

## Elastische cylinder belast door starre cilindrische schaalelementen

**Citation for published version (APA):**

Damen, G. M. J. (1976). *Elastische cylinder belast door starre cilindrische schaalementen*. (Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum; Vol. 7602). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1976

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

696557

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1976-~~102~~02

januari 1976

Elastische cylinder belast door starre cilindrische schaalementen

door

G.M.J. Damen

Technische Hogeschool  
Onderafdeling der Wiskunde  
PO Box 513, Eindhoven  
Nederland

Elastische cylinder belast door starre cylindrische schaalementen

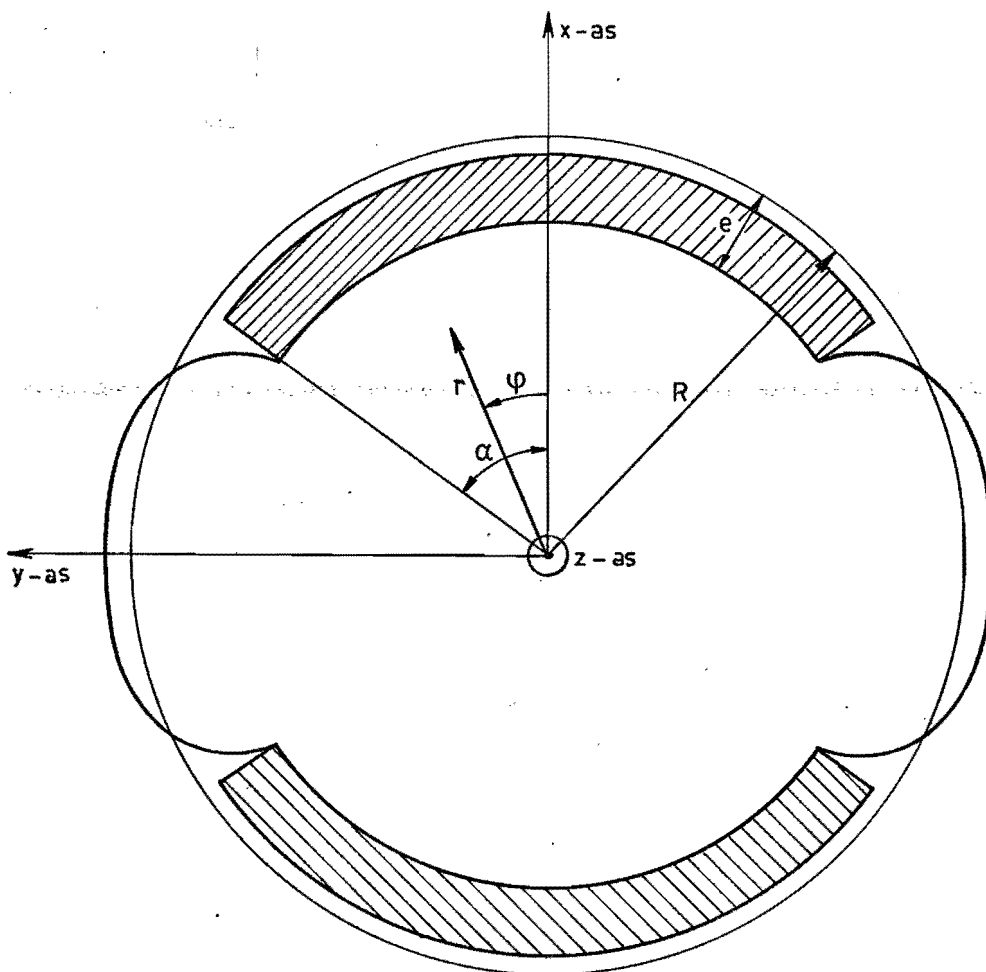
door

G.M.J. Damen

1. Probleemstelling.

We beschouwen een oneindig lange cirkelcylinder waartegen we twee oneindig lange, starre, cirkelvormige schoenen drukken.

Zo ontstaat een twee-dimensionale vlakke vervormingstoestand voor de doorsnede, welke we in onderstaande figuur weergegeven hebben. We veronderstellen symmetrie ten opzichte van de x- en y-as.



Figuur 1.

## 2. Herleiding van het probleem

De verplaatsingen  $u_i$  ( $i = x, y, z$ ) in Carthesische coördinaten voldoen aan de Navier-vergelijkingen. Zoals bekend [1] kunnen we ze voor een stervormig gebied uitdrukken in drie potentiaalfuncties  $B_i$  ( $i = x, y, z$ ):

$$(2.1) \quad u_i = 4(1 - \nu)B_i - (x_j B_j)_{,i}, \quad i = x, y, z$$

Bij overgang op cylindercoördinaten  $r$  en  $\varphi$  geldt:

$$B_x = B_r \cos \varphi - B_\varphi \sin \varphi,$$

$$(2.2) \quad B_y = B_r \sin \varphi + B_\varphi \cos \varphi,$$

$$B_z = B_z,$$

en

$$(2.3) \quad x_j B_j = r B_r + z B_z,$$

Voor de vlakke vervormingstoestand vinden we met de definities

$$(2.4) \quad u = u_r,$$

$$v = u_\varphi,$$

dat

$$(2.5) \quad u = (3 - 4\nu)B_r - r B_{r,r},$$

$$v = (4 - 4\nu)B_\varphi - B_{r,\varphi}.$$

Uit het feit dat  $B_x$  en  $B_y$  potentiaalfuncties zijn en dat

$$(2.6) \quad B_x + i B_y = e^{i\varphi} (B_r + i B_\varphi)$$

volgt

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0$$

We stellen

$$\begin{aligned} B_r(r, \varphi) &= B(r) \cos m\varphi \\ (2.8) \quad B_\varphi(r, \varphi) &= C(r) \sin m\varphi \end{aligned}$$

