

## Het verschijnsel "stick-slip"

***Citation for published version (APA):***

Laarhoven, J. J. (1963). *Het verschijnsel "stick-slip"*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0092). Technische Hogeschool Eindhoven.

***Document status and date:***

Gepubliceerd: 01/01/1963

***Document Version:***

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

***Please check the document version of this publication:***

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

***General rights***

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

***Take down policy***

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

0092

ARK  
01  
WPA

WT 0092

ARCHIEF DOCUMENTATIE
LITERATUUR
Codering:
Trefwoord: BB 436715

HET VERSCHIJNSEL "STICK - SLIP"  
=====

door J.J. Laarhoven.

INHOUD.

	blz.
1. Wat is Stick-Slip.	2
2. Theoretische behandeling.	3
2.1 Mathematische oplossing.	5
2.2 Electricisch Analogon.	6
2.3 Grafische Methode.	7
3. Het Schaeleffect bij de Stick-Slip.	8
4. Middelen ter bestrijding van Stick-Slip.	9
5. Suggesties voor nader onderzoek.	11
6. Literatuur.	12
7. Artikel van " Singh" .	13
Bijlage I	14
Bijlage II	16
Bijlage III	18.

1. Wat is het Stick-Slip verschijnsel?

Bij glijdende bewegingen kunnen onder bepaalde omstandigheden trillingsverschijnselen optreden. Deze trillingen zijn vaak waarneembaar door het optredende geluid: het piepen bv van scharnieren.

De glijdende beweging geschiedt niet eenparig, maar bestaat uit een kleefperiode: de Stick, waarbij de contactvlakken t.o.v. elkaar in rust zijn, daarna gevolgd door een snelle Slip. Na deze slip treedt weer Stick op enz.

De hierbij optredende stotende beweging belemmert een nauwkeurige verplaatsing en geeft bovendien aanleiding tot grote slijtage van de loopvlakken.

Het Stick-Slip verschijnsel is voor het eerst gemeten en beschreven door Bowden en Leben ( 1 ), en van Papenhuyzen ( 2 ).

In 1940 heeft Blok de eerste poging gedaan het verschijnsel te verklaren uit de variatie in de wrijvingskrachten bij verschillende snelheden. ( 3 ).

2. Theoretische behandeling van het Stick-slip verschijnsel.

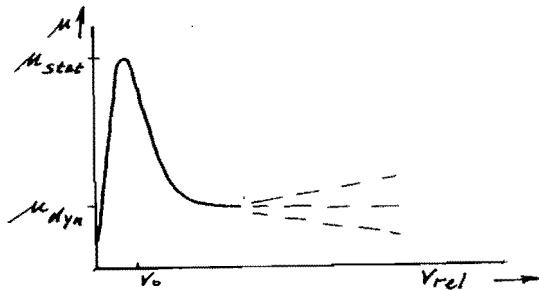
Mechanisch model.

Om het probleem te vereenvoudigen zijn de volgende veronderstellingen gemaakt:

1. De wrijvingscoëff.  $\mu$ :

indien de relatieve snelheid = 0  $\mu = \mu_{stat}$   
 ,, ,, ,, ,,  $\neq 0$   $\mu = \mu_{dyn}$

In werkelijkheid is het verband tussen  $\mu$  en de rel. snelheid zoals onderstaande figuur.

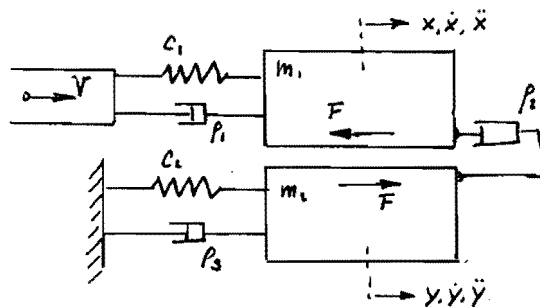


$v_0$  metalen  $< 10^{-6}$  cm/sec

2. We nemen aan dat de aandrijving eenparig geschiedt.

Het model is nu voor te stellen door 2 massa's  $m_1$  en  $m_2$ , welke over elkaar kunnen glijden. Een van deze massa's wordt via een gedempte elastische verbinding aangedreven. Tussen de glijvlakken van de massa's is een geringe visceuse demping.

De andere massa is gedempt elastisch verbonden ~~verbonden~~ met het vaste gestel.



F: wrijvingskracht  
 c: veerconstante  
 p: dempingscoëff.

Indien de aandrukkraft de lichamen door het gewicht ontstaat, mogen we schrijven  $F = \mu G = \mu mg$

De beweging van de massa's wordt gegeven door het volgende stelsel D.V.:

$$m_1 \ddot{x} + (p_1 + p_2) \dot{x} + c_1 x - p_2 \dot{y} = c_1 v t + c_1 x_0 + p_1 v - F_{dyn}$$

$$m_2 \ddot{y} + (p_2 + p_3) \dot{y} + c_2 y - p_2 \dot{x} = -c_2 y_0 + F_{dyn}$$

met de randvoorwaarden  $t=0$   $x=x_0$ ,  $y=y_0$

Indien de massa's t.o.v. elkaar stil staan, dan treedt er statische wrijving op:  $F \leq F_{stat}$ . en geldt de D.V.:

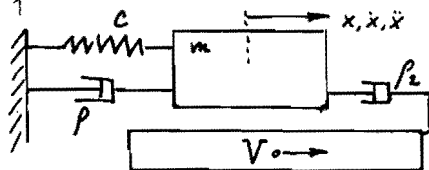
$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + (p_1 + p_2) \dot{x} + (c_1 + c_2) x = p_1 v + c_1 v t$$

$$x = y$$

Daar in de praktische gevallen meestal een der massa's groot is ten opzichte van de andere zullen we de 2 gevallen beschouwen, waarin resp  $m_1$  en  $m_2 \gg$  groot zijn.

