

Rechthoekige kokers met vervormbare dwarsdoorsnede; specialisering voor "lange" kokers

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D. (1966). *Rechthoekige kokers met vervormbare dwarsdoorsnede; specialisering voor "lange" kokers*. (DCT rapporten; Vol. 1966.008). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1966

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Rechthoekige kokers met vervormbare dwarsdoorsnede;
specialisering voor "lange" kokers

Inhoudsopgave:	pag:
1. Theorie van Vlasov	2
2. Zeer lange balken; algemene oplossing	7
3. Criterium voor zeer lange balken	11
4. Zeer lange balken, belast door een trans- versaal bimoment	14

1 maart 1966

ir. J.D. Janssen.

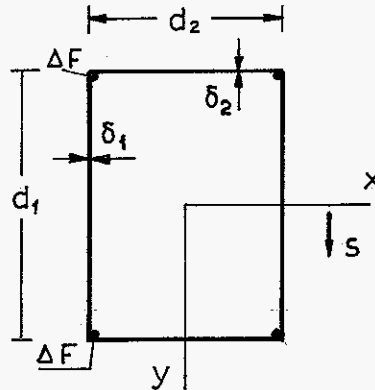


1. De theorie van Vlasov

In rapport WE-65/42 is de theorie van Vlasov afgeleid uitgaande van het principe van minimale potentiële energie.

We willen de belangrijkste resultaten hier herhalen in een iets andere notatie, die overeenstemt met de formules die Vlasov zelf geeft.

We zullen bovendien de invloed van verstijvingsbalken meenemen.



Verplaatsing in axiale richting:

$$u(z, s) = U(z) \cdot \varphi(s) \tag{1.1}$$

Verplaatsing in s-richting:

$$v(z, s) = \vartheta(z) \cdot \psi_\vartheta(s) + \chi(z) \cdot \psi_\chi(s) \tag{1.2}$$

$\varphi(s)$, $\psi(s)$ en $\psi_\chi(s)$ worden gekozen:

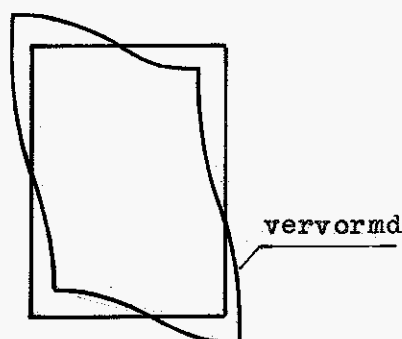
$$\varphi(s) = x(s) \cdot y(s)$$

$$\psi(s) = h(s) \begin{cases} \frac{d_2}{2} & \text{als } x = \text{constant} \\ \frac{d_1}{2} & \text{als } y = \text{constant.} \end{cases}$$

$$\psi_\chi(s) = x'(s) \cdot y(s) + y'(s) \cdot x(s)$$

$$\begin{cases} \frac{d_1}{2} & \text{als } x = \text{constant} \\ \frac{d_2}{2} & \text{als } y = \text{constant.} \end{cases}$$

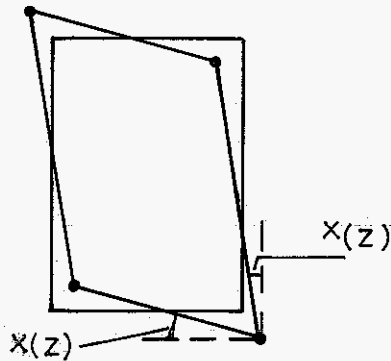
$\psi_\vartheta(s)$ heeft betrekking op de verdraaiing van de dwarsdoorsnede als star geheel $\psi_\chi(s)$ correspondeert met een vervorming zoals hieronder is aangegeven.



