

De meting van de brekingsindex van lucht m.b.v. een HP laser-interferometer

Citation for published version (APA):

Vermeulen, W. P. (1986). *De meting van de brekingsindex van lucht m.b.v. een HP laser-interferometer*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Vakgroep Produktietechnologie : WPB; Vol. WPA0300). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1986

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

BB 436215

De meting van de brekingsindex van lucht
m.b.v. een HP laser-interferometer.

Verslag van I-1 opdracht van
Wim Vermeulen, uitgevoerd onder bege-
leiding van Ir.P.J.J. Schellekens.

januari '86

WPA-rapport 0300

<u>Inhoudsopgave</u>	blz.
Inleiding	ii
Hoofdstuk 1 - Inleiding meetopstelling	1
1.1 Beschrijving van de meetprincipes	1
1.2 Eisen aan de opstelling	2
1.3 Uitvoering van de meetopstelling	5
Hoofdstuk 2 - Thermometrie	9
2.1 Inleiding	9
2.2 De weerstandsthermometer	10
2.3 Weerstandsmeting	13
2.4 Thermometer-ijking	17
Hoofdstuk 3 - Druk, vochtigheid en CO ₂ -gehalte van de lucht	19
3.1 Luchtdruk	19
3.2 Vochtigheid (Waterdampdruk)	19
3.3 CO ₂ -gehalte	21
Hoofdstuk 4 - Laserinterferometrie	22
4.1 De laser	22
4.2 De laserinterferometer van HP (HP5526)	26
4.3 Nauwkeurigheid van de laserinterferometer	29
Hoofdstuk 5 - Meetresultaten	30
5.1 Meetnauwkeurigheid laserinterferometrisch gedeelte	30
5.2 Meetnauwkeurigheid Edlén-gedeelte	31
5.3 Metingen	32
5.4 Conclusies en aanbevelingen	35
Literatuur-opgave	36
Bijlagen:	
1. IJkmetingen thermometers Pt-100	
2. Optisch weglengteverschil interferometer	

INLEIDING

Dit is het verslag van een Il-opdracht, uitgevoerd door W.P.Vermeulen in het laboratorium voor lengtemeting van de TH Eindhoven in opdracht van Ir.P.J.J.Schellekens.

Bepaalde fysische randgebieden van deze opdracht (laser, thermometrie) zijn zeer uitgebreid behandeld in verband met het verkrijgen van de onderwijsbevoegdheid in de natuurkunde.

De opdracht behelsde de bepaling van de brekingsindex van lucht met behulp van onder andere een laser-interferometer opstelling.

Doel van de metingen was het aantonen van de uitwisselbaarheid van de brekingsindices, direct gemeten met behulp van de laser-interferometer opstelling, danwel berekend volgens de formule van Edlén [1] uit de gemeten relevante fysische grootheden (temperatuur, druk, vochtigheid, CO₂-gehalte).

Dit om uiteindelijk te kunnen komen tot een zo nauwkeurig mogelijke en vooral snelle en handzame meting van de brekingsindex van industriële atmosferen. Vermoed wordt namelijk dat met name koolwaterstoffen, die lastig kwantitatief te analyseren zijn, in relevante hoeveelheden (d.w.z. meetbare invloed op de brekingsindex hebbende), voorkomen in deze industriële atmosferen.

Het bepalen van een juiste brekingsindex is natuurlijk van belang voor laser-interferometers die in zo'n atmosfeer bedreven worden.

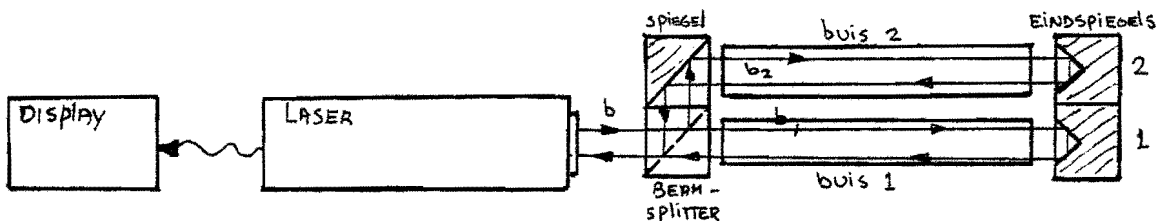
Hoofdstuk 1 - Inleiding meetopstelling

1.1 Beschrijving van de meetprincipes

Laserinterferometrisch gedeelte

Zoals in de inleiding reeds is vermeld willen we komen tot een goede en snelle meting van de brekingsindex van lucht, en trachten we dit te bereiken met een laser-interferometer opstelling.

Het principe van deze opstelling is als volgt (fig. 1.1) :



Figuur 1.1 - Principe laser-interferometer opstelling

Een laserbundel b komt uit de laserkop en wordt in de 'beam-splitter' gesplitst in twee bundels b_1 en b_2 .

b_1 loopt namelijk rechtdoor, door buis 1, keert via eindspiegel 1 verschoven ten opzichte van de heengaande bundel door buis 1 weer terug naar de beamsplitter en komt daar weer samen met b_2 .

b_2 word afgebogen naar de spiegel, en vervolgens naar buis 2.

Na het doorlopen van buis 2 keert b_2 , via de eindspiegel 2, verschoven ten opzichte van de heengaande bundel, weer terug via de spiegel naar de beam-splitter, alwaar hij na afbuigen weer samenkomt met b_1 .

b_1 en b_2 lopen verder gezamenlijk naar de laser, alwaar ze uitkomen in de detector. Deze detector registreert een verschil tussen de optische weglengtes van bundel 1 en bundel 2 ten opzichte van een referentiesituatie.

Beschouwen we bovengeschetste situatie met beide buizen vacuum gepompt als referentiesituatie, dan zal het verschuiven van één der eindspiegels over een afstand S in de display weergegeven worden als $2S$.

Laten we buis 2 vol lucht lopen dan zal de weglengte voor bundel 2 door buis 2 toenemen van $n_v \cdot L_b$ naar $n_{1u} \cdot L_b$, waarbij L_b de buislengte is, en n_v resp. n_{1u} de brekingsindices van respectievelijk vacuum en lucht. De brekingsindex van vacuum is 1, dus de display zal als weglengtetoeename weergeven: $2 \cdot (n_{1u} - 1) \cdot L_b$.

Indien we tevoren L_b meten dan kunnen we eenvoudig de brekingsindex van de binnengelaten lucht berekenen; Zeg dat de display X aangeeft, dan volgt n_{1u} uit: $n_{1u} = 1 + X/2 \cdot L_b$.

De display geeft (door onze keuze) de verplaatsing aan in 400-e delen (K) van de golflengte λ van het gebruikte rode licht, dus $X = K \cdot \lambda / 400$

$$n_{1u} = n_{\text{laser}} = 1 + \frac{K \cdot \lambda}{400 \cdot 2 \cdot L_b}$$

- F1 -

Berekening volgens Edlén [1]

Berekening van de brekingsindex van lucht als functie van druk p, temperatuur T, vochtigheid h en CO₂-gehalte X volgens Edlén gaat als volgt:

$$n_{\text{Edlén}} = 1 + 2,7651756 \cdot 10^{-4} \cdot (1 + 0,540 \cdot 10^{-6} \cdot (X-300)) \cdot \frac{1,04127 \cdot 10^{-5} \cdot p}{1 + 3,671 \cdot 10^{-3} \cdot T} - 4,2063 \cdot 10^{-10} \cdot h$$

- F2 -

(T in °C, p in Pa, X in ppm, h in Pa waterdampdruk)

Metten van de brekingsindex volgens Edlén houdt dus in het meten van de grootheden T, p, X en h van de lucht, en deze samenstellen volgens bovenstaande formule.

1.2 Eisen aan de opstelling

We willen de brekingsindex van lucht met een maximale relatieve onnauwkeurigheid van 10^{-7} kunnen bepalen. Deze onnauwkeurigheid veroorzaakt dan namelijk maximaal een onnauwkeurigheid van $1 \mu\text{m}/10 \text{ m}$ bij laser-interferentiemetingen.

Daaruit volgt dat we voor de verschillende grootheden in de metingen een individuele invloed op de onnauwkeurigheid in de orde van 10^{-8} mogen toelaten.

De eisen aan relatieve en absolute nauwkeurigheid van de te meten grootheden kunnen we hieruit berekenen.

Laserinterferometrie

$$F1 : n_{\text{Laser}} = n_L = 1 + \frac{K \cdot \lambda}{800 \cdot L_b}$$

$$\text{Er geldt: } \Delta n = \sum_i \frac{\partial n}{\partial \bar{\phi}_i} \cdot \Delta \bar{\phi}_i \quad \boxed{- F3 -} \quad (\text{voor kleine } \Delta \bar{\phi}_i)$$

Laten we per grootheid een individuele relatieve onnauwkeurigheid van 10^{-8} toe dan moet dus gelden: $\frac{\partial n}{\partial \bar{\phi}_i} \cdot \Delta \bar{\phi}_i \leq 10^{-8} \cdot n$ ($n \approx 1$):

$$\Delta \bar{\phi}_i \leq \left(\frac{\partial n}{\partial \bar{\phi}_i} \right)^{-1} \cdot 10^{-8}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial K} &= \frac{\lambda}{400 \cdot 2 \cdot L_b} \\ \frac{\partial n}{\partial \lambda} &= \frac{K}{400 \cdot 2 \cdot L_b} \\ \frac{\partial n}{\partial L_b} &= \frac{-K \lambda}{400 \cdot 2 \cdot L_b^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \Delta K &\leq 5 \\ \Delta \lambda &\leq 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} \\ \Delta L_b &\leq 3 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \right.$$

Met $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $K \approx 7 \cdot 10^4$, $L_b \approx 0,4 \text{ m}$

Op de eerste twee, ΔK en $\Delta \lambda$ komen we nog terug in hoofdstuk 4.
Over de derde, ΔL_b kunnen we nu al iets zinnigs zeggen.

De -invar- buis heeft een lineaire uitzettingscoëfficiënt α_{li} van ongeveer $2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, zodat $\Delta L_b = 0,4 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta T \approx 10^{-6} \cdot \Delta T$.

Aangezien de temperatuur in de gebruikte meetruimte in een dag ongeveer $0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ schommelt rond de ingestelde temperatuur hebben we hier al een een onnodige onnauwkeurigheid te pakken, omdat die eenvoudig te verrekenen is door deze in formule F1 mee te nemen: $L_b = L_{b0} \cdot (1 + \alpha_{li}(T - T_0))$ waarbij L_{b0} de lengte van de buis is bij $T = T_0$.

F1 wordt dan:

$$n_L = 1 + \frac{K \cdot \lambda}{400 \cdot 2 \cdot L_{b0} (1 + \alpha_{li}(T - T_0))} \quad \boxed{- F4 -}$$

Berekening volgens Edlén

$$F2 : n_{\text{Edlén}} = n_E = 1 + A \cdot (1 + B \cdot (X - C)) \cdot \frac{D \cdot p}{1 + E \cdot T} - F \cdot h$$

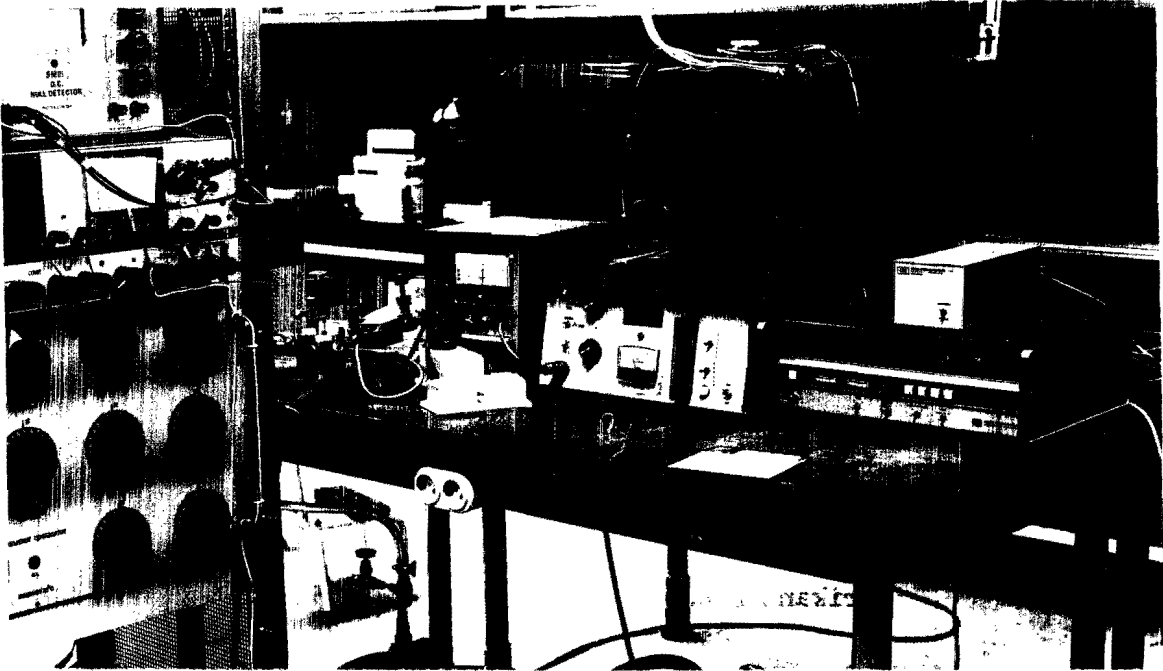
$$\begin{aligned} \text{met } A &= 2,7651756 \cdot 10^{-4} & D &= 1,04127 \cdot 10^{-5} \text{ (Pa}^{-1}\text{)} \\ B &= 0,540 \cdot 10^{-6} \text{ (ppm}^{-1}\text{)} & E &= 3,671 \cdot 10^{-3} \text{ (} ^\circ\text{C}^{-1}\text{)} \\ C &= 300 \text{ (ppm)} & F &= 4,2063 \cdot 10^{-10} \text{ (Pa}^{-1}\text{)} \end{aligned}$$