I.  $m_1 = \infty$

massa  $m_1$  bezit dan de constante snelheid  $V$ .



$$\dot{x} \leq V$$

De beweging verloopt nu als volgt:

Uitgaande van de Stick-periode;  $m$  heeft snelheid  $V$ , dan  $F \leq F_{stat}$

Tijdens deze beweging zal de veer  $c$  zich spannen.

Indien het evenwicht:  $cx_0 = F_{stat} - \rho_1 V$  wordt bereikt, schiet de massa los.

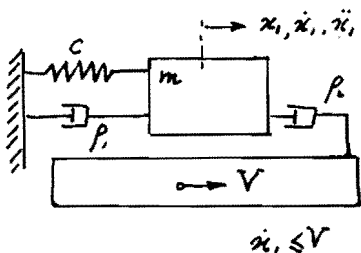
De wrijvingskracht wordt nu  $F_{dyn}$  en de massa gaat nu een gedempte beweging uitvoeren om de nieuwe evenwichtsstand:  $cx_1 = F_{dyn} + \rho_2 V$ .

Wanneer treedt er opnieuw Stick op? Indien tijdens deze gedempte beweging de snelheid op een moment = 0 wordt.

De beweging verloopt dan periodiek.

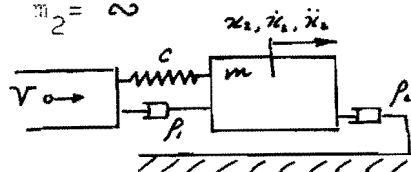
We zullen de voorwaarden voor  $c$ ,  $m$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , en  $V$  onderzoeken, waarbij deze periodieke beweging optreedt.

I  $m_1 = \infty$



$$\dot{x}_1 \leq V$$

II  $m_2 = \infty$



$$\dot{x}_2 > 0$$

Slipperiode.

$$m\ddot{x}_1 + (\rho_1 + \rho_2)\dot{x}_1 + cx_1 = F_{dyn} + \rho_2 V$$

$$m\ddot{x}_2 + (\rho_1 + \rho_2)\dot{x}_2 + cx_2 = -F_{dyn} + cVt + \rho_1 V$$

Randvoorwaarden:

$$t=0 \begin{cases} cx_{10} = F_{stat} - \rho_1 V \\ \dot{x}_1 = V \end{cases}$$

$$t=0 \begin{cases} cx_{20} = F_{stat} - \rho_1 V \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Lineaire transformatie:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{x}_1 + V \\ x &= -x_1 + x_{10} + Vt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_2 \\ x &= x_2 - x_{20} \end{aligned}$$

$$m\ddot{x} + (\rho_1 + \rho_2)\dot{x} + cx = \Delta F + cVt$$

$$\text{met } t=0 \begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$$

$$\text{en waarin: } \Delta F = F_{stat} - F_{dyn}$$

Dimensieloze D.V.:

$$\ddot{\xi} + 2\theta\omega_0\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \gamma V\omega_0 + V\omega_0^2 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad : \text{ de eigenfreq. van het systeem.}$$

$$\theta = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\sqrt{mc}} \quad : \text{ de dimensieloze dempingsfactor.}$$

$$\gamma = \frac{\Delta F}{V\sqrt{mc}} \quad : \text{ het dimensieloze wrijvingskrachtverschil.}$$

2.1. Mathematische oplossing.

De slip: D.V.:  $\ddot{x} + 2\theta\omega\dot{x} + \omega_0^2 x = \varphi V \omega_0 + V \omega_0^2 t$

met de randvoorwaarden:  $t=0 \begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$

Voor de uitwerking zie bijlage I.

Resultaat:

Het karakter van de beweging wordt bepaald door:  $\sqrt{\theta^2 - 1}$

$\theta \geq 1$  : gedempte a-periodieke beweging

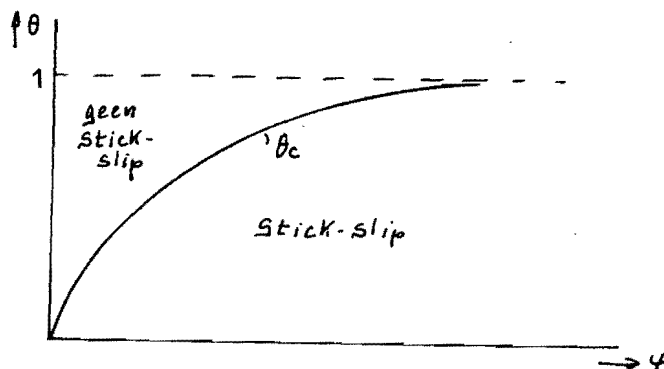
$\theta < 1$  : gedempte periodieke beweging.

De voorwaarde dat de relatieve snelheid juist nul wordt: kritische toestand.

Dan:

1.  $\theta < 1$  anders kan  $\dot{x}$  niet nul worden.

$$2. \frac{\theta_c}{\sqrt{k - \theta_c^2}} \arctan \frac{\varphi \sqrt{1 - \theta_c^2}}{\varphi \theta_c - 1} = \log \sqrt{\varphi^2 - 2\theta_c \varphi + 1}$$



Voor kleine waarden van  $\theta$  geldt bij benadering:

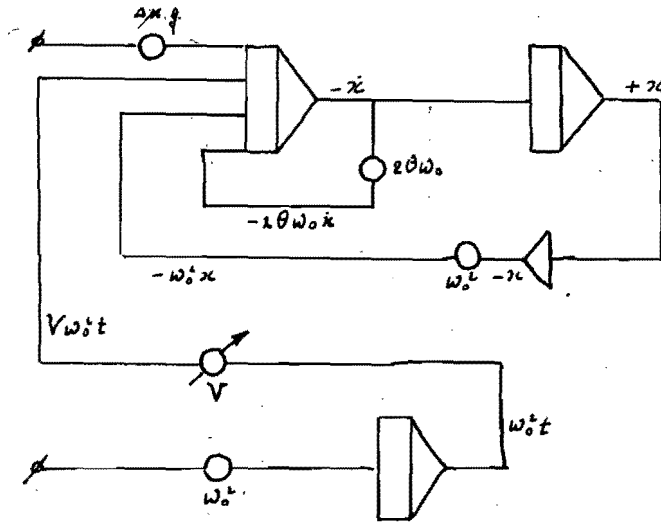
$$\theta_c = \frac{\varphi^2}{4\pi}$$

of: 
$$v_c^2 = \frac{\Delta F^2}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)\sqrt{m c}}$$