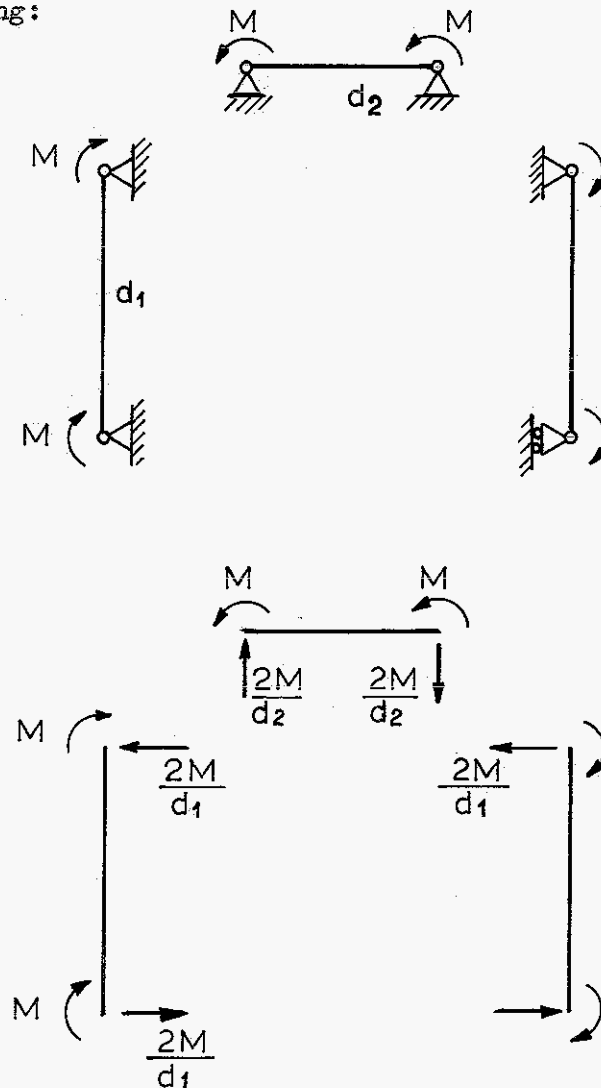
Uit het gekozen vervormingsveld zijn met behulp van de wet van Hooke de axiale normaalspanningen en de schuifspanningen in de dwarsdoorsnede te bepalen. Doordat de dwarsdoorsnede van vorm kan veranderen zullen echter ook de momenten in de langsvlakken arbeid verrichten.

Deze arbeid wordt berekend door een plakje uit de balk te snijden en dit op te vatten als een portaaltje.

Zouden zich in de hoeken scharnieren bevinden dan is geen arbeid nodig om de verplaatsing $v = \psi_x(s) \cdot x(z)$ te presteren (zie fig.)



De hoekpunten moeten op hun plaats blijven terwijl de hoeken recht moeten worden. Voor de verschillende staven betekent dit de volgende belasting:



De totaal opgehoopte vormveranderingsenergie is:

$$A = \frac{1}{3} M^2 \left(\frac{d_1}{EI_1} + \frac{d_2}{EI_2} \right) \quad \text{met} \quad I_1 = \frac{1}{12} \delta_1^3, \quad I_2 = \frac{1}{12} \delta_2^3.$$

Castigliano leert:

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \delta \mathfrak{K}(z) = \frac{2}{3} M \left(\frac{d_1}{EI_1} + \frac{d_2}{EI_2} \right) \quad \mathfrak{K}(z) = \frac{1}{12} M \left(\frac{d_1}{EI_1} + \frac{d_2}{EI_2} \right)$$

De arbeid uitgedrukt in $\mathfrak{K}(z)$ wordt dus:

$$A = \frac{48}{\frac{d_1}{EI_1} + \frac{d_2}{EI_2}} \quad \mathfrak{K}^2(z) = \frac{1}{2} c \mathfrak{K}^2(z) \quad (1.3)$$

$$\text{met } c = \frac{96}{\frac{d_1}{EI_1} + \frac{d_2}{EI_2}} \quad (1.4)$$

Voor de potentiële energie in een aan één uiteinde star ingeklemde balk geldt dan:

$$V = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l \left[E\varphi^2 u'^2 + G \left[U \frac{d\varphi}{ds} + \vartheta' \psi_\vartheta(s) + x' \psi_x(s) \right]^2 \right] dF dz + \frac{1}{2} c \int_{z=0}^l \mathfrak{K}^2(z) dz - \int_F \sigma_z(l) u dF - \int_F \tau(l) v dF \quad (1.5)$$

De volgende karakteristieke oppervlakte-integralen in de dwarsdoorsnede komen voor in $\delta V = 0$.

$$\oint \varphi^2 dF = A_1 \quad (\text{hierin is de invloed van de verstijvingen verwerkt})$$

$$\oint \varphi_\vartheta \frac{d\varphi}{ds} dF = A_2$$

$$\oint \psi_x \frac{d}{ds} dF = A_3$$

$$\oint \psi_\vartheta^2 dF = A_4$$

$$\oint \psi_\vartheta \psi_x dF = A_5$$

$$\oint \psi_x^2 dF = A_6.$$

$$\text{Er geldt: } \psi_x = \frac{d\varphi}{ds}$$

Verder is $(\psi_x)^2 = (\psi_\vartheta)^2$ voor alle s .

$$\text{Dit betekent: } A_1 = \oint \varphi^2 dF$$

$$A_3 = A_4 = A_6 = \oint (\psi_\vartheta)^2 dF$$

$$A_2 = A_5 = \oint \psi_\vartheta \frac{d\varphi}{ds} dF.$$

Definities:

$$F_1 = d_1 \delta_1 ; F_2 = d_2 \delta_2$$

$$a = EA_1 = \frac{1}{24} E d_1^2 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6\Delta F) \quad (1.6)$$

$$b_1 = GA_3 = \frac{1}{2} G (d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1) \quad (1.7)$$

$$b_2 = GA_2 = \frac{1}{2} G (-d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1) \quad (1.8)$$

