

## Over de hypocycloïde van Steiner-Schläfli

**Citation for published version (APA):**

Bruijn, de, N. G. (1940). Over de hypocycloïde van Steiner-Schläfli. *Nieuw Archief voor Wiskunde, serie 2, 20*, 282-287.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1940

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

## OVER DE HYPOCYCLOÏDE VAN STEINER-SCHLÄFLI

DOOR

N. G. DE BRUIJN.

(Den Haag).

In *Mathematica* Jg. 8 no. V (p. 129—134) bewees Prof. dr. W. VAN DER WOUDE, dat de keerraaklijnen van de *hypocycloïde van Steiner-Schläfli* — d.i. de omhullende van de rechten van WALLACE van een driehoek ABC — door het middelpunt van den negenpuntscirkel van  $\triangle ABC$  gaan, en loodrecht staan op de zijden van den driehoek van MORLEY.

Het hier volgende heeft ten doel, deze resultaten af te leiden met behulp van enkele projectieve stellingen over rationale derdeklassekrommen met één dubbelraaklijn. Wegens de betrekkelijke eenvoud van de stelling van MORLEY beperk ik mij tot de hypocycloïde.

1. De rechte van WALLACE is te beschouwen als toppraaklijn van een parabool, die aan de zijden van  $\triangle ABC$  raakt. We kunnen nu laten zien, dat de omhullende  $K$  van de rechten van WALLACE een kromme van de derde klasse is, die  $l_\infty$  tot dubbelraaklijn heeft, met raakpunten in de isotrope punten I en J. We leggen daartoe de punten  $O_2$  en  $O_3$  van een coördinatendriehoek  $O_1O_2O_3$  in I en J. De vergelijking van de schaar van parabolen, die aan de zijden van  $\triangle ABC$  raken, luidt dan in lijncoördinaten:

$$(1) \dots F \equiv \Sigma A_{ik} \xi_i \xi_k + \lambda \Sigma B_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \quad (A_{11} = B_{11} = 0).$$

Het oneigenlijke punt van  $F = 0$  is het punt, waarin  $F = 0$  aan de lijn  $(1, 0, 0)$  raakt, dus het punt:

$$(2) \dots \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \equiv A_{12} \xi_2 + A_{13} \xi_3 + \lambda (B_{12} \xi_2 + B_{13} \xi_3) = 0.$$

Het oneigenlijke punt van de topraaklijn is hieraan harmonisch toegevoegd ten opzichte van I en J, het is dus het punt:

$$A_{12}\xi_2 - A_{13}\xi_3 + \lambda(B_{12}\xi_2 - B_{13}\xi_3) = 0.$$

$K$  wordt nu verkregen door eliminatie van  $\lambda$  uit (1) en (2), dus

$$K \equiv (B_{12}\xi_2 - B_{13}\xi_3) \Sigma A_{ik}\xi_i\xi_k - (A_{12}\xi_2 - A_{13}\xi_3) \Sigma B_{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

In deze vergelijking ontbreken (wegens  $A_{11} = A_{22} = 0$ ) de termen met  $\xi_1^3$ ,  $\xi_1^2\xi_2$ ,  $\xi_1^2\xi_3$ ,  $\xi_1\xi_2^2$  en  $\xi_1\xi_3^2$ , zoodat  $K$  in  $O_2$  en  $O_3$  aan  $O_2O_3$  raakt.

$K$  moet dan verder rationaal zijn en 3 keerpunten bezitten; de graad is 4.

2. We kunnen de rechten van WALLACE ook nog op andere wijze voorstellen, nl. als asymptoten van orthogonale hyperbolen door A, B en C. Beschouw daartoe een parabool

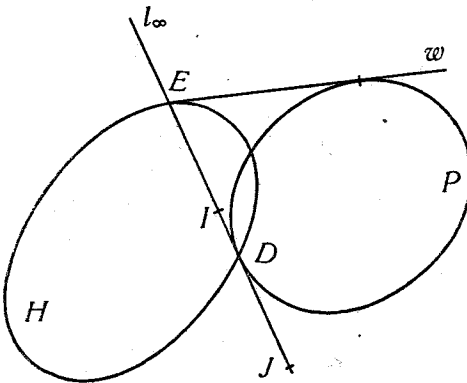


Fig. 1.

