

Lopendegolfbuizen van het type O

Citation for published version (APA):

Scharten, T. (1963). *Lopendegolfbuizen van het type O: de vereenvoudigde theorie*. Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Published: 01/01/1963

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of Record (includes final page, issue and volume numbers)

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK

Lopendegolfbuizen
van het type O
De vereenvoudigde theorie

door

ir. Th. Scharten

december 1963

INHOUD

	pag.
1 Inleiding	2
2 Probleemstelling	3
3 De elektronenbundel	4
3.1 Beperkende veronderstellingen	4
3.2 Modulatie	6
3.3 De elektronvergelijking	9
4 De vertragingstructuur	10
4.1 Excitatie	10
4.2 De circuitvergelijking	13
5 Oplossingen uit de vereenvoudigde theorie . .	14
5.1 De voortplantingsexponent van golven in de warme buis	14
5.2 Geldigheid der oplossingen	17
6 De versterkingsfaktor	18
7 Koppeling vereenvoudigde theorie met veldentheorie	22
7.1 Bepaling van de versterkingsparameter . .	22
7.2 Langzame golven	23
8 Verfijningen van de vereenvoudigde theorie . .	24
8.1 Ruimteladingseffekten	24
8.2 Ruimteladingsparameter Q	25
Litteratuur	27

1. INLEIDING

Uit de gedachte energieconversie van bewegende elektronen naar een lopende elektromagnetische golf te doen plaatsvinden is de lopendegolfbuis als mikrogolvenversterker voortgekomen. Deze energie-overdracht is optimaal, indien de fasesnelheid der golf (ongeveer) gelijk is aan de snelheid, waarmede de elektronen -verenigd tot een bundel- zich in de richting van de golfpropagatie voortplanten. Blijkbaar moet de fasesnelheid kleiner zijn dan de voortplantingssnelheid van vlakke elektromagnetische golven in de vrije ruimte.

Dat de energie-overdracht op deze wijze optimaal zal zijn volgt uit het feit, dat de elektronen nu gedurende de gehele tijd van interactie de invloed van een vrijwel konstante elektrische veldsterkte van de golf ondervinden.

Voor het genereren en het zich doen voortplanten van "langzame" golven zijn verschillende golfgeleiderstructuren bekend, litt.3 en 4. Zij zijn veelal van ingewikkelde gedaante, tengevolge waarvan de eigenwaardenproblemen -bij afwezigheid van een elektronenbundel- van evenzeer gekompliceerde aard zijn. Zodra tevens de aanwezigheid van een elektronenbundel in rekening moet worden gebracht, is het probleem menselijkerwijze onoplosbaar geworden: de eigenwaardenvergelijkingen bezitten complexe oplossingen; immers de vereiste versterking van de elektromagnetische golf komt in het reële deel van de voortplantingsexponent tot uitdrukking.

Dientengevolge is de zogeheten vereenvoudigde theorie voor de lopendegolfbuizen ontwikkeld, die in deze aantekeningen uiteengezet zal worden.

Hierbij beperken wij ons tot de buizen van het type O (letter), waarin de elektronenbeweging tot axiale richting beperkt is door de invloed van een axiaal gericht magnetisch veld.

Dit in tegenstelling tot de buizen van het type M, waarin

het magnetisch veld loodrecht op de elektronvoortplantingsrichting staat.

De hierna volgende paragrafen zijn opgesteld aan de hand van informatie uit de boeken van Pierce (litt.1) en Hutter (litt.2), benevens van die uit het College "Lopendegolfbuizen" van prof.dr.ir. J.P. Schouten (TH Delft, 1961-1962).

2. PROBLEEMSTELLING

Wij beschouwen de wisselwerking tussen elektronen en elektromagnetische golven in een model, dat door de volgende veronderstellingen geïdealiseerd is:

- de invloed van de elektronenbundel op de velden, zoals die in de verdragingsstructuur zonder bundel kunnen optreden is verwaarloosbaar klein; de bundel is zeer dun;
- het signaalniveau is dusdanig laag, dat ruimteladings-effecten in eerste instantie verwaarloosd kunnen worden, mede in verband met de eerste veronderstelling;
- de eigen demping van de verdragingsstructuur voor de mogelijke vrije modi is verwaarloosbaar klein.

De wisselwerking is nu tweeledig. Eensdeels heeft een opgedrukt elektromagnetisch wisselveld zijn invloed op de elektronen, andersdeels exciteert de aldus gemoduleerde elektronenbundel elektromagnetische golven, die zich in de structuur kunnen voortplanten.