Berekenen van de individueel toegestane onnauwkeurigheden, analoog aan F3 levert:

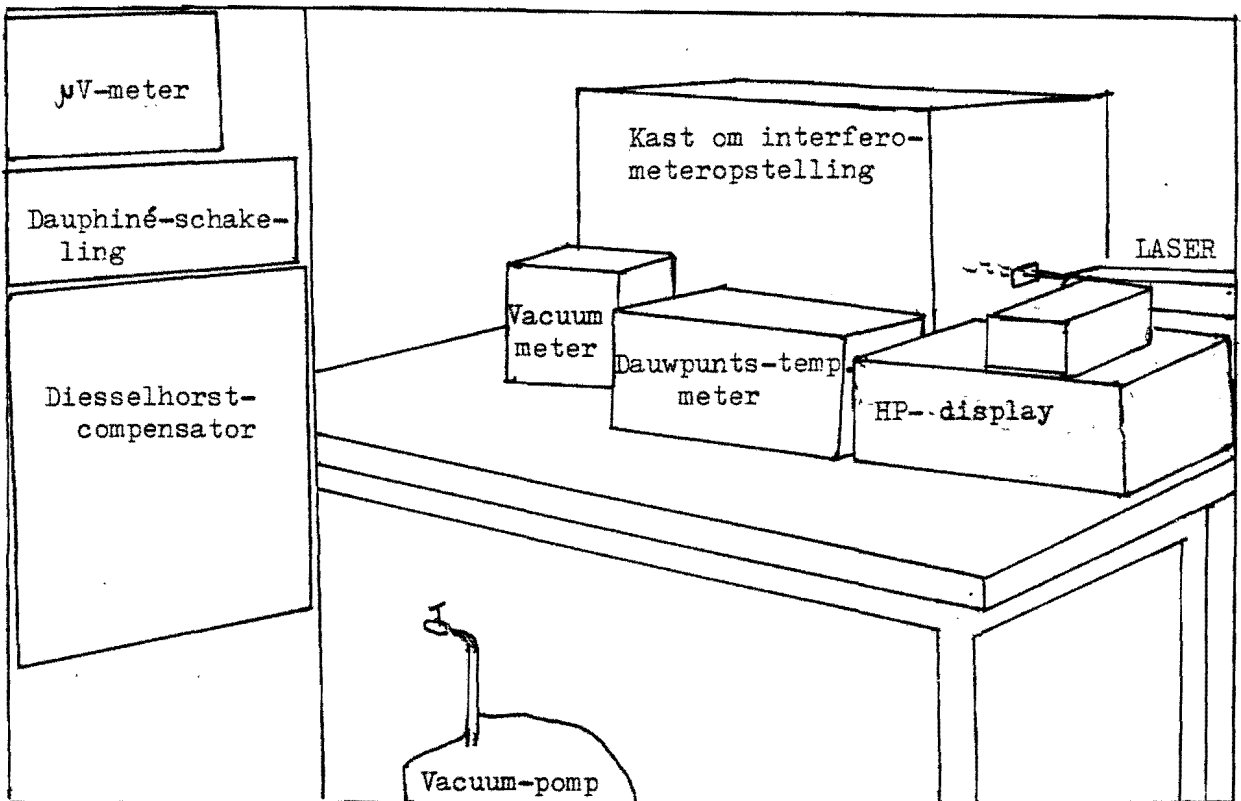
$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial T} &= -A \cdot (1+B(X-C)) \cdot \frac{D \cdot p}{(1+E \cdot T)^2} \cdot E \\
 \frac{\partial n}{\partial p} &= A \cdot (1+B(X-C)) \cdot \frac{D}{1+E \cdot T} \\
 \frac{\partial n}{\partial X} &= A \cdot B \cdot \frac{D \cdot p}{1+E \cdot T} \\
 \frac{\partial n}{\partial h} &= -F
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \Delta T &\leq 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C} \\
 \Delta p &\leq 3 \text{ Pa} \\
 \Delta X &\leq 70 \text{ ppm} \\
 \Delta h &\leq 25 \text{ Pa}
 \end{aligned} \right.$$

Met $T \approx 20^\circ\text{C}$, $p \approx 10^5 \text{ Pa}$, $X \approx 500 \text{ ppm}$ en $h \approx 10^3 \text{ Pa}$

Op ΔT komen we terug in hoofdstuk 2. Δp , ΔX en Δh worden bekeken in hoofdstuk 3.



Figuur 1.2^a - De meetopstelling



Figuur 1.2^b - Benaming meet-opstelling

1.3 - Uitvoering van de meetopstelling

Op de naastliggende bladzijde is een foto van de meetopstelling opgenomen, samen met een verklarende tekening (fig. 1.2)

Edlén-gedeelte

We zien op deze foto 2 meetopstellingsdelen, benodigd voor het bepalen van de brekingsindex van lucht volgens Edlén:

Geheel links het temperatuurmeetgedeelte, van beneden naar boven:

- Diesselhorst compensator (bijzonder soort instelbare weerstand)
- Dauphiné-schakeling (spanningsval comparator) met kanalenkiezer
- μV -meter (werkt als 'display' voor de Dauphiné-schakeling)

In het midden van de foto zien we het elektronische gedeelte van de dauwpuntmeter (fabrikant John B. Pierce), met display en indicator. De gewenste waterdampdruk h van de lucht ligt eenduidig vast als functie van de dauwpuntstemperatuur T_d van die lucht.

De dauwpuntstemperatuursensor bevindt zich binnen de 'kast'.

Niet op de foto zichtbaar zijn de barometers; de kwikbarometer hangt aan de muur tegenover de opstelling, en de membraanbarometer ligt daar vlak bij.

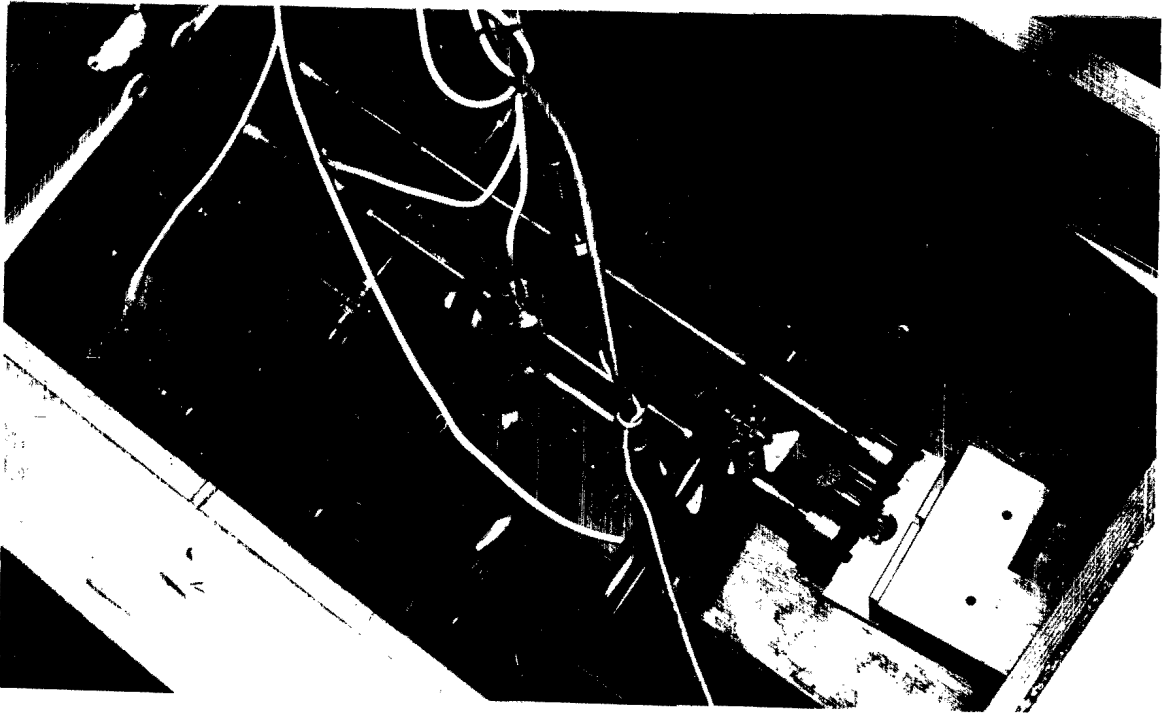
Het CO_2 -gehalte werd niet gemeten, doch geschat als functie van de menselijke bezettingsgraad van de ruimte in relatie met vroegere metingen.

Laser-interferometer gedeelte

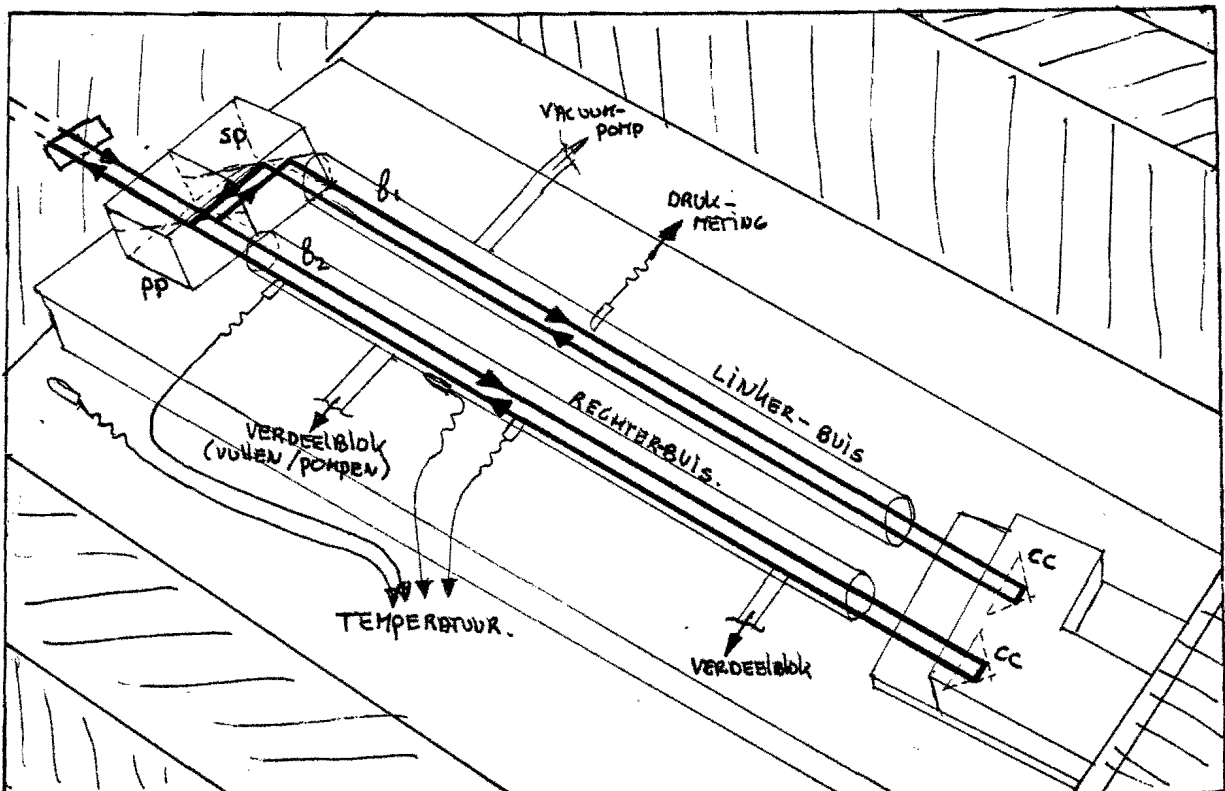
Het gedeelte om n_L te bepalen bestaat uit een isolerende 'kast' (om temperatuurvariaties in de omgeving uit te dempen) waarin zich het laser-interferometer-gedeelte bevindt.

Buiten deze kast zien we nog de laser, de laser-display met daarop de externe resolutie-extender, een meerkanalige vacuummeter en een vacuumpomp (onder).

Het inwendige van de kast wordt getoond door figuur 1.3 op bladzijde 7. Deze foto is ten opzichte van figuur 1.2. van de tegenoverliggende zijde genomen.



Figuur 1.3^a - Laser-interferometer opstelling



Figuur 1.3^b - Laser-interferometer opstelling, schematisch

We zien hier beide buizen, de optica (onder andere twee omkeerprisma's in één blok in verband met temperatuurvereffening), de weerstandsthermometers (met witte aansluitdraad) en de Pirani vacuummeters (met dikke grijze aansluitdraad). Ook zien we de pompslangen.

De linkerbuis werd vacuum gehouden, terwijl de rechterbuis (met de weerstandsthermometers) afwisselend werd leeggepompt, dan wel met lucht gevuld.

Dit evacueren/vullen gebeurde overigens via een verdeelblok dat in figuur 1.2 op bladzijde 5 nog juist zichtbaar is tussen de Diesselhorst compensator en de vacuummeter.

In de volgende hoofdstukken (2 t/m 4) gaan we in op details van de opstelling.

Hoofdstuk 2 - Thermometrie

2.1 Inleiding

Zoals vermeld in 1.2. heeft de temperatuur van lucht invloed op de brekingsindex van die lucht. Temperatuursverandering van 1 °K resulteert in een relatieve brekingsindexverandering $\Delta n/n$ van ongeveer 10^{-6} . Houden we vast aan onze eis uit hoofdstuk 1, dan zullen we de temperatuur dus nauwkeuriger moeten kunnen bepalen dan 0,01 K.

Daar we in de meetbuis -inwendige diameter ca. 25 mm- willen meten en de zich daarin voortplantende laserbundels van \varnothing 8 mm op een hartafstand van 15 mm niet mogen onderbreken, moet de temperatuursensor vrij klein zijn.

De meetbuis moet goed vacuum gepompt kunnen worden, dus moet een goed vacuumdichte doorvoer van sensor naar aflezing mogelijk zijn.