2.2. Electrisch analogon.

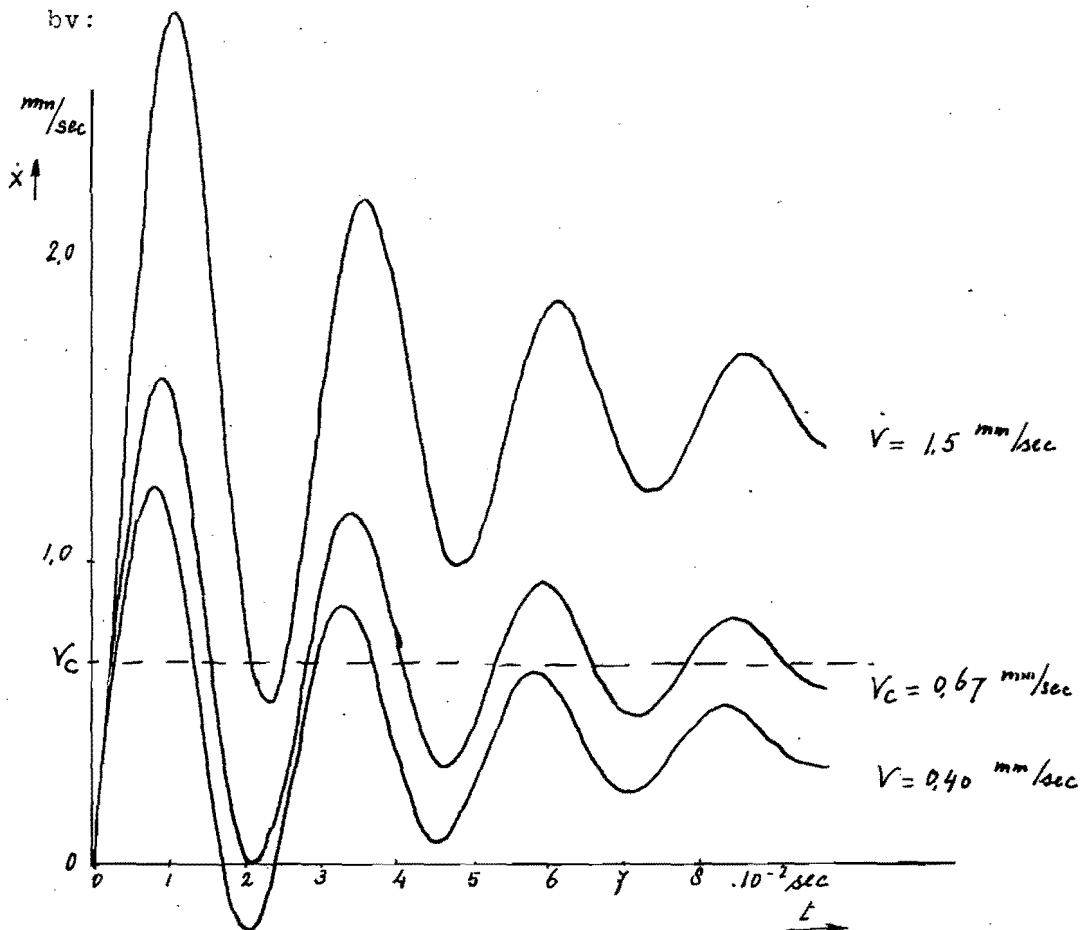
Vullen we voor  $\Delta F$ : z.g.  $\Delta \mu$  in de D.V., dan wordt deze

$$\ddot{x} = -2\theta\omega_0\dot{x} - \omega_0^2 x + \Delta\mu g + V\omega_0^2 t \quad \text{met } t=0: \begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$$



Voor volledige uitwerking met schaalfactoren zie bijlage II.

We kunnen nu  $V_c$  bepalen door  $V$  te variëren, zodanig dat het eerste minimum van  $\dot{x}$  voor  $t > 0$  aan de  $x$ -as raakt.





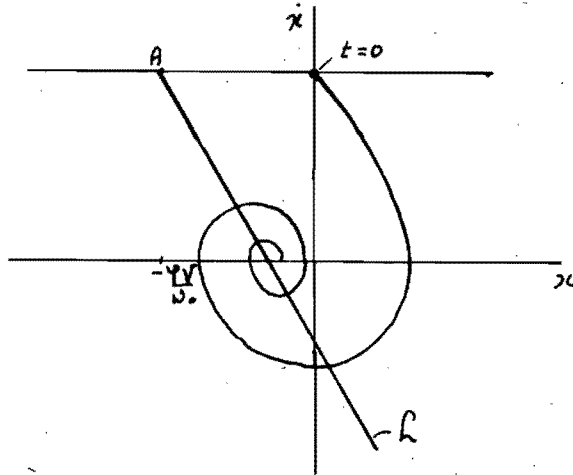
### 2.3 Grafische oplossing.

Voor de uitwerking zie Bijlage III.

We schrijven de D.V. in de vorm:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{V\omega_0(2\theta - \varphi) - 2\theta\omega_0\dot{x} - \omega_0^2 x}{\dot{x}}$$

De Liénard-kromme wordt:



Deze geeft een onder-kritische toestand, waarbij geen Stick optreedt.

Deze constructie maakt het mogelijk, bij een gegeven  $\varphi$  en  $\theta$  te controleren of Stick-Slip zal optreden.

In de kritische toestand moet de kromme raken in punt A.