Gesubstitueerd in (2.3) levert dit de volgende vergelijkingen voor  $B(r)$  en  $C(r)$ :

$$\begin{aligned} B'' + \frac{B'}{r} - \frac{m^2 + 1}{r^2} B - \frac{2m}{r} C &= 0 \\ (2.9) \quad C'' + \frac{C'}{r} - \frac{m^2 + 1}{r^2} C - \frac{2m}{r} B &= 0 \end{aligned}$$

Dit systeem kunnen we oplossen. De oplossing van (2.7) luidt dan, indien we begrensdheid van de oplossing voor  $r = 0$  eisen:

$$\begin{aligned} B_r &= b_0 r + \sum_{m=1}^{\infty} [b_{1,m} r^{m+1} + b_{2,m} r^{m-1}] \cos m\varphi \\ (2.10) \quad B_\varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} [c_{1,m} r^{m+1} + c_{2,m} r^{m-1}] \sin m\varphi \end{aligned}$$

$B_r$  en  $B_\varphi$  volgens (2.10) substitueren we in (2.7). Dit levert

$$\begin{aligned} c_{1,m} &= b_{1,m} \\ (2.11) \quad c_{2,m} &= -b_{2,m} \end{aligned}$$

Hiermee is

$$\begin{aligned} B_r &= b_0 r + \sum_{m=1}^{\infty} [b_{1,m} r^{m+1} + b_{2,m} r^{m-1}] \cos m\varphi \\ (2.12) \quad B_\varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} [b_{1,m} r^{m+1} - b_{2,m} r^{m-1}] \sin m\varphi \end{aligned}$$

Met (2.12) en (2.5) zijn de verplaatsingen  $u$  en  $v$  bepaald. De onbekende constanten volgen uit de randvoorwaarden.

### 3. Randvoorwaarden, duale reeks vergelijking

We formuleren de volgende randvoorwaarden:

$$(3.1) \quad r = R, \quad -\pi < \varphi < \pi \quad t_{r\varphi} = 0$$

$$(3.2) \quad \left. \begin{array}{l} r = R, \quad -\alpha < \varphi < \alpha \\ \pi - \alpha < \varphi \leq \pi \\ -\pi < \varphi < -\pi + \alpha \end{array} \right\} u = e$$

$$(3.3) \quad \left. \begin{array}{l} r = R \quad \alpha < \varphi < \pi - \alpha \\ -\pi + \alpha < \varphi < -\alpha \end{array} \right\} t_{rr} = 0$$

De deformaties volgen uit:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r},$$

$$(3.4) \quad e_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\},$$

$$e_{rz} = e_{\varphi z} = e_{zz} = 0.$$

Uitgedrukt in  $B_r$  en  $B_\varphi$  met behulp van (2.5) luiden ze:

$$e_{rr} = (2 - 4\nu)B_{r,r} - rB_{r,rr}$$

$$(3.5) \quad e_{\varphi\varphi} = (4 - 4\nu) \frac{B_{\varphi,\varphi}}{r} - \frac{B_{r,\varphi\varphi}}{r} + (3 - 4\nu) \frac{B_r}{r} - B_{r,r}$$

$$2e_{r\varphi} = (4 - 4\nu)B_{\varphi,r} - 2B_{r,r\varphi} - (4 - 4\nu) \frac{B_\varphi}{r} + (4 - 4\nu) \frac{B_{r,\varphi}}{r}$$

We substitueren  $B_r$  en  $B_\varphi$  volgens (2.12) in (3.5)<sup>3</sup>.

Vervolgens berekenen we met de wet van Hooke  $t_{r\varphi}$  en stellen deze voor  $r = R, -\pi < \varphi \leq \pi$  gelijk aan nul (3.1). Dit levert:

$$(3.6) \quad b_{1,m} = \beta_m b_{2,m}$$

met

$$(3.7) \quad \beta_m = \frac{(m-1)(4-4\nu-m)}{m(m+1)} \frac{1}{R^2}$$

zodat nu

$$B_r = b_0 r + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2,m} [\beta_m r^{m+1} + r^{m-1}] \cos m\varphi \quad (3.8)$$

$$B_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2,m} [\beta_m r^{m+1} - r^{m-1}] \sin m\varphi$$

Na enig rekenwerk vinden we, gebruik makend van de wet van Hooke, (2.5), (3.5), (3.7) en (3.8)

$$u(R, \varphi) = 2(1-2\nu)Rb_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2,m} R^{m-1} \frac{4-4\nu-m}{m(m+1)} [4m(1-\nu) + 2(2\nu-1)] \cos m\varphi \quad (3.9)$$

$$t_{rr}(R, \varphi) = 4(\lambda + \mu)(1-2\nu)b_0 + 4(\lambda + \mu)(1-2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} b_{2,m} R^{m-2} \times \frac{(4-4\nu-m)(m-1)}{m} \cos m\varphi \quad (3.10)$$

