Het ontwerpen van stangenmechanismen (6)

Het ontwerpen van stangenmechanismen

DR. E. A. DIJKSMAN**

slot*

6. DE BEREKENING VAN DE BURMESTER-PUNTEN BIJ VIJF STANDEN

Bij vijf standen van het bewegende vlak heeft men de tien polen P_{12}, P_{23}, P_{31}, P_{14}, P_{42}, P_{43}, P_{15}, P_{25}, P_{35} en P_{45}. Hierbij horen de middelpuntskrommen: m_{1234}, m_{1235}, m_{1245}, m_{1345} en m_{2345}.
Twee van deze krommen snijden elkaar in $3 \times 3 = 9$ punten, waaronder de twee isotrope punten en een drietal polen, die in het algemeen geen middelpunten kunnen zijn van cirkels waarop vijf posities van een baanpunt zijn gelegen. Voor de resterende vier snijpunten is dit laatste wel het geval. Zulke punten worden de punten van Burmester genoemd. De vier punten van Burmester liggen alle op de vijf hiervoor genoemde middelpuntskrommen. Voor de constructie van de punten van Burmester is het voldoende, wanneer men de snijpunten opzoekt van twee middelpuntskrommen en daarbij de drie polen af laat vallen.

De juiste posities van de vier Burmesterpunten kunnen als volgt worden berekend:
De middelpuntskromme heeft op grond van haar identificering met de polenkromme, de vergelijking:

$$L_kC_j - L_jC_k = 0 \qquad (m_{1234}) \qquad (1)$$

Hierbij zijn de rechten L_k en L_j twee overstaande zijden van een polenvierhoek en C_k en C_j de cirkels, die deze zelfde zijden tot middellijn hebben (zie deel 1).
Bij vier standen horen drie polenvierhoeken ($\square P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$, $\square P_{13}P_{32}P_{24}P_{41}$ en $\square P_{14}P_{43}P_{32}P_{21}$ bij de standen 1, 2, 3 en 4), die ieder twee paren overstaande zijden bezitten, zodat er $3 \times 2 = 6$ verschillende betekenissen aan de notatie (1) kunnen worden gegeven.
Bij vijf standen bestaan vijf polenkrommen. Van belang zijn nu de snijpunten van twee van deze krommen, bijvoorbeeld m_{1234} en m_{1235}. Deze laatste hebben behalve de twee isotrope punten en de vier punten van Burmester ook nog de polen P_{12}, P_{23} en P_{31} gemeen. Van deze wetenschap kan, bij het opstellen van de vergelijkingen van de beide polenkrommen, gebruik worden gemaakt, door zowel voor m_{1234} als voor m_{1235} uit te gaan van een polenvierhoek, waarvan althans één zijde een zijde van de pooldriehoek $P_{12}P_{23}P_{31}$ is. Dit kan nog op drie manieren.
Maar elk van deze stelt ons in staat zowel de vergelijking voor m_{1234} als die voor m_{1235} met een gemeenschappelijke uitdrukking voor L_j en een voor C_j te noteren. Kiest men bijvoorbeeld de zijde $\overline{P_{12}P_{23}}$ van de pooldriehoek als de gemeenschappelijke zijde van de twee poolvierhoeken, dan heeft men voor deze poolvierhoeken geen andere keuze dan $\square P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ behorend bij m_{1234} en $\square P_{12}P_{23}P_{35}P_{51}$ behorend bij m_{1235} (zie figuur 82).
L_j en C_j hebben dan in vergelijking (1) betrekking op de gemeenschappelijke zijde $\overline{P_{12}P_{23}}$, terwijl L_k en C_k slaan op de overstaande zijde $\overline{P_{34}P_{41}}$ van $\square P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$.
Analoog hebben L_j en C_j in de vergelijking

$$L'_kC_j - L_jC'_k = 0 \qquad (m_{1235}) \qquad (2)$$

betrekking op de gemeenschappelijke zijde $\overline{P_{12}P_{23}}$, terwijl L'_k en C'_k slaan op de overstaande zijde $\overline{P_{35}P_{51}}$ van $\square P_{12}P_{23}P_{35}P_{51}$.
In parametervorm krijgt (1) de gedaante:

$$(m_{1234}) \begin{cases} C_k - \lambda\, C_j = 0 & (3) \\ L_k - \lambda\, L_j = 0 & (4) \end{cases}$$

en analoog

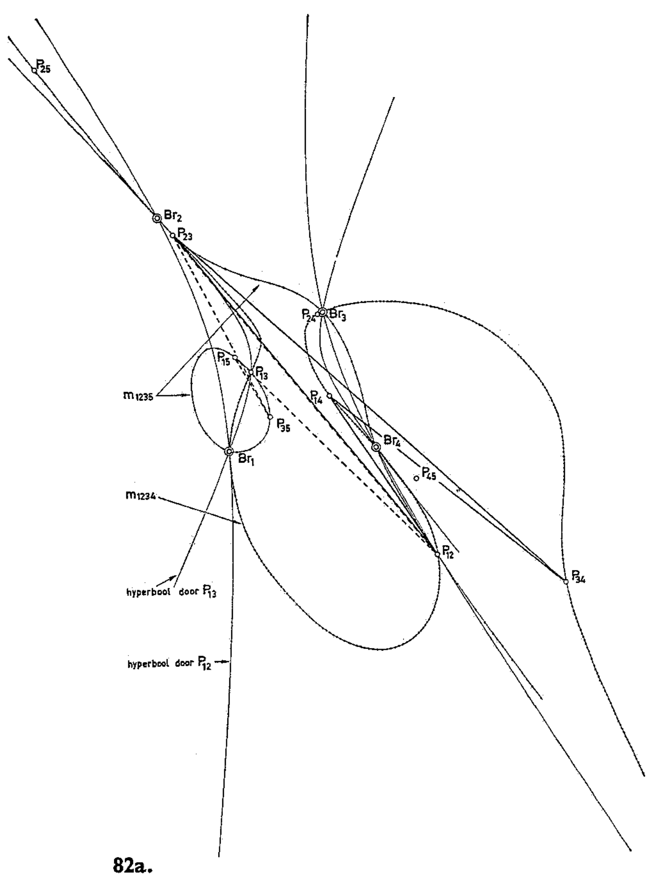
$$(m_{1235}) \begin{cases} C'_k - \lambda' C_j = 0 & (5) \\ L'_k - \lambda' L_j = 0 & (6) \end{cases}$$