Variatie van de potentiële energie levert dus:

$$\begin{aligned} & \int_{z=0}^l [aU' \delta U' + (b_1 U + b_2 \vartheta' + b_1 x') \delta U] dz + \\ & \int_{z=0}^l (b_2 U + b_1 \vartheta' + b_2 x') \delta \vartheta' dz + \\ & \int_{z=0}^l [(b_1 U + b_2 \vartheta' + b_1 x') \delta x' + cx \delta x] dz + \\ & - \delta U(l) \oint \sigma_z(l) \varphi(s) dF - \delta \vartheta(l) \oint \tau(l) \psi_\vartheta(s) dF + \\ & - \delta x(l) \oint \tau(l) \psi_x(s) dF = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Op de gebruikelijke manier volgen hieruit de differentiaalvergelijkingen en de randcondities.

Definities:

$$B = - \oint \sigma \varphi(s) dF \quad (\text{axiaal bimoment}) \quad (1.10)$$

$$H = \oint \tau \psi_\vartheta dF \quad (\text{wringend moment}) \quad (1.11)$$

$$Q = \oint \tau \psi_x dF \quad (\text{transversaal bimoment}) \quad (1.12)$$

Uit (1.9) volgt:

$$-aU'' + b_1 U + b_2 \vartheta' + b_1 x' = 0 \quad (1.13)$$

$$b_2 U' + b_1 \vartheta'' + b_2 x'' = 0 \quad (1.14)$$

$$b_1 U' + b_2 \vartheta'' + b_1 x'' - cx = 0 \quad (1.15)$$

De randcondities voor de aan één kant ingeklemde balk, aan de andere kant ($z = l$) belast door normaal- en schuifspanningen luiden:

$$\begin{aligned} U(0) &= 0 \\ \vartheta(0) &= 0 \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$z = l \quad B = -aU' \quad (1.17)$$

$$H = b_2 U + b_1 \vartheta' + b_2 x' \quad (1.18)$$

$$Q = b_1 U + b_2 \vartheta' + b_1 x' \quad (1.19)$$

Uit (1.13) t/m (1.15) is één differentiaalvergelijking in U af te leiden.

Uit $\frac{d}{dz}$ (1.13) - (1.15) volgt:

$$x = \frac{a}{c} U''' \quad (1.20)$$

Uit (1.14) volgt dan:

$$\vartheta'' = -\frac{b_2}{b_1} \left(U' + \frac{a}{c} U^V \right) \quad (1.21)$$

(1.20) en (1.21) substitueren in (1.15) levert:

$$U^V - \frac{b_1 c}{b_1^2 - b_2^2} U''' + \frac{c}{a} U' = 0 \quad (1.22)$$

(1.21) geeft alleen nog de relatie voor ϑ' .

Uit (1.13) volgt:

$$\vartheta' = -\frac{b_1 a}{b_2 c} U^{IV} + \frac{a}{b_2} U'' - \frac{b_1}{b_2} U \quad (1.23)$$

Integratie van deze uitdrukking ten einde ϑ te verkrijgen is vervelend.

Gedefinieerd wordt:

$$U = f' \quad (1.24)$$

Dan kan voor ϑ geschreven worden:

$$\vartheta = -\frac{b_1 a}{b_2 c} f^{IV} + \frac{a}{b_2} f'' - \frac{b_1}{b_2} f \quad (1.25)$$

en:

$$x = \frac{a}{c} f^{IV} \quad (1.26)$$

$$B = -a f'' \quad (1.27)$$

$$H = -\frac{a}{cb_2} (b_1^2 - b_2^2) f^V + a \frac{b_1^2}{b_2} f''' - \frac{b_1 - b_2^2}{b_2} f' \quad (1.28)$$

$$Q = a f''' \quad (1.29)$$

De differentiaalvergelijking in f luidt:

$$f^{VI} - 2r^2 f^{IV} + S^4 f'' = 0 \quad (1.30)$$

$$\text{met } r^2 = \frac{b_1 c}{2(b_1^2 - b_2^2)} = \frac{24}{\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2}} \frac{E}{G} \left(\frac{1}{d_2^2 F} + \frac{1}{d_1^2 F} \right) \quad (1.31)$$

$$S^4 = \frac{c}{a} = \frac{2304}{\left(\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2} \right) d_1^2 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6\Delta F)} \quad (1.32)$$

De algemene oplossing luidt:

$$f(z) = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + c_4 \varphi_4 + c_5 z + c_6 \quad (1.33)$$

$$\text{met } \varphi_1 = \cosh \alpha z \sin \alpha z$$

$$\varphi_2 = \cosh \alpha z \cos \beta z$$

$$\varphi_3 = \sinh \alpha z \cos \beta z$$

$$\varphi_4 = \cosh \alpha z \sin \beta z \quad (1.34)$$

$$\text{met } \alpha = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}} \quad (1.35)$$

Vlasov geeft in tabel 29 (pag.240-241) de algemene oplossing voor $x(z)$, $u(z)$,

$\vartheta(z)$, $H(z)$, $B(z)$ en $Q(z)$, waarbij de zes constanten corresponderen met de zo juist opgesomde grootheden voor $z=0$.

