Het bepalen van kromtemiddelpunten van banen, beschreven door punten van vlakke complexe mechanismen met gedwongen beweging

De Ingenieur

Werktuig- en Scheepsbouw 16

Commissie van Bijstand:
ir. A. P. Adema van Scheltema, Dipl.-Ing. F. G. van Asperen
prof. ir. H. C. A. van Eldik Thieme, Dipl.-Ing. H. F. L. Pénard

621-231.23:516.2

Het bepalen van kromtemiddelpunten van banen, beschreven door punten van vlakke complexe mechanismen met gedwongen beweging

door **E. A. Dijksman, fys. drs.**, wetenschappelijk medewerker bij de afdeling der Werktuigbouwkunde van de Technische Hogeschool te Eindhoven

Summary: *Determination of instantaneous centers of curvature of paths traced out by points of complex and plane mechanisms with one degree of freedom.*

A new construction is given for the determination of instantaneous centers of curvature which also can be applied in those cases in which the theorem of Bobillier and the construction of Hartmann cannot be used.

For that purpose the mechanism in question shall be extended with a part of the relative centerpole-configuration and with the normal of the curve in the point concerned.

The construction is principally based on the successive determination of relative centerpoles of this extended mechanism.

1. Inleiding

Bij de bepaling van kromtemiddelpunten van banen die beschreven worden door punten van een vlak complex mechanisme wordt in het algemeen de stelling van Bobillier toegepast.

Voor de toepassing van deze stelling is het noodzakelijk dat men twee kromtemiddelpunten kan aanwijzen, die behoren bij overeenkomstige baanpunten van éénzelfde lichaam uit het betrokken mechanisme, ten einde het kromtemiddelpunt te kunnen bepalen van een ander baanpunt van dat lichaam.

Immers, heeft men eenmaal met Bobillier de poolraaklijn bepaald, dan kan men met behulp van één der beide gegeven kromtemiddelpunten en het bijbehorende baanpunt, van het betrokken baanpunt het gevraagde kromtemiddelpunt bepalen door de stelling van Bobillier nogmaals toe te passen (zie fig. 1). Maar er zijn ook mechanismen met één graad van vrijheid, waarbij men slechts één of zelfs geen enkel kromtemiddelpunt meer ter beschikking heeft.

In een dergelijke situatie blijkt de stelling van Bobillier niet toereikend. Er is van dit probleem reeds een oplossing bekend [1]: uitgaande van de snelheidsverdeling kan men de poolwisselsnelheid van het betrokken lichaam met de gegeneraliseerde stelling van Hartmann bepalen en vervolgens de gewone stelling van Hartmann toepassen.

Het is mogelijk een andere oplossing voor dit probleem te ontwikkelen zonder uit te gaan van een bepaalde snelheidsverdeling. Dus meer overeenkomstig de stelling van Bobillier, die evenmin betrokken is op een snelheidsconstructie.

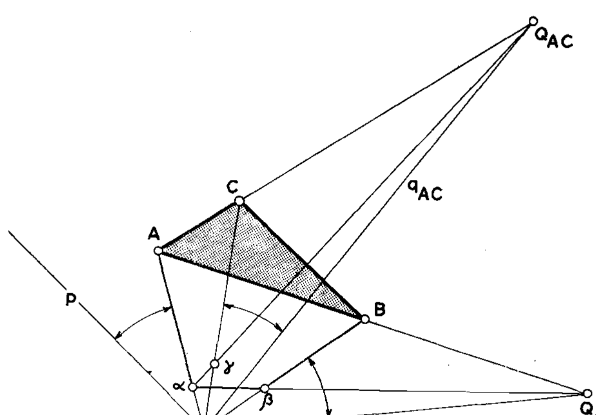

Fig. 1. Constructie van het kromtemiddelpunt γ van het baanpunt C met behulp van de stelling van Bobillier.

Als een belangrijke aanwijzing voor een dergelijke oplossing van dit probleem kan een publikatie van Reushel [2] uit 1949 worden beschouwd. Reushel heeft namelijk reeds door middel van de theorie van de ontwondene de krommingen kunnen bepalen van vele bekende krommen, zoals de kegelsneden, de astroïde, de exponentiaalkromme, de sinuslijn en de logaritmische kromme, door gebruik te maken van de specifieke eigenschappen van deze krommen. In zijn algemene theorie slaagde Reushel er daarentegen nog niet in zijn constructie van kromtemiddelpunten los te zien van de theorie van de ontwondene.