Elk punt van Burmester voldoet aan de laatste vier vergelijkingen voor zeer bepaalde waarden van λ en λ'.
Ze voldoen dus ook alle vier aan de betrekking

$$(1 - \lambda')\,(C_k - \lambda C_j) - (1 - \lambda)\,(C'_k - \lambda' C_j) = 0$$

en dus aan

$$(1 - \lambda')C_k - (1 - \lambda)C'_k + \{(1 - \lambda) - (1 - \lambda')\}C_j = 0.$$



82a.

*) Deel 1, P.T. Werktuigbouw **22** (19) 808 (20) 847 (1967)
Deel 2, P.T. Werktuigbouw **22** (21) 903 (1967)
Deel 3, P.T. Werktuigbouw **22** (22) 948 (1967)
Deel 4, P.T. Werktuigbouw **22** (23) 984 (1967)
Deel 5, P.T. Werktuigbouw **22** (24) 1033 (1967)

**) Wetenschappelijk hoofdmedewerker aan de T.H. te Eindhoven.
De tekeningen zijn verzorgd door de heer H. A. Bulten.

Na deling door $1 - \lambda'$ en de verkorte schrijfwijze

$$\boxed{\frac{1-\lambda}{1-\lambda'} = \mu} \tag{7}$$

komt er

$$(C_k - C_j) - \mu\,(C'_k - C_j) = 0 \tag{8}$$

en analoog

$$(L_k - L_j) - \mu\,(L'_k - L_j) = 0 \tag{9}$$

Betrekking (8) stelt een lijnenwaaier voor. Betrekking (9) ook. Eliminatie van μ leidt dus tot de kegelsnede:

$$\underline{(C_k - C_j)\,(L'_k - L_j) - (C'_k - C_j)\,(L_k - L_j) = 0} \tag{10}$$

En dit is een kegelsnede door de vier punten van Burmester en door de pool P_{13}.

De kegelsnede gaat niet meer door de isotrope punten, zoals ook de machtlijn $C_2 - C_1 = 0$ van de cirkels C_1 en C_2 een lijn is zonder isotrope punten.

Ook de polen P_{12} en P_{23} zijn niet meer op de kegelsnede (10) terug te vinden. Dit kan worden verklaard uit het feit, dat zowel voor het gemeenschappelijke punt P_{12} als voor het gemeenschappelijke punt P_{23} van m_{1234} en m_{1235}: $1/\lambda = 1/\lambda' = 0$. Uit (7) volgt, dat *beide* punten P_{12} en P_{23}, zo ze punten van de kegelsnede (10) zijn, dan worden aangewezen door de parameterwaarde $\mu = 1$. Dit is onmogelijk, omdat iedere waarde voor μ met slechts één punt van de kegelsnede correspondeert. De gemaakte onderstelling, dat P_{12} en P_{23} beide op de kegelsnede lagen, was dus onjuist. (Voorkeur voor een van beide punten kan worden uitgesloten, wegens hun gelijkwaardigheid in deze problematiek).

De kegelsnede (10) is door vijf punten bepaald. Deze zijn in dit geval onmiddellijk aan te wijzen:

het snijpunt E van de machtlijn met als vergelijking $C_k - C_j = 0$ van de cirkels C_k en C_j met de machtlijn ($C'_k - C_j = 0$) van de cirkels C'_k en C_j,

het snijpunt F van de machtlijn van de cirkels C_k en C_j met de rechte gaande door het snijpunt van de rechten L_k en L_j in een richting evenwijdig aan de verbindingslijn van de middens van de diagonalen van $\square P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ (de vergelijking van de bedoelde rechte door F is $L_k - L_j = 0$),

het snijpunt G van de machtlijn van de cirkels C'_k en C_j met de rechte gaande door het snijpunt van de rechten L'_k en L_j in een richting evenwijdig aan de verbindingslijn van de middens van de diagonalen van $\square P_{12}P_{23}P_{35}P_{51}$ (de vergelijking van deze rechte is $L'_k - L_j = 0$),

het snijpunt H van de rechte $L'_k - L_j = 0$ met de rechte $L_k - L_j = 0$ en tenslotte

het punt P_{13}.

Wordt een *andere* zijde van de pooldriehoek $P_{12}P_{23}P_{31}$ genomen als gemeenschappelijke zijde van de twee poolvierhoeken, dan wordt een andere kegelsnede verkregen. Op deze wijze doorgaande verkrijgt men in totaal drie kegelsneden, die alle door dezelfde vier punten van Burmester gaan en ieder van deze kegelsneden gaat door een ander hoekpunt van de pooldriehoek $P_{12}P_{23}P_{31}$. Ze behoren alle drie tot dezelfde bundel kegelsneden.

In totaal kunnen op tien verschillende manieren twee uit vijf polenkrommen met elkaar worden gecombineerd. Iedere combinatie leidt tot drie kegelsneden. In totaal dus dertig kegelsneden, die ieder door de vier punten van Burmester en door een pool gaan. Er zijn slechts tien polen en dus ook niet meer dan tien onderling verschillende kegelsneden, omdat twee kegelsneden, die een zelfde pool en vier Burmesterpunten gemeen hebben, identiek zijn. Ze behoren alle tien tot dezelfde bundel kegelsneden.

(In dit verband is het interessant op te merken, dat E. Hackmüller (2) in 1938 dezelfde kegelsneden verkreeg door gebruik te maken van een uitdrukking voor de middelpuntskromme in complexe coördinaten (1)).