Als deze grootheden als functie van z bekend zijn, kunnen de spanningen worden berekend.

Er geldt immers:

$$\sigma(z, s) = EU' \cdot \varphi(s) \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \tau(z, s) &= G \left[U(z) \varphi'(s) + \vartheta'(z) \psi_{\vartheta}(s) + x'(z) \psi_x(s) \right] \\ &= G \left[\{U(z) + x'(z)\} \psi_x(s) + \vartheta'(z) \psi_{\vartheta}(s) \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

Uit (1.18) en (1.19) volgt:

$$U + x' = \frac{b_1 Q - b_2 H}{b_1^2 - b_2^2}$$

$$\vartheta' = \frac{b_1 H - b_2 Q}{b_1^2 - b_2^2}$$

$$\sigma(z, s) = -\frac{E}{a} \varphi(s) B(z) \quad (1.38)$$

$$\tau(z, s) = \frac{G}{b_1^2 - b_2^2} \left[(b_1 \psi_x - b_2 \psi_{\vartheta}) Q + (b_1 \psi_{\vartheta} - b_2 \psi_x) H \right] \quad (1.39)$$

Voor (1.39) kan ook genomen worden:

$$x = \text{constant} \quad \tau(z, s) = \frac{G}{b_1 + b_2} \cdot \frac{d_2}{2} (Q + H)$$

$$y = \text{constant} \quad \tau(z, s) = \frac{G}{b_1 - b_2} \cdot \frac{d_1}{2} (-Q + H)$$

M.b.v. (1.7) en (1.8):

$$x = \text{constant} \quad \tau(z, s) = \frac{1}{2d_1 d_2 \delta_1} (Q + H) \quad (1.40)$$

$$y = \text{constant} \quad \tau(z, s) = \frac{1}{2d_1 d_2 \delta_2} (-Q + H) \quad (1.41)$$

2. Zeer lange balken; algemene oplossing

In het algemeen moeten uit de randcondities aan de beide uiteinden van de balk de zes constanten bepaald worden. Twee hiervan zullen geen moeilijkheden geven n.l. ϑ_0 en H_0 . ϑ_0 zal meestal nul gekozen kunnen worden, terwijl $H_0 = H(z)$ gegeven zal zijn (behalve als 'n hoekverdraaiing wordt opgedwongen).

In de werkwijze van Vlasov zullen x_0 resp. Q_0 en U_0 resp. B_0 gegeven zijn. De twee resterende constanten dienen bepaald te worden uit de condities bij $z = l$.

Als l zeer groot is zal het moeilijk zijn om numeriek de resterende constanten te bepalen, omdat ze vergeleken met de grootheden voor $z = l$ zeer klein zijn.

Onder deze omstandigheden ligt het voor de hand half-oneindig lange balken te beschouwen en na te gaan onder welke omstandigheden hieraan voldaan is. Voor $z \rightarrow \infty$ moeten $x(z)$, $B(z)$ en $Q(z)$ nul worden vanwege het principe van de Saint-Venant dat spanningen en vervormingen ten gevolge van evenwichtssystemen slechts "locaal" optreden.

Bij aanwezigheid van een wringend moment zal $\vartheta(z)$ op een afstand van de rand lineair met z toenemen en $U(z)$ een constante waarde aannemen, die correspondeert met de welving in de theorie van Bredt.

We constateren dat géén der karakteristieke grootheden voor $z \rightarrow \infty$ exponentieel toeneemt. Dit betekent dat alleen de volgende combinaties van φ_1 t/m φ_4 kunnen voorkomen:

$$v_1 = \varphi_1 - \varphi_4 = e^{-\alpha z} \sin \beta z \quad (2.1)$$

$$\text{en } v_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = e^{-\alpha z} \cos \beta z \quad (2.2)$$

Uit tabel 29 (Vlasov) kan hiermee het verband gezocht worden tussen x_0 , U_0 en B_0 , Q_0 . We zullen dit later voor een eenvoudig geval uitvoeren. We gebruiken hiervoor tabel 28.