Met de definities

$$c_m = b_{2,m} \frac{4-4\nu-m}{m} R^{m-2} \quad (3.11)$$

$$c_0 = 2b_0$$

$$\gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad e_1 = \frac{e}{4(1-\nu)R}$$

leveren de randvoorwaarden (3.2) en (3.3) de volgende betrekkingen voor de c's

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{m-\gamma}{m+1} \cos m\varphi &= e_1, & -\alpha < \varphi < \alpha \\ & & \pi - \alpha < \varphi \leq \pi \\ & & -\pi < \varphi < -\pi + \alpha \\ \frac{1}{2}c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (m-1) \cos m\varphi &= 0 & \alpha < \varphi < \pi - \alpha \\ & & -\pi + \alpha < \varphi < -\alpha \end{aligned} \quad (3.12)$$

terwijl

$$t_{rr}(R, \varphi) = 4(\lambda + \mu)(1-2\nu) \left\{ \frac{1}{2}c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (m-1) \cos m\varphi \right\} \quad (3.13)$$

Tot nu toe hebben we wel de symmetrie ten opzichte van de x-as maar niet die ten opzichte van de y-as in rekening gebracht. Deze symmetrie houdt in dat (3.12) hetzelfde resultaat moet geven, als we  $\varphi$  door  $\pi - \varphi$  vervangen.

Met de definities

$$(3.14) \quad \psi = 2\varphi, \quad c = 2\alpha$$

$$(3.15) \quad d_{2k} = c_{2k}(2k-1), \quad d_0 = c_0$$

vinden we de volgende duale reeks-vergelijking.

$$(3.16) \quad \frac{1}{2}\gamma d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \frac{2k-\gamma}{2k+1} \frac{1}{2k-1} \cos k\psi = e_1, \quad 0 < \psi < c,$$

$$\frac{1}{2}d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos k\psi = 0, \quad c < \psi < \pi.$$

#### 4. Integraalvergelijking

We stellen

$$(4.1) \quad \frac{1}{2}d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos k\psi = q(\psi) \quad \text{voor } 0 < \psi < c$$

De functie  $q(\psi)$  is op de factor  $4(\lambda + \mu)(1 - 2\nu)$  en argumenthalvering na, juist de druk  $t_{rr}(R, \varphi)$ .

Uit (3.16)<sup>2</sup> en (4.1) volgt

$$(4.2) \quad d_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^c q(\psi) \cos k\psi d\psi, \quad k \geq 0$$

Deze uitdrukking voor  $d_{2k}$  substitueren we in (3.16)<sup>1</sup> en verwisselen het sommatie- en integratieteken:

$$(4.3) \quad \int_0^c q(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-\gamma}{2k+1} \frac{1}{2k-1} \cos kt \cos kx dt = \frac{\pi}{2} e_1 - \frac{\gamma}{2} \int_0^c q(t) dt, \quad 0 < x < c$$

Omdat de functie  $q(t)$  symmetrisch is, kunnen we dit herschrijven tot

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \int_{-c}^c q(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-\gamma}{2k+1} \frac{1}{2k-1} \cos kt \cos kx dt = \frac{\pi}{2} e_1 - \frac{\gamma}{4} \int_{-c}^c q(t) dt, \quad -c < x < c$$



Met de reeks uitgewerkt en de integralen vereenvoudigd wordt dit na enig rekenwerk:

$$(4.5) \quad \int_{-c}^c q(t) \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{t-x}{2} \ln \tan^2 \frac{t-x}{4} - \frac{\pi}{2} \gamma \operatorname{sign}(x-t) \sin \frac{x-t}{2} + 1 \right\} dt = -2\pi e_1, \quad -c < x < c$$

of met

$$\theta = \frac{t}{2}, \quad \psi = \frac{x}{2}, \quad q(2\theta) = \hat{q}(\theta)$$

$$(4.6) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{q}(\theta) \left\{ \cos(\theta - \psi) \ln \tan^2 \frac{\theta - \psi}{2} - \pi \gamma \operatorname{sign}(\psi - \theta) \sin(\psi - \theta) + 2 \right\} d\theta = -2\pi e_1, \quad -\alpha < \psi < \alpha$$

We gaan over op de druk aan het oppervlak:

$$(4.7) \quad p(\theta) = -\hat{q}(\theta), 4(\lambda + \mu)(1 - 2\nu)$$

zodat

$$(4.8) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\theta) \left\{ \cos(\theta - \psi) \ln \tan^2 \frac{\theta - \psi}{2} - \pi \gamma \operatorname{sign}(\psi - \theta) \sin(\psi - \theta) + 2 \right\} d\theta = 8\pi \mu e_1, \quad -\alpha < \psi < \alpha$$