Dit laatste is goed te verwezenlijken indien het meetsignaal elektrisch is. Een goede oplossing lijkt dan ook een weerstandsthermometer.

Gekozen is voor een z.g. Pt-100 weerstandsthermometer, een weerstand van platina draad, in glas gesmolten, met een weerstand van 100 Ω bij 0 K .

(Voor nadere specificaties: zie [2], DIN 43760)

Gekozen type: Heraeus GX 618, afmetingen \varnothing 1,8 mm X 12 mm .

De weerstand van deze thermometer vergelijken we met de instelbare weerstand van een zogenaamde Diesselhorst-compensator. Dit gebeurt door meting van de spanningsvallen over weerstandsthermometer en compensatorweerstand, die beiden dezelfde stroom voeren, daar zij in serie in eenzelfde circuit geplaatst zijn. Indien beide spanningsvallen gelijk zijn (gemeten m.b.v. een zogenaamde Dauphiné-schakeling, afleesbaar op een μ V-meter) zijn de weerstanden per definitie dus ook gelijk.

Op Diesselhorst-compensator en Dauphiné-schakeling wordt verderop in dit hoofdstuk nog teruggekomen.

2.2 De weerstandsthermometer

Fysica

Uit de fysica [3] volgt voor de resistiviteit van zuivere metalen:

$$\rho = \frac{m_e}{n \cdot e^2 \cdot \tau} \quad (\text{in } \Omega \text{m}) \quad \text{met: } m_e = \text{massa v/e electron in Kg}$$

$$n = \text{aantal geleidingselectronen per m}^3$$

$$e = \text{eenheidslading in C}$$

$$\tau = \text{gemiddelde tijd tussen twee botsingen van een electron}$$

$$\text{met } \tau = \frac{\bar{l}}{v_F} \quad \text{waarin: } \bar{l} = \text{gemiddelde vrije weglengte v/e electron in m}$$

$$v_F = \text{Fermisnelheid van de elctronen in m/s}$$

- e en m_e zijn constant.
- n en v_F zijn voor zuivere metalen vrijwel onafhankelijk van de temperatuur, zodat volgt:

$$\rho = \left[\frac{m_e \cdot v_F}{n \cdot e^2} \right] \cdot \frac{1}{\bar{l}} \quad (\text{in } \Omega \text{m})$$

De gemiddelde vrije weglengte \bar{l} neemt af naarmate de warmtebeweging der metaalionen toeneemt. Deze betrekking is vrijwel exact omgekeerd evenredig: $\bar{l} = C/T$ (C is een constante in m.K ; T is temperatuur in K) zodat volgt:

$$\rho = \left[\frac{m_e \cdot v_F}{n \cdot e^2 \cdot C} \right] \cdot T \quad (\text{in } \Omega \text{m})$$

Dit lineaire verband klopt in de buurt van het absolute nulpunt niet helemaal, zelfs niet voor roosters zonder roosterfouten. Echter tussen 0 °C en 100 °C is ρ vrijwel lineair in T en kan geschreven worden:

$$\rho(T) = \rho_{273} \cdot (1 + \alpha_R \cdot T) \quad (\text{in } \Omega \text{m}) \quad \text{waarbij T in } ^\circ\text{C, } \alpha_R \text{ de evenredigheidscoëfficiënt en } \rho_{273} \text{ de resistiviteit is bij } 273,15 \text{ K.}$$

Verband resistiviteit-weerstand

De weerstand van een brok metaal, met lengte l in E -richting en doorsnede A loodrecht daarop, R , is gelijk aan: $R = \rho \cdot l / A$

De weerstand van een lange draad (lengte l) met diameter d (rond dus) -een Pt-100 is niets meer dan dat- is gelijk aan:

$$R = \frac{4 \cdot \rho \cdot l}{\pi \cdot d^2}, \text{ ofwel } R(T) = \frac{4 \cdot \rho_{273} \cdot l}{\pi \cdot d^2} \cdot (1 + \alpha_R \cdot T) \quad (\text{in } \Omega)$$

Wat we niet moeten vergeten is dat l en d van de draad ook temperatuursafhankelijk zijn, en wel lineair in T :

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha_1 (T - T_0)), \text{ met: } \begin{array}{l} l_0 = \text{lengte bij } T = T_0 \\ \alpha_1 = \text{lineaire uitzettingscoëfficiënt (K}^{-1}\text{)} \end{array}$$

voor d analoog.

zodat:

$$R(T) = \left[\frac{4 \cdot \rho_{273} \cdot l_0}{\pi \cdot d_0^2} \right] \cdot \frac{(1 + \alpha_1 (T - T_0))}{(1 + \alpha_1 (T - T_0))^2} \cdot (1 + \alpha_R \cdot T)$$

Definieren we l_0 en d_0 ook bij $T = 273,15$ K en drukken vervolgens T uit in $^{\circ}\text{C}$ dan volgt:

$$R(T) = R_0 \cdot \left[\frac{1 + \alpha_R \cdot T}{1 + \alpha_1 \cdot T} \right] \quad \text{met } R_0 = \left[\frac{4 \cdot \rho_{273} \cdot l_0}{\pi \cdot d_0^2} \right]$$

Herschrijven levert:

$$R(T) = R_0 (1 + \alpha_{R1} \cdot T) \quad (\text{in } \Omega); \alpha_{R1} = \frac{\alpha_R - \alpha_1}{1 + \alpha_1 \cdot T}$$

- F5 -

Het Handbook of Chemistry (53rd edition) geeft voor resp. α_R en α_1 van platina: $\alpha_R = 3,927 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_1 = 9 \cdot 10^{-6}$

In de formule voor α_{R1} komt T echter nog voor.

T ligt in de orde van 20 $^{\circ}\text{C}$ met een spreiding van 1 $^{\circ}\text{C}$ zodat voor de noemer van α_{R1} volgt: $1,00018 \pm 10^{-5}$.

Voor α_{R1} zelf volgt dan: $\alpha_{R1} = 3,92 \cdot 10^{-3} \pm 4 \cdot 10^{-8}$

Dus: $R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha_{RI} \cdot T)$ (in Ω)

- F6 -

$$\begin{cases} R_0 \text{ te bepalen bij } 0 \text{ }^\circ\text{C, in } \Omega. \\ T \text{ in } ^\circ\text{C; } \alpha_{RI} = 3,92 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \end{cases}$$

Meettechniek

In de meettechniek wordt veel gewerkt met lokaal gedefinieerde coëfficiënten, volgens de volgende methode:

$$X = X_0 + (Y - Y_0) \frac{dX}{dY}$$

zodat:

$$X(Y) = X_0 \cdot (1 + \beta (Y - Y_0)) \quad ; \quad \beta = \frac{1}{X_0} \cdot \frac{dX}{dY}$$

- F7 -

Zo ook hier, de lineaire weerstandscoefficiënt α wordt gedefinieerd als:

$$\alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}, \text{ zodat (integreren) } R(T) = R_0 \cdot e^{\alpha(T-T_0)} \text{ met } R_0 = R(T=T_0)$$

Definiëren we $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ en schrijven T en T_0 in $^\circ\text{C}$ dan volgt:

$$R(T) = R_0 \cdot e^{\alpha T} \quad ; \quad R_0 = R(T=0) \quad (\text{in } \Omega)$$

Benadering van deze functie volgens Taylor geeft:

$$R(T) = R_0 \left(1 + \alpha \cdot T + \alpha^2 \cdot \frac{T^2}{2} + \alpha^3 \cdot \frac{T^3}{6} + \dots \right)$$

ofwel: $R(T) = R_0 (1 + \alpha' \cdot T) \quad ; \quad \alpha' = \left(1 + \alpha \cdot \frac{T}{2} + \alpha^2 \cdot \frac{T^2}{6} + \dots \right)$

Als T varieert, verandert α' !

Dit lijkt strijdig met de fysische achtergronden, maar dit is een voortvloeisel van de definitie van α . Deze is lokaal gedefinieerd ($T=C$) en behoeft over een temperatuurstraject niet constant te zijn, zodat de gedane integratie niet correct is.

Ergo: De enige formule die we in dit verband mogen gebruiken is die, die ten grondslag ligt aan de definitie; F7:

Voor $T \approx T_0$ geldt: $R(T) = R_{T=T_0} \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0))$, waarbij α dus bepaald moet worden voor $T \approx T_0$.

Pt-100

Voor de Pt-100 is gegeven (zie [2]): $\frac{dR}{dT} = 0,388$, voor $15 < T$ in $^{\circ}\text{C} < 20$

Ook geldt: $R(15^{\circ}\text{C}) = 105,85 + R_c \ \Omega$.

Hierbij is R_c per weerstand te bepalen; een correctiefactor als gevolg van dimensieverschillen in de weerstanden.

Er volgt dan:

$$R(T) = (105,85 + R_c) \cdot \left(1 + \frac{0,388}{105,85 + R_c} \cdot (T-15)\right) \quad (\text{in } \Omega) \quad \boxed{- F8 -}$$

Uitwerken met $105,85 \gg R_c$ geeft: $\alpha = 0,00366$ (tussen 15 en 20 $^{\circ}\text{C}$)

of (uit [2]) $\alpha = 0,00391$ (tussen -5 en 5 $^{\circ}\text{C}$)

Ter vergelijking de α_{R1} uit F3: $\alpha_{R1} = 0,00392$

Herschrijven van F8 in inverse vorm, met $T_c = -\frac{R_c}{0,388}$ geeft:

$$T(R) = \frac{R(T) - 105,85}{0,388} + 15 + T_c \quad \text{in } ^{\circ}\text{C} \quad \boxed{- F9 -}$$

In 2.4 komen we nog terug op de bepaling van R_c of T_c .

2.3 Weerstandsmeting

We willen de temperatuur nauwkeuriger kunnen bepalen dan 10^{-2}K .

$\partial T / \partial R = 1/0,388 = 2,6$ dus moeten we R nauwkeuriger kunnen bepalen dan $0,01 / 2,6 = 4 \cdot 10^{-3} \ \Omega$.

Er zijn twee principieel verschillende methoden om weerstand te meten:

- Meten van de stroom I door de weerstand en van de spanningsval U over de weerstand. R volgt dan uit de wet van Ohm: $R = U/I$.
- Vergelijken van de weerstand met een instelbare (afleesbare) weerstand.

Ad a: Om met behulp van de eerste methode een weerstand van ongeveer 100 Ω tot op 0,004 Ω nauwkeurig te meten wil zeggen dat de relatieve onnauwkeurigheden van stroom- en spanningsmeting samen niet groter mogen zijn dan $0,004/100 = 4 \cdot 10^{-5}$, dus om zeker te zijn, elk hoogstens 10^{-5} . Dus elk 5 significante cijfers. Dat is een nogal lastige klus.

Ad b: Er zijn vrij veel methoden om een weerstandsvergelijkingsmeting te doen, ik noem bijvoorbeeld de brug van Wheatstone.

Bij instelbare weerstanden heeft men echter altijd het probleem van overgangsweerstanden en thermospanningen over de schakelcontacten. De relatieve invloed hiervan hangt natuurlijk af van de te meten weerstand en de spanning erover.

Eisen weerstandsmeter

In verband met warmteproductie in de thermometers willen we de stroom zo laag mogelijk houden. Volgens Heraeus ligt de temperatuurverhoging van dit soort weerstandsthermometers door 'self heating' in stilstaande lucht van ca. 20°C in de orde van $0,2^{\circ}\text{C/mW}$.

Voor ons: $P = I^2 \cdot R = 10^{-6} \cdot 100 = 0,1 \text{ mW}$. Self-heating dus ca. $0,02^{\circ}\text{C}$.

Spanningsval over de weerstanden is $0,1 \text{ V}$. Vereiste nauwkeurigheid (absoluut) spanningsvalvergelijking dus $0,1 \cdot 10^{-5} = \text{minimaal } 10^{-6} \text{ V}$.

Beheersing van de stroom door de te meten weerstand en instelbare weerstand moet gelijk zijn tot op $10^{-5} \cdot 10^{-3} = 0,01 \text{ }\mu\text{A}$.

Dit laatste is vrijwel alleen te realiseren indien beide weerstanden in serie in hetzelfde stroomcircuit staan.

Instelbare weerstand: instelbereik $100\Omega \pm 0,001\Omega$, en eigenlijk nóg één decade (10^{-4}) in verband met de te behalen nauwkeurigheid bij de Pt-10 weerstand ($10 \cdot 10^{-5} = 10^{-4} \Omega$), die gebruikt wordt voor de bepaling van de correctiefactoren van de Pt-100's.

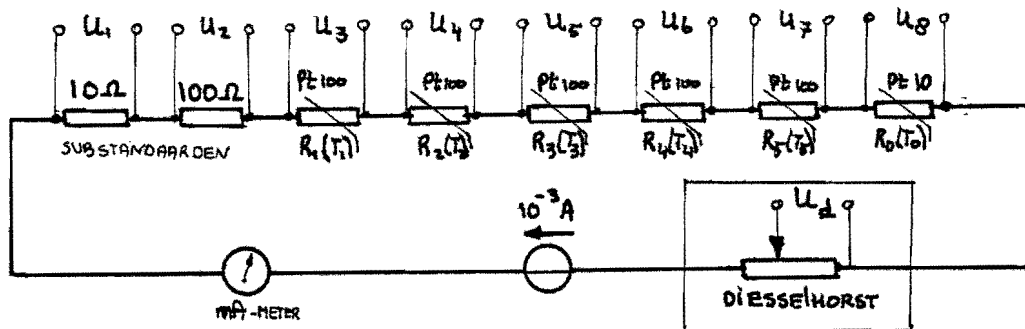
De Diesselhorst compensator

Via de methode van diesselhorst is een instelbare weerstand (=compensator) te bouwen van drie decaden, waarbij in het meetcircuit geen contactovergangen meer voorkomen.