Gesteld moet worden:

$$c_4 = -c_1$$

$$c_3 = -c_2$$

Dit levert o.a.:

$$B(z) = -a(r^2 v_1 - 2\alpha\beta v_2)c_1 - a(r^2 v_2 + 2\alpha\beta v_1)c_2 \quad (2.3)$$

$$Q(z) = a \left[-\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)v_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)v_2 \right] c_1 + a \left[-\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)v_2 - \beta(3\alpha^2 - \beta^2)v_1 \right] c_2 \quad (2.4)$$

Voor $z = 0$ is $B(z) = B_0$
 $Q(z) = Q_0$.

$$B_0 = a \cdot 2\alpha\beta c_1 - ar^2 c_2$$

$$Q_0 = a\beta(3\alpha^2 - \beta^2)c_1 - a\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)c_2$$

Omdat $-2\alpha^2\beta(\alpha^2 - 3\beta^2) + \beta r^2(3\alpha^2 - \beta^2) =$
 $-2\alpha^2\beta(r^2 - 2\beta^2) + \beta r^2(3\alpha^2 - \beta^2) =$
 $\beta \left[r^2(\alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2 \right] = \beta \left[r^4 + 4\alpha^2\beta^2 \right] = \beta s^4.$

$$c_1 = -\frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)}{a\beta s^4} B_0 + \frac{r^2}{a\beta s^4} Q_0 \tag{2.5}$$

$$c_2 = -\frac{\alpha(3\alpha^2 - \beta^2)}{a\beta s^4} B_0 + \frac{2\alpha\beta}{a\beta s^4} Q_0 \tag{2.6}$$

In (2.3) en (2.4) substitueren, levert:

$$B(z) = \frac{(r^2\psi_1 - 2\alpha\beta\psi_2)}{\beta s^4} \left[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)B_0 - r Q_0 \right] +$$

$$\frac{(r^2\psi_2 + 2\alpha\beta\psi_1)}{\beta s^4} \left[\beta(3\alpha^2 - \beta^2)B_0 - 2\alpha\beta Q_0 \right]$$

$$B(z) = \frac{1}{\beta} \left[(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)B_0 - \psi_1 Q_0 \right] \tag{2.7}$$

of

$$B(z) = \frac{1}{\beta} \left[(\alpha \sin \beta z + \beta \cos \beta z)B_0 - \sin \beta z \cdot Q_0 \right] e^{-\alpha z}$$

Uit de relatie:

$$Q(z) = -B'(z) \text{ volgt:}$$

$$Q(z) = \frac{1}{\beta} \left[s^2 \sin \beta z B_0 + (\beta \cos \beta z - \alpha \sin \beta z) Q_0 \right] e^{-z}$$

of

$$Q(z) = \frac{1}{\beta} \left[s^2 \psi_1 B_0 + (\beta\psi_2 - \alpha\psi_1) Q_0 \right] \tag{2.8}$$

Uit (1.26) en (1.29) volgt:

$$x(z) = \frac{1}{c} Q'$$

Dus:

$$x(z) = \frac{1}{\beta c} \left[s^2 (\beta \cos \beta z - \alpha \sin \beta z) B_0 + (s^2 \sin \beta z - 2\alpha\beta \cos \beta z) Q_0 \right] e^{-\alpha z}$$

of

$$x(z) = \frac{1}{\beta c} \left[s^2 (\beta\psi_2 - \alpha\psi_1) B_0 + (s^2 \psi_1 - 2\alpha\beta) Q_0 \right] \tag{2.9}$$

Voor $U(z)$ geldt (zie tabel 28 Vlasov):

$$U(z) = (-\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) c_1 + (-\alpha\psi_2 - \beta\psi_1) c_2 - \gamma_2 H(z)$$

$$\gamma_2 = \frac{b_2}{b_1^2 - b_2^2} \tag{2.10}$$

$$U(z) = \frac{1}{\alpha\beta s^2} \left[(r^2 \psi_1 + 2\alpha\beta\psi_2) B_0 - (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) Q_0 \right] - \gamma_2 H(z) \quad (2.11)$$

Voor $\vartheta(z)$ geldt:

$$\begin{aligned} \vartheta(z) &= -\frac{2r^2 b_2}{s^4} \frac{b_2}{b_1} (r^2 \psi_1 - 2\alpha\beta\psi_2) c_1 + \frac{2r^2 b_1}{s^4} \frac{b_1}{b_2} (r^2 \psi_2 - 2\alpha\beta\psi_1) c_2 + \frac{b_1}{b_2} \gamma_2 H(z) + \\ &\quad - \frac{b_1}{b_2} c_6. \\ \vartheta(z) &= \frac{2r^2 b_2}{\beta c} \frac{b_2}{b_1} \left[(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) B_0 - \psi_1 Q_0 \right] + \frac{b_1}{b_2} \gamma_2 H(z) \cdot z - \frac{b_1}{b_2} c_6. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Noemen we $\vartheta(0) = \vartheta_0$ dan geldt:

$$\vartheta(z) = \frac{2r^2 b_2}{\beta c} \frac{b_2}{b_1} \left[\{\alpha\psi_1 + \beta(\psi_2 - 1)\} B_0 - \psi_1 Q_0 \right] + \frac{b_1}{b_2} \gamma_2 H(z) \cdot z + \vartheta_0 \quad (2.13)$$

We schrijven de gevonden resultaten nog eens bij elkaar.