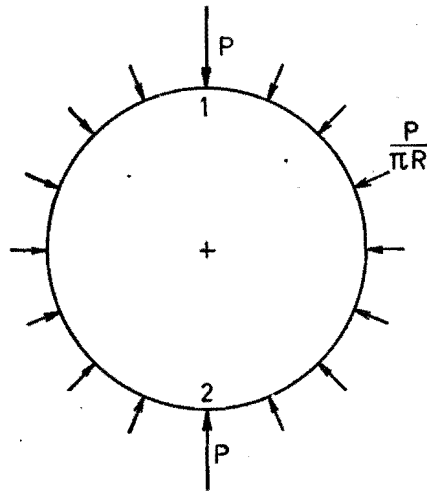
## 5. Eerste alternatieve aanpak

### 5.1. Hydrostatische belasting

We beschouwen de oneindig lange cirkelcylinder belast door de radiale spanning  $\frac{P}{\pi R}$  met R de straal. Voor deze vlakke vervormingstoestand vinden we op elementaire wijze dat

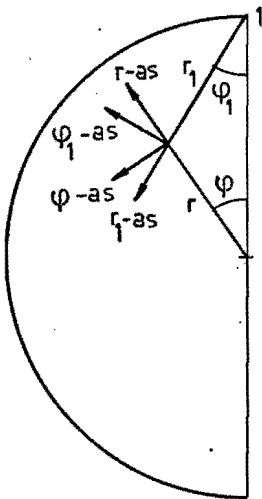
$$(5.1) \quad t_{rr} = t_{\varphi\varphi} = \frac{P}{\pi R}$$

5.2. Twee diametrale puntlasten

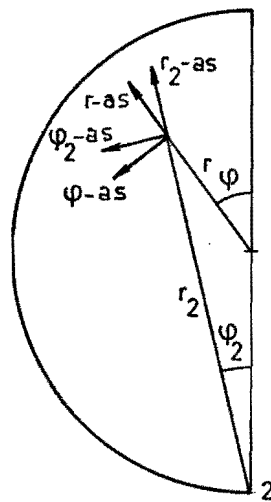


Figuur 2.

De spanningen t.g.v. de puntlasten in 1 en 2 en de radiale druk  $P/\pi R$  zijn bekend. Zie [2] blz. 85 & 107. Deze spanningen zijn gegeven ten opzichte van een lokaal assenkruis in 1 en 2. We willen nu overgaan op het systeem van cilindercoördinaten zoals weergegeven in figuur 1.



Figuur 3.



Figuur 4.

Bij de assentransformatie, zoals weergegeven in figuur 3, behoren de volgende Richtingscosinussen

$$(5.2) \quad \begin{array}{c|cc} & r_1 & \varphi_1 \\ \hline r & -\cos(\varphi + \varphi_1) & \sin(\varphi + \varphi_1) \\ \varphi & \sin(\varphi + \varphi_1) & \cos(\varphi + \varphi_1) \end{array}$$

Spanningen t.g.v. puntlast in 1:

$$(5.3) \quad t_{r_1 r_1} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1}$$

$$t_{i_1, j_1} = 0, \quad (i_1, j_1) \neq (r_1, r_1)$$

Bij de assentransformatie, zoals weergegeven in figuur 4 behoren de volgende Richtingscosinussen

$$(5.4) \quad \begin{array}{c|cc} & r_2 & \varphi_2 \\ \hline r & \cos(\varphi - \varphi_2) & \sin(\varphi - \varphi_2) \\ \varphi & -\sin(\varphi - \varphi_2) & \cos(\varphi - \varphi_2) \end{array}$$

Spanningen t.g.v. puntlast in 2

$$(5.5) \quad t_{r_2, r_2} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_2}{r_2}$$

$$t_{i_2, j_2} = 0 \quad (i_2, j_2) \neq (r_2, r_2)$$

We transformeren deze spanningen op de coördinaten  $r$  en  $\varphi$  volgens bijvoorbeeld [3] pagina 14 en 15.

De normaal-spanningen ten gevolge van puntlast in 1 zijn:

$$(5.6) \quad t_{rr}^{(1)} = t_{r_1 r_1} \cos^2(\varphi + \varphi_1)$$

$$t_{\varphi\varphi}^{(1)} = t_{r_1 r_1} \sin^2(\varphi + \varphi_1)$$

en ten gevolge van die in 2:

$$(5.7) \quad t_{rr}^{(2)} = t_{r_2 r_2} \cos^2(\varphi - \varphi_2)$$

$$t_{\varphi\varphi}^{(2)} = t_{r_2 r_2} \sin^2(\varphi - \varphi_2)$$

De som van deze spanningen is

$$(5.8) \quad t_{rr} = -\frac{2P}{\pi} \frac{R - r \cos \varphi}{[R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2]^2} (R \cos \varphi - r)^2 -$$

$$+\frac{2P}{\pi} \frac{R + r \cos \varphi}{[R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2]^2} (R \cos \varphi + r)^2$$

$$(5.9) \quad t_{\varphi\varphi} = -\frac{2P}{\pi} \frac{R - r \cos \varphi}{[R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2]^2} R^2 \sin^2 \varphi -$$

$$+\frac{2P}{\pi} \frac{R + r \cos \varphi}{[R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2]^2} R^2 \sin^2 \varphi$$

### 5.3. Invloedsfunctie

Voor de vlakke vervormingstoestand geldt:

$$(5.10) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)t_{rr} - \nu t_{\varphi\varphi}]$$

Omdat  $u = 0$  voor  $r = 0$  levert integratie:

$$(5.11) \quad u(R, \varphi) = \frac{1}{2\mu} \int_0^R [(1-\nu)t_{rr} - \nu t_{\varphi\varphi}] dr$$

$0(\varphi = \text{constant})$

Nemen we voor de spanningen die ten gevolge van de belastingsgevallen genoemd in paragraaf 5.1 en 5.2 dan levert (5.11) de verplaatsing aan de rand ten gevolge van twee diametrale puntlasten waarbij de overige rand spanningsvrij is. De krachtlijn maakt hierbij een hoek  $\varphi$  met de radiusvector van het punt waar de verplaatsing bepaald wordt. Uitdrukking (5.11) noemen we de invloedsfunctie.