$P$  met topraaklijn  $w$  en oneigenlijk punt  $D$ , *ingeschreven* in  $\triangle ABC$ , en daarbij een orthogonale hyperbool  $H$ , *omgeschreven* om  $\triangle ABC$  en gaande door  $D$  (en dus ook door het oneigenlijke punt  $E$  van  $w$ ) (fig. 1).

Volgens de stelling van PONCELET raakt nu  $w$  aan  $H$ , zoodat  $w$  asymptoot is van  $H$ . Omgekeerd is een asymptoot van een om  $\triangle ABC$  beschreven orthogonale hyperbool steeds

topraaklijn van een parabool, die aan de zijden van  $\triangle ABC$  raakt.

Als nu door een punt, dat niet op  $l_\infty$  ligt, twee onderling loodrechte WALLACE-rechten gaan, is dat punt middelpunt van een orth. hyperbool door A, B en C. Verder is de negenpunts-cirkel middelpuntskegelsnede van den bundel orth. hyperbolen door A, B en C. Dus:

*De meetkundige plaats van de punten in het eindige, waardoor twee onderling loodrechte Wallace-rechten gaan, is de negenpunts-cirkel van  $\triangle ABC$ .*

3. Om nu de richtingen van de keerraaklijnen van  $K$  ten opzichte van  $\triangle ABC$  te berekenen, voeren we op  $K$  een rationale parameter  $t$  in. Stellen we de lijn BC door  $a$  voor ( $a$  raakt aan  $K$ ) en een willekeurige raaklijn door  $x$ , dan nemen we:

$$t_x = (x_\infty, a_\infty, I, J).$$

(Door elk punt van  $l_\infty$  gaat, behalve de dubbelraaklijn — 2 maal geteld — nog slechts één raaklijn aan  $K$ ). We kunnen ook zetten

$$t_x = e^{2i \angle(x, a)}.$$

(Draaizin bepaald door de omloopszin van  $\triangle ABC$ , zie fig. 2).

De incidentievoorwaarde — d.w.z. de voorwaarde, dat drie raaklijnen  $x_1, x_2, x_3$  door één punt gaan — luidt, homogeen gemaakt ( $t = \frac{\sigma}{\tau}$ ):

$$F \equiv A\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + B \Sigma \sigma_1\sigma_2\tau_3 + C \Sigma \sigma_1\tau_2\tau_3 + D\tau_1\tau_2\tau_3 = 0.$$

Aan de dubbelraaklijn zijn toegevoegd de parameterwaarden  $(1, 0)$  en  $(0, 1)$ . Voor  $\sigma_1 = \tau_2 = 1$  en  $\sigma_2 = \tau_1 = 0$  moet dus  $F = 0$  zijn, identiek in  $\sigma_3$  en  $\tau_3$ , zoodat:

$$B \sigma_3 + C \tau_3 \equiv 0.$$

Ergo  $B = C = 0$ . De incidentievoorwaarde luidt dan:

$$A \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + D \tau_1\tau_2\tau_3 = 0$$

of:

$$t_1 t_2 t_3 = C_1 \text{ (constant).}$$

De constante bepalen we als volgt:  $a, b, c$  zijn bijzondere standen van de rechte van WALLACE, evenals  $h_a, h_b, h_c$  (de hoogtelijnen).

Nu gaan  $b, c$  en  $h_a$  door één punt, zoodat:

$$C_1 = t_b t_c t_{h_a}.$$

Verder is, daar  $h_a$  loodrecht op  $a$  staat:

$$t_{h_a} = (h_a, a_{\infty}, I, J) = -1.$$

De incidentievoorwaarde wordt dus:

$$t_1 t_2 t_3 = -t_b t_c.$$

De keerraaklijnen vinden we nu uit de vergelijking

$$t_x^3 = -t_b t_c$$

of

$$3 \angle(x, a) \equiv \angle(b, a) + \angle(c, a) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

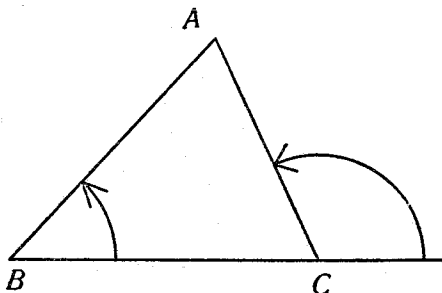


Fig. 2.