$$\vartheta(z) = \frac{2r^2 b_2}{\beta c} \frac{b_2}{b_1} \left[\{\alpha\psi_1 + \beta(\psi_2 - 1)\} B_0 - \psi_1 Q_0 \right] + \gamma_1 H(z) \cdot z + \vartheta_0 \quad (2.14)$$

$$U(z) = \frac{1}{\alpha\beta s^2} \left[(r^2 \psi_1 + 2\alpha\beta\psi_2) B_0 - (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) Q_0 \right] - \gamma_2 H(z) \quad (2.15)$$

$$x(z) = \frac{1}{\beta c} \left[s^2 (\beta\psi_2 - \alpha\psi_1) B_0 + (s^2 \psi_1 - 2\alpha\beta\psi_2) Q_0 \right] \quad (2.9)$$

$$B(z) = \frac{1}{\beta} \left[(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) B_0 - \psi_1 Q_0 \right] \quad (2.7)$$

$$Q(z) = \frac{1}{\beta} \left[s^2 \psi_1 B_0 + (\beta\psi_2 - \alpha\psi_1) Q_0 \right] \quad (2.8)$$

Bovenstaande vergelijkingen zijn geschikt als B_0 en Q_0 gegeven zijn.

Het is in de praktijk echter even goed mogelijk dat x_0 en U_0 gegeven zijn.

Uit (2.19) en (2.9) volgt:

$$U_0 = \frac{1}{\alpha\beta s^2} \left[2\alpha\beta B_0 - \beta Q_0 \right] - \gamma_2 H \quad (2.15)$$

$$x_0 = \frac{1}{\beta c} \left[s^2 B \beta_0 - 2\alpha\beta Q_0 \right] \quad (2.16)$$

of

$$B_0 = \frac{-2\alpha s^2 \alpha (U_0 + \gamma_2 H) + c x_0}{s^2 (3\alpha^2 - \beta^2)} \quad (2.17)$$

$$Q_0 = \frac{2\alpha c x_0 - c (U_0 + \gamma_2 H)}{s^2 (3\alpha^2 - \beta^2)} \quad (2.18)$$

We beschouwen de formules op deze pagina wat nader.

Stel $B_0 = Q_0 = 0$

Dan geldt: $x(z) = B(z) = Q(z) \equiv 0$.

$$\vartheta(z) - \vartheta_0 = \gamma_1 H(z) \cdot z \quad (2.19)$$

$$U(z) = -\gamma_2 H(z) \quad (2.20)$$

met

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{b_1^2 - b_2^2} ; \gamma_2 = \frac{b_2}{b_1^2 - b_2^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2G d_2^2 F_1} + \frac{1}{2G d_1^2 F_2} = \frac{1}{4G d_1^2 d_2^2} \left(\frac{2d_1}{\delta_1} + \frac{2d_2}{\delta_2} \right)$$

Hiervoor kan ook geschreven worden:

$$\frac{1}{4GA^2} \oint \frac{ds}{\delta} \quad (A: \text{ omsloten oppervlakte})$$

(2.19) is dan bekend uit de Bredt-theorie.

Verder geldt:

$$\gamma_2 = \frac{-1}{2Gd_2^2 F_1} + \frac{-1}{2Gd_1^2 F_2} = \frac{1}{4Gd_1^2 d_2^2} \left[-\frac{2d_1}{\delta_1} + \frac{2d_2}{\delta_2} \right]$$

Voor de axiale verplaatsing van het punt $(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2})$ geldt dan:

$$u = \frac{1}{4Gd_1^2 d_2^2} \left[+\frac{2d_1}{\delta_1} - \frac{2d_2}{\delta_2} \right] \cdot \frac{d_1 d_2}{4}$$

Het is eenvoudig te verifiëren dat dit resultaat overeenstemt met de wending van het beschouwde hoekpunt in de theorie van Bredt.

We gaan vervolgens na wat gebeurt voor $z \rightarrow \infty$ voor $H = 0$ en $\vartheta_0 = 0$.

We constateren:

$$U(z) \rightarrow 0$$

$$x(z) \rightarrow 0$$

$$B(z) \rightarrow 0$$

$$Q(z) \rightarrow 0$$

$$\vartheta(z) \rightarrow -\frac{2r^2}{c} \frac{b_2}{b_1} B_0.$$

Dit laatste resultaat is -voor ons gevoel- merkwaardig, maar met de formules te begrijpen.

Het zou wellicht "beter" geweest zijn voor $z = 0$ $\vartheta_0 = \frac{2r^2}{c} \frac{b_2}{b_1} B_0$ te kiezen

3. Criterium voor "zeer lange" balken

De karakteristieke functies nemen voor dat deel dat betrekking heeft op Q_0 en B_0 (x_0 resp. U_0) af volgens $e^{-\alpha z}$ en naderen -eventueel na een verdraaiing als star lichaam- naar nul als $z \rightarrow \infty$.