Uitvoering van de berekening

Er wordt uitgegaan van de coördinaten van de polen: $P_{12}(x_0, y_0)$; $P_{23}(x_1, y_1)$; $P_{34}(x_2, y_2)$; $P_{41}(x_3, y_3)$; $P_{13}(x_4, y_4)$; $P_{35}(x_5, y_5)$; $P_{54}(x_6, y_6)$; $P_{42}(x_7, y_7)$; $P_{25}(x_8, y_8)$ en $P_{51}(x_9, y_9)$ zodat

$$P_{34}P_{41} \equiv L_k \equiv (x - x_2)(y_3 - y_2) - (y - y_2)(x_3 - x_2)$$
$$\equiv x(y_3 - y_2) - y(x_3 - x_2) - x_2y_3 + x_3y_2 (= 0)$$

en analoog

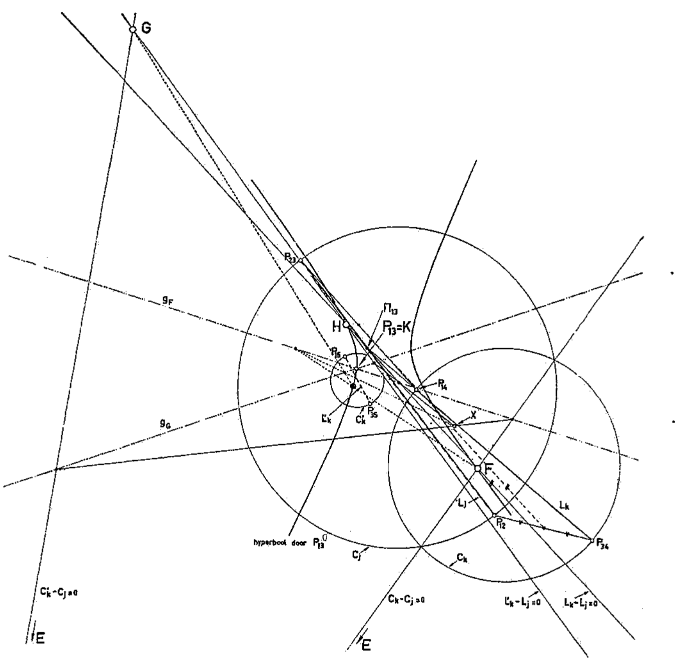
$$P_{35}P_{51} \equiv L'_k \equiv x(y_9 - y_5) - y(x_9 - x_5) - x_5y_9 + x_9y_5 \;(= 0)$$
$$P_{12}P_{23} \equiv L_j \equiv x(y_1 - y_0) - y(x_1 - x_0) - x_0y_1 + x_1y_0 \;(= 0)$$

en voorts

$$C_k \equiv \left(x - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)^2 - \left\{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2\right\} \equiv x^2 + y^2 - (x_2 + x_3)x - (y_2 + y_3)y + x_2x_3 + y_2y_3 \;(= 0)$$