Voor  $\theta = 0,1$  is op de verschillende manieren  $\varphi_c$  bepaald:

1. Exact:  $\varphi_c = 1,47$
2. Analogon:  $\varphi_c = 1,48$
3. Grafisch:  $\varphi_c = 1,5$

### 3. Het Schaafeffect.

De beweging van het Stick-Slip model wordt gekarakteriseerd door de dimensieloze grootheden  $\theta$  en  $\varphi$ .

Wat is de invloed van het schaafeffect op de verschillende grootheden.

Schaalmodel: \*

Schaalfactor:  $a$ .

alle lengtematen vermenigvuldigen we met  $a$ .

$p^* = p$  onafh. van de afmetingen van het systeem.  
alleen afh. van de snelheid.

$c^* = a \cdot c$ . meestal kunnen we schrijven:  $c = \alpha \cdot \frac{EJ}{L^3}$

$$\left. \begin{aligned} J^* &= a^4 J \\ L^* &= a L \end{aligned} \right\}$$

$$m^* = a^3 m$$

$$\omega_0^* = \sqrt{\frac{c^*}{m^*}} = \frac{1}{a} \cdot \omega_0$$

$$\text{Dus nu is } \theta^* = \frac{\theta}{a^2} = \frac{p_1^* + p_2^*}{2 \sqrt{m c^*}}$$

Voor kleine  $\theta$  geldt bij benadering:  $\varphi_c = \sqrt{4\pi\theta}$

$$\text{Dus } \varphi_c^* = \frac{1}{a} \varphi_c$$

$$\varphi_c = \frac{\Delta \mu \cdot m \cdot g}{V_c \sqrt{m c}} = \frac{\Delta \mu \cdot g}{V_c \cdot \omega_0}$$

$$\text{Dus } V_c^* = a^2 V_c$$

Bij een kleiner Model wordt de  $V_c$  kleiner.

4. Middelen om het stick-slip verschijnsel te vermijden.

Uit het voorgaande is gebleken dat:

$$\psi_c = f(\theta) \text{ en voor kleine } \theta: \psi_c \approx \sqrt{4\pi\theta} \quad (\theta < 0,05)$$

$$\text{verder is: } \psi_c = \frac{\Delta F}{V_c \cdot \sqrt{mc}} \quad \text{en } \theta = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\sqrt{mc}}$$

zodat:

$$V_c = \frac{\Delta F}{\sqrt{4\pi mc \theta}} = \frac{\Delta F}{\sqrt{2\pi(\rho_1 + \rho_2)\sqrt{mc}}}$$

Indien  $V > V_c$  dan treedt er geen "stick-slip" op.

We hebben de volgende middelen om "stick-slip" te vermijden, dus  $V > V_c$  want voor  $V < V_c$  treedt onvermijdelijk "stick-slip" op.

A. snelheid  $V$  opvoeren, zodat  $V > V_c$

B. kritische snelheid  $V_c$  verlagen.

1.  $\Delta F$  verlagen.

$$\Delta F = \Delta\mu \cdot N$$

1.1.  $\Delta\mu$  verlagen

- door volledige scheiding der loopvlakken:  $\Delta\mu = 0$   
b.v. hydrostatische smering.  
luchtfilm.
- juiste keuze van het smeermiddel.
- additives verlagen  $\Delta\mu$ ; ze zijn echter corrosief.
- rollende wrijving is gunstiger dan glijdende wrijving.
- kunststoffen hebben vaak een kleinere  $\Delta\mu$

1.2.  $N$  verlagen.

- vaak wordt  $N$  bepaald door het gewicht.  
dus kleinere massa  $m$ .

2. ( $\rho_1 + \rho_2$ ) verhogen.

$\rho_1$ : sterk dempend materiaal gebruiken: b.v.  
Gy of kunststoffen.

$\rho_2$ : hogere viscositeit der olie.

opm. De juiste dosering is uitermate belangrijk  
{ te weinig: metallisch contact  $\Delta F$  groot.  
te veel : minder demping  $\rho_2$  kleiner.

3. C verhogen.

stijf construeren van de elementen van de aandrijving.

4. m verhogen.

geldt alleen als N(1,2) niet bepaald wordt door het gewicht.

Uit onderzoekingen is gebleken dat:

1. temperatuur vrijwel geen invloed heeft; alleen op  $\rho_1$  en  $\rho_2$ .
2. opp. structuur eveneens weinig invloed heeft; alleen op de filmvorming.

5. Enkele suggesties voor verder onderzoek.

1. Aan de hand van een aantal proeven bepalen, hoe groot de afwijkingen zijn tussen theorie en werkelijkheid.
2. Indien bij een bepaalde constructie stick-slip optreedt, welke mogelijkheden zijn er dan om de constructie beneden de kritische grens te brengen.

Een onderzoek of het mogelijk is bij een bepaalde constructie de grootheden  $c, m, p, p_0$  en  $\delta$  voldoende nauwkeurig te bepalen om een voorspelling te doen over  $V_c$ .  
b.v. Uit het verloop der eigen trillingen kan men  $\omega_0$  en  $\theta$  bepalen.

1. Doetsen van formules
2. Schaak effect
3. De ventijl pres acties bepalen aan constructie die wel stick-slip vertoont.  
Lijn de afgeleide formules ook praktisch betrouwbare en controleer om verbetering.  
Speciaal bij groter <sup>je</sup> pluise apparaten is  $V_{krit}$  bepalen!