Daardoor heeft hij zich bepaald tot eenvoudige mechanismen, die alle op een of andere wijze zijn terug te voeren tot zijn theorie van de ontwondene. Nu kan dit in principe met elk mechanisme worden gedaan. Maar voor enigszins gecompliceerde mechanismen wordt dit al spoedig dermate ingewikkeld, dat het beter is de theorie van de ontwondene in haar geheel los te laten. De constructiemethode die hier gevolgd zal worden, komt in principe neer op de methode van Reushel, maar dan ontdaan van zijn theorie van de ontwondene.

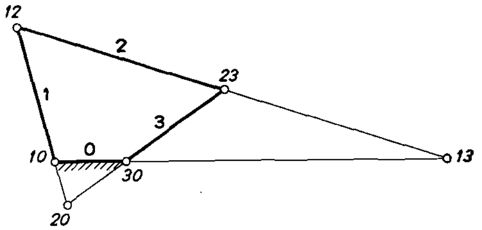

Fig. 2. Volledige vierhoek behorende bij een stangenvierzijde.

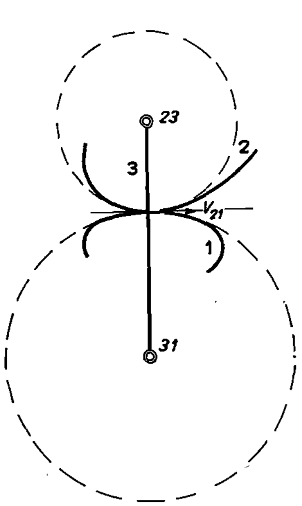

Fig. 3. Momentane eliminatie van een elementenpaar met relatieve snelheid tussen de beide elementen, door toevoeging van 1 staaf en 2 draaipunten.

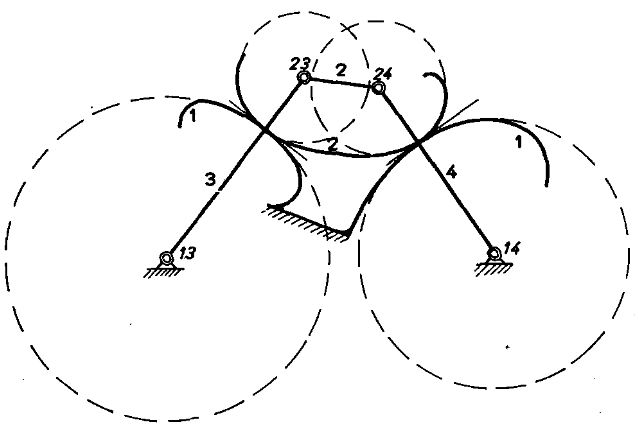

Fig. 4. Momentane eliminatie van 2 elementenparen uit een mechanisme met krommegeleidingen.

Tegenover die van Reushel heeft de hier gevolgde constructiemethode het voordeel dat zij eenvoudig blijkt te zijn en ook voor gecompliceerde mechanismen zonder veel moeilijkheden kan worden doorgevoerd.

Om een algemene toepassing van de hier te geven constructie mogelijk te maken is het noodzakelijk de pool van het betrokken lichaam uit het mechanisme op een of andere wijze mechanisch voort te brengen. De normaal van de kromme in het betrokken baanpunt wordt evenzo mechanisch voortgebracht. Dit gebeurt door de normaal steeds te laten bewegen door de zoëven genoemde, mechanisch voortgebrachte pool en door de normaal scharnierend te bevestigen aan het betrokken baanpunt. Het zal blijken, dat de bepaling van het kromtemiddelpunt van dat baanpunt neerkomt op de bepaling van de pool van deze mechanisch voortgebrachte normaal.

Allereerst zal nu behandeld worden een uitbreiding van het mechanisme door mechanische voortbrenging van de relatieve polen en het feit dat deze uitbreiding het aantal vrijheidsgraden niet beïnvloedt.

Vervolgens wordt aangetoond dat voor een mechanisme met gedwongen beweging alle relatieve polen kunnen worden bepaald. Op grond hiervan wordt de methode van de constructie ontwikkeld, die tenslotte wordt gedemonstreerd aan een tweetal voorbeelden.

2. Algemene theorie

De poolconfiguratie van een vlak mechanisme met één graad van vrijheid.

Verstaat men onder P_{ik} de relatieve pool van lichaam i ten opzichte van lichaam k, dan blijven, zoals bekend is, de relatieve polen P_{ik}, P_{il} en P_{lk} steeds op een rechte, de zgn. *poolrechte*.

Van deze eigenschap kan men gebruik maken om de pool te construeren van een lichaam uit een gegeven vlak mechanisme met één graad van vrijheid. Dit doet men door steeds een tweetal van zulke rechten met elkaar te snijden en zo achtereenvolgens in de snijpunten alle relatieve polen aan te wijzen.