Het uitbreiden naar meer dan 3 decaden kan niet meer zonder contactovergangen in het meetcircuit te brengen. De firma Bleeker heeft echter een zodanige constructie bedacht dat de invloed van die contactovergangen (overgangsweerstanden, thermospanningen) minimaal met een factor 81 verkleind worden —door shunten—. Zie literatuur [4].

De meetkamer bezit een 7-decaden meetbank, max $111 \pm 10^{-5} \Omega$ van Bleeker, volgens deze principes gebouwd, dus zeer geschikt voor ons doel.

We gaan dus de volgende schakeling bouwen: Alle weerstandsthermometers in serie met de meetbank-compensator in een stroomcircuit van 1 mA. Tevens, ter ijking van de meetbank zullen ook twee precisie-weerstanden worden opgenomen in het circuit, van respectievelijk 10 en 100 Ω . Zie figuur 2.1.



Figuur 2.1 - Electrisch circuit t.b.v. temperatuursmeting

Dit schema toont meteen het volgende probleem: Hoe de spanningsvallen over de weerstanden bij verschillende potentialen te vergelijken?

De Dauphiné-schakeling [5]

T.M. Dauphiné (Division of applied Physics, National Research Council, Ottawa, Canada) heeft een schakeling bedacht die bovenstaand probleem oplost. Het principe is als volgt:

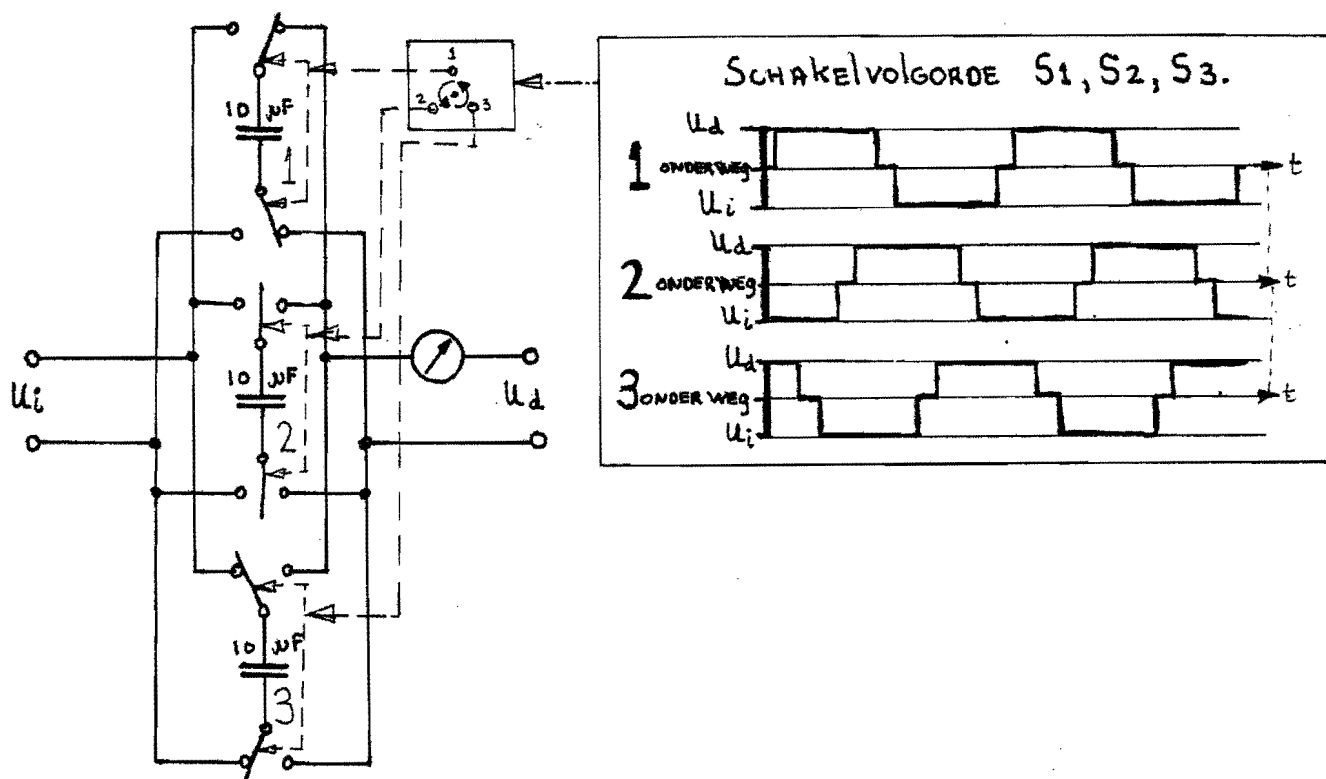
Men sluit een condensator aan op de spanning U_i (b.v. U_3), zodat deze zich oplaadt. Vervolgens verbreekt men de verbinding met U_3 en sluit de condensator, via een galvanometer (of iets dergelijks) aan op U_d , de spanningsval over de Diesselhorst compensator. Zijn U_3 en U_d niet geheel gelijk, dan zal de galvanometer uitslaan.

Men blijft nu de condensator ompolen en de compensator-weerstand veranderen, totdat er bij ompoling geen stroom meer naar/van de condensator vloeit. De spanningsvallen U_3 en U_d zijn dan gelijk, dus zijn R_1 en R_d gelijk.

Dit schakelen noemt men "choppen", en men kan dit natuurlijk ook met twee condensatoren doen die beurtelings over U_i en U_d staan.

Daar het, in verband met dynamische effecten niet wenselijk is de contacten van U_i of U_d tijdens het vergelijken open te laten, is het wenselijk de schakeling met 3 condensatoren uit te voeren, waarvan er altijd minstens één aan gesloten is op U_i , één op U_d , en één eventueel onderweg van het ene contact naar de andere. De schakeling is te zien in figuur 2.2, en wordt gecompleteerd met een ingangskanaal-keuzeschakelaar.

Overigens is de gebruikte schakeling gebouwd door Prof. J. Koning.



Figuur 2.2 - De Dauphiné-schakeling

Onze temperatuur-meetinstallatie is nu compleet.

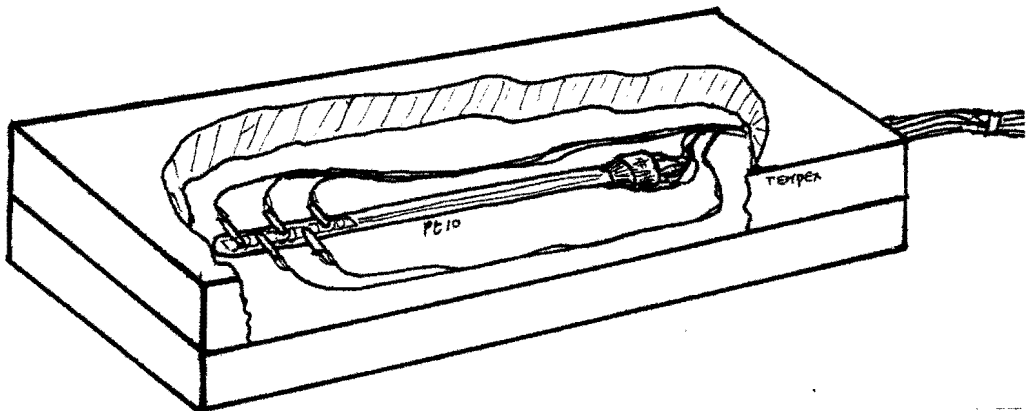
Rest slechts het bepalen van de correctiefactoren T_c uit de formule F9.

2.4 Thermometer-ijking

Zoals in de vorige hoofdstukken al af en toe ter sprake is gekomen moet de correctie factor T_c per thermometer (T_{ci}) nog bepaald worden.

We doen dit door de Pt-100's af te ijken tegen een gecalibreerde Pt-10 weerstandsthermometer (nominale weerstand 10Ω) van Heraeus.

Voor de opstelling, zie figuur 2.3 .



Figuur 2.3 - IJkopstelling Pt-100's

Wat moet er zoal gemeten worden:

- 10-ohms precisieweerstand ter correctie van de meetbank.
- de aldus te corrigeren weerstand van de Pt-10 \Rightarrow Temp in $^{\circ}\text{C} \pm 0,01 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- 100-ohms precisieweerstand ter correctie van de meetbank.
- de aldus te corrigeren weerstanden van de Pt-100's.

Procedure:

Een paar dagen lang werd (zoveel mogelijk) ieder uur gemeten: De weerstand van de 10 en 100Ω precisieweerstand, de Pt-10, de Pt-100's.

Om een betrouwbare ijking te verkrijgen moest aan twee voorwaarden worden voldaan:

- Voldoende metingen over een redelijk temperatuurstraject.
- Voldoende overeenstemming in temperatuur van Pt-10 en Pt-100's.

Aan het eerste werd voldaan door de temperatuur in de meetruimte iedere halve dag enigzins te variëren (tussen $19,5$ en $20,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$)

Aan het tweede werd voldaan door de Pt-100's op de Pt-10 te bevestigen, zo dicht mogelijk bij de windingen van die Pt-10, die zich aan het uiteinde bevinden, én door dit geheel zodanig in tempex in te pakken dat er slechts lage temperatuursgradiënten kunnen bestaan.

IJKwaarden

De resultaten van deze metingen (zie bijlage 1) in het kort:

- Gemeten weerstand van de 100-ohm precisie: $100,0013 \Omega$; $S^* = 4 \cdot 10^{-4} \Omega$
- Gemeten weerstand van de 10-ohm precisie: $9,9996 \Omega$; $S = 2 \cdot 10^{-4} \Omega$

Dus: Weerstanden in de orde van 100Ω dienen gecorrigeerd te worden met
- $0,0013 \Omega$.

Weerstanden in de orde van 10Ω dienen gecorrigeerd te worden met
+ $0,0004 \Omega$.

Voor de correctiefactoren T_c , zie tabel 2.4 .

Pt-100 no	T_c °C	S_{T_c} °C
1	-0,11	0,01
2	-0,12	0,01
3	-0,04	0,01
4	0,14	0,02
5	0,17	0,02

Tabel 2,4 - Correctiefactoren T_c en hun
herhalingsnaukeurigheid.

De temperatuur als functie van de weerstand R_i van weerstandsthermometer Pt-100_i (met correctiefactor T_{ci}), T_i :

$$T_i = \frac{(R(T) - 0,0013) - 105,85}{0,388} + 15 + T_{ci} \quad (\text{in } ^\circ\text{C}) \quad \boxed{- F10 -}$$

* S = Standaarddeviatie, behorend bij Gaussische verdeling van de meetwaarden: $\bar{x} = (\sum_{i=1}^n x_i)/n$, $S_x = (\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2/(n-1))^{\frac{1}{2}}$

Hoofdstuk 3 - Druk, vochtigheid en CO₂-gehalte van de lucht

3.1 Luchtdruk

Voor het meten van de luchtdruk werd een Paulin Barometer gebruikt. Dat is een barometer waarbij op handige wijze de alineariteit van het membraan geëlimineerd is. Men leest namelijk niet de indrukking van het membraan af, doch (indirect) de -in te stellen- kracht om het membraan in referentiepositie te houden.

Afreesnauwkeurigheid: 0,1 mmHg. Recent geijkt door de CTD-ijkdienst.

Bij latere bedenkingen tegen deze barometer is ook nog een kwikbarometer ingeschakeld. Afreesnauwkeurigheid (van de nonius) 0,1 mmHg.

Bij dit soort nauwkeurige instrumenten is de na ijking resterende systematische afwijking klein t.o.v. de toevallige afwijking.

De toevallige afwijking ($\pm 2S$ gebied) heeft dan meestal een grootteorde van 1 à 2 schaaldelen.

In dit geval: $2S = 1$ schaaldeel dus $S_p = 0,05 \text{ mmHg} = 7 \text{ Pa}$.

3.2 Vochtigheid (Waterdampdruk)

Het meten van de vochtigheid van de lucht -uitgedrukt in Pa waterdampdruk- is op verschillende manieren te realiseren.

Wij gebruikten twee verschillende methoden, namelijk de Hygrometermethode volgens Assman en de meting van de dauwpuntstemperatuur van de lucht.

Voor het principe van de Hygrometermethode volgens Assman, zie onder andere [6].

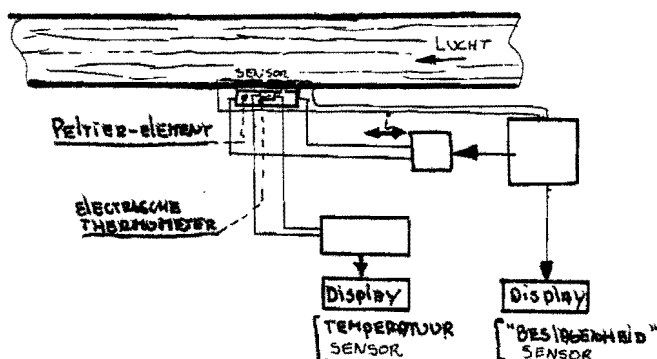
Dauwpuntstemperatuurmeting

Hiervoor wordt gebruik gemaakt van een elektrische sensor (meting van de conductiviteit van een bedauwd oppervlak) die middels een peltier-element op de dauwpuntstemperatuur wordt gehouden.

Een Peltier-element is een element waarvan de werking berust op het Peltier-effect (beschreven in [3]).

Het Peltier-effect houdt in dat bij paring van twee metalen, bij stroomgeleiding door hun grensvlak, warmte uit de omgeving (de sensor) wordt opgenomen dan wel aan de omgeving wordt afgestaan, afhankelijk van de zin van de stroom. Door de zin van de stroom kan men dus bepalen of het element koelt, dan wel verwarmt.

J.B. Pierce heeft om deze sensor een apparaat gebouwd om de dauwpuntstemperatuur te meten en wel als volgt: (zie fig. 3.1)



Figuur 3.1 - Dauwpuntstemperatuurmeter

Langs het oppervlak van de sensor wordt met constante snelheid (langzaam) monsterlucht gepompt.