We sommeren de spanningen (5.1), (5.8) en (5.9), veronderstellen  $\varphi \neq 0, \pi$  en voeren de integratie (5.11) uit.

Na enig rekenwerk vinden we

$$(5.12) \quad u(R, \varphi) = \frac{P}{2\pi\mu} (1-\nu) \cos \varphi \ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \frac{(1-2\nu)P}{4\mu} |\sin \varphi| + \frac{(1-\nu)P}{\pi\mu}$$

### 5.4. Integraal vergelijking

Met behulp van bovenstaande invloedsfunctie kunnen we op eenvoudige wijze een integraal vergelijking opstellen voor het oorspronkelijke

probleem geformuleerd in paragraaf 1. De veronderstelling dat  $\varphi \neq 0, \pi$  blijkt niet essentieel te zijn omdat dit slechts een nulpuntsverzameling is voor de integratie.

We vinden het volgende verband tussen de belasting en de verplaatsing:

$$(5.13) \quad \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} [2(1-\nu) \cos(\psi - \theta) \ln \frac{1 - \cos(\psi - \theta)}{1 + \cos(\psi - \theta)} - \pi(1-2\nu) |\sin(\psi - \theta)| + 4(1-\nu)] \frac{p(\theta)}{4\pi\mu} d\theta = e \quad -\alpha < \psi < \alpha.$$

Herschreven luidt deze:

$$(5.14) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} [\cos(\psi - \theta) \ln \tan^2 \frac{\psi - \theta}{2} - \pi\gamma |\sin(\psi - \theta)| + 2] p(\theta) d\theta = 8\pi\mu e_1, \quad -\alpha < \psi < \alpha$$

Deze uitdrukking is gelijk aan (4.8).

## 6. Tweede alternatieve aanpak

Deze methode berust op die van de complexe functietheorie.

Beschouwen we in [4] pag. 100, dan is in ons geval

$$(6.1) \quad \Omega(z) = -\frac{P}{2\pi} \log \frac{z+R}{z-R} + \frac{zP}{2\pi R}$$

en

$$(6.2) \quad \omega(z) = \frac{P}{2\pi} \log \frac{z+R}{z-R} - \frac{PR}{\pi} \frac{z}{z^2 - R^2}$$

zodat

$$(6.3) \quad \Omega'(z) = \frac{PR}{\pi} \frac{1}{z^2 - R^2} + \frac{P}{2\pi R}$$

Volgens pagina 87 is

$$(6.4) \quad 2\mu u = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi} \{ (3-4\nu)\Omega(z) - \overline{z\Omega'(z)} - \overline{\omega(z)} \}]$$

We substitueren (6.1)-(6.3) in (6.4) en stellen  $z = Re^{i\varphi}$

Dit levert

$$(6.5) \quad u = (1-\nu) \frac{P}{2\pi\mu} \cos \varphi \ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - (1-2\nu) \frac{P}{4\mu} |\sin \varphi| + (1-\nu) \frac{P}{\pi\mu}$$

en dit is weer juist (5.12).

## 7. Integraalvergelijking

Beschouw integraalvergelijking (4.8)

$$(7.1) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} [\cos(\psi - \theta) \ln \tan^2 \frac{\psi - \theta}{2} - \pi\gamma |\sin(\psi - \theta)| + 2] p(\theta) d\theta = 8\pi\mu e_1, \quad -\alpha < \psi < \alpha$$

We herschrijven deze tot:

$$(7.2) \quad \int_{t=-1}^1 \{ \ln|s-t| + k(s,t) \} h(t) dt = 1, \quad -1 < s < 1$$

met

$$(7.3) \quad k(s,t) = \frac{1}{2} \cos [\alpha(s-t)] \ln \tan^2 \frac{\alpha(s-t)}{2} - \ln|s-t| - \frac{\pi}{2} \gamma |\sin [\alpha(s-t)]| + 1$$

$$(7.4) \quad h(t) = \frac{\alpha p(\alpha t)}{4\pi\mu e_1}$$

Voor het gedrag van  $k(s,t)$  zie Appendix 1

We stellen

$$(7.5) \quad h(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

waarmee (7.2) overgaat in

$$(7.6) \quad \int_{t=-1}^1 \{ \ln|s-t| + k(s,t) \} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1, \quad -1 < s < 1$$

Vervolgens stellen we

$$(7.7) \quad g(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} T_{2k}(t)$$

met  $T_{\ell}(t)$  het Chebyshev polynoom van de eerste soort van graad  $\ell$ . Dit substitueren we in (7.6)

$$\frac{1}{2} a_0 \int_{t=-1}^1 \frac{\ln|s-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \int_{-1}^1 \ln|s-t| \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt +$$

$$(7.8) \quad \frac{1}{2} a_0 \int_{-1}^1 \frac{k(s,t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \int_{-1}^1 k(s,t) \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1, \quad -1 < s < 1$$

