Over de hypocycloïde van Steiner-Schläfli

OVER DE HYPOCYCLOÏDE VAN STEINER-SCHLÄFLI

DOOR

N. G. DE BRUIJN.

(Den Haag).

In Mathematica Jg. 8 no. V (p. 129—134) bewees Prof. dr. W. VAN DER WOUDE, dat de keerraaklijnen van de *hypocycloïde van Steiner-Schläfli* — d.i. de omhullende van de rechten van WALLACE van een driehoek ABC — door het middelpunt van den negenpuntscirkel van $\triangle$ ABC gaan, en loodrecht staan op de zijden van den driehoek van MORLEY.

Het hier volgende heeft ten doel, deze resultaten af te leiden met behulp van enkele projectieve stellingen over rationale derdeklassekrommen met één dubbelraaklijn. Wegens de betrekkelijke eenvoud van de stelling van MORLEY beperk ik mij tot de hypocycloïde.

1. De rechte van WALLACE is te beschouwen als topraaklijn van een parabool, die aan de zijden van $\triangle$ ABC raakt. We kunnen nu laten zien, dat de omhullende K van de rechten van WALLACE een kromme van de derde klasse is, die l_∞ tot dubbelraaklijn heeft, met raakpunten in de isotrope punten I en J. We leggen daartoe de punten O_2 en O_3 van een coördinatendriehoek $O_1O_2O_3$ in I en J. De vergelijking van de schaar van parabolen, die aan de zijden van $\triangle$ ABC raken, luidt dan in lijncoördinaten:

$$(1) \ldots F \equiv \Sigma A_{ik}\xi_i\xi_k + \lambda \Sigma B_{ik}\xi_i\xi_k = 0 \qquad (A_{11}=B_{11}=0).$$

Het oneigenlijke punt van $F = 0$ is het punt, waarin $F = 0$ aan de lijn (1, 0, 0) raakt, dus het punt:

$$(2) \ldots \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \equiv A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + \lambda(B_{12}\xi_2 + B_{13}\xi_3) = 0.$$

Het oneigenlijke punt van de topraaklijn is hieraan harmonisch toegevoegd ten opzichte van I en J, het is dus het punt:

$$A_{12}\xi_2 - A_{13}\xi_3 + \lambda(B_{12}\xi_2 - B_{13}\xi_3) = 0.$$

K wordt nu verkregen door eliminatie van λ uit (1) en (2), dus

$$K \equiv (B_{12}\xi_2 - B_{13}\xi_3)\,\Sigma A_{ik}\xi_i\xi_k - (A_{12}\xi_2 - A_{13}\xi_3)\,\Sigma B_{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

In deze vergelijking ontbreken (wegens $A_{11} = A_{22} = 0$) de termen met ξ_1^3, $\xi_1^2\xi_2$, $\xi_1^2\xi_3$, $\xi_1\xi_2^2$ en $\xi_1\xi_3^2$, zoodat *K* in O_2 en O_3 aan O_2O_3 raakt.

K moet dan verder rationaal zijn en 3 keerpunten bezitten; de graad is 4.

2. We kunnen de rechten van WALLACE ook nog op andere wijze voorstellen, nl. als asymptoten van orthogonale hyperbolen door A, B en C. Beschouw daartoe een parabool

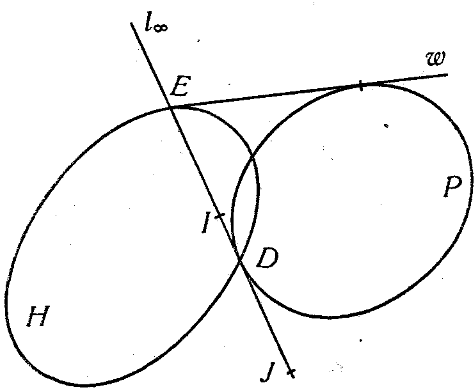

Fig. 1.

P met topraaklijn *w* en oneigenlijk punt D, *ingeschreven* in $\triangle$ABC, en daarbij een orthogonale hyperbool *H*, *omgeschreven* om $\triangle$ ABC en gaande door D (en dus ook door het oneigenlijke punt E van *w*) (fig. 1).