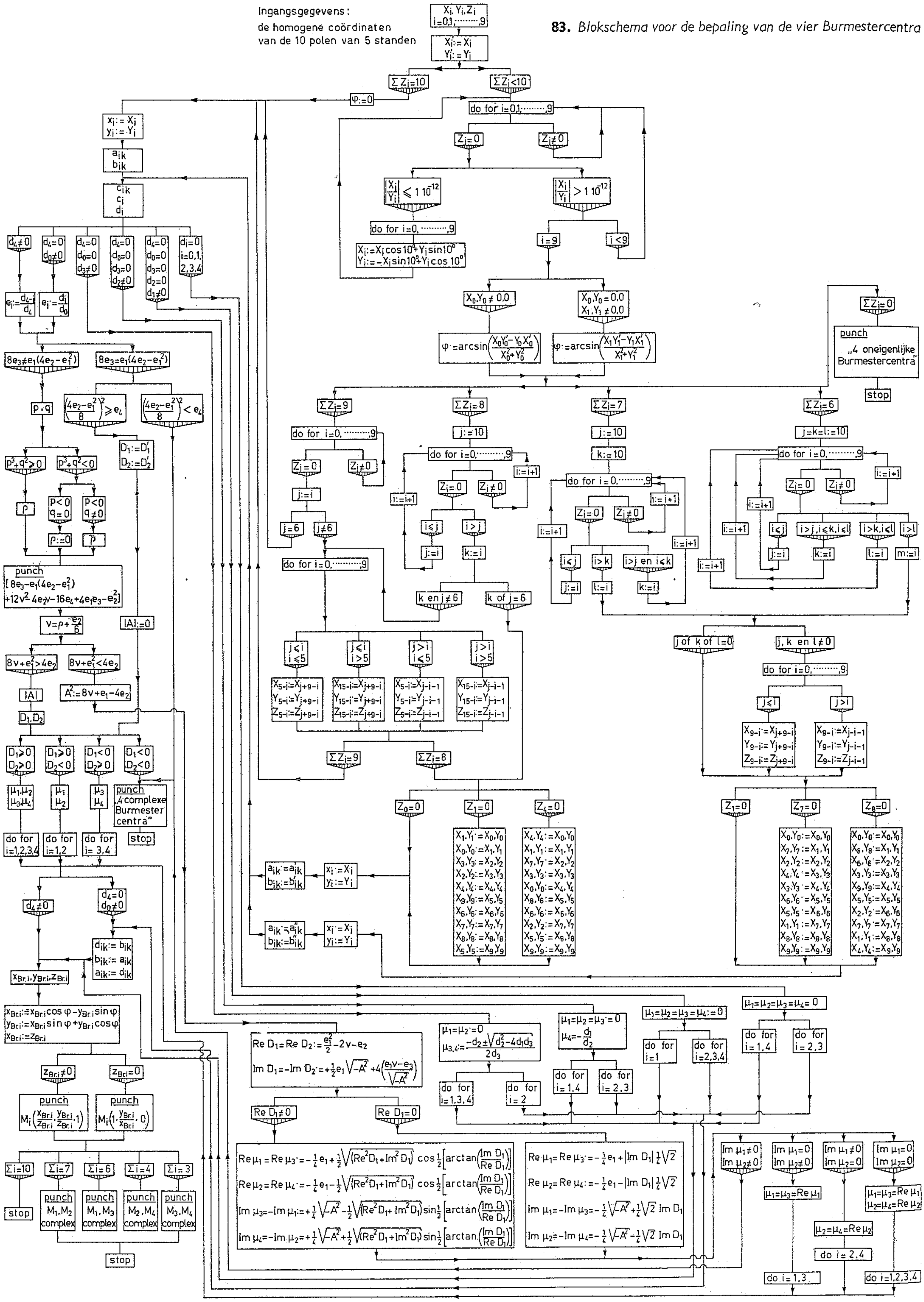
en analoog

$$C'_k \equiv x^2 + y^2 - (x_5 + x_9)x - (y_5 + y_9)\,y + x_5x_9 + y_5y_9 \;(= 0)$$
$$C_j \equiv x^2 + y^2 - (x_0 + x_1)\,x - (y_0 + y_1)y + x_0x_1 + y_0y_1 \;(= 0)$$



82b. *Constructie van de kegelsnede door vijf punten E, F G, H en K = P_{13}. Iedere straal door G en iedere straal door F, die elkaar in een punt van de kegelsnede snijden, snijden twee willekeurig gekozen rechten g_G en g_F door K in respectieve punten, waarvan de verbindingslijn door een vast punt X gaat*

1) *Teken twee rechten g_G en g_F door K*
2) *Snijd EG met g_G en EF met g_F en verbind de snijpunten*
3) *Snijd HG met g_G en HF met g_F en verbind de snijpunten*
4) *Het snijpunt van de verbindingslijnen is het punt X*
5) *Snijd een willekeurige straal door X respectievelijk met g_G en met g_F*
6) *Verbind het snijpunt van de straal met g_G met G en het snijpunt van de straal met g_F met F*
7) *Het snijpunt van de twee verbindingslijnen geeft dan een punt van de kegelsnede*



83. *Blokschema voor de bepaling van de vier Burmestercentra*

Hieruit volgt dat

$$\left\{\begin{aligned} C_k - C_j &\equiv (x_o + x_1 - x_2 - x_3)\,x + (y_o + y_1 - y_2 - y_3)\,y + \\ &\quad + x_2x_3 - x_ox_1 + y_2y_3 - y_oy_1 \\ C'_k - C_j &\equiv (x_o + x_1 - x_5 - x_9)x + (y_o + y_1 - y_5 - y_9)\,y + \\ &\quad + x_5x_9 - x_oy_1 + y_5y_9 - y_oy_1 \end{aligned}\right.$$

terwijl

$$\left\{\begin{aligned} L_k - L_j &\equiv (y_o - y_1 - y_2 + y_3)x - (x_o - x_1 - x_2 + x_3)y + \\ &\quad + x_oy_1 - x_2y_3 - x_1y_o + x_3y_2 \\ L'_k - L_j &\equiv (y_o - y_1 - y_5 + y_9)x - (x_o - x_1 - x_5 + x_9)y + \\ &\quad + x_oy_1 - x_5y_9 - x_1y_o + x_9y_5 \end{aligned}\right.$$

Stelt men

$$\boxed{\begin{aligned} x_o + x_1 - x_2 - x_3 &= a_{11} \\ y_o + y_1 - y_2 - y_3 &= a_{12} \\ x_2x_3 + y_2y_3 - x_ox_1 - y_oy_1 &= a_{13} \\ y_o - y_1 - y_2 + y_3 &= a_{21} \\ -x_o + x_1 + x_2 - x_3 &= a_{22} \\ x_oy_1 - x_2y_3 - x_1y_o + x_3y_2 &= a_{23} \\ \text{en}\qquad & \\ x_o + x_1 - x_5 - x_9 &= b_{11} \\ y_o + y_1 - y_5 - y_9 &= b_{12} \\ x_5x_9 - x_ox_1 + y_5y_9 - y_oy_1 &= b_{13} \\ y_o - y_1 - y_5 + y_9 &= b_{21} \\ -x_o + x_1 + x_5 - x_9 &= b_{22} \\ x_oy_1 - x_5y_9 - x_1y_o + x_9y_5 &= b_{23} \end{aligned}}$$

dan krijgt (8) de gedaante:

$$(a_{11} - \mu b_{11})x + (a_{12} - \mu b_{12})y + a_{13} - \mu b_{13} = 0 \tag{11}$$

en (9) wordt:

$$(a_{21} - \mu b_{21})x + (a_{22} - \mu b_{22})y + a_{23} - \mu b_{23} = 0 \tag{12}$$

Gaat men uit van de vierzijden $P_{12}P_{13}P_{34}P_{42}$ en $P_{12}P_{13}P_{35}P_{52}$ met $\overline{P_{12}P_{13}}$ als de gemeenschappelijke zijde, dan verkrijgt men de analoge betrekkingen

$$(a_{31} - \mu' b_{31})x + (a_{32} - \mu' b_{32})y + a_{33} - \mu' b_{33} = 0 \tag{13}$$

$$(a_{41} - \mu' b_{41})x + (a_{42} - \mu' b_{42})y + a_{43} - \mu' b_{43} = 0 \tag{14}$$

Hierbij zijn de polen P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}, P_{35} en P_{15} achtereenvolgens vervangen door de polen P_{12}, P_{13}, P_{34}, P_{42}, P_{35} en P_{25}, zodat de indices van hun coördinaten, te weten 0, 1, 2, 3, 5 en 9 vervangen worden door de opeenvolgende getallen 0, 4, 2, 7, 5 en 8.

