Enkele uitgewerkte vraagstukken over impedantie-transformatie met behulp van een Smith-kaart

Enkele uitgewerkte vraagstukken over
impedantie-transformatie met behulp
van een Smith-kaart.

door

Ir. M. Steffelaar

Enkele uitgewerkte vraagstukken over impedantie-transformatie met behulp van een Smith-kaart.

1. Gegeven de drie impedanties: 1a. $Z = 0\ \Omega$
1b. $Z = 19 - j.35\ \Omega$
1c. $Z = 55 + j.35\ \Omega$

Deze impedanties worden achtereenvolgens aangesloten op een 73 cm lange leiding van 50 Ω impedantie. De golflengte langs de leiding gemeten is 15 cm. Hoe worden deze impedanties achtereenvolgens getransformeerd?

Antwoord: 1. Bepaal de gereduceerde impedanties :

1a. $Z' = \frac{Z}{Z_o} = \frac{Z}{50} = \frac{0}{50} = 0$

1b. $Z' = \frac{19}{50} - j.\frac{35}{50} = 0{,}38 - j.0{,}7$

1c. $Z' = \frac{55}{50} + j.\frac{35}{50} = 1{,}1 + j.\ 0{,}7$

2. Bepaal de elektrische lengte van de lijn $\frac{l}{\lambda}$

$\frac{l}{\lambda} = \frac{73}{15} = 4{,}87$. Daar elke halve golflengte de impedantie transformeert tot zijn oorspronkelijke waarde kan $\frac{l}{\lambda}$ verminderd worden met een geheel aantal malen 0,5, zonder de impedantie-transformatie te beinvloeden,

dus $\frac{l}{\lambda} = 0{,}37$.

3. Lees op de buitenste cirkelverdeling van de Smith-kaart de $\frac{l}{\lambda}$ waarde af voor de drie punten(zie fig. I):

1a: 0
1b: 0,395
1c: 0,162

4. Vermeerder deze getallen met $\frac{l}{\lambda} = 0{,}37$

Gevonden wordt: 1a. $0 + 0{,}37 = 0{,}37$
1b. $0{,}395 + 0{,}37 = 0{,}765$
1c. $0{,}162 + 0{,}37 = 0{,}532$

5. Zoek op de kaart de punten op waarvoor $\frac{\lambda}{l}$ de bovenstaande waarden hebben en die op dezelfde afstand van het midden liggen als de bijbehorende punten 1a, 1b, en 1c. Deze punten zijn in figuur I aangegeven resp. als 1a', 1b' en 1c'.
6. Lees op de kaart de drie gereduceerde impedanties af en bereken hieruit de impedanties.

1a' $Z' = -j.1{,}06 \rightarrow Z = 0 - j.53$

1b' $Z' = 3{,}6 - j.1{,}3 \rightarrow Z = 180 - j.65$

1c' $Z' = 0{,}53 + j.0{,}15 \rightarrow Z = 26{,}5 + j.7{,}5$

Dit zijn de gezochte impedanties.

2. Gegeven de drie admittanties: 2a. $y = 0$

2b. $y = 0{,}004 + j'.0{,}0112$

2c. $y = 0{,}026 - j.0{,}022$

Deze admittanties worden achtereenvolgens aangesloten op een 32,5 cm lange leiding van 50 Ω impedantie.
De golflengte langs de leiding gemeten bedraagt 8 cm. Hoe worden deze admittanties achtereenvolgens getransformeerd?

<u>Antwoord:</u> 1. Bepaal de gereduceerde admittanties:

$$2a. \quad y' = \frac{y}{y_o} = \frac{0}{\frac{1}{50}} = 0 \qquad \text{mho}$$

$$2b. \quad y' = \frac{0{,}004 + j.0{,}0112}{\frac{1}{50}} = 0{,}2 + j.0{,}56 \text{ mho}$$

$$2c. \quad y' = \frac{0{,}026 - j.0{,}022}{\frac{1}{50}} = 1{,}3 - j.1{,}1 \quad \text{mho}$$

2. Bepaal de elektrische lengte van de lijn $\frac{l}{\lambda}$ =

$\frac{32{,}5}{8} = 4{,}0625$ neem $\frac{l}{\lambda} = 0{,}0625$

3. Lees op de buitenste cirkelverdeling van de Smith-kaart de $\frac{\lambda}{l}$ waarde af voor de drie punten (zie fig. I):
2a.: 0
2b.: 0,084
2c.: 0,318

4. Vermeerder deze getallen met $\frac{l}{\lambda} = 0{,}0625$
Dus : 2a: 0 + 0,0625 = 0,0625
2b: 0,084 + 0,0625 = 0,1465
2c: 0,318 + 0,0625 = 0,3805

5. Zoek op de kaart de punten op waarvoor $\frac{\lambda}{l}$ de bovenstaande waarden hebben en die op dezelfde afstand liggen van het midden als de bijbehorende punten 2a, 2b en 2c. Deze punten zijn in figuur I aangegeven respectievelijk als 2a', 2b' en 2c'.

6. Lees op de kaart de drie gereduceerde admittanties: af en bereken hieruit de admittanties.

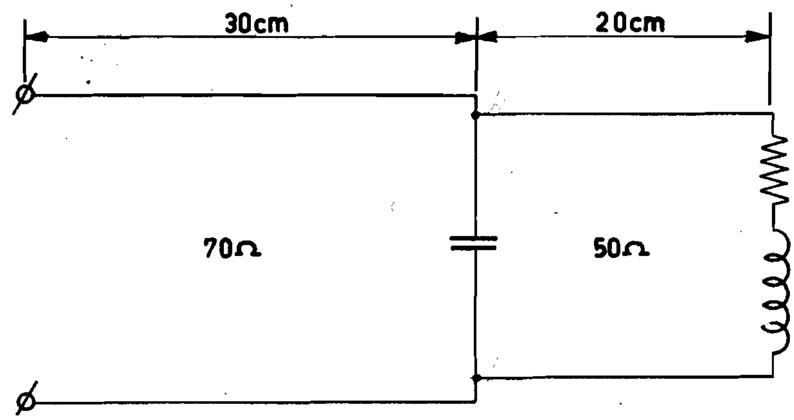
2a' $y' = +\,j.0{,}42$	$y = 0{,}0084$	mho
2b' $y' = 0{,}4 + j.1{,}24$	$y = 0{,}008 + j.0{,}0248$	mho
2c' $y' = 0{,}63 - j.0{,}71$	$y = 0{,}0126 - j.0{,}0142$	mho

Dit zijn de gezochte admittanties.