Dit is de basis van de vereenvoudigde theorie.

3. DE ELEKTRONENBUNDEL

3.1 Beperkende veronderstellingen

Teneinde te komen tot mathematisch handelbare theorieën, die de realiteit benaderen is het noodzakelijk enige vereenvoudigingen en veronderstellingen met betrekking tot de elektronenbundel te maken. Deze zijn :

- a) de elektronen bewegen onder invloed van een oneindig sterk gedacht axiaal magnetisch veld slechts in axiale richting (z);
- b) de elektronen snelheid (v_e) en de lijnladingsdichtheid (ρ) zijn konstant over de transversale doorsnede van de bundel;
- c) de bundelbeschrijvende grootheden, elektronen snelheid (v_e), ladingsdichtheid (ρ) en stroomdichtheid (J) zijn slechts functies van de longitudinale coördinaat z en de tijd t ;
- d) de transversale bundelomtrek is zo klein, dat de elektromagnetische golven in de buis ten aanzien van hun voortplantingsexponent ($j\beta$) slechts weinig veranderen door de aanwezigheid van de bundel; (populair: de warme buis kan als verstoring van de koude buis worden opgevat);
- e) de elektronen snelheid (v_e) is klein ten opzichte van de voortplantingsnelheid van vlakke elektromagnetische golven in de vrije ruimte (c);
- f) de magnetische kracht (F_h), werkend op een elektron is verwaarloosbaar klein ten opzichte van de elektrische (F_e).

De veronderstelling f) is een direkt gevolg van de veronderstellingen d) en e) en als volgt te bewijzen:

De elektronbeweging wordt geregeerd door de wet van Lorentz

$$(3.1) \quad \underline{F}_e + \underline{F}_h = -q_e \left[\underline{E} + (\underline{v}_e \times \underline{B}) \right] = m_e \frac{d\underline{v}_e}{dt} ,$$

waarin q_e en m_e de grootte van lading en massa van het elektron aangeven, terwijl \underline{E} de elektrische veldsterkte en \underline{B} de magnetische inductie is.

De magnetische inductie ontstaat als gevolg van de verplaatsingsstroom en de konvektiestroom, welke laatste ten hoogste gelijk is aan de eerste.

Laat nu de cirkel C met straal r_e de richtkromme van de elektronenbundel zijn, en S_c het door C begrensde oppervlak; wegens veronderstelling d) is $r_e \ll \lambda$ en mogen B langs C en E over S_c konstant genomen worden.

Bij beschouwing van de verplaatsingsstroom is -wegens de eerste wet van Maxwell bij harmonisch met de tijd veranderende velden- in een stelsel cylinderkoördinaten (r, ϕ, z) :

$$(3.2) \quad \iint_{S_c} (\text{rot } \underline{B}) \cdot \underline{i}_z \, dS = j\omega \epsilon_0 \mu_0 E \cdot \pi r_e^2 .$$

Anderszijds geldt wegens de integraalwet van Stokes

$$(3.3) \quad \iint_{S_c} (\text{rot } \underline{B}) \cdot \underline{i}_z \, dS = B \cdot 2\pi r_e .$$

Aldus volgt, daar $\omega \epsilon_0 \mu_0 = 2\pi(\lambda c)^{-1}$:

$$(3.4) \quad \left| \underline{v}_e \times \underline{B} \right| = \pi \frac{F}{\lambda} \frac{v}{c} \left| \underline{E} \right| ,$$

zodat

$$(3.5) \quad \left| \frac{F_e}{F_h} \right| = \pi \frac{F}{\lambda} \frac{v}{c} ,$$

waarmede, blijkens veronderstelling d) en e) aangetoond is dat de magnetische kracht te verwaarlozen is ten opzichte van de elektrische.

3.2 Modulatie

In deze paragraaf zullen wij het effect van een opgedrukt elektromagnetisch wisselveld op de elektronenbundel bestuderen. In afwezigheid van het wisselveld worden de elektronen ondersteld te bewegen met een snelheid v_0 ten gevolge van een axiaal elektrisch veld E_0 . In deze situatie geven zij aanleiding tot een ladingsdichtheid ρ_0 , terwijl de stroomdichtheid J_0 gelijk is aan het produkt $\rho_0 v_0$.