Apendices 2 en 3 leveren hierin gesubstitueerd

$$(7.9) \quad -\frac{\pi}{2} a_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left[ \pi d_{2k} - \pi \frac{T_{2k}(s)}{2k} \right] + \frac{1}{2} a_0 \int_{-1}^1 \frac{k(s,t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \int_{-1}^1 k(s,t) \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1, \quad -1 < s < 1$$

We herschrijven de integralen met A 1.4, vermenigvuldigen linker- en rechterlid met  $\frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}}$  ( $m \geq 0$ ) en integreren over  $s$ :

$$(7.10) \quad -\frac{\pi}{2} a_0 \ln 2 \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} d_{2k} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds - \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k} \int_{-1}^1 \frac{T_{2k}(s) T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds + \frac{1}{2} a_0 \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 \frac{k(s,t) + k(-s,t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 [k(s,t) + k(-s,t)] \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds, \quad m \geq 0$$

Dit is

$$(7.11) \quad -\frac{\pi}{2} a_0 \ln 2 \delta_{m0} + \pi \delta_{m0} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} d_{2k} - \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k} \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \frac{\pi}{2} & k = m \end{cases} + a_0 \int_0^1 \int_0^1 \frac{k(s,t) + k(-s,t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} dt ds + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \int_0^1 \int_0^1 [k(s,t) + k(-s,t)] \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_{2m}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \pi \delta_{m0}, \quad m \geq 0$$

We stellen

$$s = \cos \frac{\pi}{2} \varphi$$

$$t = \cos \frac{\pi}{2} \theta$$

zodat

$$(7.12) \quad -\frac{\pi^2}{2} a_0 \ln 2 \delta_{m0} + \pi^2 \delta_{m0} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} d_{2k} - \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k} * \begin{cases} 0 & k \neq m. \\ \frac{\pi}{2} & k = m \end{cases} +$$

$$+ a_0 \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \int_0^1 [k(\cos \frac{\pi}{2} \varphi, \cos \frac{\pi}{2} \theta) + k(-\cos \frac{\pi}{2} \varphi, \cos \frac{\pi}{2} \theta)] \cos m \pi \varphi d\varphi d\theta +$$

$$+ \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \int_0^1 \int_0^1 [k(\cos \frac{\pi}{2} \varphi, \cos \frac{\pi}{2} \theta) +$$

$$+ k(-\cos \frac{\pi}{2} \varphi, \cos \frac{\pi}{2} \theta)] \cos m \pi \varphi \cos k \pi \theta d\varphi d\theta = \pi \delta_{m0}, \quad m \geq 0.$$

Definieer de Fouriercoëfficiënten

$$(7.13) \quad F[m,n] := \int_0^1 \int_0^1 [k(\cos \frac{\pi}{2} \varphi, \cos \frac{\pi}{2} \theta) + k(-\cos \frac{\pi}{2} \varphi, \cos \frac{\pi}{2} \theta)] \cos n \pi \theta \cos m \pi \varphi d\theta d\varphi$$

dan is de definitieve schrijfwijze:

$$(7.14) \quad a_0 \left\{ \frac{F[m,0]}{4} - \frac{\ln 2}{2} \delta_{m0} \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left\{ \delta_{m0} d_{2n} - \frac{1}{2n} \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{2} & n = m \end{cases} + \frac{F[m,n]}{2} \right\} = \frac{\delta_{m0}}{\pi}, \quad m \geq 0.$$

Dit zijn oneindig veel vergelijkingen ( $m \geq 0$ ) voor oneindig veel onbekenden  $a_{2n}$  ( $n \geq 0$ ). We maken hier een eindig stelsel van met eindig veel onbekenden door  $m$  en  $n$  te begrenzen door  $G$ :

$$(7.15) \quad 0 \leq m, n \leq G$$



## 8. Numerieke resultaten

Bij onderzoek van de coëfficiënten  $d_{2k}$  volgens A 3.7 bleken deze numeriek gelijk aan nul te zijn. Analytisch hebben we dit nog niet aangetoond.

Verder onderzochten we numeriek de functie  $k(s,t)$  volgens (7.3) en Appendix 1 en de Fouriercoëfficiënten (7.13). Deze laatste berekenden we volgens de methode van Goertzel voor een verschillend aantal ( $N$ ) deelintervallen van het interval  $[0,1]$ .

De coëfficiënten  $a_{2k}$  gegeven door (7.14) werden bepaald voor diverse bovengrenzen  $G$  (7.15)

Uit (7.4), (7.5) en (3.11)<sup>4</sup> volgt

$$(8.1) \quad \frac{p(\alpha t)}{\mu \frac{e}{R}} = \frac{\pi}{1-\nu} \frac{1}{\alpha} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

zodat, met de definitie,

$$(8.2) \quad c(\alpha) = \frac{\pi g(1)}{\alpha(1-\nu)}$$

waarin volgens (7.7)

$$(8.3) \quad g(1) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

volgt

$$(8.4) \quad \frac{p(\alpha t)}{\mu \frac{e}{R}} \rightarrow \frac{c(\alpha)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \rightarrow 1)$$