6. Literatuur.

1. Bowden and Leben. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction.  
Proc. Royal Society, 1939 Vol 169
2. Papenhuyzen. Wrijvingsproeven in verband met het slippen van autobanden  
De Ingenieur 53, 1938.
3. Blok. Fundamental Mechanical Aspects of Boundary Lubrication.  
SAE Journal. Febr 1940.
4. Derjaquin, Push en Tolstoi. A Theory of Stick-Slip sliding of solids.  
Paper 13 . Conf. of Lubrication and Wear. Londen 1957.
5. Singh. Study of Critical Velocity of Stick-slip Sliding.  
Journal of Engineering for Industry. Nov 60.
6. Singh en Monhanti. Experimental Investigations on Stick-slip sliding.  
The Engineer. Apr. 1959.
7. Singh. Sensitivity of slow shifting under Stick.slip conditions.  
The Engineer 29 juli 1960.
8. Häussler. Zur berechnung des Stick-slip Vorganges.  
Maschinenbautechnik 8 1959 heft 1.
9. Fleischer. Grundsätzliches über das stick-slip Phänomen.  
Symposium Schmierstoffe und Schmierung, 1959 Dresden.
10. Beck. Beitrag zur Theorie der Stick-slip Schwingungen.  
Werkstatttechnik 50 1960 heft 4.
11. Pietsch. Über Einflussgrößen auf den Stick-slip Effekt.  
Maschinenbautechnik 10 1961 heft 5
- 12 Conn. Stick.slip. What it is, What to do about it.  
The Tool Engineer. juli 1960
13. Rabinowitz. Stick and Slip.  
Scientific American 1960
14. Beuerlein. Ein Beitrag zur Klärung und Verhinderung des Stick-slip  
Vorganges. Deutsche Shell. Hamburg.

7. Het artikel van Singh: Study of critical Velocity of Stick-Slip sliding.

Volgens ondergetekende heeft de auteur in dit artikel de twee genoemde modellen I en II door elkaar gehaald.

Het getekende model klopt niet met de beschrijving.

De afgeleide D.V. met de opgegeven randvoorwaarden zijn eveneens fout.

Deze moeten luiden:

$$x = \frac{VF}{k} + Vt - \frac{V}{\omega_n} e^{-f' \omega_n t} [A \cos \omega_n t + (1+A f') \sin \omega_n t.]$$

$$\dot{x} = V [1 - e^{-f' \omega_n t} \{ \cos \omega_n t - (A + f') \sin \omega_n t \}]$$

$$\ddot{x} = \frac{VF}{m} e^{-f' \omega_n t} \left\{ \left(1 + \frac{2f'}{A}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{1}{A} - f'\right) \sin \omega_n t \right\}$$

De verdere berekeningen en de oplossing met de analogon-computer bevatten dezelfde fout.

In de resultaten is deze fout niet groot, omdat de overbodige termen ontstaan door  $c_2 V$ , alleen bij lage waarden bekeken zijn.

Dezelfde fouten komen voor in het artikel van Singh en Mohanti in de Engineer van 3 april 1959.

Bijlage I.

$$\ddot{x} + 2\theta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 4V\omega_0 + V\omega_0^2t$$

met  $t=0 \begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$

H.D:  $\ddot{x} + 2\theta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$

Kar. verg:  $\lambda^2 + 2\theta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda = -\theta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\theta^2 - 1}$$

a)  $\theta \geq 1$  2-periodieke beweging.

b)  $\theta < 1$  periodieke beweging.

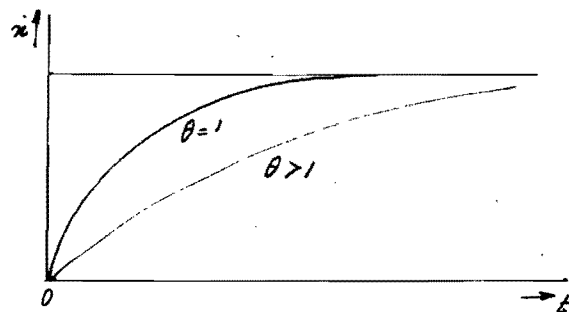
Part. Opl:  $x = \frac{4V - 2\theta V}{\omega_0} + Vt = V \left\{ \frac{4 - 2\theta}{\omega_0} + t \right\}$

a)  $\theta \geq 1$

Alg. opl:  $x = V \left\{ \frac{4 - 2\theta}{\omega_0} + t \right\} + e^{-\theta\omega_0 t} \left( A e^{\omega_0\sqrt{\theta^2 - 1}t} + B e^{-\omega_0\sqrt{\theta^2 - 1}t} \right)$

De snelheid  $\dot{x}$  nadert asymptotisch naar  $V$

Voor  $\theta = 1$  : Kritisch gedempt.



b)  $\theta < 1$

Alg. opl:  $x = V \left\{ \frac{4 - 2\theta}{\omega_0} + t \right\} + e^{-\theta\omega_0 t} \left( A \cos(\omega_0\sqrt{1 - \theta^2}t) + B \sin(\omega_0\sqrt{1 - \theta^2}t) \right)$

$$\dot{x} = V + e^{-\theta\omega_0 t} \left\{ (-\theta\omega_0 A + B\omega_0\sqrt{1 - \theta^2}) \cos \omega_0\sqrt{1 - \theta^2}t + (-\theta\omega_0 B - A\omega_0\sqrt{1 - \theta^2}) \sin \omega_0\sqrt{1 - \theta^2}t \right\}$$

Oplossen van  $A$  en  $B$  uit de randvoorwaarden:

$t=0 \quad x = V \left\{ \frac{4 - 2\theta}{\omega_0} \right\} + A = 0$

$$\dot{x} = (-\theta\omega_0 A + B\omega_0\sqrt{1 - \theta^2}) = 0$$



$$\therefore A = \frac{V}{\omega_0} (2\theta - \varphi) \quad \text{en} \quad B = \frac{V}{\omega_0} \frac{2\theta^2 - \theta\varphi - 1}{\sqrt{1 - \theta^2}}$$

$$x = V \left\{ \frac{\varphi - 2\theta + t}{\omega_0} \right\} + e^{-\theta\omega_0 t} \frac{V}{\omega_0} \left[ (2\theta - \varphi) \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t) + \frac{2\theta^2 - \theta\varphi - 1}{\sqrt{1 - \theta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t) \right]$$

$$\dot{x} = V \left[ 1 + e^{-\theta\omega_0 t} \left\{ -\cos(\sqrt{1 - \theta^2} \omega_0 t) + \frac{\varphi - \theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t) \right\} \right]$$

$$\ddot{x} = V \omega_0 e^{-\theta\omega_0 t} \left\{ \varphi \cos(\sqrt{1 - \theta^2} \omega_0 t) + \frac{1 - \theta\varphi}{\sqrt{1 - \theta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t) \right\}$$

Wanneer treedt er stick-slip op?