Alle relatieve polen van een vlak mechanisme met één graad van vrijheid vormen met hun poolrechten een zgn. *poolconfiguratie*.

Een voorbeeld van een poolconfiguratie is de in figuur 2 afgebeelde *volledige vierhoek*, waarin alle relatieve polen van een stangenvierzijde voorkomen.

Bij de bepaling van de poolconfiguratie stelt men uiteindelijk ook de pool van het zoëven genoemde lichaam vast. Vervolgens kan men de constructies mechanisch voortbrengen door staven te maken van de benodigde poolrechten.

Deze rechten worden alleen in de achtereenvolgens *te bepalen* polen scharnierend met elkaar verbonden en in de twee andere relatieve polen van elke rechte met sleu-

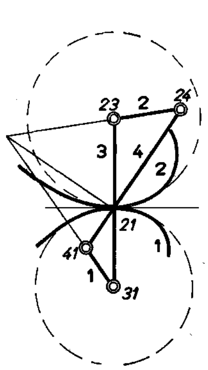

Fig. 5. Momentane eliminatie van een elementenpaar met zuivere rolling door toevoeging van 2 staven en 4 draaipunten.

ven gebonden aan het op deze wijze reeds opgebouwde deel van het mechanisme.

Men kan zich nu de vraag stellen of na zo'n uitbreiding van het mechanisme met een aantal lichamen, zoals hiervoor is omschreven, het oorspronkelijke mechanisme zijn gedwongen bewegingsmogelijkheid nog wel heeft behouden. Voor de beantwoording van deze vraag is het voldoende te bewijzen, dat ook het 'uitgebreide' mechanisme nog slechts één graad van vrijheid heeft. Welnu, de formule van Grübler voor het aantal graden van vrijheid luidt:

f = 3(n-1) - 2.d-1.s, waarin
f = aantal graden van vrijheid van het mechanisme,
n = aantal lichamen
d = aantal draaipunten
s = aantal sleufpunten.

Het oorspronkelijke mechanisme had één graad van vrijheid; bovendien worden telkens (k-maal) 2 staven (poolrechten), één draaipunt en 4 sleuven aan het reeds opgebouwde deel van het mechanisme toegevoegd, zodat voor het totale aantal graden van vrijheid wordt gevonden:

$$F_{\text{TOTAAL}} = F_{\text{OORSPRONKELIJK}} + F_{\text{TOEGEVOEGD}} =$$
$$= 1 + k.\,(3.2 - 2.1 - 1.4 = 1 + k.0 = 1$$

Op grond van het voorgaande kan nu de volgende stelling worden geformuleerd:

Stelling 1 *Een mechanisme met één graad van vrijheid, dat uitgebreid wordt met een deel van de bijbehorende poolconfiguratie, blijft zijn ene graad van vrijheid behouden.*

De algemene toepasbaarheid van de hier te geven constructie zal worden gebaseerd op de volgende stelling:

Stelling 2 *Alle relatieve polen van een gegeven vlak mechanisme met één graad van vrijheid zijn te bepalen.*

Een relatieve pool die niet blijvend te vinden is op een poolrechte, die bepaald is door andere reeds vastgelegde polen, wordt *onafhankelijke pool* genoemd.

Is nu in het algemeen het minimum aantal onafhankelijke polen, nodig voor het vastleggen van zo'n poolconfiguratie: p, dan is het voor het bewijs van stelling 2 voldoende, aan te tonen dat een mechanisme met één graad van vrijheid juist p onafhankelijke polen bezit.

Wij gebruiken hiertoe de volgende hulpstellingen (a t/m e):

Stelling a *Een willekeurig vlak mechanisme is in elk geval gedurende twee oneindig kleine en opeenvolgende tijdsintervallen steeds constructief te vervangen door een mechanisme met uitsluitend draaipunten.*

Het constructief vervangen mechanisme voert gedurende die opeenvolgende tijdsintervallen dezelfde beweging uit als het oorspronkelijke mechanisme. Die mechanismen, waarbij tussen de lichamen *krommegeleiding* [2] mogelijk is, zijn slechts *momentaan* te vervangen door mechanismen met uitsluitend draaipunten.

Is er tussen de beide krommen onderling ook nog glijding mogelijk, dan kan men door het aanbrengen van één derde lichaam en twee draaipunten op een wijze zoals uitgevoerd is in figuur 3, het oorspronkelijke *elementenpaar* elimineren.

Elke krommegeleiding met relatieve snelheid in het contactpunt vermeerdert het aantal daarbij toegevoegde lichamen s met één.

Een voorbeeld van een mechanisme van dit type is afgebeeld in figuur 4. De staaf 23-24 voert dezelfde beweging uit als het oorspronkelijke lichaam 2. Men kan zeggen, dat de vervanging hier '3-puntig' is, omdat de kromming van de door de punten 23 en 24 beschreven banen even groot is gebleven.