N.B. Het is mogelijk om elke gereduceerde impedantie direct om te zetten in een gereduceerde admittantie door spiegeling ten opzichte van het midden. De berekening 2c. kan dus ook gemaakt worden door eerst de impedantie te bepalen uit de gegeven admittantie (door berekening of constructie), deze in te voeren op de Smithkaart (fig.I punt $2c_o$) en de impedantie-transformatie te bepalen (punt $2c_o'$). Daarna kan dan zonodig weer door berekening of constructie de admittantie uit de gevonden impedantie worden bepaald. Bewijs zelf uit de vergelijking van de Smithkaart

$$Z_a = \frac{Z_e + j\,Z_o t_g \beta l}{1 + j\frac{Z_e}{Z_o} t_g \beta l}$$

dat deze voor impedanties èn admittanties geldt. Toon ook aan dat op punten welke ten opzichte van het midden zijn gespiegeld complexe getallen staan die elkaars omgekeerde zijn.



3. Twee leidingen van resp. 70Ω en 50Ω worden geschakeld zoals boven is aangegeven.
Gegeven R = 40Ω , C = $1{,}63.10^{-12}$, F en L = $3{,}61.10^{-9}$ H.
Gevraagd om te berekenen hoe groot de admittantie is welke aan de klemmen gemeten wordt voor frequenties waarvoor λ (voor beide leidingen) achtereenvolgens 8, 8,5 en 9 cm is. (C = 300000 km/sec)

<u>Oplossing:</u>

.	λ	ν	ω	ωL	R+jωL
1	8	$3{,}75.10^9$	$23{,}6.10^9$	85	40+j.85
2	8,5	$3{,}53.10^9$	$22{,}2.10^9$	80	40+j.80
3	9	$3{,}33.10^9$	$20{,}9.10^9$	75,3	40+j.75,3
nr.	1	2	3	4	5

	Z/Z_o	1/λ	1/λ	1/λ	y^2
1	0,8+j.1,7	0,176	0	0,176	0,22-j.0,47
2	0,8+j.1,6	0,173	0,35	0,023	3,6 -j.2,3
3	0,8+j.1,506	0,170	0,22	0,390	0,5 +j.1,08
nr.	6	7	8	9	10

Bereken uit λ eerst de frequentie $\nu = \frac{3.10^{10}}{\lambda}$ (kolom 2) en dan de cirkelfreq. $\omega = 2\pi\,\nu$ (kolom 3). Bepaal ωL waarin $L = 3{,}61.10^{-9}$ (kolom 4). De impedantie van de afsluiting is in kolom 5 gegeven. Bepaal de gereduceerde impedantie $\frac{Z}{Z_o} = \frac{Z}{50}$ (kolom 6). Bepaal deze punten op de Smithkaart (Z' in fig. II) en lees de bijbehorende $\frac{l}{\lambda}$ af (kolom 7). Bepaal de elektrische lengte van de 20 cm 50Ω kabel tot op een geheel aantal halve golflengte na, dus $\frac{l}{\lambda} = \frac{20}{8} = 2{,}5 \rightarrow 0$ enzovoort (kolom 8). Door de waarden uit kolom 7 en 8 samen te tellen wordt hieruit de $\frac{l}{\lambda}$ waarde voor het begin der 50 Ω lijn gevonden (kolom 9). Op de Smithkaart transformeren de punten Z' zich naar de punten Z^2 door naar de zo gevonden $\frac{l}{\lambda}$ waarde op dezelfde afstand van het midden om te cirkelen. Uit deze punten kan nu de admittantie gevonden worden door spiegeling t.o.v. het midden; dit levert de punten y^2 waarvan de gereduceerde waarden zijn afgelezen en in kolom 10 genoteerd. Hieruit berekenen we admittanties y^2. (Kolom 11)

	y^2	$j\omega C$	Y_p
1	0,0044-j.0,0094	$j.38{,}4.10^{-3}$	0,0044+j.0,029
2	0,072 -j.0,046	$j.36{,}2.10^{-3}$	0,072 -j.0,0098
3	0,01 +j.0,0216	$j.34{,}10^{-3}$	0,01 +j.0,0556
nr.	11	12	13

	y^3	$1/\lambda$	$1/\lambda$	som	y^4
1	0,308+j.2,03	0,179	0,25	0,429	0,07-j.0,47
2	5,04-j.0,686	0,255	0,03	0,285	2,3-j.2,4
3	0,70+j.3,892	0,212	0,33	0,042	0,04+j.0,27
nr.	14	15	16	17	18

Nu wordt de susceptantie der condensator berekend.

$Z = \frac{1}{j\omega C}$ $y = j\omega C$ C = 1,63pF (kolom 12).

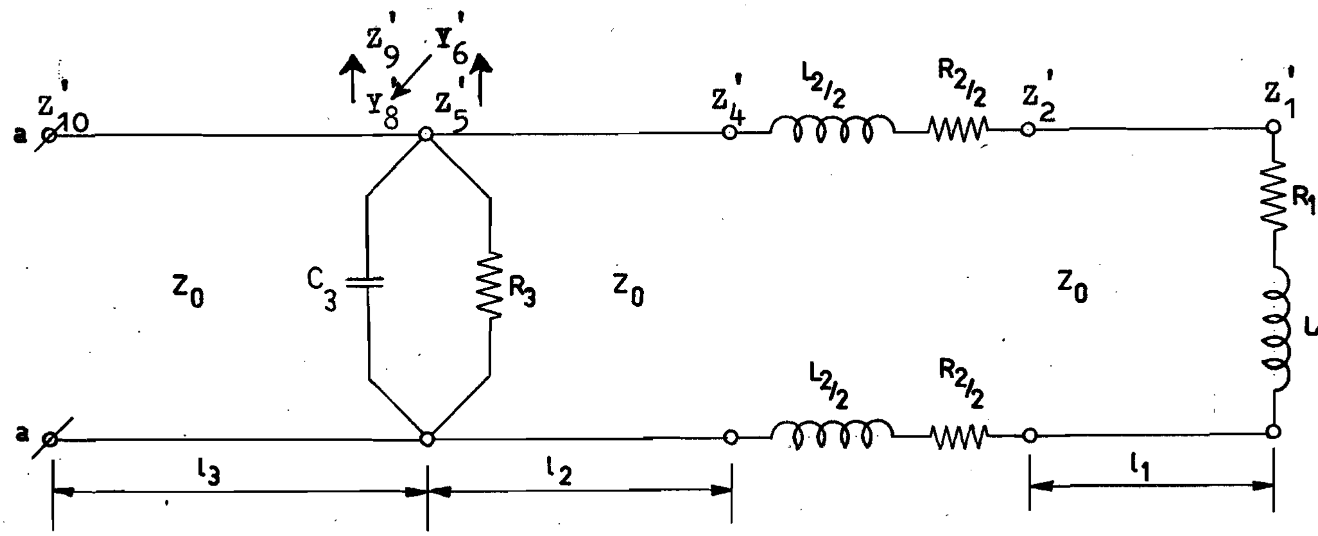
Door y met jωC te vermeerderen wordt de admittantie gevonden van deze parallelschakeling (kolom 13).