Uit fig. 2 blijkt, dat  $\angle(b, a) \equiv \pi - \gamma$  en  $\angle(c, a) \equiv \beta$ .

Derhalve:  $3 \angle(x, a) \equiv \frac{3\pi}{2} + \beta - \gamma \pmod{\pi}$ .

$$\angle(x, a) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\beta - \gamma}{3} \pmod{\frac{\pi}{3}}.$$

Daar de hoek, die één der zijden van den driehoek van MORLEY met  $a$  maakt, gelijk is aan  $\frac{1}{3}(\beta - \gamma)$ , volgt hieruit, dat de keerraaklijnen van  $K$  hoeken van  $120^\circ$  met elkaar

maken en loodrecht staan op de zijden van den driehoek van MORLEY.

De in den aanvang genoemde stelling is hiermee bewezen. Een paar bekende, in het artikel van prof. VAN DER WOUDE genoemde eigenschappen, kunnen wij hierbij gemakkelijk laten aansluiten.

4. De keerraaklijnen zijn de zwaartelijnen in den driehoek, gevormd door de keerpunten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ .

Dit blijkt direct, door de volgende bekende stelling dualistisch om te zetten en te bedenken, dat  $l_\infty$  dubbelraaklijn van  $K$  is.

De drie buigpunten van een rationale derdegraadskromme (met dubbelpunt) liggen op één rechte, die *harmonicaal* is toegevoegd aan het dubbelpunt ten opzichte van den driehoek, gevormd door de buigraaklijnen.

Aangezien deze zwaartelijnen volgens 3 hoeken van  $120^\circ$  met elkaar maken, is de driehoek  $PQR$  gelijkzijdig.

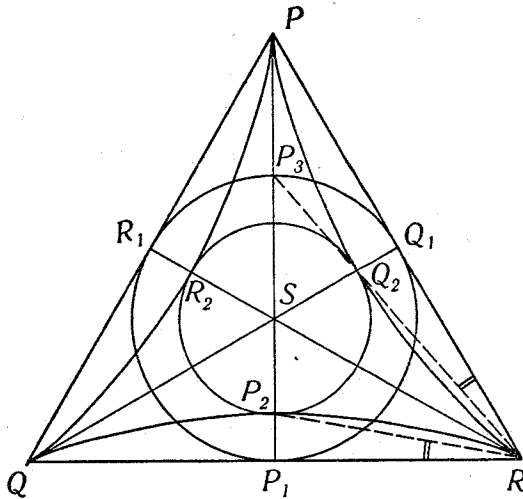


Fig. 3.

5. Wanneer we  $K$  ten opzichte van  $\triangle PQR$  isogonaal transformeeren, ontstaat een kegelsnede, die de zijden van  $\triangle PQR$  in hun middens  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$  aanraakt (dit is direct

in te zien, door  $\triangle PQR$  als coördinatendriehoek te nemen, en te bedenken, dat  $K$  een 4de-graadskromme is), dus de *ingeschreven cirkel* van  $\triangle PQR$ . Hieruit volgt de driezijdige symmetrie van  $K$ . (fig. 3).

Door de punten  $P_2Q_2R_2$ , waar de keerraaklijnen uit resp.  $P$ ,  $Q$  en  $R$  de kromme voor de tweede maal snijden, kunnen dus twee onderling loodrechte raaklijnen aan  $K$  worden getrokken. Volgens 2 liggen deze punten dan op den negenpuntscirkel van  $\triangle ABC$ . Bijgevolg, wegens  $SP_2 = SQ_2 = SR_2$ :

*De keerraaklijnen gaan door het middelpunt van den negenpuntscirkel van  $\triangle ABC$ .*

Tenslotte blijkt nog, dat  $PS = 3P_2S$ , door toepassing van de stelling van MENELAOS op  $\triangle PQ_1S$  met transversaal  $RP_3$ , die door  $Q_2$  gaat wegens  $\angle P_3RP = \angle P_2RQ$  (isogonale toevoeging), en  $\triangle RQ_2Q_1 \cong \triangle RP_2P_1$ .

(Ingekomen 16-3-'40).