Volgens de stelling van PONCELET raakt nu *w* aan *H*, zoodat *w* asymptoot is van *H*. Omgekeerd is een asymptoot van een om $\triangle$ ABC beschreven orthogonale hyperbool steeds topraaklijn van een parabool, die aan de zijden van $\triangle$ ABC raakt.

Als nu door een punt, dat niet op l_∞ ligt, twee onderling loodrechte WALLACE-rechten gaan, is dat punt middelpunt van een orth. hyperbool door A, B en C. Verder is de negenpuntscirkel middelpuntskegelsnede van den bundel orth. hyperbolen door A, B en C. Dus:

De meetkundige plaats van de punten in het eindige, waardoor twee onderling loodrechte Wallace-rechten gaan, is de negenpuntscirkel van $\triangle$ ABC.

3. Om nu de richtingen van de keerraaklijnen van K ten opzichte van $\triangle$ ABC te berekenen, voeren we op K een rationale parameter t in. Stellen we de lijn BC door a voor (a raakt aan K) en een willekeurige raaklijn door x, dan nemen we:

$$t_x = (x_\infty, a_\infty, \mathrm{I}, \mathrm{J}).$$

(Door elk punt van l_∞ gaat, behalve de dubbelraaklijn — 2 maal geteld — nog slechts één raaklijn aan K). We kunnen ook zetten

$$t_x = e^{2i\angle(x,a)}.$$

(Draaizin bepaald door de omloopszin van $\triangle$ ABC, zie fig. 2).

De incidentievoorwaarde — d.w.z. de voorwaarde, dat drie raaklijnen x_1, x_2, x_3 door één punt gaan — luidt, homogeen gemaakt ($t = \dfrac{\sigma}{\tau}$):

$$\mathrm{F} \equiv \mathrm{A}\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \mathrm{B}\,\Sigma\,\sigma_1\sigma_2\tau_3 + \mathrm{C}\,\Sigma\,\sigma_1\tau_2\tau_3 + \mathrm{D}\tau_1\tau_2\tau_3 = 0.$$

Aan de dubbelraaklijn zijn toegevoegd de parameterwaarden (1, 0) en (0, 1). Voor $\sigma_1 = \tau_2 = 1$ en $\sigma_2 = \tau_1 = 0$ moet dus $\mathrm{F} = 0$ zijn, identiek in σ_3 en τ_3, zoodat:

$$\mathrm{B}\,\sigma_3 + \mathrm{C}\,\tau_3 \equiv 0.$$

Ergo $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$. De incidentievoorwaarde luidt dan:

$$\mathrm{A}\,\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \mathrm{D}\,\tau_1\tau_2\tau_3 = 0$$

of:

$$t_1t_2t_3 = \mathrm{C}_1 \text{ (constant)}.$$

De constante bepalen we als volgt: a, b, c zijn bijzondere standen van de rechte van WALLACE, evenals h_a, h_b, h_c (de hoogtelijnen).

Nu gaan b, c en h_a door één punt, zoodat:

$$C_1 = t_b t_c t_{h_a}.$$

Verder is, daar h_a loodrecht op a staat:

$$t_{h_a} = (h_a, a_\infty, \mathrm{I}, \mathrm{J}) = -1.$$

De incidentievoorwaarde wordt dus:

$$t_1 t_2 t_3 = -t_b t_c.$$

De keerraaklijnen vinden we nu uit de vergelijking

$$t_x^3 = -t_b t_c$$

of

$$3 \angle (x, a) \equiv \angle (b, a) + \angle (c, a) + \frac{\pi}{2} \text{ (mod. } \pi).$$

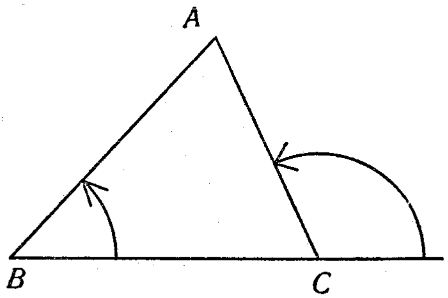

Fig. 2.