Deze admittanties worden voor de 70 Ω leiding gereduceerd (kolom 14) Deze admittanties zijn opgezocht op de Smithkaart (y^3) De $\frac{1}{\lambda}$ waarden zijn hiervoor afgelezen en genoteerd in kolom 15. De lijnlengte is 30 cm dus de $\frac{1}{\lambda}$ verhouding kan worden bepaald (kolom 16). De getransformeerde admittanties y^4 worden gevonden op gelijke afstand van het midden als y^3 en een $\frac{1}{\lambda}$ gelijk de som der getallen in kolom 15 en 16 (kolom 17). y^4 kan dan op de kaart worden afgelezen (kolom 18).

		R	X
1	0,001-j.0,0067	1000	149
2	0,033-j.0,034	30	29,4
3	0,00057+j.0,0038	1760	-264
nr.	19	20	21

De hieruit berekende admittanties zijn genoteerd in kolom 19. Deze admittanties kunnen dus beschouwd worden als de parallelschakeling van een weerstand R (kolom 20) en een reactantie X (kolom 21).

Ook is het mogelijk deze admittanties om te rekenen tot een serie schakeling van een weerstand en een reactantie door eerst op de Smithkaart de gevonden punten y^4 te spiegelen ten opzichte van het midden. De zo gevonden impedanties kunnen dan weer beschouwd worden als de serieschakeling van een weerstand en een reactantie.



3. Gevraagd met behulp van een Smithkaart de impedantie tussen de klemmen a-a te bepalen.

	R	L of C	l	Z_o	λ	ωL of ωC	1/λ
1	15	$3{,}18.10^{-9}$	153,57	50	30	20	0,119
2	90	$7{,}97.10^{-9}$	69,54	50	30	50	0,318
3	16,4	$20{,}6\ .10^{-12}$	63,09	50	30	0,13	0,103
nr.	1	2	3	4	5	6	7

De frequentie $\nu = 10^9$ Hz, dus $\omega = 6{,}28.10^9$. Hieruit volgt de reactantie van de zelfinducties, welke in kolom 6 genoteerd zijn. We bepalen eerst de gereduceerde impedantie van de afsluiting:

$$Z_1' = \frac{Z_1}{Z_o} = \frac{R+j\omega L}{Z_o} = \frac{15+j.20}{50} = 0{,}3 + j.0{,}4 \text{ (zie fig. III).}$$

$\frac{l}{\lambda} = 0{,}065$ dit vermeerderen met $\frac{l}{\lambda} = 0{,}119$ (kolom 7) levert $0{,}065 + 0{,}119 = 0{,}184$ (Z_2'). Met Z_2 staat R_2 en L_2 in serie dus Z_2' aflezen en hier $R_2+j\omega L_2$ gereduceerd op 50 Ω bij tellen $Z_2' = 1{,}2 + j.1{,}6$.

$$\frac{\omega L_2}{Z_o} = \frac{50}{50} = 1. \qquad \frac{R_2}{Z_o} = \frac{90}{50} = 1{,}8 \text{ zodat}$$

$$Z_4' = (1{,}2 + j.1{,}6) + (1{,}8 + j.1) = 3{,}0 + j.2{,}6$$

$\frac{l_2}{\lambda} = 0{,}318$ voor Z_4' is $\frac{l}{\lambda} = 0{,}222$ zodat we vinden voor Z_5' : $\frac{l}{\lambda} = 0{,}318 + 0{,}222 = 0{,}540$ of $\frac{l}{\lambda} = 0{,}04$ voor Z_5'. Hieraan zijn C_3 en R_3 parallel geschakeld, we gaan daarom over naar admittanties en in het diagram dus van Z_5' naar y_6'.

We lezen af $y_6' = 1{,}95 - j.2{,}5$. We bepalen nu de admittantie van de C_3 en R_3 gereduceerd op 50 Ω.

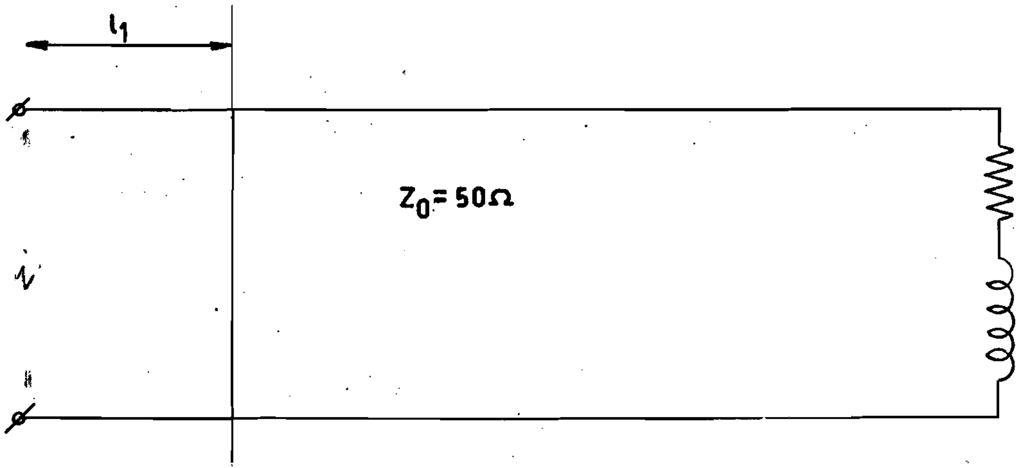
$$\frac{\omega C_3}{\frac{1}{Z_o}} = \frac{\frac{1}{7{,}7}}{\frac{1}{50}} = 6{,}5 \qquad\qquad \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{Z_o}} = \frac{\frac{1}{16{,}4}}{\frac{1}{50}} = 3{,}05$$

Samen met de lijn admittantie levert dit

$$y_8' = (3{,}05 + j.6{,}5) + (1{,}95 - j.2{,}5) = 5{,}0 + j.4{,}0$$

We gaan weer naar de impedanties over in het diagram van y_8' naar Z_9'. Voor Z_9' lezen we af $\frac{l}{\lambda} = 0{,}485$. De lijnlengte $\frac{l_3}{\lambda} = \frac{63{,}09}{30} = 2{,}103$ of $0{,}103$ in het diagram. Voor Z_{10} wordt dus $\frac{l}{\lambda} = 0{,}103 + 0{,}485 = 0{,}588$ of $\frac{l}{\lambda} = 0{,}088$ dit levert punt $Z_{10}' = 0{,}17 + j.0{,}6$. Dus de gezochte impedantie is:

$$Z_{10} = 8{,}5 + j.30\ \Omega$$



4. a. Gemeten wordt $Z_1' = 80 + j.25\Omega$ gevraagd, ergens op de lijn een serie capaciteit aan te brengen zodat deze impedantie gelijk wordt aan de lijnimpedantie. Hiertoe berekenen we de gereduceerde impedantie en bepalen dit punt op de Smithkaart.