Deze sensor bestaat uit een isolator met een geleidend bovenvlak.

Dit geleidende vlak is door een snede in twee polen verdeeld.

Naarmate er meer dauw op de sensor neerslaat zal de geleiding tussen de polen toenemen.

Met behulp van het aan de sensor bevestigde Peltier-element wordt de sensor op een zodanige temperatuur gebracht dat het juist enigszins beslaat (dauwpunt!).

Door het regelsysteem wordt een zodanige hoeveelheid warmte afgevoerd dat het sensoroppervlak juist beslagen blijft, dus op dauwpuntstemperatuur.

De temperatuur van het sensoroppervlak wordt elektrisch gemeten en op een display weergegeven.

Ook wordt aangegeven (met een indicatielampje en mA-meter) in hoeverre de uitgegeven temperatuur van het sensoroppervlak dauwpunt is.

Recente ijking door de CTD-ijkdienst wijst uit dat de onnauwkeurigheid in de aangegeven dauwpuntstemperatuur maximaal $0,5^{\circ}\text{C}$ is.

Aannemende dat hiermee 2.S bedoeld is volgt voor S_{T_d} : $S_{T_d} = 0,25^{\circ}\text{C}$

Waterdampdruk

Het verband tussen dauwpuntstemperatuur T_d en waterdampdruk h wordt gegeven door [8]:

$$h = 611.e^{(72,5 \cdot 10^{-3} \cdot T_d - 288,1 \cdot 10^{-6} \cdot T_d^2 + 0,79 \cdot 10^{-6} \cdot T_d^3)}$$

- F11 -

$\frac{\partial h}{\partial T_d}$ is in het gebied van optredende T_d maximaal ca 65 Pa/K .

Er geldt: $S_h = \frac{\partial h}{\partial T_d} \cdot S_{T_d}$ zodat: $S_h = 15 \text{ Pa}$

3.3 CO₂-gehalte

Het CO₂-gehalte van lucht is lastig te bepalen, en de meting is té bewerkelijk om voor iedere meetserie samen met p , T en h bepaald te worden.

Daarom is ter oriëntatie door medewerkers van de afdeling Scheikunde een aantal metingen, gedaan, verspreid over enkele dagen.

Voor verslaglegging zie literatuur [7].

Zoals verondersteld mocht worden is het CO₂-gehalte van de lucht een 'geschiederis'-kwestie, een functie van de hoeveelheid mensen die aanwezig was in de ruimte en hoelang en wanneer ze aanwezig waren op die dag.

Dit in verband met de continue afzuiging van "vuile" lucht, aangevuld door toevoer van "verse" lucht, de menging van beide en de continue vervuiling van dat mengsel met door mensen geproduceerd CO₂. Kortom: niet -gedetailleerd- voorspelbaar.

Belangrijkste resultaten (grote lijnen)

Het CO₂-gehalte van de meetkamer op een normale dag (geen demonstraties e.d.) verloopt van 400 ppm 's morgens naar 800 ppm 's avonds.

Voorspellingen op basis van dit rapport zullen een betrouwbaarheidsinterval van ca. $\pm 100 \text{ ppm}$ hebben, zodat volgt: $S_{\text{CO}_2} = 50 \text{ ppm}$.

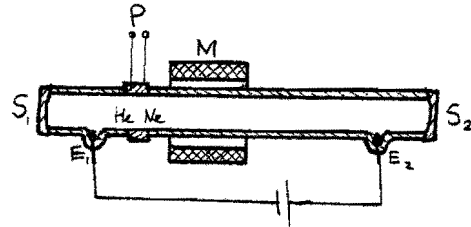
Hoofdstuk 4 - Laserinterferometrie

4.1 De laser [9], [10]

Bouw van de HP-laser

Deze laser is schematisch afgebeeld in fig. 4.1.

Zij bestaat uit een buis (capillair) gevuld met een mengsel van Helium- en Neon-gas, voorzien van twee elektroden E en eindspiegels S. Deze spiegels



Figuur 4.1 - Schematische bouw van de HP HeNe-laser

zijn enigszins hol en laten ca. 1% van het opvallende licht door.

Een ringvormig deel van de buis is in piëzo-electrisch materiaal uitgevoerd (P). Om de pijp is een permanente magneet M aangebracht wiens veld \vec{H} evenwijdig is aan de as van de buis.

Werking van de HeNe-laser

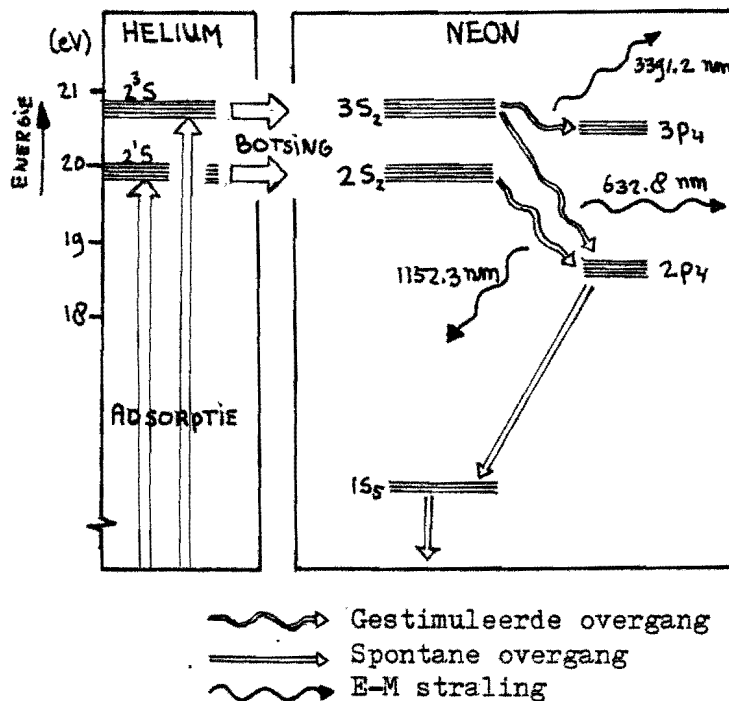
Licht ontstaat door het terugvallen van "aangeslagen" atomen naar een lager gelegen energieniveau. Dit "terugvallen" gaat overigens niet altijd gepaard met het uitzenden van electro-magnetische (EM) straling. Is dit echter wel het geval, dan heeft de uitgezonden straling de frequentie f :

$f = \Delta E/h$ (Hz), waarbij ΔE het energieverlies van het atoom is bij terugval, en h de constante van Planck ($h=6,63 \cdot 10^{-34}$ Js).

In een HeNe-laser gebeurt ook zo iets: Helium-atomen raken in aangeslagen toestand door elektrische ontlading via elektroden. Deze aangeslagen Helium-atomen botsen inelastisch met Neon-atomen, waarbij ze hun energie aan die atomen overdragen en zelf dus in de grondtoestand terugvallen.

Het Neon kan vervolgens langs verschillende wegen en via verscheidene tussen-energie-niveau's terugkeren naar de grondtoestand, en zendt daarbij EM-straling uit die (al naar gelang de gevolgde weg) een golflengte heeft van 632.8 , 3391.2 of 1152.3 nm, met een relatieve bandbreedte van ca. $5 \cdot 10^{-6}$. Deze grote bandbreedte ontstaat, ondanks de discrete ener-

gieniveau's, door het dopplereffect waaraan de door de bewegende atomen uitgezonden straling onderhevig is. Zie fig. 4.2 .



Figuur 4.2 - He-Ne energieniveau's

Laserprincipe

Het coherente licht is een gevolg van het verschijnsel van "gestimuleerde emissie". Dit verschijnsel houdt in dat een aangeslagen atoom tot terugvallen naar een energieniveau dat ΔE lager ligt, gestimuleerd wordt door EM-straling met juist de frequentie: $f = \Delta E/h$ (afgezien van dopplerverschuiving). Bij dit terugvallen zendt het atoom dan EM-straling uit; van gelijke frequentie, fase en richting als de 'stimulerende' straling. De frequentie van deze straling wordt overigens weer beïnvloed door de resonator (samenstelsel van gasontladingsbuis en spiegels). Aan dit 'versterkende' effect dankt de laser zijn naam: LASER staat voor Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Een evenwijdige bundel licht ontstaat door de spiegels S aan de uiteinden van de buis, die vrijwel alle straling terug in de buis reflecteren die weer atomen kan stimuleren tot emissie (in dezelfde richting!).

Deze versterking werkt onder zekere voorwaarden:

Een EM-veld met de juiste frequentie kan een aangeslagen atoom tot emissie stimuleren óf een nog niet aangeslagen atoom aanslaan.

De kans op deze beide gebeurtenissen is evenredig met de relatieve bezetting van de betreffende energieniveau's.

Wil er dus werkelijk versterking optreden via het effect van gestimuleerde emissie, zal de bezetting van een hoger gelegen energieniveau steeds groter moeten zijn dan van een lager niveau. Het Neon zal in een toestand van zogenaamde "populatie-inversie" moeten zijn.

Het 'pompgas' Helium zorgt door zijn energie-pomp-werking ervoor dat het Neon ook in die toestand blijft.

Zo groeit bij het inschakelen van de laser, de intensiteit I_i van de straling in langsrichting van de laser, terwijl straling in andere richtingen door verliezen verdwijnt.

Doordat de energiepompwering van het Helium van eindige grootte is (door beperkt toegevoerd vermogen middels de elektroden) zal bij toenemende intensiteit I_i de versterking afnemen (door lagere bezettingsgraad van de hogere energieniveau's), totdat bij een bepaalde intensiteit I_{i0} de versterking G gelijk is geworden aan de verliezen+uitgekoppelde straling I_u , en de intensiteit niet langer toeneemt.

De spiegels zijn zodanig gemaakt dat de gewenste straling (met een golflengte van 632,8 nm) met kleine verliezen wordt gereflecteerd -resp. doorgelaten- terwijl de straling van beide andere golflengten (3391.2, 1152.3 nm) zodanig veel verliezen ondervindt dat deze niet in staat is zich via gestimuleerde emissie en reflectie in stand te houden.

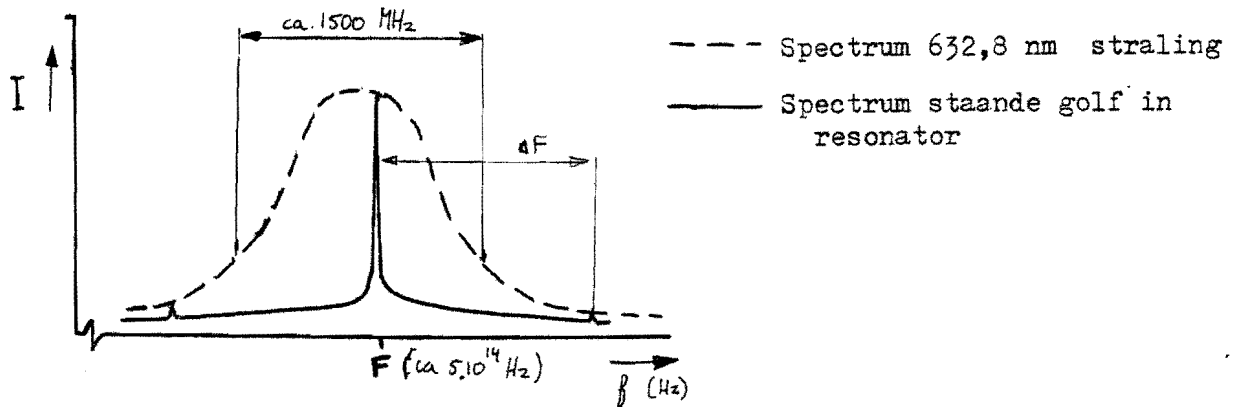
De nauwe frequentieband is een gevolg van de resonator: tussen de spiegels, onderlinge afstand L , ontstaan staande EM-golven, die slechts een frequentie $F = k.v/2.L$ kunnen hebben: k is een geheel getal (aantal halve golflengtes of 'buiken'), v = voortplantingssnelheid van de straling in de buis.

De afstand tussen F^m en F^{m+1} , $\Delta F = F^{m+1} - F^m = \frac{(k+1)v}{2.L} - \frac{kv}{2L} = v/2L$.

Voor de HP-laser ($L \approx 0,1$ m, $v \approx 3.10^8$ m/s) geldt: $\Delta F \approx 1,5$ Ghz = 1500 Mhz.

De bandbreedte van de geëmitteerde straling is ook van die orde grootte, zodat er slechts één staande golf met frequentie F zal bestaan, met een zéér nauwe frequentieband. Zie figuur 4.3 op pag. 25.

Het moge duidelijk zijn dat bij langere buis meerdere frequenties kunnen ontstaan.



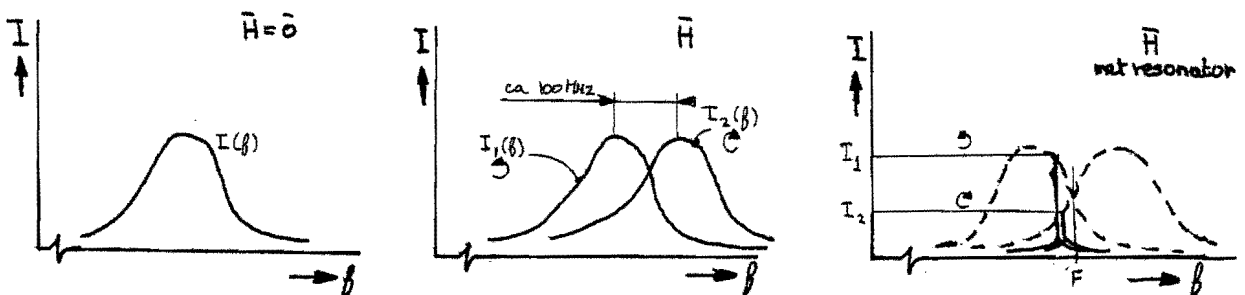
Figuur 4.3 - Effect van de resonator

Stabilisering in de tijd

Ten gevolge van allerlei omgevingsinvloeden, b.v. temperatuurvariaties die de lengte van de buis beïnvloeden, is de voornoemde frequentie F niet constant. Zaak is dus die op de een of andere manier te stabiliseren.