Een krommegeleiding met relatieve snelheid nul in het contactpunt kan in haar geheel momentaan door een stangenvierzijde worden vervangen, zoals gebeurd is in figuur 5.

De vervanging is ook hier weer '3-puntig' en dus voldoende voor de bepaling van kromtemiddelpunten uit

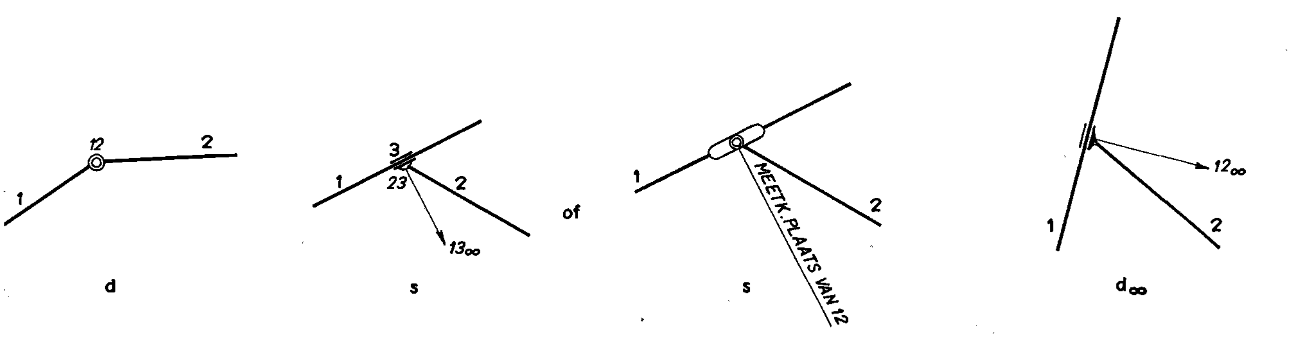

Fig. 6. Elementenparen: draaipunten, draaibare sleuven en vaste sleuven.

andere delen van het gehele mechanisme. Op deze wijze zijn er in het platte vlak alleen nog maar de volgende *elementenparen* mogelijk:
draaipunten, draaibare sleuven en *vaste sleuven* (zie figuur 6).

Een vaste sleuf is in wezen een op oneindig gelegen draaipunt, terwijl een draaibare sleuf als lichaam meegeteld eveneens een op oneindig gelegen draaipunt heeft en bovendien nog een draaipunt bezit ter plaatse van de sleuf zelf.

Een elementenpaar in de vorm van een draaibare sleuf is dus te vervangen door 2 draaipunten en een extra lichaam.

De laatst genoemde herleidingen zijn zelfs geldig gedurende de gehele beweging van het oorspronkelijke mechanisme.

Daarmee is stelling a aangetoond.

Stelling b *Van een vlak mechanisme met uitsluitend draaipunten en met één graad van vrijheid zijn* (3n—4)/2 *polen steeds direct aanwijsbaar.*

Het aantal direct aanwijsbare polen is juist gelijk aan het aantal draaipunten d, zodat met $1 = f = 3(n—1) —2d.$ men onmiddellijk $d = (3n—4)/2$ vindt.

Stelling c *Een vlak mechanisme met één graad van vrijheid en met uitsluitend draaipunten, heeft in het algemeen geen andere direct aanwijsbare polen dan die, welke onafhankelijk zijn van elkaar.*

Was dit niet het geval, dan zou een mechanisme met één graad van vrijheid, dat uitgebreid werd met een deel van de bijbehorende poolconfiguratie, anders minder dan één graad van vrijheid bezitten.

Het aantal graden van vrijheid vermindert nl. met 2 voor elk draaipunt, dat ook met een poolconfiguratie uit de rest van het mechanisme te bepalen is. Terwijl voor elk draaipunt, dat tevens op een poolrechte ligt, die met een poolconfiguratie ook uit het overige deel van het mechanisme te bepalen is, het aantal graden van vrijheid met 1 vermindert.

Stelling d *Een vlak mechanisme met uitsluitend draaipunten bestaat uit een even aantal lichamen, het gestel meegerekend.*

Blijkens de dan toe te passen formule voor het aantal graden van vrijheid: $1 = f = 3(n—1) — 2.d$ is n inderdaad even.

Stelling e *Een poolconfiguratie behorende bij een mechanisme met een even aantal lichamen is bepaald door* (3n—4)/2 *willekeurige, onafhankelijke polen.*

Het bewijs van deze laatste hulpstelling zal geleverd worden door *volledige inductie.*

Zoals men direct in kan zien is een *volledige vierhoek* volkomen bepaald door 4 willekeurige, maar onafhankelijke polen.