$$Z_1' = \frac{80}{50} + j.\frac{25}{50} = 1,6 + j.0,5 \text{ (fig. IV)}$$

We zoeken nu het snijpunt van de cirkel door Z_1' (met het punt 1,0 tot middelpunt) en de cirkel waarvoor $R' = 1$. Er zijn twee snijpunten, maar we kiezen het punt in het bovenste halfvlak. Dit is dus het punt Z_2' dit punt ligt l_1 cm. verder op de lijn (dus links om in het diagram!) en deze afstand is blijkbaar

$\frac{l_1}{\lambda} = 0,35 - 0,29 = 0,06$ afgelezen op de binnenste schaalverdeling. Wanneer $\lambda = 40$ cm is dus $l_1 = 0,06 . 40 = 2,4$ cm. Wanneer op deze plaats een capaciteit in serie met de lijn wordt geplaatst dan zal de impedantie lopen over de cirkel $R = 1$. We moeten deze impedantie nu zo kiezen dat de impedantie $Z_3' = 1$ wordt. Nu is $Z_2' = 1 + j.0,63$ zodat $Z_3' - Z_2' = -j.0,63$. De impedantie der capaciteit moet dus zijn $\frac{-1}{\omega C} = - 0,63.50 = -31,5\,\Omega$. Wanneer nu $\nu = 3000.10^6$ Hz, dus $\omega = 2\pi\nu = 2\pi .3000.10^6 = 18,8.10^9$ wordt dus

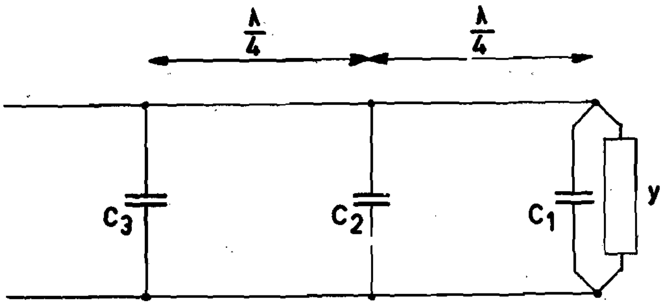
$$C = \frac{1}{18,8.10^9 .31,5} = 1,69 \text{ pF.}$$

b. Wanneer we een parallelcapaciteit willen aanbrengen, ook zó dat $Z_1 = 50\ \Omega$ wordt, zoeken we eerst de admittantie op. Dit is punt y_1' op de kaart; nu gaan we langs de lijn terug tot het reële deel der afsluit-admittantie weer gelijk is aan de lijn-admittantie. Op de kaart is dit dus het snijpunt met de cirkel $R = 1$. Dit levert ons dus het punt $y_3' = 1 - j.0,62$. $\frac{l}{\lambda} = 0,15$
Een parallel-capaciteit heeft hier de susceptantie:

$\frac{\omega C}{y_0}$. Wanneer we kiezen $-0,62 + \frac{\omega C}{y_0} = 0$, wordt de gereduceerde admittantie op dit punt 1 en dus overal langs de lijn links van dit punt slechts een lopende golf. Dan is dus $\omega C = 0,62\ y_0$

$$C = \frac{0,62}{50} \cdot \frac{1}{18,8.10^9} = 0,66\ \text{pF en } \frac{l_1}{\lambda} = 0,15 - 0,04 = 0,11 \quad l_1 = 4,4 \text{ cm}$$

c. Wanneer we aanpassing willen bereiken door ergens in de lijn een $\frac{\lambda}{4}$ transformator aan te brengen moet op de plaats waar deze trafo wordt aangebracht de impedantie een reële waarde hebben. Dit kan dus zijn Z_4' of Z_5' welke $\frac{\lambda}{4}$ uit elkaar liggen $\frac{l_4}{\lambda} = 0,21$ en $\frac{l_5}{\lambda} = 0,46$ dus $l_4 = 8,4$ cm $l_5 = 18,4$ cm. We lezen op de kaart af $R_4 = 0,54.50 = 27\ \Omega$ $R_5 = 1,84.50 = 92\ \Omega$ Daar voor een $\frac{\lambda}{4}$ trafo geldt $Z_{in} . Z_{uit} = Z^2$ kunnen we dus Z vinden uit $Z = \sqrt{Z_{in}\, Z_{uit}} = \sqrt{27.50} = 36$ resp. $Z = \sqrt{92.50} = 67,8\ \Omega$



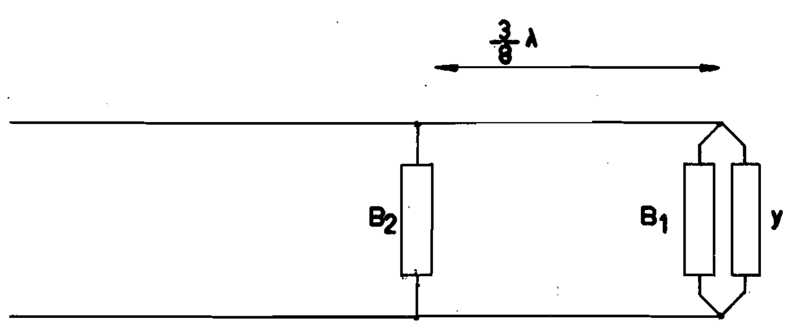
5.

a. Gegeven drie instelbare condensatoren welke parallel over de lijn zijn geplaatst op afstanden van $\frac{\lambda}{4}$. Gevraagd welke admittanties kunnen lopend worden afgestemd met deze drie condensatoren, als de maximum gereduceerde susceptantie $\underline{1}$ bedraagt.

Het beeldpunt op de Smithkaart links van C_3 is het punt $\underline{1}$.

Wanneer we dus C_3 weglaten (we veronderstellen even dat $C_1 = 0$) zal de admittantie van de lijn ter plaatse van C_3 liggen op de cirkel waar voor $R = 1$ en $0 < j\ S < -1$ dus tussen A en B op kaart V . Wanneer we $\frac{\lambda}{4}$ verder zien op de lijn, dus ter plaatse van C_2, dan zal de admittantie aldaar dus liggen ergens op een cirkelboog tussen A en C . De admittantie welke wij meten ter plaatse van C_2 als we deze C_2 weglaten ligt blijkbaar ergens in het gebied C,D,B,A. (de punten tussen D en B zijn gevonden door de punten tussen A en C met j.1 te verminderen). De admittantie y ligt dus in het gebied C,A,B,E, Wanneer we $C_3 = 0$ stellen en $C_1 \neq 0$ dan zal de admittantie y liggen binnen C D B A. Wanneer we dus óf C_1 óf C_3 nul kiezen kan de admittantie y worden aangepast wanneer deze ligt binnen het gebied D,B,E,C, Wanneer $\rho > 2$ kan dus steeds aanpassing worden verkregen.