Men vindt zo de betrekkingen:

$$\boxed{\begin{aligned} x_o + x_4 - x_2 - x_7 &= a_{31} \\ y_o + y_4 - y_2 - y_7 &= a_{32} \\ x_2x_7 + y_2y_7 - x_ox_4 - y_oy_4 &= a_{33} \\ y_o - y_4 - y_2 + y_7 &= a_{41} \\ -x_o + x_4 + x_2 - x_7 &= a_{42} \\ x_oy_4 - x_2y_7 - x_4y_o + x_7y_2 &= a_{43} \\ \text{en}\qquad & \\ x_o + x_4 - x_5 - x_8 &= b_{31} \\ y_o + y_4 - y_5 - y_8 &= b_{32} \\ x_5x_8 - x_ox_4 + y_5y_8 - y_oy_4 &= b_{33} \\ y_o - y_4 - y_5 + y_8 &= b_{41} \\ -x_o + x_4 + x_5 - x_8 &= b_{42} \\ x_oy_4 - x_5y_8 - x_4y_o + x_8y_5 &= b_{43} \end{aligned}}$$

Eliminatie van x en y uit (11), (12) en (13) leidt tot de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & a_{12} - \mu b_{12} & a_{13} - \mu\, b_{13} \\ a_{21} - \mu b_{21} & a_{22} - \mu b_{22} & a_{23} - \mu\, b_{23} \\ a_{31} - \mu' b_{31} & a_{32} - \mu' b_{32} & a_{33} - \mu' b_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

Eliminatie van x en y uit (11), (12) en (14) geeft:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & a_{12} - \mu b_{12} & a_{13} - \mu\, b_{13} \\ a_{21} - \mu b_{21} & a_{22} - \mu b_{22} & a_{23} - \mu\, b_{23} \\ a_{41} - \mu' b_{41} & a_{42} - \mu' b_{42} & a_{43} - \mu' b_{43} \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Ontwikkelt men beide determinanten naar de laatste rij, dan komt er:

$$(a_{31} - \mu' b_{31})Q_{31} - (a_{32} - \mu' b_{32})Q_{32} + (a_{33} - \mu' b_{33})Q_{33} = 0$$
$$(a_{41} - \mu' b_{41})Q_{31} - (a_{42} - \mu' b_{42})Q_{32} + (a_{43} - \mu' b_{43})Q_{33} = 0$$

zodat

$$a_{31}Q_{31} - a_{32}Q_{32} + a_{33}Q_{33} - \mu'(b_{31}Q_{31} - b_{32}Q_{32} + b_{33}Q_{33}) = 0$$
$$a_{41}Q_{31} - a_{42}Q_{32} + a_{43}Q_{33} - \mu'(b_{41}Q_{31} - b_{42}Q_{32} + b_{43}Q_{33}) = 0$$

Eliminatie van μ' uit de laatste twee betrekkingen leidt tot de determinant:

$$\begin{vmatrix} (a_{31}Q_{31} - a_{32}Q_{32} + a_{33}Q_{33}) & (b_{31}Q_{31} - b_{32}Q_{32} + b_{33}Q_{33}) \\ (a_{41}Q_{31} - a_{42}Q_{32} + a_{43}Q_{33}) & (b_{41}Q_{31} - b_{42}Q_{32} + b_{43}Q_{33}) \end{vmatrix} = 0$$

of

$$\begin{aligned} &(a_{31}b_{41} - a_{41}b_{31})Q_{31}^2 + (a_{41}b_{32} - a_{31}b_{42} - a_{32}b_{41} + \\ &+ a_{42}b_{31})Q_{31}Q_{32} + (a_{31}b_{43} - a_{41}b_{33} + a_{33}b_{41} - a_{43}b_{31})Q_{31}Q_{33} + \\ &+ (a_{32}b_{42} - a_{42}b_{32})Q_{32}^2 + (-a_{32}b_{43} + a_{42}b_{33} - a_{33}b_{42} + \\ &+ a_{43}b_{32})Q_{32}Q_{33} + (a_{33}b_{43} - a_{43}b_{33})Q_{33}^2 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Hierin is

$$Q_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} - \mu b_{12} & a_{13} - \mu b_{13} \\ a_{22} - \mu b_{22} & a_{23} - \mu b_{23} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - (a_{12}b_{23} + $$
$$+ b_{12}a_{23} - a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})\mu + (b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13})\mu^2$$

en overeenkomstig

$$\begin{aligned} Q_{32} &= (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}b_{23} + b_{11}a_{23} - a_{21}b_{13} - a_{13}b_{21})\mu + \\ &\quad + (b_{11}b_{23} - b_{21}b_{13})\mu^2 \\ Q_{33} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21})\mu + \\ &\quad + (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})\mu^2 \end{aligned}$$

Stelt men nu:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{31}b_{41} - a_{41}b_{31} &= c_{11} \\ a_{41}b_{32} - a_{31}b_{42} - a_{32}b_{41} + a_{42}b_{31} &= c_{12} \\ a_{31}b_{43} - a_{41}b_{33} + a_{33}b_{41} - a_{43}b_{31} &= c_{13} \\ a_{32}b_{42} - a_{42}b_{32} &= c_{22} \\ -a_{32}b_{43} + a_{42}b_{33} - a_{33}b_{42} + a_{43}b_{32} &= c_{23} \\ a_{33}b_{43} - a_{43}b_{33} &= c_{33} \end{aligned}}$$

en voorts

$$\boxed{\begin{aligned} a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} &= c_o \\ -(a_{12}b_{23} + b_{12}a_{23} - a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22}) &= c_1 \\ b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13} &= c_2 \\ a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} &= c_3 \\ -(a_{11}b_{23} + b_{11}a_{23} - a_{21}b_{13} - a_{13}b_{21}) &= c_4 \\ b_{11}b_{23} - b_{21}b_{13} &= c_5 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= c_6 \\ -(a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}) &= c_7 \\ b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} &= c_8 \end{aligned}}$$

dan krijgt (17) de gedaante:

$$\begin{aligned} &c_{11}(c_o + \mu c_1 + \mu^2 c_2)^2 + c_{12}(c_o + \mu c_1 + \mu^2 c_2)\,(c_3 + \mu c_4 + \mu^2 c_5) + \\ &+ c_{13}(c_o + \mu c_1 + \mu^2 c_2)\,(c_6 + \mu c_7 + \mu^2 c_8) + c_{22}(c_3 + \mu c_4 + \mu^2 c_5)^2 + \\ &+ c_{23}(c_3 + \mu c_4 + \mu^2 c_5)\,(c_6 + \mu c_7 + \mu^2 c_8) + c_{33}(c_6 + \mu c_7 + \mu^2 c_8)^2 = 0 \end{aligned}$$