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{voor } t > 0$$

Er treedt juist stick-slip op  $\ddot{x} = 0 \quad \dot{x} = 0$

$$\ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t = \arctan \frac{\varphi \sqrt{1 - \theta^2}}{\varphi\theta - 1}$$

$$\text{of } \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t) = \frac{\varphi \sqrt{1 - \theta^2}}{\sqrt{\varphi^2 - 2\varphi\theta + 1}}$$

$$\cos(\omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} t) = \frac{\varphi\theta - 1}{\sqrt{\varphi^2 - 2\varphi\theta + 1}}$$

} of beide neg.

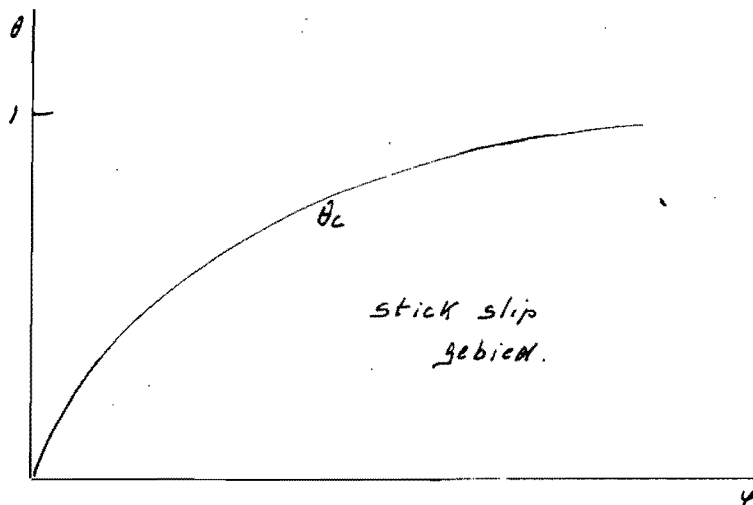
Vullen we deze waarden in voor  $\dot{x}$  dan:

$$\dot{x} = V \left\{ 1 + e^{-\theta\omega_0 t} \left( \pm \sqrt{\varphi^2 - 2\varphi\theta + 1} \right) \right\}$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{als} \quad \sqrt{\varphi^2 - 2\varphi\theta + 1} e^{-\theta\omega_0 t} = 1$$

$$\text{of } \boxed{\log \sqrt{\varphi^2 - 2\varphi\theta + 1} = \frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} \arctan \frac{\varphi \sqrt{1 - \theta^2}}{\varphi\theta - 1}}$$

Kritische waarde



Bijlage II.

$$\ddot{x} + 2\theta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \Delta\mu g + V\omega_0^2 t$$

met  $t=0 \quad x=0$   
 $\dot{x}=0$

Voor welke  $V$  geldt  $t > 0 \quad \ddot{x}=0, \dot{x}=0$

Stel:  $\dot{x} = u$

$t = z$

machinetijd  $T = \beta t$  dan  $\frac{dt}{dT} = \frac{1}{\beta}$

$$\ddot{x} = -2\theta\omega_0 \dot{x} - \omega_0^2 x + \Delta\mu g + V\omega_0^2 t$$

$$\frac{du}{dT} \frac{dT}{dt} = -2\theta\omega_0 u - \omega_0^2 x + \Delta\mu g + V\omega_0^2 z$$

$$\frac{du}{dT} = - \left\{ \frac{2\theta\omega_0}{\beta} u + \frac{\omega_0^2}{\beta} x - \frac{\Delta\mu g}{\beta} - \frac{V\omega_0^2 \cdot z}{\beta} \right\}$$

Scheelfactoren  $\lambda_1, \lambda_2$  en  $\lambda_3$

$$\frac{1}{\lambda_2} \frac{d(\lambda_2 u)}{dT} = - \left\{ \frac{2\theta\omega_0}{\beta \lambda_2} (\lambda_2 u) + \frac{\omega_0^2 (\lambda_2 x)}{\beta \lambda_1} - \frac{\Delta\mu g \cdot (100)}{100\beta} - \frac{V\omega_0^2 (\lambda_3 z)}{\beta \lambda_3} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \quad \frac{d(\lambda_2 u)}{dT} = + \left\{ \frac{2\theta\omega_0}{\beta} (\lambda_2 u) + \frac{\omega_0^2 \lambda_2 (\lambda_2 x)}{\beta \lambda_1} - \frac{\Delta\mu g \cdot \lambda_2 (100)}{100\beta} - \frac{V\omega_0^2 \lambda_2 (\lambda_3 z)}{\beta \lambda_3} \right\} \\ \text{II.} \quad \frac{d(\lambda_2 u)}{dT} = - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 \beta} (\lambda_2 u) \\ \text{III.} \quad \frac{d(\lambda_3 z)}{dT} = - \frac{\lambda_3}{100\beta} (100). \end{array} \right.$$

parameters:

potmeters  $P01: \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \beta}$

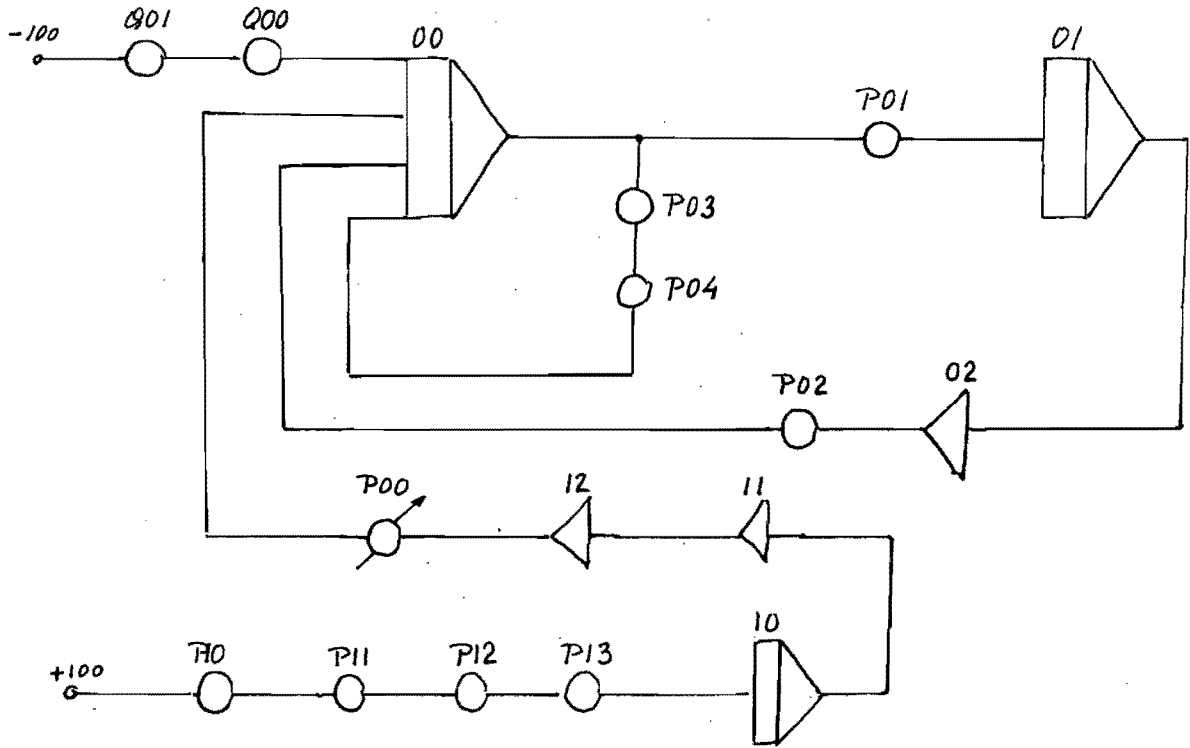
$$\left. \begin{array}{l} P00: \\ P01: \end{array} \right\} \frac{\Delta\mu \lambda_2 g}{\beta}$$

$$P02: \frac{\omega_0^2 \lambda_2}{\beta \lambda_1}$$

$$P00: \frac{V\omega_0^2 \lambda_2}{\beta \lambda_3}$$

$$\left. \begin{array}{l} P03 \\ P04 \end{array} \right\} \frac{2\theta\omega_0}{\beta}$$

$$\left. \begin{array}{l} P10 \\ P11 \\ P12 \\ P13 \end{array} \right\} \frac{\lambda_3}{100\beta}$$



Bepalen schaalwaarden:

max spanning versterkers 100 V dus  $\lambda_{1,2max} = 100 \text{ cmz.}$

$x_{max} \approx 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$

$\lambda_1 = 10^5 \text{ V/m}$

$\dot{x}_{max} \approx 10 \text{ mm/sec} = 10^{-2} \text{ m/sec}$

$\lambda_2 = 10^4 \text{ Vsec/m}$

$t_{max} \approx 0,1 \text{ sec} = 10^{-1} \text{ sec}$

$\lambda_3 = 10^3 \text{ V/sec}$

machine tijd  $\beta = 100 \rightarrow 1 \text{ cyclus ca } 10 \text{ sec.}$

Potm.	$\beta = 10$ $\omega_0 = 100$	$\Delta\mu = 0,01$ $\theta = 0,01$	$\beta = 100$	Kritische snelheid: $100 V_c = 0,265 - 0,270$ $V_c = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m/sec}$  Recorder schaal: $\bar{x} : 5$ $y : 2,5$
P01	$\frac{10}{\beta}$	$\frac{10}{\beta}$	0,1	
P02	$\frac{1000}{\beta}$	$\frac{1000}{\beta}$	10	
P03	$\frac{2000}{\beta}$	$\frac{2}{\beta}$	0,02	
P04				
Q00	$\frac{10000\mu}{\beta}$	$\frac{10}{\beta}$	0,1	
Q01				
P10	$\frac{10}{\beta}$	$\frac{10}{\beta}$	0,1	
P11				
P12				
P13				
P00	$\frac{10^5 V}{\beta}$	$\frac{10^5 V}{\beta}$	$10^3 V$	

Bijlage III.

We gaan uit van D.V.I., omdat hierin de term ... t ontbreekt.

$$m\ddot{x}_1 + (\rho_1 + \rho_2)\dot{x}_1 + c x_1 = F \sin \omega t + \rho_2 V \quad \text{voor } x_1 \leq V$$

$$\text{met } t=0 \quad \begin{cases} x_1 = x_{10} & - c x_{10} = F \sin \omega t - \rho_2 V \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_1 \end{cases}$$

transformatie:  $\begin{cases} x_1 = x + x_{10} \\ \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \ddot{x}_1 = \ddot{x} \end{cases}$

dan:

$$m\ddot{x} + (\rho_1 + \rho_2)\dot{x} + c x = (\rho_1 + \rho_2)V - \Delta F \quad \text{voor } x \leq V$$

$$\text{met } t=0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

bij deze modellen kan  $x$  nooit  $> V$  worden.

dimensieloos:

$$\ddot{x} + 2\theta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = V\omega_0(2\theta - \gamma)$$