HP gebruikt hiertoe het "Zeeman-effect".

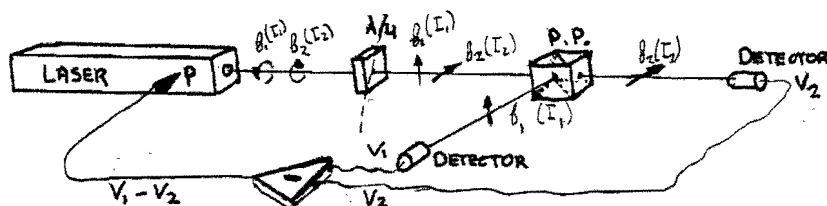
Dit effect houdt in dat bij het aanbrengen van een magnetisch veld \bar{H} in de laser, evenwijdig aan de laser-as er z.g. lijnsplitsing optreedt: De energieniveau's van Neon splitsen zich, zodat het spectrum van het rode laserlicht zich deelt in twee -t.o.v. elkaar tegengesteld circulair gepolariseerde- spectra, die ca. 100 MHz t.o.v. elkaar verschoven zijn. Zie figuur 4.4



Figuur 4.4 - Zeemansplitsing met resonator

Door de tegengestelde polarisatie zijn deze beide stralingen met behulp van een $\frac{1}{4}$ -golf-retarder en polariserend prisma (zie hoofdstuk 4.2) optisch te scheiden, waarna van beiden elk afzonderlijk de intensiteit $-I_1$ resp. I_2- te meten is met behulp van een fotodiode.

De frequentie F is dan af te regelen door de lengte L van de laser zo te veranderen dat beide intensiteiten I_1 en I_2 even groot zijn. (zie fig. 4.5) Deze lengteverandering realiseert men middels de piëzo-electrische ring. Met behulp van deze frequentieregeling bereikt men een relatieve frequentiestabiliteit van 10^{-9} op korte termijn (enkele uren) en 10^{-8} op lange termijn.



Figuur 4.5 Frequentiestabilisatie HP-laser

In de praktijk blijkt de straling met frequentie F te bestaan uit twee, ca. 2 MHz uit elkaar liggende frequenties, elk behorend bij één der tegengesteld circulair gepolariseerde EM-velden.

Dit is een gevolg van het z.g. "pushing-effect".

Dit frequentieverschil tussen beide polarisaties wordt in de HP-interferometer verder gebruikt.

4.2 - De laserinterferometer van HP (HP 5526) [10]

Inleiding

Zoals vermeld, is de output van deze laser twee EM-golven, met twee ~ 2 MHz-verschillende frequenties f_1 en f_2 in het gebied van het rode licht.

Een $\frac{1}{4}$ -golf-retarder is een optische component ("plaatje") die circulair gepolariseerd licht verandert in lineair gepolariseerd licht en andersom.

Twee tegengesteld circulair gepolariseerde golven veranderen door zo'n $\frac{1}{4}$ -golf retarder dus in twee lineair gepolariseerde golven; de tegengestelde circulaire polarisatie resulteert echter in verschillende vlakken van polarisatie, en wel onder 90° .

De hoofdassen van de $\frac{1}{4}$ -golf-retarder in de HP-laser zijn zodanig gericht dat de uittredende golven juist in het horizontale respectievelijk verticale vlak gepolariseerd zijn. Dit in verband met verdere behandeling van de lichtbundel.

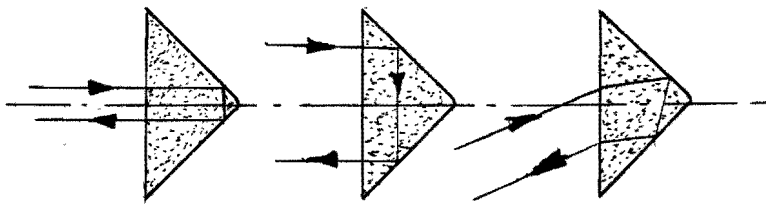
Optiek

De belangrijkste component is het polarisatie scheidend prisma (PP), ook wel interferometer of beam-splitter genaamd.

Deze -in o.a. fig. 4.5. geschetste- component laat van een invallende bundel de horizontaal gepolariseerde component ongehinderd doorgaan, doch reflecteert de verticaal gepolariseerde component volledig op zijn diagonaalvlak. (Aanduidingen Horizontaal en Verticaal gelden voor in fig. 4.5 getekende opstelling van het PP)

Hiermee kunnen we de twee in de laser voorkomende EM-golven met frequenties f_1 en f_2 dus eenvoudig scheiden.

Een andere gebruikte optische component is de retro-reflector, of 'corner-cube' (CC). Figuur 4.6 geeft een twee-dimensionale principeschets daarvan.



Figuur 4.6 - Schematische werking "corner cube"

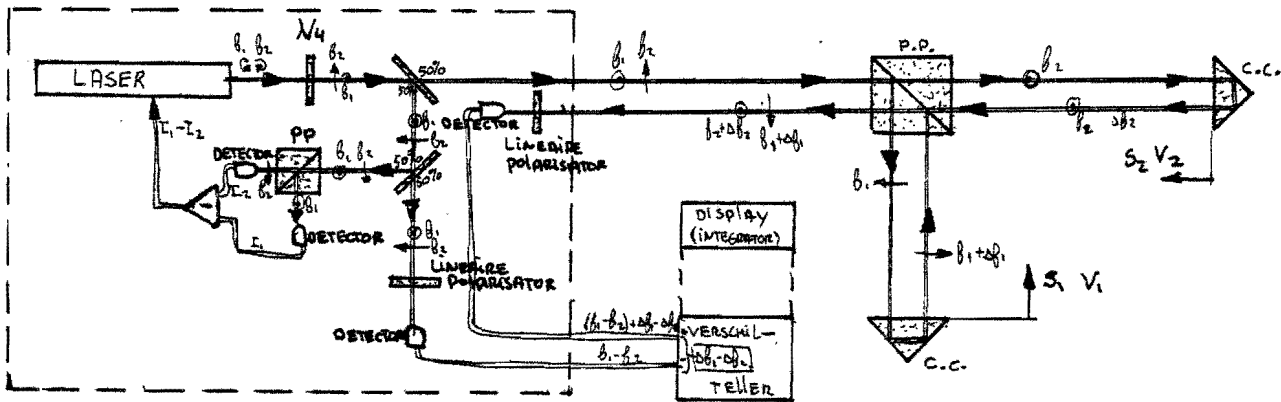
Deze component reflecteert een invallende bundel evenwijdig aan zichzelf, ongeacht of deze bundel loodrecht invalt.

Door de corner-cube in het vlak, loodrecht op de bundel, te verplaatsen kan men de afstand tussen heengaande en terugkomende bundel instellen, terwijl de evenwijdigheid van in en uittredende bundel en de totale optische weglengte onveranderd blijven.

Werking van de laser-interferometer

Het principe van de HP-laser-interferometeropstelling is vrij eenvoudig: Splits de laserbundel in tweeën (f_1 en f_2) met behulp van de beam-splitter, en laat ze, na verschillende wegen doorlopen te hebben, weer samenkomen, op weg naar de detector. (zie fig. 4.7)

Een verplaatsing van de "corner-cubes" resulteert in een dopplerverschuiving van de betreffende frequentie f_i met Δf_i . (Doppler-verschuiving, omdat de verplaatsing s_i uitgevoerd wordt met een snelheid v_i .)



Figuur 4.7 - HP-laserinterferometer-systeem

f_1 is in de orde van 10^{14} Hz, en niet elektronisch meer telbaar, dus de interessante $\Delta f_1 = f_{i \text{ Doppler}} - f_{i \text{ org.}}$ is zo niet te bepalen. Wel zou men zweving zelf, Δf_1 kunnen tellen.

HP heeft dit echter opgelost door $f_1 - f_2$ te tellen.

De beide golven met f_1 en f_2 geven namelijk, indien juist gesuperponeerd, een zweving met frequentie 2 MHz (de verschilfrequentie), die wel te tellen is. Men telt dus de fase van de originele zweving $F_0 = f_1 - f_2$ én men telt de fase van de doppler-verschoven zweving: $F_v = (f_1 + \Delta f_1) - (f_2 + \Delta f_2)$. De dopplerverschuiving $\Delta f_1 - \Delta f_2$ verkrijgen we dus door beide tellers aan een aftel-eenheid te koppelen: $\Delta F = (\Delta f_1 - \Delta f_2) = F_v - F_0$.

Zetten we spiegel 1 even vast, zodat $\Delta f_1 = 0$ dan volgt: $\Delta F = \Delta f_2$.

Voor snelheden $v_i \ll c$ geldt: (eenvoudige doppler) $\Delta f_i = \frac{2 \cdot v_i \cdot f_i}{(c/n_i)}$

Omgeschreven voor ons geval: $v_2 = \frac{\Delta f_2 \cdot (c/n_2)}{2 \cdot f_2}$,

en met $\Delta f_2 = \Delta F$: $v_2 = \frac{\Delta F \cdot (c/n_2)}{2 \cdot f_2}$. Of: $S_2(t) = \frac{(c/n_2)}{2 \cdot f_2} \cdot \int_{t=0}^{t=t} \Delta F \cdot dt$

De integratie wordt door de HP-electronica -indien gewenst- uitgevoerd.

4.3 Nauwkeurigheid van de laserinterferometer

De nauwkeurigheid waarmee v_2 bepaald kan worden, hangt in de eerste plaats af van de nauwkeurigheid waarmee Δf_2 gemeten kan worden.

Vervolgens hangt het ook nog af van de stabiliteit van f_2 en n_2 , en de nauwkeurigheid waarmee zij te bepalen zijn.

De golflengtevariatie $2S_\lambda \approx 5 \cdot 10^{-17} \text{ m}$ ($\lambda = 0,633 \cdot 10^{-6} \text{ m}$).

De nauwkeurigheid waarmee S_2 bepaald kan worden hangt nu bovendien ook nog af van de nauwkeurigheid van de tijdsintegratie die de HP-electronica uitvoert.

Het blijkt dat met behulp van één interne en één externe resolutie-extender -van elk 10x- een afleesnauwkeurigheid van $\lambda_v/400$ te realiseren is, dus $(633/400) \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Herhalingsnauwkeurigheid van K (aantal telpulsen), $2S_k \approx 5$, dus $S_k \approx 3$.

Op wat dit voor gevolg heeft voor de nauwkeurigheid van de brekingsindexmeting zullen we in hoofdstuk 5 nader ingaan.

Hoofdstuk 5 - Meetresultaten

5.1 Meetonaukeurigheid laserinterferometrisch gedeelte

Indien een meetresultaat M wordt samengesteld uit meerder onafhankelijke deelresultaten m_i dan geldt volgens [12] :

$$S_M^2 = \sum_i \left(\frac{\partial M}{\partial m_i} \right)^2 \cdot S_{m_i}^2 \quad \boxed{- F12 -}$$

In hoofdstuk 1 hebben we deze partiële afgeleiden al eens bepaald:

$$\frac{\partial n_L}{\partial K} \approx 2 \cdot 10^{-9} \quad , \quad \frac{\partial n_L}{\partial \lambda} \approx 200 \text{ m}^{-1} \quad , \quad \frac{\partial n_L}{\partial L_{bo}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Hoofdstuk 4 geeft: $S_K = 3$, $S_\lambda = 3 \cdot 10^{-17} \text{ m}$

De lengte van de buis, L_{bo} is in het meetlaboratorium bepaald op $405882 \pm 0,5 \text{ } \mu\text{m}$. Nemen we aan dat $\pm 0,5 \text{ } \mu\text{m}$ het 95% gebied is (dus $2S = 0,5 \text{ } \mu\text{m}$), dan geldt $S_{L_{bo}} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

In bijlage 2 is formule F4 opnieuw afgeleid met het oog op onnauwkeurigheden in maatvoering en temperatuursvereffening in de optiek (ruiten aan de buiseinden, deelprismablok en deelprisma, buigspiegelblok en buigspiegel, eindprismablok en eindprisma's en de lucht tussen al deze componenten).

Resultaat is uiteraard formule F4 mét een standaardafwijking S_o die een gevolg is van de onderzochte oorzaken.

F4 wordt dan:

$$n_L = \frac{K \cdot \lambda}{2.400 \cdot L_{bo} (1 + \alpha_L (T - T_0))} \pm 2S_o \quad \boxed{- F13 -}$$

$$S_o = 6 \cdot 10^{-9}$$

Toepassen van F12 op F13 levert:

$$S_{n_L}^2 = \left(\frac{\partial n_L}{\partial K} \right)^2 \cdot S_K^2 + \left(\frac{\partial n_L}{\partial \lambda} \right)^2 \cdot S_\lambda^2 + \left(\frac{\partial n_L}{\partial L_{bo}} \right)^2 \cdot S_{L_{bo}}^2 + S_o^2 \quad \boxed{- F14 -}$$

Invullen levert:

$$S_{n_L} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-9} \cdot 3)^2 + (200 \cdot 3 \cdot 10^{-17})^2 + (4 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-7})^2 + (6 \cdot 10^{-9})^2}$$

$$= 9 \cdot 10^{-9}$$

De standaardafwijking in n_{Laser} , S_{n_L} , is dus 9.10^{-9} .

De maximale onnauwkeurigheid (2S-gebied) is dan ca 2.10^{-8} , zodat geldt:

$$\Delta n_L < 2.10^{-8}$$

5.2 Meetonnauwkeurigheid Edlén-gedeelte

We volgen hier een werkwijze, analoog aan paragraaf 5.1.

In formule F2 schuilt echter nog een addertje: Het is een benadering met een maximale restfout R_n van $\pm 5.10^{-8}$.