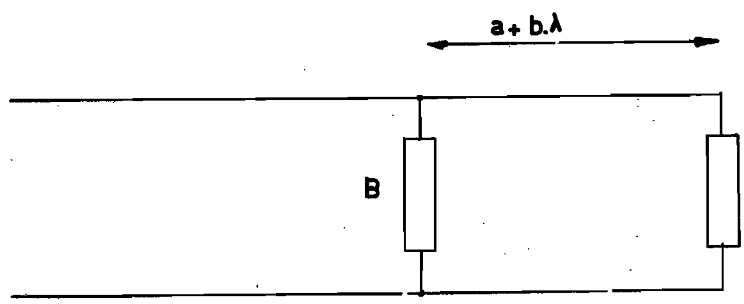
b.



Om een lijn af te sluiten met een gereduceerde admittantie y zijn twee susceptanties aangebracht $\frac{3}{8}\lambda$ uiteen.
De gereduceerde waarden zijn B_1 en B_2 . Gevraagd de waarde van y waarvoor lopende afsluiting mogelijk is.
Wanneer B_1 wordt gevarieerd van $-\infty$ tot $+\infty$ zal de admittantie van B_1 en y samen een cirkel doorlopen waarvoor G constant is. De ingangsadmittantie $\frac{3}{8}\lambda$ verder op de lijn gemeten doorloopt dan dus ook zulk een cirkel, echter $\frac{3}{4}$ cirkel verder (rechtsom). Getekend is in figuur V de cirkel waarvoor G = 1,5.

Om nu met behulp van B_2 lopende afstemming te kunnen krijgen is het nodig dat de admittantie zonder B_2 ligt op de cirkel waar G = 1 want de G kan door deze B_2 niet worden beïnvloed. Blijkbaar zijn er twee mogelijke instellingen en wel bij F en bij G. De admittantie moet naar een van deze twee punten gebracht worden door instellen van B_1. Daarna moet B_2 zo worden gekozen dat B totaal gelijk nul wordt, dan is dus de admittantie links van B_2 gelijk aan $1+j.0=1$.
Blijkbaar lukt deze prosedure steeds tenzij de G van y groter is dan 2. Dan zijn er geen snijpunten G en F meer. Elke admittantie waarvoor $G < 2$ kan dus met behulp van deze susceptanties worden aangepast.

c.



Hier kan b worden ingesteld tussen 0 en $\frac{1}{2}$. Gevraagd welke admittanties kunnen door B lopend worden afgestemd? Wanneer B verschoven wordt van a tot $a + \frac{\lambda}{2}$ zal de admittantie op één punt gelijk zijn aan y en alle andere waarden welke deze admittantie doorloopt liggen op een cirkel door dit punt, met het punt 1 tot middelpunt. Bv. het punt H op de kaart nr. V
We zoeken nu met deze B het punt J of het punt K op.
Hier is weer G =1 zodat met parallel-schakeling van de goede susceptantie B steeds lopende afsluiting mogelijk is.
Wanneer B uitsluitend positieve waarden kan doorlopen vervalt een van de punten, in figuur V is dit het punt J. Alleen bij instelling op het punt K is lopende afsluiting mogelijk.
In principe is elke admittantie afstembaar.

