac{c_e}{c_c} \qquad (7)$$

Vergelijken we dit resultaat met (3), dan blijkt de getalwaarde $\delta = 6^\circ$ overeen te stemmen met de onder (3) opgegeven waarde $\frac{c}{c_c} = 0{,}05$, met dien verstande, dat hier onder c moet worden verstaan de dempingscoëfficiënt bij $\omega = \omega_e$.

Met bovenstaande beschouwing is de betekenis achterhaald van de opgave $\frac{c}{c_c} =$ constant.

We kunnen dus stellen:

1. Essentieel is, dat het gedrag van rubber als elastisch en dempend element bij harmonisch trillende systemen volkomen wordt gekarakteriseerd door de constante stijfheid k en de constante verlieshoek δ: $P = k(1 + i\delta)x$ (8)
2. Indien men behoefte heeft om c te kennen, volgt deze uit:
$$c = \frac{k\delta}{\omega} \qquad (9)$$
3. Het definiëren van c_c bij een trillingssysteem is voor het bepalen van c volkomen overbodig.
4. Wil men desondanks een grootheid c_c definiëren tegelijk met het gegeven $\frac{c}{c_c}$ = constant ($= \frac{1}{2}\delta$), dan kan men nemen $c_c = \frac{2k}{\omega}$. (10)

3. SERIE- EN PARALLELSCHAKELING.

Voor een rubberelement, dat onderhevig is aan periodieke belasting, kunnen we op grond van het voorgaande invoeren de
constante complexe stijfheid : $k(1 + i\delta)$

We zullen nagaan, wat de complexe stijfheid is bij een parallelschakeling en bij een serieschakeling van een rubber element en een ongedempt elastisch element (van staal b.v.).

a) Parallel schakeling (fig. 1).

Gevraagd:
de complexe stijfheid k.

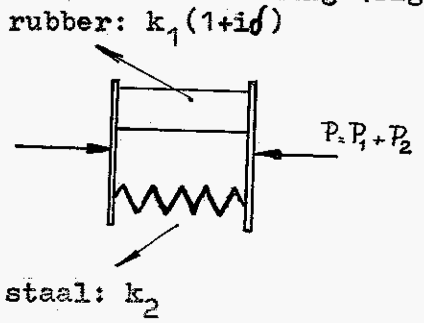


Fig. 1.

Staal: $P_2 = k_2 x$

Rubber: $P_1 = k_1(1+i\delta)x$

Totaal: $P = P_1 + P_2 = (k_1 + k_2 + ik_1\delta)x$

$$P = (k_1 + k_2)(1 + i\frac{k_1}{k_1+k_2}\delta)\ x$$

Hieruit volgt:

$$k = (k_1 + k_2)(1 + i\frac{k_1}{k_1+k_2}\delta) \qquad (11)$$

b) Serie schakeling (fig. 2).

Gevraagd:
de complexe stijfheid k.

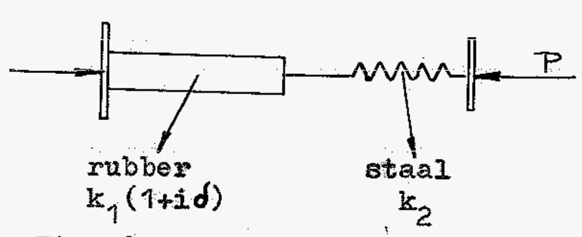


Fig. 2.

Staal: $x_2 = \frac{P}{k_2}$

Rubber: $x_1 = \frac{P}{k_1(1+i\delta)}$

Totaal: $x = x_1 + x_2 = P\left\{\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1(1+i\delta)}\right\}$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1(1+i\delta)} \qquad (12)$$

Nemen we in aanmerking $\delta \ll 1$, dan volgt na enige herleiding:

$$k = \frac{k_1\ k_2}{k_1+k_2}\ (1 + i\frac{k_2}{k_1+k_2}\delta) \qquad (13)$$

4. VECTORDIAGRAM EN RESONANTIEKROMME BIJ EEN SYSTEEM MET 1 GRAAD VAN VRIJHEID EN "RUBBERDEMPING." (fig. 3).

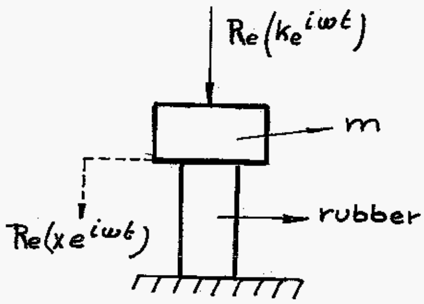


Fig. 3.