Aangenomen dat men hiermee het 95%-gebied bedoeld moeten we in de formule F2 een standaarddeviatie $S_r = R_n/2$ meenemen. $S_r = 2,5.10^{-8}$.

Toepassen van F12 op de aldus aangepaste F2 levert dan:

$$S_{n_E}^2 = \left(\frac{\partial n_E}{\partial T}\right)^2 \cdot S_T^2 + \left(\frac{\partial n_E}{\partial p}\right)^2 \cdot S_p^2 + \left(\frac{\partial n_E}{\partial h}\right)^2 \cdot S_h^2 + \left(\frac{\partial n_E}{\partial X}\right)^2 \cdot S_X^2 + S_r^2 \quad \boxed{- F15 -}$$

Voor S_T geldt: $S_T = \left(\frac{\partial T}{\partial R}\right) \cdot S_R$; $S_R = 4.10^{-4}$ (Par. 2.4)

Met $\frac{\partial R}{\partial T} = 2,6$ geeft dit: $S_T = 10^{-3}$ K.

Bekijken we echter de ijkresultaten (tabel 2.4) dan blijkt dat de standaardafwijking op de ijking een orde tien groter is (S_{T_C}) zodat deze maatgevend is voor S_T .

De voor het Edlén-gedeelte gebruikte thermometers zijn Pt 1 t/m Pt 3, en voor deze drie geldt: $S_{T_C} = S_T = 10^{-2}$ K.

S_p , S_h en S_X zijn in hoofdstuk 3 bepaald:

$$S_p = 7 \text{ Pa}, \quad S_h = 15 \text{ Pa}, \quad S_X = 50 \text{ ppm.}$$

De partiële differentiaalën zijn in hoofdstuk 1 al berekend:

$$\frac{\partial n_E}{\partial T} = -10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \frac{\partial n_E}{\partial h} = -4.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, \quad \frac{\partial n_E}{\partial p} = 3.10^{-9} \text{ Pa}^{-1}, \quad \frac{\partial n_E}{\partial X} = 1,5.10^{-10} \text{ ppm}^{-1}$$

Invullen van bovenstaande in F15 levert:

$$S_{n_E} = \sqrt{(-10^{-6} \cdot 10^{-2})^2 + (3.10^{-9} \cdot 7)^2 + (-4.10^{-10} \cdot 15)^2 + (1,5.10^{-10} \cdot 50)^2 + (2,5.10^{-8})^2} = 3,5.10^{-8}$$

Het 95%-gebied voor $n_{\text{Edlén}}$ (2S-gebied) is dan 7.10^{-8} , zodat geldt:

$$\Delta n_E < 7.10^{-8}$$

5.3 Metingen

In totaal zijn er in een tijdsbestek van 4 maanden tientallen (kleine en grote) meetseries gemaakt, die grofweg in drie groepen verdeeld kunnen worden:

- Oriënterende (test-)series
- Metingen zonder spoelen
- Metingen met spoelen

Wat spoelen inhoudt zal hieronder verklaard worden.

Oriëntatie

Mijn voorganger in dit project, C.R.W. Verroste deed in zijn rapport [11] enkele aanbevelingen die de onnauwkeurigheid in de metingen mogelijk zouden kunnen verminderen, o.a.:

- Bij zijn uitvoering van de opstelling was op de buis waarin lucht gelaten werd slechts één thermometer gemonteerd, in het midden van de buis. Het vermoeden rees dat, door instromingseffecten en smoring van de instromende lucht in het inlaatventiel de temperatuurverdeling in de buis niet constant was.
Daarom raadde hij de montage van twee extra thermometers aan, bij de uiteinden van de buis. Deze raad is opgevolgd.
Het resultaat, hoewel niet van relevante grootte (enkele mK) is meegenomen in de berekeningen.
- Mede door bovenstaande leek het aannemelijk dat door die smoringseffecten ook de vochtigheid van de ingelaten lucht niet gelijk was aan de bemonsterde lucht (uit de kast).
Aanbeveling: Na vullen van de buis, deze spoelen met lucht uit de kast. Dit is in de derde groep meetseries toegepast.
De tweede groep meetseries is dus zonder spoelen bedreven.
- Een laatste verandering t.o.v. de in [11] beschreven opstelling zijn de pompleidingen, welke daar van metaal waren. In verband met de toekomstige mobiliteit van de opstelling zijn deze echter vervangen door kunststof slangen. Dit heeft echter wel als effect dat het leegpompen van buisleidingen nu ca. 20 minuten duurt, zodat een meting tijdens het pompen niet meer nauwkeurig genoeg is door de grote drift (temperatuur, druk) die ondertussen in de kast

kan optreden. Alleen metingen dus tijdens het vullen van de buis, hetgeen ca. 2 minuten duurt.

Van de 2e en 3e groep meetseries heb ik van elk de langste continue serie gebruikt om hierna te bespreken.

Meting zonder spoelen

Deze meetserie is weergegeven in tabel 5.1

datum	tijd	n_L	n_E	$n_L - n_E (.10^{-9})$
24-1	9.42	1,00027016	1,00027017	- 2
	10.12	1,00027020	1,00027023	-24
	10.41	1,00027025	1,00027024	5
	11.22	1,00027031	1,00027031	5
	11.52	1,00027028	1,00027032	-34
	13.41	1,00027024	1,00027024	- 0,6
	14.00	1,00027003	1,00027011	-79
	14.24	1,00027000	1,00027004	-35
	14.58	1,00027000	1,00027003	-25
Januari '85				
Tabel 5.1 - Meetserie zonder spoelen				

ΔN is gedefinieerd als $n_L - n_E$. Er geldt: $\Delta N = \overline{\Delta N} \pm 2S_{\Delta N}$

Voor deze meetserie geldt: $\overline{\Delta N} = -2,1 \cdot 10^{-8}$, $2S_{\Delta N} = 6 \cdot 10^{-8}$

Het blijkt dat de "systematische afwijking" $\overline{\Delta N}$, veruit in grootte overtroffen wordt door de breedte van het 95%-gebied, de onnauwkeurigheid. Deze onnauwkeurigheid valt echter weer ruim binnen de berekende gezamenlijke onnauwkeurigheden $\Delta n_L + \Delta n_E$ (samen $9 \cdot 10^{-8}$) zodat de nauwkeurigheid ruim gehaald is, en de systematische fout klein t.o.v. deze onnauwkeurigheid. Een goede meetserie.

Meting met spoelen

In tabel 5.2 staat een meetserie die met spoelen bedreven is. (blz. 34)

datum tijd	n_L	n_E	$n_L - n_E (.10^{-9})$
25-1 9.11	1,00026806	1,00026820	-142
9.43	1,00026809	1,00026822	-130
28-1 10.46	1,00027079	1,00027091	-124
13.24	1,00027027	1,00027045	-185
13.55	1,00027020	1,00027037	-164
14.36	1,00027014	1,00027034	-203
15.06	1,00027012	1,00027025	-124
29-1 10.53	1,00027330	1,00027330	- 5
11.40	1,00027331	1,00027343	-120
13.39	1,00027251	1,00027264	-130
30-1 14.37	1,00027434	1,00027443	- 88
15.15	1,00027424	1,00027433	- 97
31-1 9.00	1,00027136	1,00027145	- 92
9.48	1,00027140	1,00027154	-141
10.54	1,00027108	1,00027131	-229
11.32	1,00027111	1,00027124	-132
12.39	1,00027099	1,00027114	-143
13.30	1,00027092	1,00027105	-125
Januari '85			
<u>Tabel 5.2 - Meetserie met spoelen</u>			

Resultaat: $\overline{\Delta N} = -13.10^{-8}$, $2S_{\Delta N} = 10.10^{-8}$.

De systematische fout $\overline{\Delta N}$ is nu duidelijk relevant ten opzichte van de onnauwkeurigheid, én ten opzichte van de vorige meetserie.

We hebben blijkbaar met het doorspoelen een systematische fout geïntroduceerd. Wat dat is geweest hebben we niet kunnen achterhalen, in elk geval hield het rechtstreeks verband met de manier van spoelen, want in de nieuwe opstelling die inmiddels wordt bedreven treedt dit grote verschil tussen wel en niet spoelen niet op.

De onnauwkeurigheid is iets toegenomen en valt net niet meer binnen de voorspellingen. Dit te begrijpen uit het feit dat er nogal veel aan de opstelling geprutst moest worden om te kunnen spoelen, wat ook nog meer tijd kostte, zodat meer drift kon optreden.

5.4 Conclusies en aanbevelingen

Allereerst kunnen we vaststellen dat de meetseries zonder spoelen goed aan de verwachtingen voldeden. De relatieve nauwkeurigheid in n , 10^{-7} werd ruim gehaald, zeker als we bedenken dat volgens de schattingen de onnauwkeurigheid in n_E ruim 3 maal zo groot is als de onnauwkeurigheid in n_L , de meting waarom het ons eigenlijk begonnen was. Je zou dus kunnen concluderen dat slechts $\frac{1}{4}$ deel van $2S_{\Delta N}$ veroorzaakt wordt door $2S_{n_L}$, zodat het 95%-gebied voor n_L , $2S_{n_L} = 1,5 \cdot 10^{-8}$.

Uit de gevoeligheidsanalyse in 1.2 en de onnauwkeurighedsberekeningen in 5.1 en 5.2 blijkt dat n_L vrijwel alleen nauwkeuriger gemeten kan worden door S_0 te verkleinen, daar dit veruit de grootste onnauwkeurigheid in n_L is. Dit zou kunnen door de opstelling symmetrischer te maken (indien mogelijk) en de temperatuurshomogeniteit te bevorderen. Daar is men inmiddels grotendeels in geslaagd.

De grootste onnauwkeurigheid in n_E treedt op bij het bepalen van de druk $(\frac{\partial n}{\partial p}) \cdot S_p = 2,1 \cdot 10^{-8}$. Verder vloeit het grootste gedeelte van de onnauwkeurigheid Δn_E voort uit de restfout R_n in de Edlén-formule. Misschien dat een betere benadering te maken zou zijn.

Literatuur-opgave

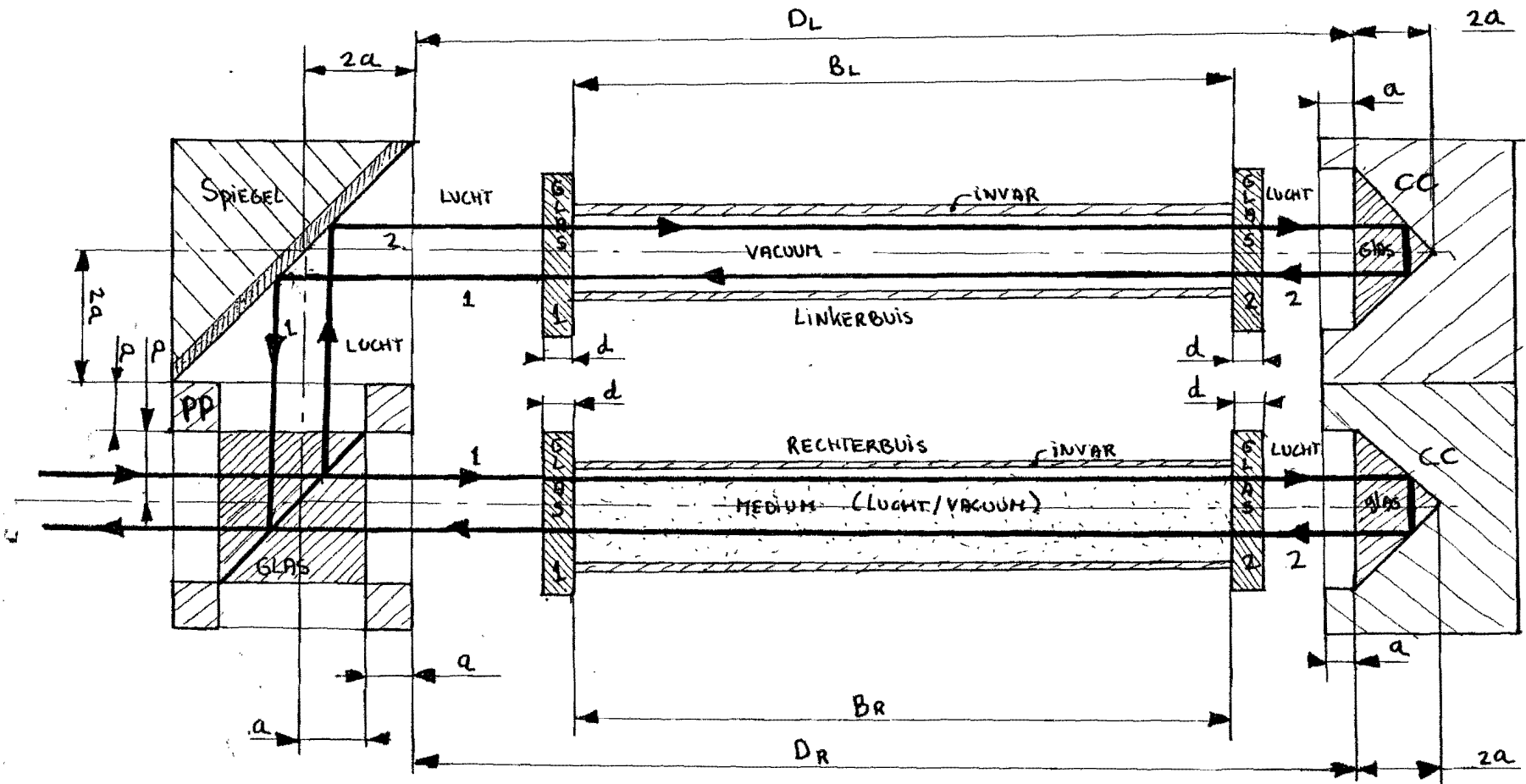
- 1 "The refractive index of air", B. Edlén.
Metrologia 1966, 2.2, p 71-80
- 2 "DIN 43760", "Grundwerte der Messwiderstände für Widerstandsthermometer"
- 3 "Mechanisme van de elektrische geleiding", G.J. Nijgh. Dictaat THE 3367
- 4 "Beschrijving Diesselhorst compensator", Bleeker, Zeist
- 5 "Potentiometric methods of resistance measurement", T.M. Dauphiné. 1960
- 6 "De natte bol temperatuur", Ir.F.J.G. Kwanten. PT32(1977)6,p.348 e.v.
- 7 "Kooldioxide-metingen t.b.v. meetproject afd. W", M. van Straten, M. Zeedijk.
- 8 Kursus "Thermische isolatie en vochtproblemen in gebouwen", div. auteurs.
KVIV, antwerpen, 1980-1981
- 9 "Optics", Hecht, Zajac.
- 10 " ? ", P. Schellekens, nog niet verschenen dissertatie.
- 11 "Onderzoek naar de bruikbaarheid van een meetmethode voor de brekings-
index van licht in lucht.", C.R.W. Verroste.
- 12 "Meten en controleren", Drs.J. Koning. Dictaat THE 4414.