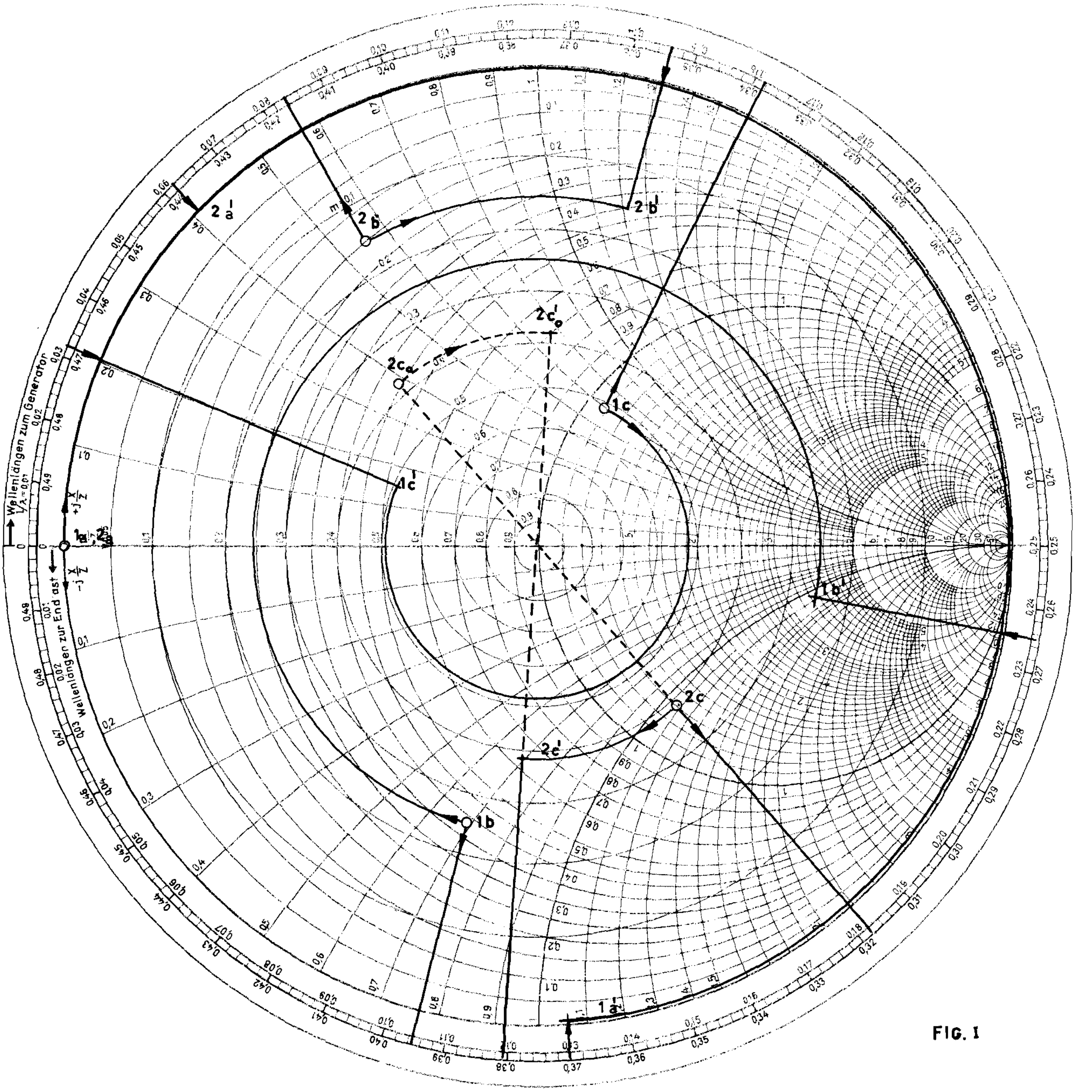
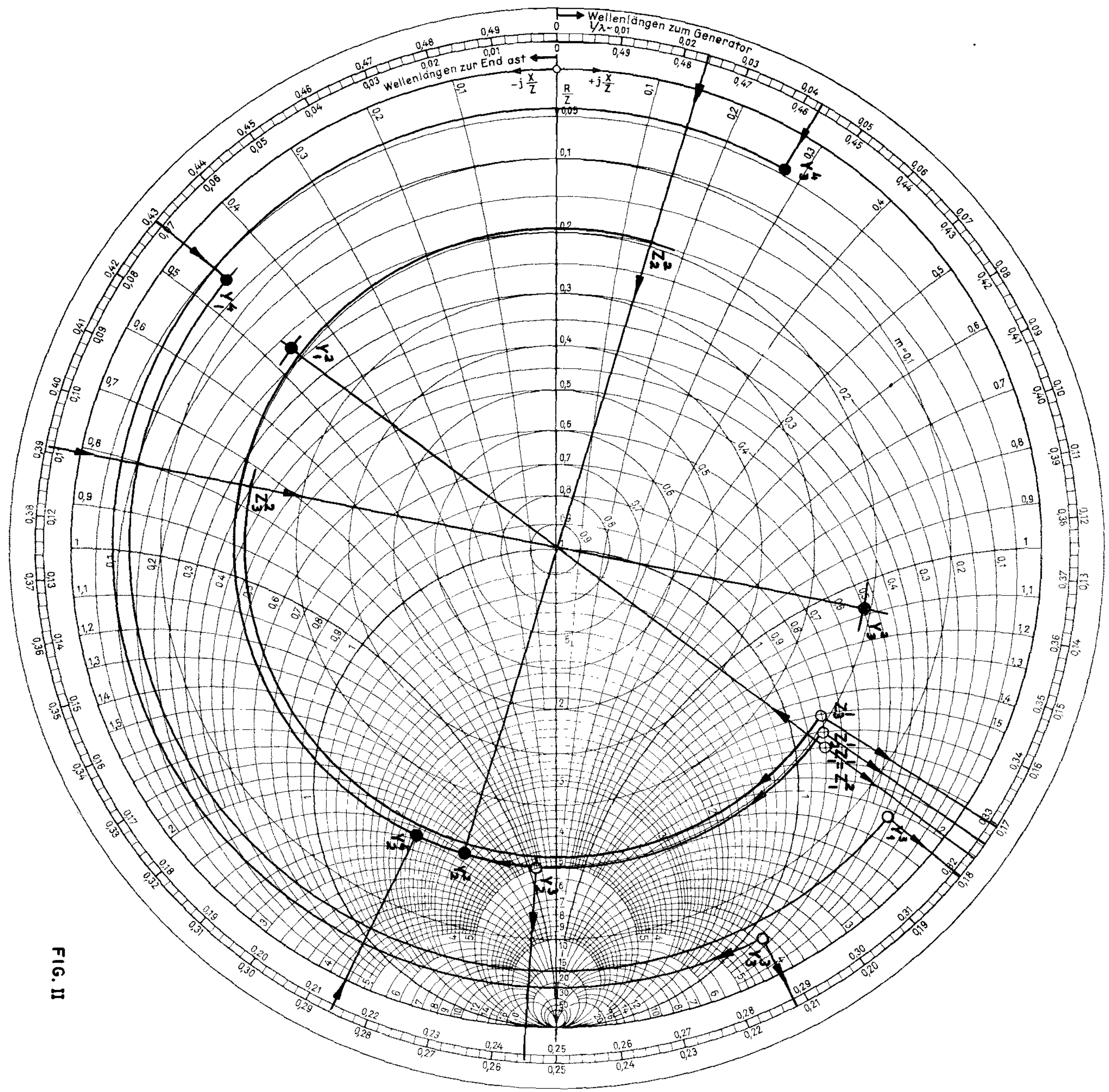

Wellenlängen zum Generator
Wellenlängen zur End ast
2 a'
2 b
2 b'
2c'o
2c₀
1c
1c'
1a', 2a
1b'
2c
2c'
1b
1 a'

FIG. I



Wellenlängen zum Generator
l/λ
Wellenlängen zur Endast
$-j\frac{X}{Z}$
$\frac{R}{Z}$
$+j\frac{X}{Z}$
m = 0,1