De differentiaalvergelijking van de beweging luidt:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Ke^{i\omega t} \tag{14}$$

De gedwongen beweging wordt beschreven door $xe^{i\omega t}$.
Uit (14) volgt:

$$-m\omega^2 x + i\omega c x + kx = K$$

en met in-acht-name van (5):

$$\left\{-m\omega^2 + k(1+i\delta)\right\} x = K$$

$$x = \frac{K}{-m\omega^2 + k(1+i\delta)} \tag{15}$$

We voeren in:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_{st} = \frac{K}{k} \tag{16}$$

We kunnen met goede benadering x_{st} beschouwen als de statische doorbuiging.
Formule (15) gaat over in:

$$x = \frac{x_{st}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}\right) + i\delta} \tag{17}$$

In fig. 4a en fig. 4b. zijn vectordiagrammen geschetst als illustratie van (15).

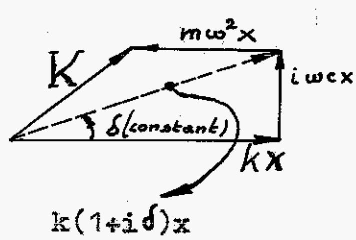


Fig. 4a. ($\omega < \omega_e$)

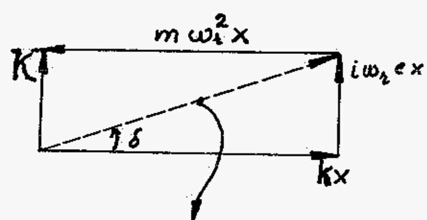
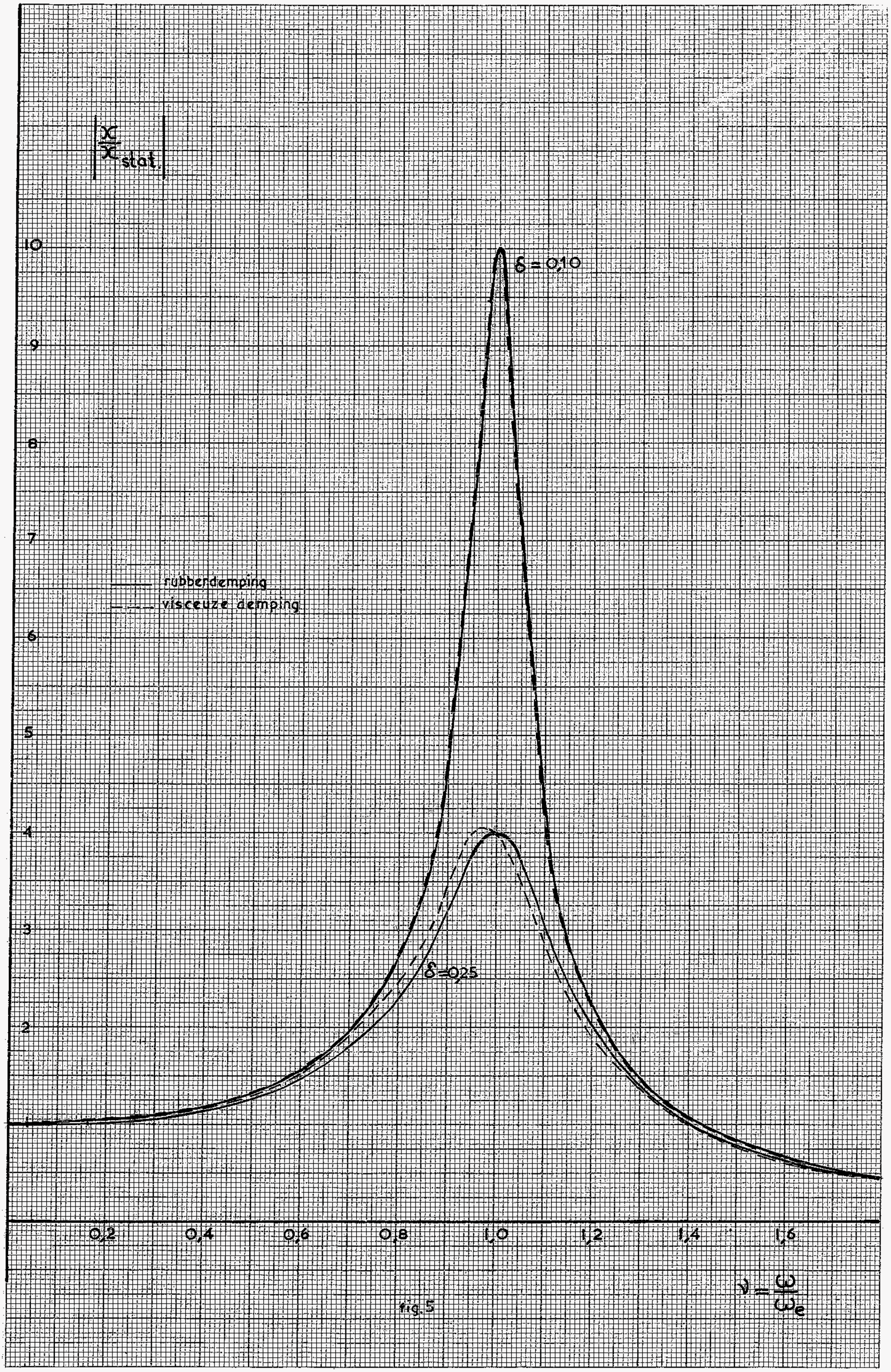