Bovendien bevat een stangenvierzijde, die de volledige vierhoek tot poolconfiguratie heeft, inderdaad 4 lichamen. Voor $n = 4$ is de stelling reeds bewezen.

Aangenomen, dat de stelling bewezen is voor $n=N$, dan is het voor het bewijs voldoende aan te tonen, dat deze stelling ook nog geldt voor $n=N+2$.

Rangschikt men alle relatieve polen volgens het onderstaande schema:

21
31 32
41 42 43
51 52 53 54
61 62 63 64 65
71 72 73 74 75 76
81 82 83 84 85 86 87
....
(N—1)1 ....
N1 N2 .... N (N—1)

(N+1)1 .... (N+1)i .... (N+1)N
(N+2)1 .... (N+2)j .... (N+2) (N+1)

dan zijn er dus (3N—4)/2 willekeurige onafhankelijke polen te kiezen, die alle overige polen boven de streep vastleggen.

Uit de op één na laatste rij van het schema is dan nog maar één onafhankelijke pool te kiezen, daar 2 polen bijvoorbeeld de polen (N+1)i en (N+1)j op één poolrechte liggen met de reeds bepaalde pool ij uit het schema boven de getrokken lijn.

Kies dus bijvoorbeeld alleen de pool (N+1)i met $i = 1,\ldots,N$.

Uit de laatste rij kan men slechts de 2 onafhankelijke polen (N+2)j en (N+2) (N+1) kiezen met j i en $j = 1,\ldots,N$.

Immers de polen (N+2)j en (N+2)k met $j \neq k$ $j,k = 1,\ldots,N$ liggen op één poolrechte met de pool jk uit het schema boven de getrokken lijn.

Met behulp van de 3 extra gekozen onafhankelijke polen (N+1)i, (N+2)j en (N+2) (N+1), waarbij $i \neq j$ en $i,j = 1,\ldots,N$, zijn ook alle overige polen uit het schema beneden de getrokken lijn te bepalen.

(N+1)j

(N+1)i ij
(N+1) (N+2) (N+2)j
en

(N+1)k

(N+1)j jk
(N+1)i ik
met $k = 1,\ldots,N.$
terwijl

(N+2)m

(N+2) (N+1) (N+1)m
(N+2)j jm
met $m = 1,\ldots,N.$

Er zijn dus 3 onafhankelijke, maar overigens willekeurig te kiezen polen bijgekomen, nodig om de gehele poolconfiguratie van een mechanisme met N+2 lichamen te kunnen bepalen.

Daarbij kan worden opgemerkt, dat een permutatie in de nummering der bijbehorende lichamen ook nog doet blijken, dat de aanwijzing van de relatieve pool (N+2) (N+1) niet op voorkeur heeft berust.

In totaal heeft men nu $(3N-4)/2+3=\{ 3.(N+2)-4\} /2$

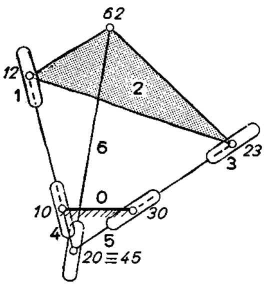

Fig. 7. Stangenvierzijde, uitgebreid met een gematerialiseerd deel van de poolconfiguratie en met het lichaam 6.

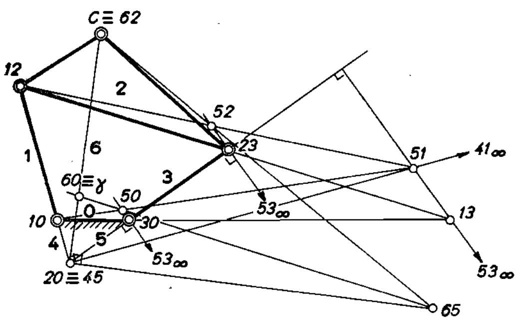

Fig. 8. Constructie van het kromtemiddelpunt γ van het baanpunt C door bepaling van de pool $P_{60} = 60$ met behulp van de poolconfiguratie.

onafhankelijke, maar overigens nog willekeurig te kiezen polen, zodat de stelling ook geldt voor $n = N+2$. Daarmee is de laatste hulpstelling bewezen.

Op grond van deze 5 hulpstellingen is het zonder meer duidelijk, dat er bij een willekeurig vlak mechanisme met één graad van vrijheid, nl. door dat mechanisme te vervangen door een mechanisme met uitsluitend draaipunten, evenveel onafhankelijke polen direct aanwijsbaar zijn, als nodig is om de gehele, bij het mechanisme behorende poolfiguratie te kunnen bepalen nl. $(3n—4)/2$.