FIG. II

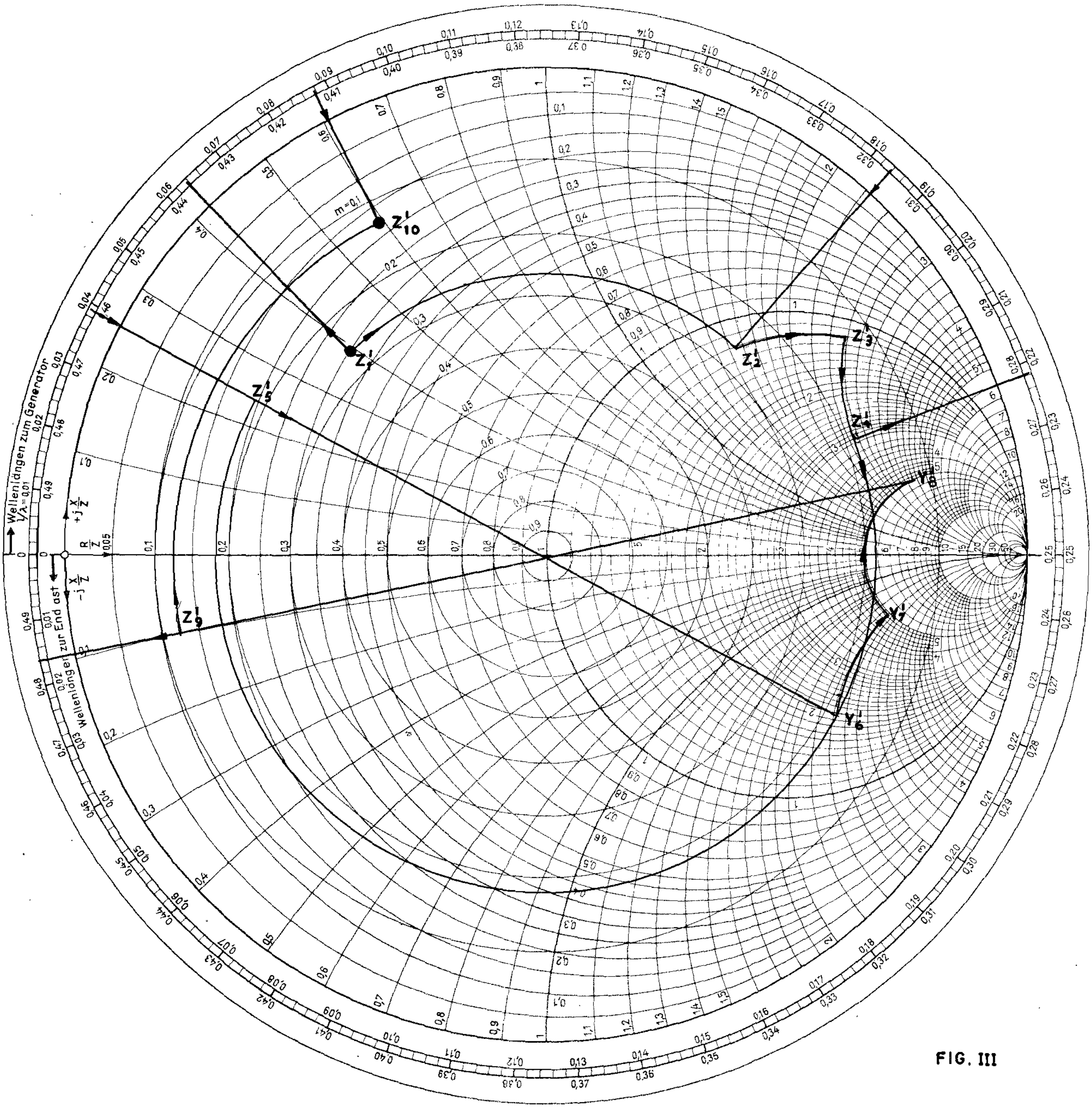

Wellenlängen zum Generator
l/λ = 0,01
Wellenlängen zur End ast
+j X/Z
-j X/Z
R/Z
m = 0,1
Z'10
Z'1
Z'2
Z'3
Z'4
Z'5
Y'6
Y'7
Y'8
Z'9