Fig. 4b. (resonantie: $\omega = \omega_e$)



|x / x_stat|
10
9
8
7
6
5
4
3
2
δ = 0,10
δ = 0,25
rubberdemping
visceuze demping
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
ν = ω / ω_e

fig.5

De vergelijking van de resonantiekromme:

$$\left|\frac{x}{x_{st}}\right| = f(\omega) \qquad \text{volgt uit (17)}$$

$$\left|\frac{x}{x_{st}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_e^2}\right)^2+\delta^2}}$$

Voor $\omega = \omega_r$ geldt:

$$\left|\frac{x}{x_{st}}\right|_{\text{resonantie}} = \frac{1}{\delta}$$

$\frac{1}{\delta}$ kan genoemd worden: opslingerfactor bij resonantie.

In fig. 5. zijn enkele resonantiekrommen getekend. Ter vergelijking zijn eveneens enkele resonantiekrommen opgenomen voor een systeem met visceuze demping. Deze laatste is zodanig gekozen, dat de opslingering bij resonantie dezelfde is als bij het systeem met rubberdemping.

5. VOORBEELD VAN DE BEREKENING VAN EEN TORSIETRILLINGSSYSTEEM MET "RUBBERDEMPING."

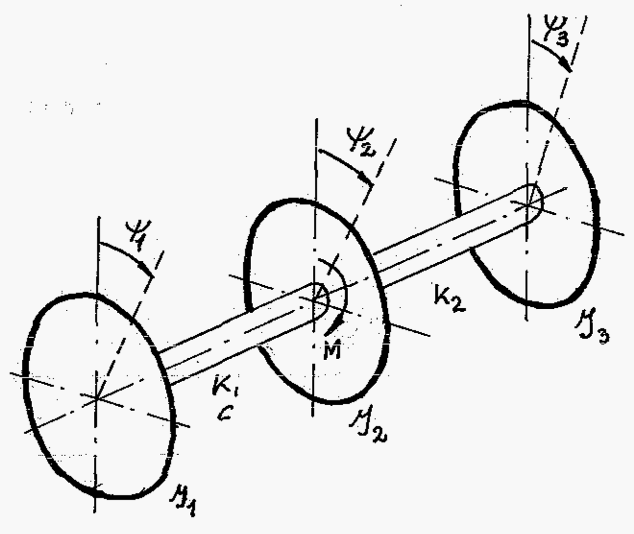


Fig. 6.