of

$$d_o + d_1\mu + d_2\mu^2 + d_3\mu^3 + d_4\mu^4 = 0 \tag{18}$$

waarbij

$$\boxed{\begin{aligned} d_o &= c_{11}c_o^2 + c_{12}c_oc_3 + c_{13}c_oc_6 + c_{22}c_3^2 + c_{23}c_3c_6 + c_{33}c_6^2 \\ d_1 &= 2c_{11}c_oc_1 + c_{12}(c_oc_4 + c_1c_3) + c_{13}(c_oc_7 + c_1c_6) + \\ &\quad + 2c_{22}c_3c_4 + c_{23}(c_3c_7 + c_4c_6) + 2c_{33}c_6c_7. \\ d_2 &= c_{11}(c_1^2 + 2c_oc_2) + c_{12}(c_oc_5 + c_1c_4 + c_2c_3) + \\ &\quad + c_{13}(c_oc_8 + c_1c_7 + c_2c_6) + c_{22}(c_5^2 + 2c_3c_5) + \\ &\quad + c_{23}(c_3c_8 + c_4c_7 + c_5c_6) + c_{33}(c_8^2 + 2c_6c_8) \\ d_3 &= 2c_{11}c_1c_2 + c_{12}(c_1c_5 + c_2c_4) + c_{13}(c_1c_8 + c_2c_7) + \\ &\quad + 2c_{22}c_4c_5 + c_{23}(c_4c_8 + c_5c_7) + 2c_{33}c_7c_8 \\ d_4 &= c_{11}c_2^2 + c_{12}c_2c_5 + c_{13}c_2c_8 + c_{22}c_5^2 + c_{23}c_5c_8 + c_{33}c_8^2 \end{aligned}}$$

Iedere wortel van de vierdegraadsvergelijking (18) correspondeert met een van de vier punten van Burmester. Stelt men

$$\boxed{\frac{d_3}{d_4} = e_1; \quad \frac{d_2}{d_4} = e_2; \quad \frac{d_1}{d_4} = e_3 \quad \text{en} \quad \frac{d_o}{d_4} = e_4}$$

dan wordt (18):

$$\mu^4 + e_1\mu^3 + e_2\mu^2 + e_3\mu + e_4 = 0 \tag{19}$$

De wortels van deze vierdegraadsvergelijking komen overeen met de wortels van de vierkantsvergelijking

$$\mu^2 + (e_1 + A)\frac{\mu}{2} + \left(\nu + \frac{e_1\nu - e_3}{A}\right) = 0 \tag{20}$$

indien

$$A = \pm\sqrt{8\nu + e_1^2 - 4e_2} \tag{20A}$$

en voor ν *iedere reële* wortel uit de derde graadsvergelijking

$$(8\nu + e_1^2 - 4e_2)(e_4 - \nu^2) + (e_1\nu - e_3)^2 = 0$$

kan worden genomen.

Stelt men hierin

$$\boxed{\begin{aligned} 2q &= -\frac{e_2^3}{108} + \frac{e_2(e_1e_3 - 4e_4)}{24} + \frac{e_4(4e_2 - e_1^2) - e_3^2}{8} \\ 3p &= \frac{e_1e_3 - 4e_4}{4} - \frac{e_2^2}{12} \end{aligned}}$$

dan krijgt de 3e graadsvergelijking met de subsitutie

$$\boxed{\nu = \rho + \frac{e_2}{6}} \tag{21}$$

de gedaante:

$$\rho^3 + 3p\rho + 2q = 0$$

Is $q^2 + p^3 \geqslant 0$, dan is de reële wortel

$$\rho = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

Is $q^2 + p^3 < 0$, dan is een van de reële wortels:

$$\rho = +2\frac{q}{|q|}\sqrt{|p|}\cos\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\frac{|q|}{|p|^{3/2}}\right\}$$

Met de gevonden waarden voor ρ kan ν met (21) worden berekend en in de vergelijkingen (20A) en (20) worden gesubstitueerd, waarmee de vier waarden voor μ kunnen worden vastgesteld. (Complexe waarden voor μ komen daarbij overeen met complexe punten van Burmester, reële waarden met reële en dus aanwijsbare punten van Burmester).

De betrekkingen (11) en (12) geven dan zonder meer de coördinaten van de punten van Burmester

$$x_{Br} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} + \mu b_{13} & a_{12} - \mu b_{12} \\ -a_{23} + \mu b_{23} & a_{22} - \mu b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & a_{12} - \mu b_{12} \\ a_{21} - \mu b_{21} & a_{22} - \mu b_{22} \end{vmatrix}}$$

en

$$y_{Br} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & -a_{13} + \mu b_{13} \\ a_{21} - \mu b_{21} & -a_{23} + \mu b_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & a_{12} - \mu b_{12} \\ a_{21} - \mu b_{21} & a_{22} - \mu b_{22} \end{vmatrix}}$$

a. In het zojuist beschreven proces komen de coördinaten van de pool P_{45} niet voor. Hiervan maakt men gebruik voor het geval één pool een oneigenlijk punt is: daarbij voert men een zodanige permutatie in de nummering der vijf standen uit, dat de oneigenlijke pool met P_{45} komt samen te vallen. De berekening van de posities van de vier punten van Burmester, zoals hiervoor is aangegeven, kan dan toch doorgang vinden.

b. Bekijkt men nu het geval, dat *ten hoogste twee polen* op oneindig liggen. Ieder van deze polen vertegenwoordigt een translatie. Ze hebben geen enkel indexcijfer gemeen, omdat, zo dit wel het geval is, drie onderling evenwijdige posities zijn aan te wijzen, waarbij alle hoekpunten van de bijbehorende pooldriehoek op de oneigenlijke rechte komen, hetgeen in strijd is met de veronderstelling dat ten hoogste twee polen op I_∞ liggen.