Als $z = z_0$ met $\alpha z_0 = 2 \pi$ geldt:

$$e^{-\alpha z_0} \approx 0.5 \times 10^{-3}.$$

T.ö.v. $z = 0$ resteert van de functie $e^{-\alpha z}$ dan nog 0,59‰.

Bij $z = \frac{1}{2}z_0$ resteert nog ruim 4%.

Worden de hiervoor afgeleide formules voor een oneindig lange balk toegepast op een balk met lengte $l \gg \frac{1}{2}z_0$, dan zullen de grootheden in de buurt van $z = 0$ globaal niet meer dan 2‰ (4% van 4%) fout zijn als bij $z = l$ de balk belast wordt zoals de Bredt-theorie vereist.

"Zeet lange" balken definiëren we dan ook als balken waarvan de lengte $l \gg \frac{1}{2}z_0$, dus $l \gg \frac{\pi}{\alpha}$ (3.1)

We schrijven (3.1) uit voor een koker met $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ (constante wanddikte) en $\Delta F = 0$ (geen verstijvingsbalken).

Dan geldt:

$$r^2 = \frac{4(1+\nu)\delta^2}{d_1^2 d_2^2} \quad (3.2)$$

$$\delta^2 = \frac{8\sqrt{3}\delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)} \quad (3.3)$$

$$= \frac{13,86 \delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{z}} = \sqrt{\frac{6,93\delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)} \left[1 + 0,288 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right]} \quad (3.4)$$

Voor dunwandige balken is $\frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} < 1$ en in veel gevallen $\ll 1$.

Immers $2 \delta(d_1 + d_2)$ is het oppervlak van het materiaal in de dwarsdoorsnede en $d_1 d_2$ is het door de profiellijn omsloten oppervlak.

Voor (3.4) kan dan ook in zeer goede benadering geschreven worden:

$$\alpha = 2,63 \sqrt{\frac{\delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)} \left(1 + 0,144 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right)} \quad (3.5)$$

Evenzo geldt:

$$\beta = 2,63 \sqrt{\frac{\delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)} \left(1 + 0,144 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right)} \quad (3.6)$$

We merken op dat voor het geval $\frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \ll 1$.

uit deze vergelijkingen volgt dat $\alpha \approx \beta$.

Dit betekent dat $r^2 = 0$ gekozen kan worden. Kijken we naar (1.31) dan betekent dit fysisch dat de afschuifstijfheid van de platen oneindig groot genomen kan worden ($GF_1 = GF_2 = \infty$).

Voor (3.1) is dus te schrijven:

$$\begin{aligned} l &> \frac{\pi}{2,63} \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta}} \\ &= 1,2 \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onder deze omstandigheid is een balk als oneindig lang te beschouwen.

Zijn voor een balk met constante wanddikte verstijvingsbalken aanwezig, dan kan geschreven worden:

$$\Delta F = q (d_1 + d_2) \cdot \delta \quad (3.8)$$

(3.3) gaat dan over in:

$$s^2 = \frac{8 \sqrt{3} \delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2) \sqrt{1 + 6q}} \quad (3.9)$$

(3.4) wordt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{6,93 \delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2) \sqrt{1 + 6q}}} \left[1 + 0,288 (1 + \nu) \frac{\delta (d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \sqrt{1 + 6q} \right] \quad (3.10)$$

Ook in dit geval zal in het algemeen

$$\frac{\delta (d_1 + d_2) \sqrt{1 + 6q}}{d_1 d_2} \ll 1 \text{ zijn, (vb. } d_1 = d_2 : \frac{2\delta}{d_1} \sqrt{1 + 6q} \text{) zodat}$$

te schrijven is:

$$\alpha = 2,63 \sqrt{\frac{\delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2) \sqrt{1 + 6q}}} \left[1 + 0,144 (1 + \nu) \frac{\delta (d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \sqrt{1 + 6q} \right] \quad (3.11)$$

De grens voor een "oneindig lange" balk wordt dan gegeven:

$$l \geq 1,2 \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta} \sqrt{1 + 6q}} \quad (3.12)$$

$$\text{(Vb. } q = \frac{1}{2} \rightarrow l \geq 1,7 \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta}} \text{)}$$

$$q = 1 \rightarrow l \geq 1,95 \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta}} \text{)}$$

We willen vervolgens een balk beschouwen met $d_1 = d_2$ en $\delta_2 \ll \delta_1$.

Dan geldt:

$$s^2 = \frac{8\sqrt{3}}{d_1^2 \sqrt{\frac{d_1}{\delta_2^3}} d_1 \delta_1} = \frac{8\sqrt{3}}{d_1^3} \sqrt{\frac{\delta_2^3}{\delta_1}}$$
$$r^2 = 4(1+\nu) \frac{\delta_2^2}{d_1^4}$$

Er geldt: $\frac{r^2}{s^2} = \frac{4(1+\nu)}{8\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{d^2}} \ll 1.$

We kunnen s^2 t.o.v. r^2 verwaarlozen $\Rightarrow \alpha = \beta.$

4. Zeer lange balken, belast door een transversaal bimoment

De relaties uit hoofdstuk 2 zullen we specialiseren voor een koker, zonder verstijvingsbalken met $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

We kiezen $B_0 = 0$.