Het in fig. 6 getekende systeem voert torsietrillingen uit onder invloed van het koppel

$$M = \text{Re}\ (Te^{i\omega t}) \tag{18}$$

Het elastische deel tussen de schijven met massatraagheidsmoment I_1 resp. I_2, bezit rubberdemping met dempingscoëfficiënt c volgens (9):

$$c = \frac{k_1\delta}{\omega} \tag{19}$$

De wringende momenten in de elastische elementen zijn:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= k_1(\psi_1 - \psi_2) + c(\dot\psi_1 - \dot\psi_2) \\ m_2 &= k_2(\psi_2 - \psi_3) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

De bewegingsvergelijkingen van de schijven luiden:

$$\left.\begin{aligned} I_1\ddot\psi_1 &= -m_1 \\ I_2\ddot\psi_2 &= m_1 - m_2 + M \\ I_3\ddot\psi_3 &= m_2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

We beschouwen alleen de gedwongen trillingen en stellen:

$$\psi_K = \text{Re}\ (\varphi_K\, e^{i\omega t}) \quad (K = 1,2,3) \tag{22}$$

- 6 -

$$m_K = \mathrm{Re}(M_K\, e^{i\omega t}) \qquad (K = 1,2) \tag{23}$$

(20) en (21) kunnen dan worden overgevoerd, met in-acht-name van (19) in:

$$\begin{aligned} M_1 &= k_1(1+i\delta)(\varphi_1 - \varphi_2) \\ M_2 &= k_2(\varphi_2 - \varphi_3) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} -I_1\omega^2\varphi_1 &= -M_1 \\ -I_2\omega^2\varphi_2 &= +M_1 - M_2 + T \\ -I_3\omega^2\varphi_3 &= M_2 \end{aligned} \tag{25}$$

Eliminatie van φ_1, φ_2 en φ_3 uit (24) en (25) levert:

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{I_2\omega^2}{k_1(1+i\delta)} - \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right)\right\} M_1 + M_2 = T \\ &\left\{\frac{I_2\omega^2}{k_2} - \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right)\right\} M_2 + M_1 = -T \end{aligned} \tag{26}$$

Eliminatie van M_2 levert:

$$\left[\left\{\frac{I_2\omega^2}{k_1(1+i\delta)} - \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right)\right\}\left\{\frac{I_2\omega^2}{k_2} - \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right)\right\} - 1\right] M_1 = T\left(\frac{I_2\omega^2}{k_2} - \frac{I_2}{I_3}\right) \tag{27}$$

De beide eigenfrequenties ω_{e1} en ω_{e2} van het ongedempte systeem ($\delta=0$) volgen uit:

$$\left\{\frac{I_2\omega^2}{k_1} - \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right)\right\}\left\{\frac{I_2\omega^2}{k_2} - \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right)\right\} - 1 = 0 \tag{28}$$

Voor een waarde $\omega = \omega_e$, die voldoet aan (28) en met de benadering

$\frac{1}{1+i\delta} = 1 - i\delta$ kan het tussen grote haken geplaatste deel van (27) geschreven worden als:

$$-i\delta\frac{I_2\omega_e^2}{k_1}\left\{\frac{I_2\omega_e^2}{k_2} - \left(1 + \frac{I_2}{I_3}\right)\right\}$$

Hiermede wordt (27) na enige verdere vereenvoudigingen:

$$-\frac{i\delta\omega_e^2}{k_1}\left\{I_2I_3\omega_e^2 - k_2(I_2+I_3)\right\} M_1 = T\left\{I_3\omega_e^2 - k_2\right\}$$

$$M_1 = T\,\frac{ik_1\left\{I_3\omega_e^2 - k_2\right\}}{\delta\omega_e^2\left\{I_2I_3\omega_e^2 - k_2(I_2+I_3)\right\}} \tag{29}$$

Nemen we in aanmerking, dat (28) te schrijven is als:

$$I_1 I_2 I_3 \omega^4 - \omega^2 \left[k_2 I_1 (I_2 + I_3) + k_1 I_3 (I_1 + I_2) \right] + k_1 k_2 (I_1 + I_2 + I_3) = 0$$

dan blijkt hieruit:

$$I_1 \omega_e^2 \left[I_2 I_3 \omega_e^2 - k_2 (I_2 + I_3) \right] = k_1 \left[\omega_e^2 I_3 (I_1 + I_2) - k_2 (I_1 + I_2 + I_3) \right] \qquad (30)$$

(29) is dan over te voeren in:

$$M_1 = T \frac{i \left\{ I_3 \omega_e^2 - k_2 \right\} I_1}{\delta \left[\omega_e^2 I_3 (I_1 + I_2) - k_2 (I_1 + I_2 + I_3) \right]} \qquad (31)$$

Dit resultaat, gecombineerd met (19), is op eenvoudige wijze te vergelijken met de uitkomst, die op enigszins andere wijze door Seyffardt is afgeleid.

November 1959

Prof.Ir. W.L. Esmeijer.