Na een permutatie in de nummering der vijf standen zijn de twee oneigenlijke polen P_{12}^∞ en P_{45}^∞.
De cirkel C_j door de polen P_{23} en P_{12}^∞ heeft een middelpunt, dat midden tussen P_{23} en P_{12}^∞ ligt en dus met P_{12}^∞ samenvalt. De cirkel C_j is daarbij uiteengevallen in de oneigenlijke rechte en in de rechte $\overline{L_j}$ door P_{23} loodrecht op $P_{23}P_{12}^\infty$. Voorts blijft $L_j \equiv P_{23}P_{12}^\infty$, zodat $\overline{L_j} \perp L_j$.

Betrekking (3) wordt in dit geval:

$$C_k - \lambda\overline{L_j} = 0 \tag{22}$$

en betrekking (5):

$$C'_k - \lambda'\overline{L_j} = 0 \tag{23}$$

Ieder punt van Burmester voldoet aan beide betrekkingen, zodat voor zulk een punt ook voldaan is aan:

$$\left\{\begin{array}{ll} C_k - C'_k - (\lambda - \lambda')\overline{L_j} = 0 & (24) \\ \text{en analoog ook aan:} & \\ L_k - L'_k - (\lambda - \lambda')L_j = 0 & (25) \end{array}\right.$$

En dit is een parametervoorstelling van een kegelsnede met als vergelijking:

$$\underline{(C_k - C'_k)L_j - (L_k - L'_k)\overline{L_j} = 0 \text{ *)}} \tag{26}$$

Deze kegelsnede gaat, behalve door de vier punten van Burmester, ook nog door de twee polen P_{13} en P_{23}.

Verwisselt men de standencijfers 1 met 4 en 2 met 5, dan verkrijgt men geheel analoog een kegelsnede, die door de vier punten van Burmester en door de polen P_{43} en P_{53} gaat. Beide kegelsneden snijden elkaar in de vier punten van Burmester.

Voert men de berekening voor dit geval uit, dan wordt

$$\left\{\begin{aligned} C_k - C'_k &\equiv (x_5 + x_9 - x_2 - x_3)x + (y_5 + y_9 - y_2 - y_3)y + \\ &\quad + x_2x_3 + y_2y_3 - x_5x_9 - y_5y_9 \\ L_k - L'_k &\equiv (y_3 - y_2 + y_5 - y_9)x + (x_2 - x_3 - x_5 + x_9)y - \\ &\quad - x_2y_3 + x_3y_2 - x_5y_9 + x_9y_5 \\ L_j &\equiv y - y_1 - m_o(x - x_1), \text{ waarbij } m_o = y_o/x_o \\ \overline{L_j} &\equiv m_o(y - y_1) + (x - x_1) \end{aligned}\right.$$

Men stelt nu analoog als in het geval van uitsluitend eindige polen:

$$\boxed{\begin{array}{llcll} -x_2 - x_3 + x_5 + x_9 & = a_{11} & \text{en} & 1 & = b_{11} \\ -y_2 - y_3 + y_5 + y_9 & = a_{12} & & m_o & = b_{12} \\ x_2x_3 + y_2y_3 - x_5x_9 - y_5y_9 & = a_{13} & & -m_oy_1 - x_1 & = b_{13} \\ y_3 - y_2 + y_5 - y_9 & = a_{21} & & -m_o & = b_{21} \\ x_2 - x_3 - x_5 + x_9 & = a_{22} & & 1 & = b_{22} \\ -x_2y_3 + x_3y_2 - x_5y_9 + x_9y_5 & = a_{23} & & m_ox_1 - y_1 & = b_{23} \end{array}}$$

Verwisseling van de standencijfers 1 met 4 en 2 met 5 komt neer op een vervanging van de polenrij $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}, P_{13}, P_{35}, P_{54}, P_{42}, P_{25}, P_{51}$ door de polenrij $P_{45}, P_{53}, P_{31}, P_{14}, P_{43}, P_{32}, P_{21}, P_{15}, P_{52}, P_{24}$, zodat de indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 van de coördinaten van deze polen achtereenvolgens vervangen worden door de indices 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 8 en 7.

Men verkrijgt zo met $m_6 = y_6/x_6$ de reeks betrekkingen

$$\boxed{\begin{array}{llcll} -x_4 - x_3 + x_1 + x_7 & = a_{31} & \text{en} & 1 & = b_{31} \\ -y_4 - y_3 + y_1 + y_7 & = a_{32} & & m_6 & = b_{32} \\ x_4x_3 + y_4y_3 - x_1x_7 - y_1y_7 & = a_{33} & & -m_6y_1 - x_1 & = b_{33} \\ y_3 - y_4 + y_1 - y_7 & = a_{41} & & -m_6 & = b_{41} \\ x_4 - x_3 - x_1 + x_7 & = a_{42} & & 1 & = b_{42} \\ -x_4y_3 + x_3y_4 - x_1y_7 + x_7y_1 & = a_{43} & & m_6x_5 - y_5 & = b_{43} \end{array}}$$

Het resterende deel van de berekening verloopt dan precies hetzelfde als in het geval van uitsluitend eindige polen.

c. In het geval *ten hoogste drie polen* op oneindig liggen, zijn deze juist de hoekpunten van een pooldriehoek, omdat in alle andere gevallen meer dan drie polen op oneindig komen. Door permutatie in de nummering der vijf standen, is te bereiken, dat de oneigenlijke polen samenvallen met de hoekpunten van de pooldriehoek $P_{12}^\infty P_{23}^\infty P_{31}^\infty$. De polenkromme p_{1234} heeft met I_∞ zeker vijf punten gemeen, te weten: $I_1, I_2, P_{12}^\infty, P_{23}^\infty$ en P_{31}^∞. Voor een 3e graads-

---

*) In afwijking van het gestelde in deel 1, pag. 809, dient in deze betrekking zowel voor L_j als voor $\overline{L_j}$ de normaalvorm van Hesse te worden gebezigd. Daarbij is vermenigvuldiging met een zelfde factor nog toelaatbaar.

kromme kan dit alleen, als l_∞ een tak is van deze kromme. De andere tak is dan een kegelsnede. De polenkromme p_{1234} is dus ontaard in de oneindig verre rechte en in een kegelsnede.