We kunnen verwijzen naar de rapporten WE-66/1 en WE-66/5, waarin door de computer berekende resultaten zijn weergegeven voor het geval dat $d_1 = d_2 = d$.

De balk is oneindig lang te noemen als

$$\frac{l}{d} \geq 1,7 \sqrt{\frac{d}{\delta}} \quad (4.1)$$

Voorbeeld: $\frac{d}{\delta} = 5 \quad \frac{l}{d} \geq 3,8$

$$\frac{d}{\delta} = 10 \quad \frac{l}{d} \geq 5,4 \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{\delta} = 100 \quad \frac{l}{d} \geq 17$$

Uit formule (2.9) volgt voor x_0 :

$$x_0 = -\frac{2\alpha}{c} Q_0$$

$$c = \frac{8E\delta^3}{d_1 + d_2} \quad (\text{zie 1.4})$$

Met (3.5) volgt hieruit:

$$x_0 = -\frac{0,66}{E} \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}} \cdot Q_0 \cdot \left[1 + 0,144(1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right] \quad (4.3)$$

$$\text{Is } d_1 = d_2 = d \Rightarrow x_0 = \frac{-0,93}{E \sqrt{d\delta^5}} \cdot Q_0 \cdot \left[1 + 0,298(1 + \nu) \frac{\delta}{d} \right] \quad (4.4)$$

$|x(z)|$ heeft een randextremum voor $z = 0$.

Voor U_0 geldt (zie 2.19):

$$U_0 = -\frac{Q_0}{as^2} \quad (4.5)$$

$$= -\frac{1,73 Q_0}{E\delta^2 d_1 d_2} \quad (4.6)$$

Bij belasting door een wringend moment H geldt:

$$U_0 = \frac{(d_1 - d_2)H}{2G d_1^2 d_2^2 \delta} \quad (4.7)$$

$$\text{Als } d_1 = d_2 \text{ geldt: } U_0 = -\frac{0,87 Q_0}{E \delta^2 d^2} \quad (4.8)$$

Voor het transversale bimoment $Q(z)$ geldt dat een randextremum optreedt voor $z = 0 \Rightarrow Q(0) = Q_0$.

Het axiale bimoment is uiteraard nul voor $z = 0$.

Het eerste extremum treedt op waar $Q(z)$ de eerste maal nul wordt.

De plaats van de maximale $B(z)$ wordt gegeven voor $z = z_1$ met

$$\begin{aligned} \beta \cos \beta z_1 &= \alpha \sin \beta z_1 \\ \beta z_1 &= \arctan \frac{\beta}{\alpha} \\ &\approx \arctan \left[1 - 0.288 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right] \\ &\approx \frac{\pi}{4} - 0.144 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \\ \text{Dus } z_1 &= \frac{\frac{\pi}{4} - 0.144 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2}}{2.63 \sqrt{\frac{\delta}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)} \left[1 - 0.144 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right]}} \end{aligned}$$

$$z_1 = 0.299 \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta}} \left[1 - 0.039 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right] \quad (4.9)$$

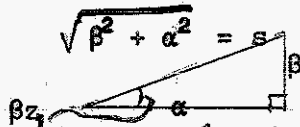
Voor $d_1 = d_2 = d$:

$$z_1 = 0.422 \sqrt{\frac{d^3}{\delta}} \left[1 - 0.078 (1 + \nu) \frac{\delta}{d} \right] \quad (4.10)$$

De grootte van B ten plaatse $z = z_1$ volgt uit (2.7):

$$B(z_1) = -\frac{1}{\beta} \sin \beta z_1 e^{-\alpha z_1} Q_0 \quad (4.11)$$

Er geldt: $\sin \beta z_1 = \frac{\beta}{s}$



$$\begin{aligned} \text{Dus } B(z_1) &= -\frac{1}{s} e^{-\alpha z_1} Q_0 = -\frac{1}{s} Q_0 e^{-\frac{\pi}{4}} \left[1 + 0.105 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right] \\ &= -\frac{0.456}{s} Q_0 \left[1 - 0.0725 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right] \\ B(z_1) &= -0.123 \sqrt{\frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{\delta}} \left[1 - 0.0825 (1 + \nu) \frac{\delta(d_1 + d_2)}{d_1 d_2} \right] Q_0 \quad (4.12) \end{aligned}$$

Alle voorgaande resultaten stemmen overeen met de door de computer berekende resultaten. We willen met name verwijzen naar hoofdstuk 13, pag.62 van rapport WE-66/5.