FIG. III

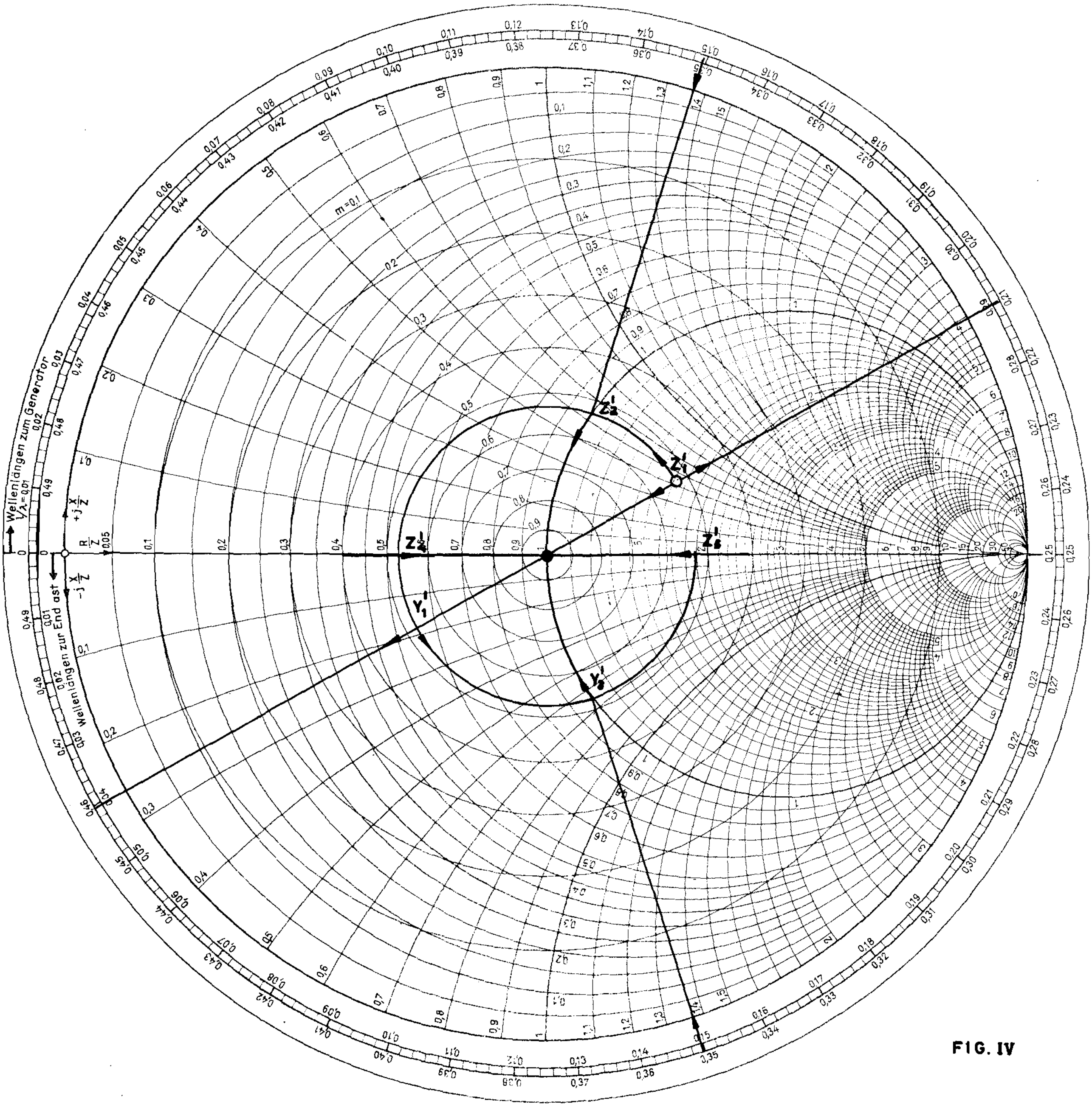


FIG. IV

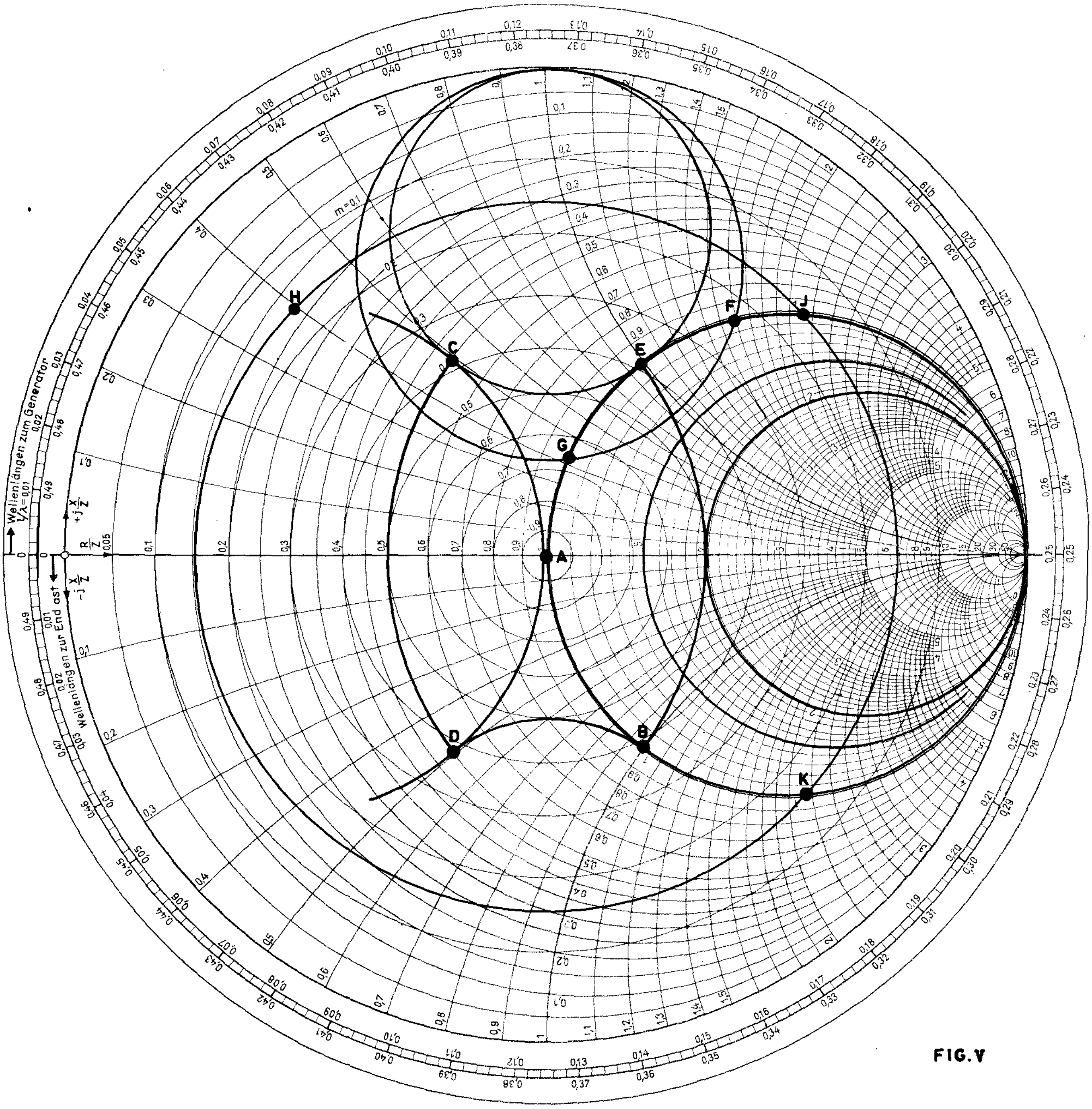
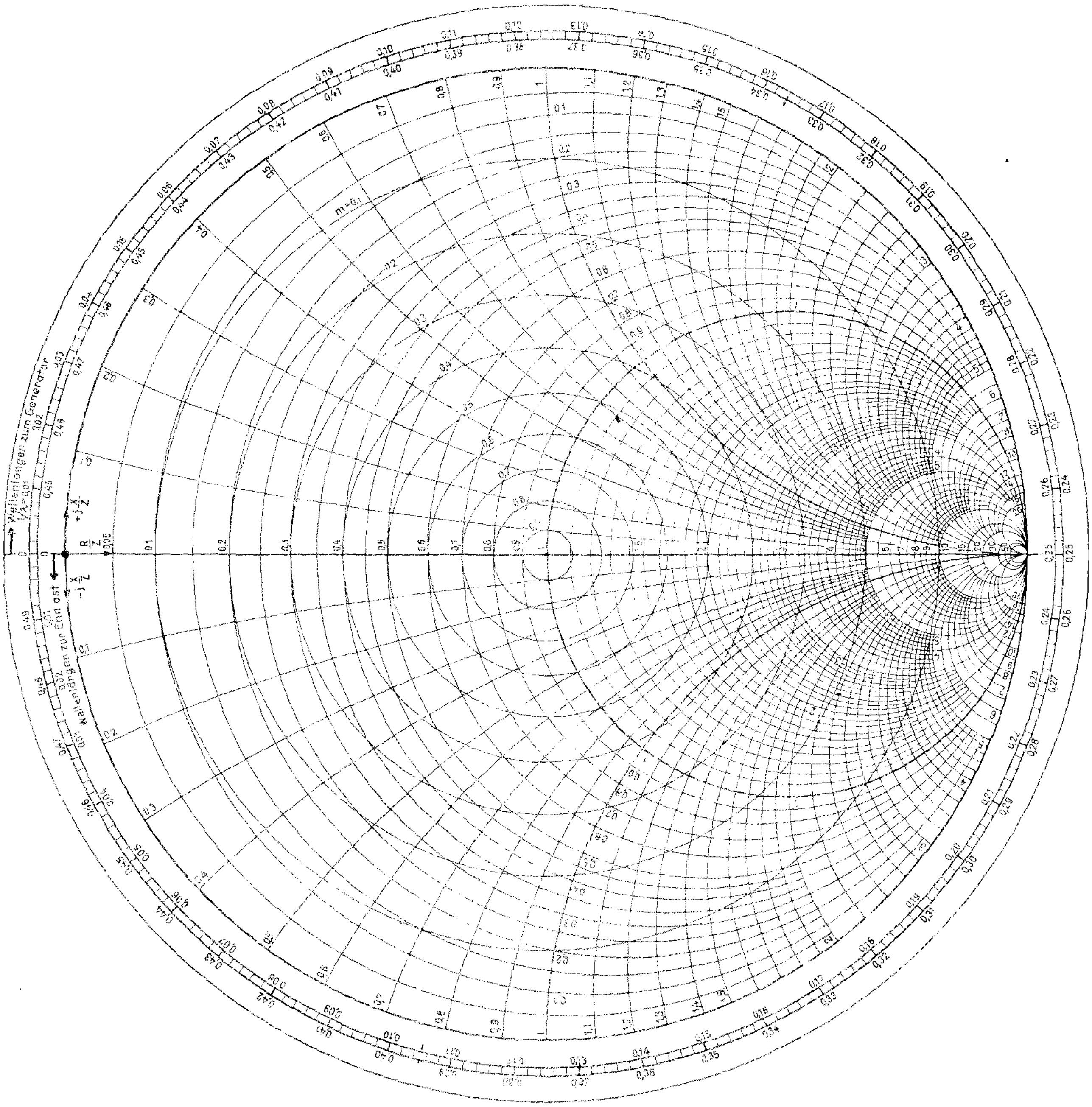

Wellenlängen zum Generator
l/λ = 0,01
Wellenlängen zur Endlast
R/Z
+j X/Z
-j X/Z
m = 0,1
A
B
C
D
E
F
G
H
J
K

FIG. V



Wellenlängen zum Generator
m=0,1