De vergelijking van deze kegelsnede wordt als volgt afgeleid: men gaat uit van de polenvierhoek $\overset{\infty}{P}_{12}\overset{\infty}{P}_{23}P_{34}P_{41}$ en men noteert $C_m L_n - C_n L_m = 0$ als vergelijking voor de polenkromme, waarbij dan C_m en L_m betrekking hebben op de zijde $\overline{\overset{\infty}{P}_{12}P_{41}}$ en C_n en L_n op de daarvan overstaande zijde $\overline{\overset{\infty}{P}_{23}P_{34}}$ van de poolvierhoek. Analoog als in het voorgaande geval is C_m uiteengevallen in l_∞ en in een rechte $\overline{L}_m$ door P_{41} loodrecht op $P_{41}\overset{\infty}{P}_{12}$.
Ook C_n is uiteengevallen in l_∞ en in een rechte $\overline{L}_n$ door P_{34} loodrecht op $P_{34}\overset{\infty}{P}_{23}$. De vergelijking van de kegelsnede krijgt dus de gedaante:

$$\overline{L}_m \cdot L_n - \overline{L}_n L_m = 0,$$

waarbij $\quad \overline{L}_m \perp L_m \equiv \overset{\infty}{P}_{12}P_{41}$ en $\overline{L}_n \perp L_n \equiv P_{34}\overset{\infty}{P}_{23}$.

Hetzelfde geldt voor de polenkromme p_{1235}. Deze is uiteengevallen in l_∞ en in de kegelsnede

$$\overline{L}_p \cdot L_q - \overline{L}_q \cdot L_p = 0,$$

waarbij $\quad \overline{L}_p \perp L_p \equiv \overset{\infty}{P}_{12}P_{51}$ en $\overline{L}_q \perp L_q \equiv P_{35}\overset{\infty}{P}_{23}$.

Bovendien ligt daarbij P_{51} op $\overline{L}_p$ en P_{35} op $\overline{L}_q$. De twee genoemde kegelsneden snijden elkaar juist in de vier punten van Burmester. Dit volgt onder meer uit het feit, dat deze snijpunten in het algemeen geen polen zijn, omdat P_{12}, P_{23} en P_{31} op l_∞ zijn gelegen.
Men heeft in dit geval de betrekkingen

$$\left\{ \begin{array}{lll} \overline{L}_m - \mu L_m = 0 & \text{en} & \overline{L}_p - \mu' L_p = 0 \\ \overline{L}_n - \mu L_n = 0 & & \overline{L}_q - \mu' L_q = 0 \end{array} \right.$$

waarbij

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{L}_m \equiv m_o(y - y_3) + (x - x_3) & \text{als } m_o = y_o/x_o \\ L_m \equiv y - y_3 - m_o(x - x_3) & \\ \overline{L}_n \equiv m_1(y - y_2) + (x - x_2) & \text{als } m_1 = y_1/x_1 \\ L_n \equiv y - y_2 - m_1(x - x_2) & \\ \overline{L}_p \equiv m_o(y - y_9) + (x - x_9) & \\ L_p \equiv y - y_9 - m_o(x - x_9) & \\ \overline{L}_q \equiv m_1(y - y_5) + (x - x_5) & \\ L_q \equiv y - y_5 - m_1(x - x_5) & \end{array} \right.$$

De coëfficiëntenreeks wordt dan in dit geval

1	$= a_{11}$	en	$-m_o$	$= b_{11}$
m_o	$= a_{12}$		1	$= b_{12}$
$-m_o y_3 - x_3$	$= a_{13}$		$m_o x_3 - y_3$	$= b_{13}$
1	$= a_{21}$		$-m_1$	$= b_{21}$
m_1	$= a_{22}$		1	$= b_{22}$
$-m_1 y_2 - x_2$	$= a_{23}$		$m_1 x_2 - y_2$	$= b_{23}$
1	$= a_{31}$		$-m_o$	$= b_{31}$
m_o	$= a_{32}$		1	$= b_{32}$
$-m_o y_9 - x_9$	$= a_{33}$		$m_o x_9 - y_9$	$= b_{33}$
1	$= a_{41}$		$-m_1$	$= b_{41}$
m_1	$= a_{42}$		1	$= b_{42}$
$-m_1 y_5 - x_5$	$= a_{43}$		$m_1 x_5 - y_5$	$= b_{43}$

Het resterende deel van de berekening verloopt weer hetzelfde als in het geval van uitsluitend eindige polen.

d. Voor het geval *ten hoogste vier polen* op oneindig liggen, zijn drie hiervan de hoekpunten van een pooldriehoek, terwijl de vierde pool geen indexcijfer met een van deze drie gemeen heeft. Door permutatie in de nummering der vijf standen is te bereiken, dat de vier op l_∞ gelegen polen samenvallen met P^∞_{12}, P^∞_{23}, P^∞_{31} en P^∞_{45}.
Aangezien in het voorgaande geval geen gebruik is gemaakt van de coördinaten van P_{45}, is de daar gevolgde berekening ook in dit geval van toepassing.

e. In het geval *meer dan vier polen* op l_∞ liggen, liggen alle tien polen op de oneindig verre rechte: er is uitsluitend sprake van vijf onderling evenwichtige posities. De vijfhoeken $A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ enz., waarvan de opeenvolgende hoekpunten overeenkomen met de opeenvolgende posities van een baanpunt, zijn daarbij alle onderling congruent.
Behoudens in speciale gevallen, hoort hierbij geen enkel reëel Burmestercentrum.

Literatuur

(1) E. Hackmüller, „Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkt- und Mittelpunktskurve", Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938) S. 252.

(2) E. Hackmüller, „Zur Konstruktion der Burmesterschen Punkte", *Maschinenbau/Betrieb*, Beilage *Getriebetechnik* (1938), S. 648-649.