Daarmee is stelling 2 bewezen.

3. Methode en verantwoording van de constructie

Bepaling van kromtemiddelpunten van banen, beschreven door punten van vlakke mechanismen met één graad van vrijheid.

De baan waarvan men in één punt de kromming wil bepalen, wordt beschreven door een punt van een lichaam uit een gegeven mechanisme. Evenals de pool van dat lichaam, zal ook de normaal in het betrokken punt van de baankromme op reeds eerder omschreven wijze mechanisch worden voortgebracht.

Het mechanisme, dat voor de mechanische voortbrenging van de pool van het betrokken lichaam is uitgebreid met een deel van de bijbehorende poolconfiguratie, behoudt blijkens stelling 1 zijn graad van vrijheid. Het totale aantal graden van vrijheid blijkt na het aanbrengen van de mechanisch voortgebrachte normaal eveneens constant te zijn gebleven. Dit volgt uit het feit, dat daarbij één lichaam, één draaipunt en één sleufpunt aan het geheel wordt toegevoegd, zodat: $\Delta\ f = 3.1 — 2.1 — 1.1. = 0$. Blijkens stelling 2 zijn nu ook alle relatieve polen van het op deze wijze uitgebreide mechanisme te bepalen, dus ook de pool van de mechanisch voortgebrachte normaal. De pool van de mechanisch voortgebrachte normaal ligt op de normaal zelf òf op het verlengde daarvan, omdat de punten van deze normaal geen snelheidscomponent kunnen hebben in de lengterichting van de normaal.

Omdat deze pool geen snelheid heeft, is zij tevens snijpunt van 2 opeenvolgende normalen van de betrokken baankromme.

Dit laatste ziet men gemakkelijk in, indien 2 opeenvolgende standen van de normaal worden bekeken en vervolgens tot één limietstand wordt overgegaan.

Het snijpunt van 2 opeenvolgende normalen is, zoals bekend, tevens het kromtemiddelpunt van de bijbehorende baankromme, zodat *de pool van de mechanisch voortgebrachte normaal juist het gezochte kromtemiddelpunt is van de betrokken baankromme.*

Het bepalen van de pool van de mechanisch voortgebrachte normaal in het uitgebreide mechanisme kan nu eveneens door onderling snijden van diverse poolrechten plaatsvinden.

Op deze wijze kan men van punten uit elk denkbaar vlak mechanisme met één graad van vrijheid de bijbehorende kromtemiddelpunten bepalen.

4. Voorbeelden van toepassing

4.1 Bepaling van de kromming van banen beschreven door punten van het met de koppelstang meebewegende vlak van een stangenvierzijde

Als een eerste eenvoudig voorbeeld is de stangenvierzijde (α AB β) van figuur 1 gekozen ter vergelijking met de methode volgens de stelling van Bobillier.

Wordt het kromtemiddelpunt γ van het punt C gevraagd, dan wordt de stangenvierzijde allereerst uitgebreid met de lichamen 4, 5 en 6 (zie fig. 7). Door sleuven aan te brengen in de draaipunten 12, 10, 32 en 30 wordt er voor zorg gedragen dat lichaam 4 zich steeds blijft bewegen door de draaipunten 12 en 10 en lichaam 5 door de draaipunten 32 en 30. De lichamen 4 en 5 worden in de pool 20 scharnierend met elkaar verbonden. Het lichaam 6 tenslotte beweegt door een sleuf in het draaipunt $45 \equiv 20$ en is scharnierend verbonden met het punt $C \equiv 62$.

Bepaalt men nu van dit uitgebreide mechanisme de relatieve polen volgens het schema:

P_{51}		P_{52}		P_{50}		P_{56}	
53	31	51	12	51	10	52	26
54	41	53	32	53	30	loodlijn in P_{20} op lichaam 6	

P_{60}	
62	20
65	50

zoals uitgevoerd is in figuur 8, dan is volgens het voorgaande de pool P_{60} het kromtemiddelpunt γ van het baanpunt C.

De kromming van de baan, doorlopen door het punt C is tenslotte de omgekeerde waarde van het lijnstuk 62-60.

Door het kleiner aantal te trekken lijnen verdient na-

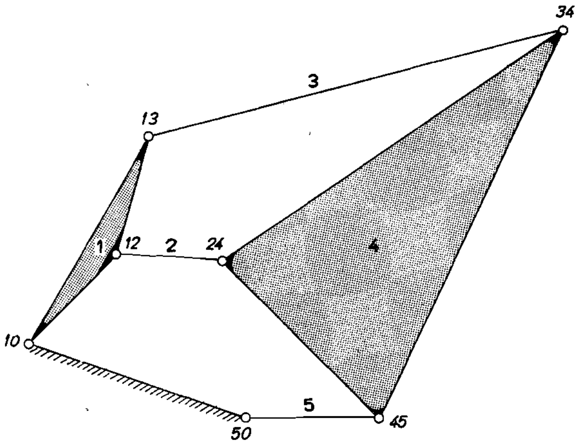

Fig. 9. 6-lichamen-mechanisme met één graad van vrijheid.

tuurlijk de methode volgens de stelling van Bobillier in gevallen als deze de voorkeur.