Uit fig. 2 blijkt, dat $\angle (b, a) \equiv \pi - \gamma$ en $\angle (c, a) \equiv \beta$.

Derhalve: $3 \angle (x, a) \equiv \frac{3\pi}{2} + \beta - \gamma$ (mod π).

$$\angle (x, a) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\beta - \gamma}{3} \left(\text{mod } \frac{\pi}{3}\right).$$

Daar de hoek, die één der zijden van den driehoek van MORLEY met a maakt, gelijk is aan $\frac{1}{3}(\beta - \gamma)$, volgt hieruit, dat de keerraaklijnen van K hoeken van 120° met elkaar maken en loodrecht staan op de zijden van den driehoek van MORLEY.

De in den aanvang genoemde stelling is hiermee bewezen. Een paar bekende, in het artikel van prof. VAN DER WOUDE genoemde eigenschappen, kunnen wij hierbij gemakkelijk laten aansluiten.

4. *De keerraaklijnen zijn de zwaartelijnen in den driehoek, gevormd door de keerpunten* P, Q, R.

Dit blijkt direct, door de volgende bekende stelling dualistisch om te zetten en te bedenken, dat l_∞ dubbelraaklijn van K is.

De drie buigpunten van een rationale derdegraadskromme (met dubbelpunt) liggen op één rechte, die *harmonicaal* is toegevoegd aan het dubbelpunt ten opzichte van den driehoek, gevormd door de buigraaklijnen.

Aangezien deze zwaartelijnen volgens **3** hoeken van 120° met elkaar maken, is de driehoek PQR *gelijkzijdig*.

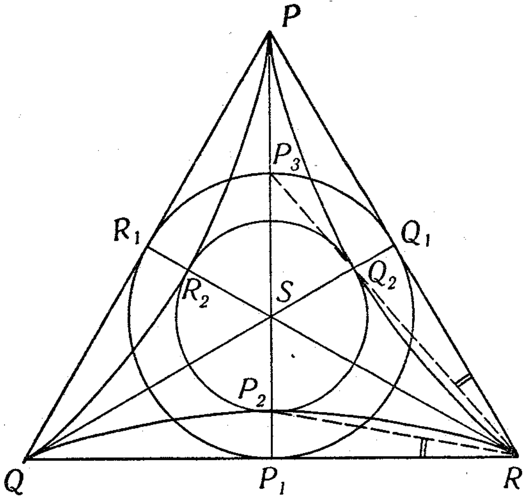

Fig. 3.

5. Wanneer we K ten opzichte van $\triangle$ PQR isogonaal transformeeren, ontstaat een kegelsnede, die de zijden van $\triangle$ PQR in hun middens P_1, Q_1, R_1 aanraakt (dit is direct in te zien, door $\triangle$ PQR als coördinatendriehoek te nemen, en te bedenken, dat K een 4de-graadskromme is), dus de *ingeschreven cirkel* van $\triangle$ PQR. Hieruit volgt de driezijdige symmetrie van K. (fig. 3).

Door de punten $P_2Q_2R_2$, waar de keerraaklijnen uit resp. P, Q en R de kromme voor de tweede maal snijden, kunnen dus twee onderling loodrechte raaklijnen aan K worden getrokken. Volgens **2** liggen deze punten dan op den negenpuntscirkel van $\triangle$ ABC. Bijgevolg, wegens $SP_2 = SQ_2 = SR_2$:

De keerraaklijnen gaan door het middelpunt van den negenpuntscirkel van $\triangle$ ABC.

Tenslotte blijkt nog, dat $PS = 3P_2S$, door toepassing van de stelling van Menelaos op $\triangle PQ_1S$ met transversaal RP_3, die door Q_2 gaat wegens $\angle P_3RP = \angle P_2RQ$ (isogonale toevoeging), en $\triangle RQ_2Q_1 \cong \triangle RP_2P_1$.

(Ingekomen 16-3-'40).