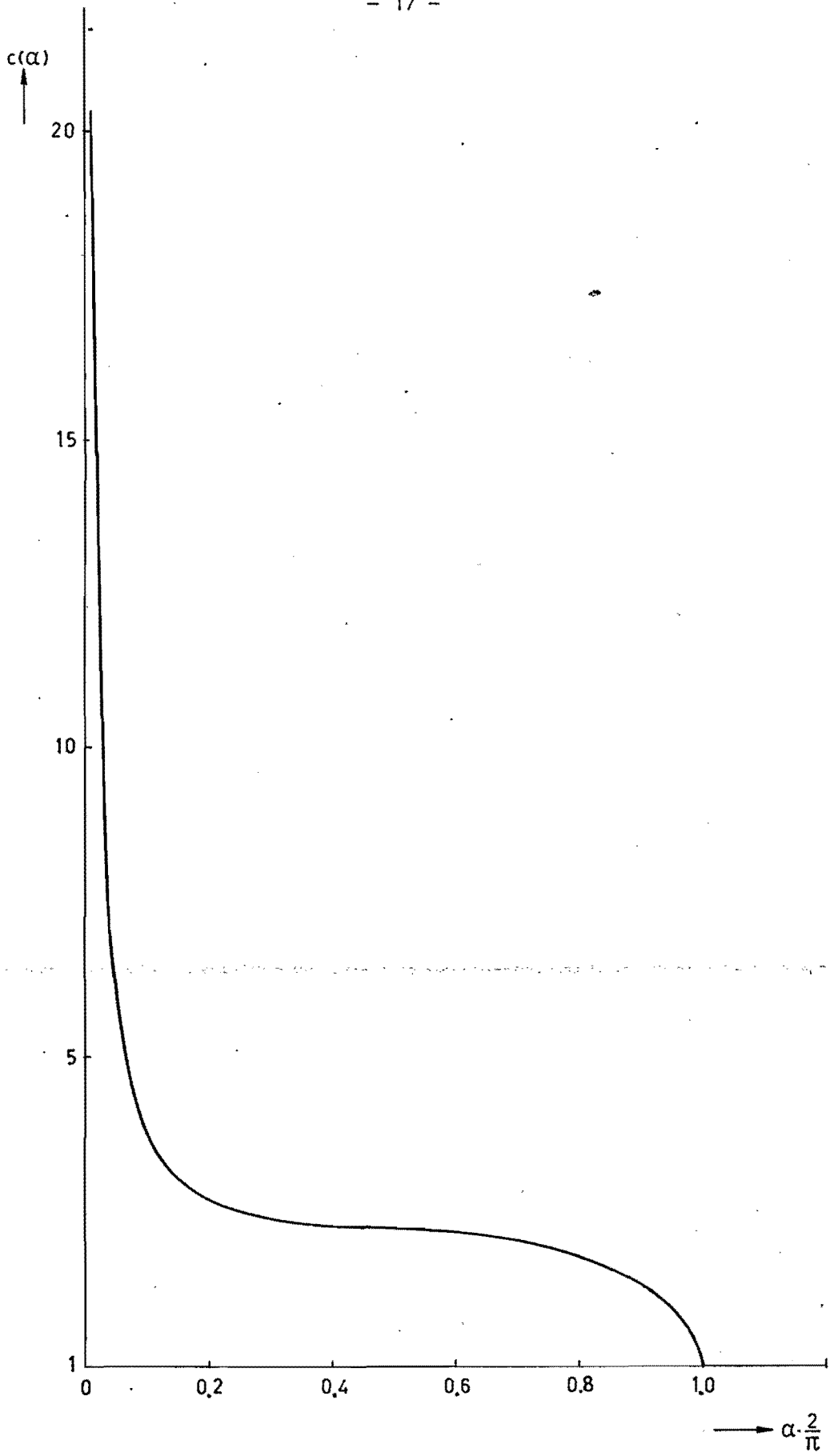
Met de coëfficiënten  $a_{2k}$  werd tenslotte  $g(1)$  volgens (8.3) bepaald voor een aantal waarden van de contacthoek  $\alpha$  en met behulp daarvan de gezochte functie  $c(\alpha)$ .

Tenslotte zij opgemerkt dat met de bepaling van de coëfficiënten  $a_{2k}$  alle grootheden vastliggen.

We hebben een aantal waarden van  $a_{2k}$  in de volgende tabel weergegeven en de functie  $c(\alpha)$  grafisch uitgezet

Tabel. De coëfficiënten  $a_{2k}$  voor  $N = 16$ ,  $\nu = .25$ ,  $G = 8$  bij enkele waarden van  $\alpha$ .

$\alpha \cdot \frac{2}{\pi} =$	.2	.4	.6	.8
$a_0$	-.400089	-.700300	-1.145844	-1.661225
$a_2$	-.000529	.003267	.064148	.265274
$a_4$	.000981	.003582	.008847	.022953
$a_6$	.000263	.000898	.001940	.003881
$a_8$	.000110	.000374	.000799	.001237
$a_{10}$	.000056	.000193	.000414	.000590
$a_{12}$	.000033	.000114	.000245	.000344
$a_{14}$	.000021	.000073	.000159	.000224
$a_{16}$	.000015	.000051	.000111	.000157



Appendix 1

Stellen we  $s - t = u$ , zodat  $t = s - u$ ,

dan is

$$A 1.1 \quad k(s, s-u) = \frac{1}{2} \cos \alpha u \ln \tan^2 \frac{\alpha u}{2} - \ln|u| - \frac{\pi}{2} \gamma |\sin \alpha u| + 1$$

zodat

$$A 1.2 \quad \lim_{u \rightarrow 0} k(s, s-u) = 1 + \ln \frac{\alpha}{2}$$

We zien dat  $k(s, t)$  een continue functie is.