In die gevallen, waar de stelling van Bobillier en de constructie van Hartmann onvoldoende middel zijn ter bepaling van kromtemiddelpunten, kan echter de zoëven besproken methode altijd worden toegepast.

4.2 Bepaling van de kromming van een baan, beschreven door een punt van een 6-lichamen-mechanisme

Als een voorbeeld, waarbij de stelling van Bobillier niet meer kan worden toegepast, is een 6-lichamen-mechanisme gekozen volgens figuur 9, waarin het kromtemiddelpunt van het draaipunt 24 geconstrueerd moet worden. Daartoe breidt men het mechanisme weer uit tot dat van figuur 10, zoals op analoge wijze bij de stangenvierzijde is gedaan.

Het bepalen van de pool van de mechanisch voortgebrachte normaal in het mechanisme van figuur 10 kan eveneens door onderling snijden van diverse poolrechten gebeuren, zoals in een schema hiernavolgend is weergegeven en is uitgevoerd in figuur 11.

P_{41}		P_{40}		P_{23}		P_{30}		P_{20}		P_{72}	
43	31	41	10	21	13	34	40	24	40	73	32
42	21	45	50	24	43	31	10	21	10	78	82

P_{70}		$P_{(11)0}$	P_{35}		P_{75}	
73	30	(11)7 70	34	45	70	05
72	20	een loodlijn in P_{10} op staaf (11)	30	05	73	35

$P_{(11)5}$		$P_{(10)(11)}$	$P_{(10)0}$	
(11)0	05	(10)5 5(11)	(10)5	50
(11)7	75	een loodlijn in P_{40} op staaf (11)	(10)(11)	(11)0

$P_{(10)4}$		$P_{6(10)}$	P_{60}	
(10)0	04	64 (10)4	64	40
(10)5	54	een loodlijn in P_{40} op staaf 6	6(10)	(10)0

Voor de bepaling van de relatieve polen is nog een extra lichaam (11) ingevoerd, dat door de sleuven, aangebracht in de draaipunten (10)9 en 10, blijft bewegen en dat scharnierend verbonden is met het draaipunt 78. Voor het kromtemiddelpunt van het punt 24 uit figuur 9 wordt aldus tenslotte het punt P_{60} gevonden.

De kromming van de baan, doorlopen door het punt 24 is dan de omgekeerde waarde van het lijnstuk 24—60.

Op grond van dit voorbeeld is het ook denkbaar, dat bij nog gecompliceerder mechanismen voor een deel van het probleem de stelling van Bobillier en voor een ander deel de nieuwe constructiemethode gebruikt kan worden.

Literatuur

[1] E. A. DIJKSMAN: 'Kinematische analyse van vlakke mechanismen met gedwongen beweging'. *De Ingenieur* 1961 No. 2 blz. W 1.

[2] A. REUSHEL: 'Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen. Ein Beitrag zur Geometrie ebener Kurven'. Osterr. Ing.-Archiv, Bd. III, S. 9, Jg. 1949.

[3] A. REUSHEL: 'Konstruktion des Drehpohlplanes einer Zwanglaufkette beim Zusammenfallen von Polgeraden mittels einer kinematisch äquivalenten Polfigur. Anwendung auf Krümmungsmechanismen, insbesondere zur Ermittlung der Scheitelkrümmung von Radlinien'. Osterr. Ing.-Archiv, Bd. III, S. 311-S. 324, Jg. 1949, no. 4