No	Dag ('04)	tijd	S 10 Ω	S 100 Ω	R _{T1} Ω	R _{T2} Ω	R _{T3} Ω	R _{T4} Ω	R _{T5} Ω	R _{Pt-10} Ω
1	08-11	13.00	9,9994	100,0012	107,8392	107,8430	107,8157	107,7455	107,7334	12,0137
2		14.00	9,9995	100,0012	107,8381	107,8420	107,8150	107,7444	107,7323	12,0134
3		15.00	9,9992	100,0012	107,8403	107,8439	107,8172	107,7471	107,7351	12,0134
4		17.45	9,9995	100,0014	107,8463	107,8490	107,8218	107,7514	107,7400	12,0140
5	09-11	08.30	9,9995	100,0015	107,8564	107,8589	107,8297	107,7611	107,7496	12,0145
6		10.00	9,9997	100,0014	107,8579	107,8605	107,8318	107,7636	107,7521	12,0155
7		11.35	9,9997	100,0017	107,8569	107,8591	107,8306	107,7620	107,7505	12,0154
8		12.50	9,9996	100,0017	107,8598	107,8625	107,8343	107,7653	107,7537	12,0159
9		14.00	9,9995	100,0013	107,8519	107,8550	107,8273	107,7577	107,7458	12,0149
10	12-11	09.25	9,9996	100,0018	107,7499	107,7530	107,7267	107,6613	107,6511	12,0025
11		10.20	9,9999	100,0006	107,6741	107,6769	107,6467	107,5789	107,5675	11,9951
12		11.15			107,6626	107,6655	107,6353	107,5666	107,5552	11,9938
13		12.10			107,6496	107,6518	107,6206	107,5507	107,5391	11,9924
14		13.05			107,6603	107,6615	107,6302	107,5581	107,5461	11,9932
15		14.15			107,6763	107,6775	107,6475	107,5759	107,5646	11,9951
16		15.10			107,6738	107,6741	107,6462	107,5770	107,5666	11,9944
17	13-11	08.40			107,6337	107,6372	107,6089	107,5456	107,5352	11,9904
18		11.10			107,6836	107,6845	107,6544	107,5681	107,5753	11,9956
19		12.10			107,6956	107,6970	107,6686	107,6018	107,5910	11,9970

100,0013 Ω ; S = 0,0004 Ω

 9,9996 Ω ; S = 0,0002 Ω

Meetwaarden thermometer-lijking - Meetwaarden



Schema interferometeropstelling voor brekingsindexmeting

Indexering reële weglengtes L:	1 ^e	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e
	L = Links	H = Heengaand	P = PP	G = Glas	cijfer
	R = Rechts	T = Terugkomend	S = Spiegel	L = Lucht	
- : Index niet relevant			B = Buis	V = Vacuum	
			C = Corner cube	M = Medium	

L_L = totale reële weglengte voor de bundel die door de linkerbuis loopt, vanaf PP en terug daarheen. Analoog L_R

$$\begin{aligned}
 L_L &= (L_{LHPG} + L_{LHPL}) + (L_{LHSL1} + L_{LHSL2}) + (L_{LH-L1}) + (L_{LHBG1} + L_{LHBV} + L_{LHBG2}) + (L_{LH-L2}) + (L_{LHCL} + L_{L-CG} + L_{LTCL}) + (L_{LTP-L2}) \\
 &\quad + (L_{LTBG2} + L_{LTBV} + L_{LTBG1}) + (L_{LT-L1}) + (L_{LTSL2} + L_{LTSL1}) + (L_{LTP-L1} + L_{LTPG}) \\
 L_R &= (L_{RHPG} + L_{RHPL}) + (L_{RH-L1}) + (L_{RHBG1} + L_{RHBM} + L_{RHBG2}) + (L_{RH-L2}) + (L_{RHCL} + L_{R-CG} + L_{RTCL}) + (L_{RT-L1}) \\
 &\quad + (L_{RTBG2} + L_{RTBM} + L_{RTBG1}) + (L_{RT-L1}) + (L_{RTPL} + L_{RTPG})
 \end{aligned}$$

Nemen we nu de heen- en teruggaande wegen samen tot een gemiddelde, (We veronderstellen geen temperatuur-gradiënten)

we voegen analoge wegen samen (L_{--BG1} en L_{--BG2}), en drukken L_{---L1} uit in D_- en Buislengtes:

$$L_{---L1} + L_{---L2} + L_{--CL} = D_- - (L_{--B-} + 2L_{--BG-})$$

$$\begin{aligned}
 L_L &= (2L_{L-PG} + 4L_{L-BG-} + L_{L-CG})_{\text{glas}} + (2L_{L-BV})_{\text{vac.}} + (2L_{L-PL} + 4L_{L-SL-} + 2(D_L - (L_{L-BV} + 2L_{L-BG-})))_{\text{lucht}} \\
 L_R &= (2L_{R-PG} + 4L_{R-BG-} + L_{R-CG})_{\text{glas}} + (2L_{R-BM})_{\text{med}} + (2L_{R-PL} + 2(D_L - (L_{R-BM} + 2L_{R-BG-})))_{\text{lucht}}
 \end{aligned}$$

Houden we nu vervolgens rekening met het feit dat de temperatuur niet volledig constant is:

Noem referentietemperatuur T_0 ($=20,3$ °C), Noem temperatuur bij begin van de meting T_v ; $\Delta T_v = T_v - T_0$

Noem de temperatuur bij het einde van de meting T_n ; $\Delta T_n = T_n - T_0$

Dan volgt voor de gecorrigeerde weglengtes (uitzettingscoëfficiënten α_i):

$$L_L(T) = (1 + \alpha_{gl} \cdot \Delta T)(\text{glasterm})_{gl} + (1 + \alpha_{in} \cdot \Delta T)(2L_{L-BV})_{vac} + (1 + \alpha_{ij} \cdot \Delta T)(2L_{L-PL} + 4L_{L-SL} + 2D_L)_{lucht} \\ - \left[(1 + \alpha_{in} \cdot \Delta T)(2L_{L-BV}) + (1 + \alpha_{gl} \cdot \Delta T)(4L_{L-BG}) \right]_{lucht}$$

$L_R(T)$ analoog, alleen term $4L_{L-SL}$ niet.

We gaan nu over op optische weglengtes door de reële weglengtes te vermenigvuldigen met hun brekingsindices, waarbij we er van uitgaan dat de temperatuurvariatie zo klein is dat alleen de brekingsindex van lucht, n_1 relevant daardoor beïnvloed wordt.

$$L_{oL}(T) = n_{gl} \cdot (1 + \alpha_{gl} \cdot \Delta T)(\text{glasterm}) + (1 + \alpha_{in} \cdot \Delta T)(2L_{L-BV}) \cdot 1 + n_1(T) \cdot (1 + \alpha_{ij} \cdot \Delta T)(\text{ijzerterm}) - \text{correctieterm} \cdot n_1(T)$$

$L_{oR}(T)$ analoog op iets andere ijzerterm na.

Het door de laser gemeten optisch weglengteverschil dat ontstaat als we de rechterbuis vullen met lucht, is te schrijven als:

$$\Delta L_o = \left(L_{oL}(T_n) - L_{oR}(T_n) \right) - \left(L_{oL}(T_v) - L_{oR}(T_v) \right)$$

Dat kunnen we als volgt herschrijven:

$$\Delta L_o = \left(L_{oL}(T_n) - L_{oL}(T_v) \right) - \left(L_{oR}(T_n) - L_{oR}(T_v) \right) = \Delta L_{oL}(T) - \Delta L_{oR}(T)$$

Noem $T_n - T_v = \Delta T$, dan: (met een kleine vereenvoudiging: $\Delta N_1(\Delta T) \ll \Delta T$)

$$\Delta L_{oL} = n_{g1} \cdot \alpha_{g1} \cdot \Delta T \cdot (2L_{PG} + L_{CG}) + (n_{g1} - n_1(T)) \cdot \alpha_{g1} \cdot \Delta T \cdot (4L_{BG-}) + (1 - n_1(T)) \cdot \alpha_{in} \cdot \Delta T \cdot (2L_{BV}) +$$

$$+ (\Delta n_1(\Delta T) + n_1(T) \cdot \alpha_{ij} \cdot \Delta T) \cdot (2L_{PL} + 4L_{SL} + 2D)$$

$$\Delta L_{oR} = n_{g1} \cdot \alpha_{g1} \cdot \Delta T \cdot (2L_{PG} + L_{CG}) + (n_{g1} - n_1(T)) \cdot \alpha_{g1} \cdot \Delta T \cdot (4L_{BG-}) + (n_1(T_v) - 1) \cdot (1 + \alpha_{in} \cdot \Delta T) \cdot (2L_{BV})$$

$$+ (\Delta n_1(\Delta T) + n_1(T) \cdot \alpha_{ij} \cdot \Delta T) \cdot (2L_{pl} + 2D)$$

ΔL_o is nu eenvoudig te berekenen: ($\delta x = x_L - x_R$)

$$\Delta L_o = n_{g1} \cdot \alpha_{g1} \cdot \Delta T \cdot (2\delta L_{PG} + \delta L_{CG}) + (n_{g1} - n_1(T)) \cdot \alpha_{g1} \cdot \Delta T \cdot (4\delta L_{BG-}) + (\Delta n_1(\Delta T) + n_1(T) \cdot \alpha_{ij} \cdot \Delta T) \cdot (2\delta L_{PL} + 2\delta D + 4L_{SL})$$

$$+ (1 - n_1(T)) \cdot \alpha_{in} \cdot \Delta T \cdot (2L_B) + (1 - n_1(T)) \cdot (1 + \alpha_{in} \cdot \Delta T) \cdot (2L_{B_{rechts}})$$

We kunnen nu alle δ -termen gaan afschatten.

Zij zijn het gevolg van maattoleranties, of (gedwongen) inbouwfouten.

$$\delta L_{PG} \approx 10^{-5} \text{ m}, \quad \delta L_{CG} \approx 10^{-5} \text{ m} \quad (\text{Nauwkeurige optische componenten !})$$

$$\delta L_{BG} \approx 10^{-5} \text{ m} \quad (\text{goede kwaliteit glas})$$

$$\delta L_{PL} \approx 10^{-4} \quad (\text{origineel HP})$$

$$\delta D \approx 10^{-2} \quad (\text{scheve opstelling door onjuiste hartafstand corner-cubes})$$

$$\text{Bovendien: } \alpha_{g1} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_{in} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_{ij} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1},$$

$$n_{g1} = 1,51 \quad , \quad (1 - n_1) \approx 3 \cdot 10^{-4}, \quad L_B \approx 4 \cdot 10^{-1} \text{ m}, \quad L_{SL} \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Met $\Delta n \approx 10^{-6} \cdot \Delta T$ volgt dan:

$$\Delta L_o = \underset{\text{I}}{5 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta T} + \underset{\text{II}}{1,5 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta T} + \underset{\text{III}}{10^{-6} \cdot \Delta T} + \underset{\text{IV}}{5 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta T} + \underset{\text{V}}{(1-n_1(T)) \cdot (1+\alpha_{in} \cdot \Delta T) \cdot 2L_{\text{buis, rechts}}}$$

Term V heeft orde $3 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0,8 \approx 2,4 \cdot 10^{-4}$, zodat we de overige termen (I t/m IV) als de totale meeton nauwkeurigheid in optische weglengte kunnen beschouwen.

Relatief veruit de grootste van deze vier termen is term III, waarin de a-symmetrie van de meetopstelling tot uiting komt. Deze term is namelijk zo groot omdat daar de uitzetting van het spiegelblok in zit, die slechts in de linker-tak voorkomt, en dus niet grotendeels gecompenseerd wordt door een analoog ding in de rechtertak.

Indien we de opstelling binnen een goed-geïsoleerde ruimte uitvoeren (50 mm tempex), die weer in een redelijk goed-geconditioneerde ruimte (de meetkamer) staat, zouden we ΔT echter onder 10^{-2}K moeten kunnen houden.

(ΔT is het temperatuursverschil dat optreedt in de opstelling, in 5 minuten (tussen begin en einde meting) !)

Het weglengte-verschil wordt dan: $\Delta L_o = (1-n_1(T)) \cdot (1+\alpha_{in} \cdot \Delta T) \cdot 2L_{\text{buis, rechts}} \pm 10^{-8}$

De brekingsindex van de ingelaten lucht volgt dan uit:

$$n_1(T, P, h, \text{CO}_2) = 1 + \frac{\Delta L_o}{2 \cdot L_{\text{buis}} \cdot (1+\alpha_{in} \cdot \Delta T)} \pm 2S_o$$

$\pm 2S_o$ = gebied waarbinnen 95% van de meetwaarden valt, waarin:

S_o = standaarddeviatie ten gevolge van maatafwijkingen en asymmetrische temperatuurverdelingen dan wel temperatuursdrift, in de optiek.

$$S_o = 6 \cdot 10^{-9}$$