De partiële afgeleide naar  $t$  van  $k(s, t)$  gedraagt zich in de buurt van  $t = s$  als

$$A 1.3 \quad -\frac{\pi}{2} \gamma \alpha \operatorname{sign}(s-t)$$

Dus  $k(s, t)$  heeft een sprong in de afgeleide. Verder geldt

$$A 1.4 \quad k(s, -t) = k(-s, t)$$

Appendix 2

Volgens [5] pag. 184 3.616 (4) geldt

$$A\ 2.1 \quad \int_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x)^2 dx = -2\pi \ln 2, \quad p^2 \leq 1$$

zodat met

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln[(p - \sin x)^2 (p + \sin x)^2] dx &= \int_0^{\pi/2} \ln(p - \sin x)^2 dx + \int_0^{\pi/2} \ln(p + \sin x)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(p - \sin x)^2 dx + \int_{-\pi/2}^0 \ln(p - \sin x)^2 dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|p - \sin x| dx \end{aligned}$$

volgt, na substitutie van

$$\sin x = t, \quad p = s,$$

dat

$$A\ 2.2 \quad \int_{-1}^1 \ln|s - t| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\pi \ln 2, \quad s^2 \leq 1$$

Appendix 3

Volgens [6], pag 180, 4.3 (22) geldt:

$$A\ 3.1 \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{y-x} \frac{T_{2k}(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = U_{2k-1}(x) \quad (k \geq 1)$$

Dit interpreteren we formeel naar x:

$$A\ 3.2 \quad \int_{x=0}^s \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{y-x} \frac{T_{2k}(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \right) dx = \int_{x=0}^s U_{2k-1}(x) dx \quad (k \geq 1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2k}(y)}{\sqrt{1-y^2}} \left( \int_{x=0}^s \frac{dx}{y-x} \right) dy = \int_{x=0}^s U_{2k-1}(x) dx \quad (k \geq 1)$$

of

$$A\ 3.3 \quad \int_{-1}^1 \ln|s-t| \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \ln|t| \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \pi \int_{x=0}^s U_{2k-1}(x) dx \quad (k \geq 1)$$

De ontwikkeling van  $T_{2k}(t)$  luidt:

$$A\ 3.4 \quad T_{2k}(t) = \sum_{\ell=0}^k c_{2\ell, 2k} t^{2\ell}$$

zodat

$$\int_{-1}^1 \ln|t| \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \sum_{\ell=0}^k c_{2\ell, 2k} \int_0^1 \ln|t| \frac{t^{2\ell}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Volgens [5], pag 187, 3.627 (4) en pag 186, 3.624 (4) is

$$\int_0^1 \ln|t| \frac{t^{2\ell}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \ln 2 & , \ell = 0 \\ -\frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} \frac{\pi}{2} \left\{ \ln 2 + \sum_{j=1}^{2\ell} \frac{(-1)^j}{j} \right\} & , \ell \neq 0 \end{cases}$$

Volgens [7], pag IX geldt

$$A 3.6 \quad \int_{x=0}^s U_{2k-1}(x) dx = \frac{T_{2k}(s)}{2k} - \frac{(-1)^k}{2k} \quad (k \geq 1)$$

Definiieren we

$$A 3.7 \quad d_{2k} = - \sum_{\ell=0}^k c_{2\ell, 2k} \begin{cases} \ln 2 & \ell=0 \\ \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell-1} \ell! (\ell-1)!} \left\{ \ln 2 + \sum_{j=1}^{2\ell} \frac{(-1)^j}{j} \right\} & \ell \geq 1 \end{cases} + \frac{(-1)^k}{2k}$$

(k ≥ 1, 0! := 1)

dan is

$$A 3.8 \quad \int_{-1}^1 \ln|s-t| \frac{T_{2k}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi d_{2k} - \pi \frac{T_{2k}(s)}{2k} \quad (k \geq 1)$$

Literatuur

- [1] Abblas, prof. dr. J.B. Lineaire Elasticiteitstheorie 1 college-  
dictaat, Technische Hogeschool Eindhoven nr. 2.224
- [2] Timoshenko, S. and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, Mc. Graw-Hill  
Book Company, Inc., New York, 1951.
- [3] Muskhelishvili, N.I., Some basic problems of the mathematical theory  
of elasticity, P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1953.
- [4] England, A.H., Complex Variable Methods in Elasticity, Wiley-Interscience,  
London, 1971.
- [5] Ryshik-Gradstein, Tafeln, Tables Veb. Deutscher Verlag der Wissen-  
schaften, Berlin, 1957.
- [6] Tricomi, Integral Equations, Interscience Publishers, Inc. New York,  
1957.
- [7] Tables of Chebyshev Polynomials  $S_n(x)$  and  $C_n(x)$ , National Bureau of  
Standards Applied Math. Series 9, Washington, 1952.