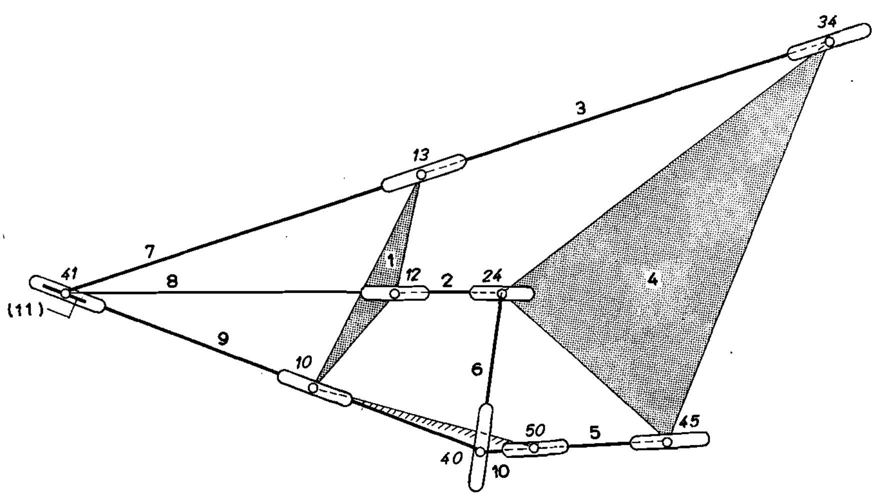

Fig. 10. 6-lichamen-mechanisme, uitgebreid met een gematerialiseerd deel van de poolconfiguratie en met lichaam 6.

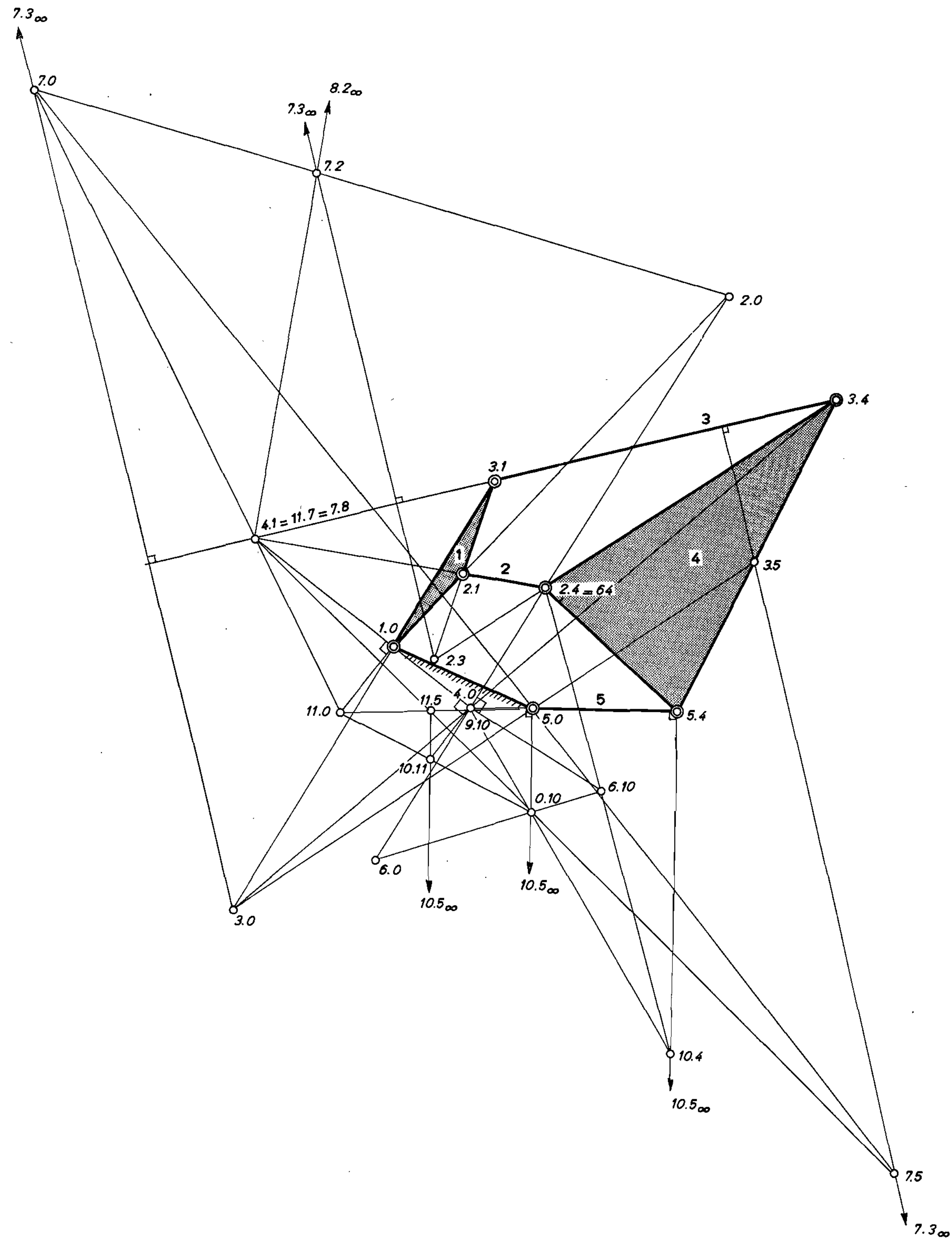

Fig. 11. Bepaling van de pool P_{60}.