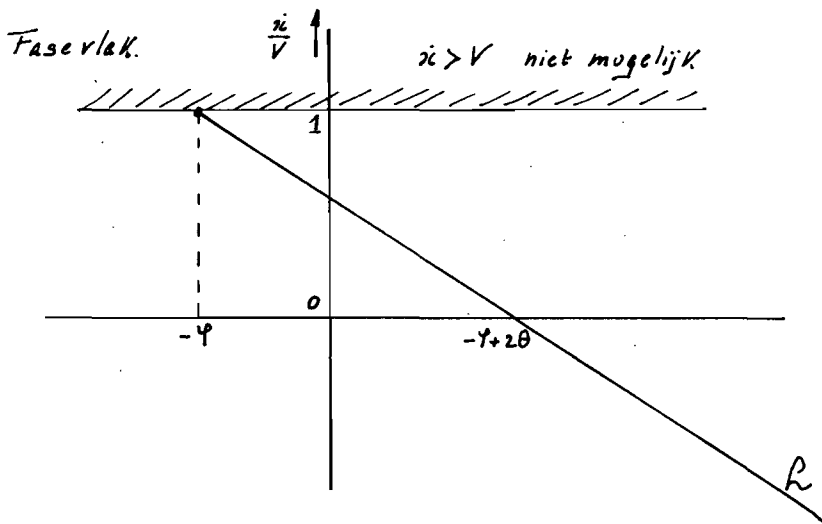
Beschouwing van deze D.V. in het fasevlak:

$$x \frac{dx}{dx} + 2\theta\omega_0 x + \omega_0^2 x = V\omega_0(2\theta - \gamma)$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{V\omega_0(2\theta - \gamma) - 2\theta\omega_0 x - \omega_0^2 x}{\dot{x}}$$

en de Liénard-Kromme wordt gegeven door:

$$V\omega_0(2\theta - \gamma) - 2\theta\omega_0 x - \omega_0^2 x = 0$$



Liénard-constructie

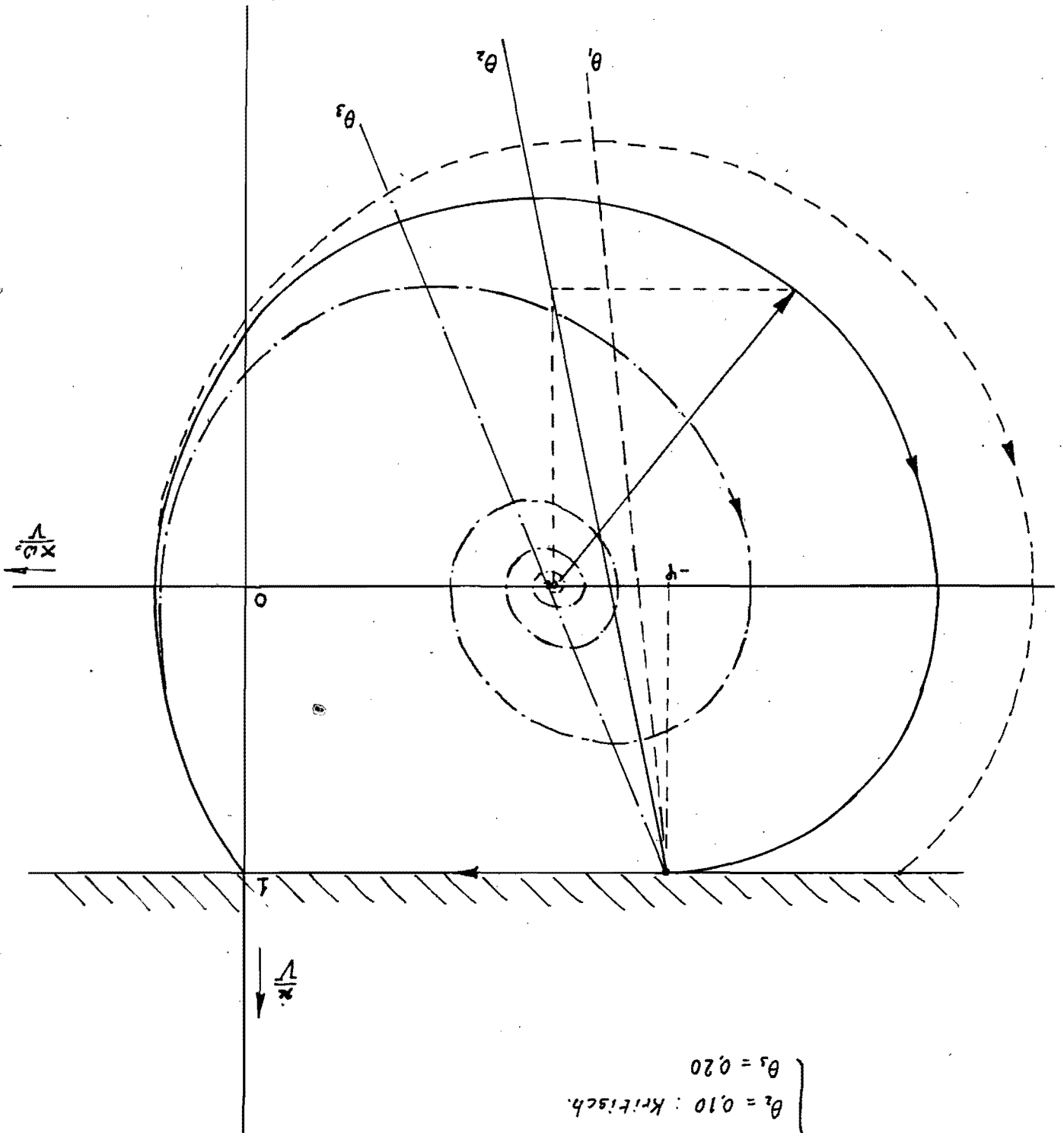
zie:

Voortgezette dynamica

Trot Esmeyer.

Constructie van Liénard.

Opm. Voor  $\theta = 0,00$  ontstaat een cirkel om het punt  $(-2,0)$ :  
ongedempte trilling om het punt  $\pi = -\varphi$



$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 = 0,05 \\ \theta_2 = 0,10 : \text{Kritisch.} \\ \theta_3 = 0,20 \end{array} \right\} \varphi = 1,47$$