De "modulatie van de elektronenbundel" houdt nu in de verandering van ρ_0 en v_0 door de invloed van een elektromagnetisch wisselveld, dat een elektrische komponent in axiale richting, E_w , bezit.

Aldus is het totale axiale elektrische veld

$$(3.6) \quad E = E_0 + E_w .$$

Als de tijdsafhankelijkheid van E_w enkelvoudig harmonisch volgens $\exp(j\omega t)$ is. Dan is

$$(3.7) \quad E = E_0 + E_1 e^{j\omega t} ,$$

waarbij wij aannemen dat

$$(3.8) \quad \left| \frac{E_w}{E_0} \right| = \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \ll 1 .$$

Nu zijn ook de andere genoemde grootheden opgebouwd volgens (3.6; 3.7) :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 e^{j\omega t} , \\ v &= v_0 + v_1 e^{j\omega t} , \\ J &= J_0 + J_1 e^{j\omega t} . \end{aligned}$$

Wegens de in par. 3.1 gemaakte veronderstellingen zijn E_1 , ρ_1 , v_1 en J_1 slechts funkties van de longitudinale coördinaat z .

Voor de elektronen en de elektronenbundel gelden in het beschouwde systeem thans de wet van behoud van lading

$$(3.10) \quad \frac{\partial J}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} ,$$

met

$$(3.11) \quad J = \rho v ,$$

en de wet van Lorentz

$$(3.12) \quad m_e \frac{dv}{dt} \approx - q_e E .$$

Door substitutie van (3.7 ; 3.9) geven (3.10 ; 3.11 ; 3.12) aanleiding tot de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & J_0 = \rho_0 v_0 , \\ \text{B)} \quad & J_1 \approx \rho_0 v_1 + \rho_1 v_0 , \\ (3.13) \text{ C)} \quad & \frac{dJ_1}{dz} = - j\omega \rho_1 , \\ \text{D)} \quad & \frac{dv_0}{dt} = - \frac{q_e}{m_e} E_0 , \\ \text{E)} \quad & (j\omega + \frac{dv_0}{dz}) v_1 + v_0 \frac{dv_1}{dz} = - \frac{q_e}{m_e} E_1 , \end{aligned}$$

waarbij in (3.13)^B de term $\rho_1 v_1$ als tweede-orde effect ten opzichte van de termen $\rho_0 v_1$ en $\rho_1 v_0$ verwaarloosd is.

Wij zoeken nu naar de differentiaalvergelijking in J_1 , en gaan hierbij uit van (3.13) met de extra en vereenvoudigende veronderstelling dat v_0 konstant is. (Met hetzelfde recht zijn de differentiaalvergelijkingen in ρ_1 of v_1 afleidbaar; van praktisch belang is echter de stroom $I_1 = J_1 \cdot \pi r_e^2$).

Uit (3.13)^{B,C} volgt

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \left(\frac{dJ_1}{dz} + \frac{v_0}{j\omega} \frac{d^2J_1}{dz^2} \right) .$$

Dit gesubstitueerd in (3.13)^E levert -met $\frac{dv_0}{dz} = 0$ en $\rho_0^{-1} = v_0 J_0^{-1}$ -

$$\frac{v_0^3}{j\omega J_0} \frac{d^2J_1}{dz^2} + 2 \frac{v_0^2}{J_0} \frac{dJ_1}{dz} + \frac{j\omega v_0}{J_0} J_1 = - \frac{q_e}{m_e} E_1$$

of wel

$$(3.14) \quad \frac{d^2J_1}{dz^2} + 2j\beta_e \frac{dJ_1}{dz} - \beta_e^2 J_1 = - j\omega \epsilon_0 \beta_e^2 E_1 ,$$

waarin gesteld is de elektron-voortplantingsexponent β_e ,

$$(3.15) \quad \beta_e = \frac{\omega}{v_0} ,$$

en de plasmafrequentie ω_p als

$$(3.16) \quad \omega_p = v_0 \cdot \beta_p ,$$

$$\omega_p^2 = \frac{q_e}{m_e} \frac{J_0}{\epsilon_0 v_0} = \frac{q_e \rho_0}{m_e \epsilon_0} .$$

Vergelijking (3.14) geeft als oplossing de modulatie der stroomdichtheid in axiale richting, resulterend uit de opgedrukte elektrische veldsterkte.

3.3 De elektronvergelijking

Voor een gegeven wisselveld E_1 is uit (3.14) de stroomdichtheidsmodulatie te bepalen.

Zij

$$(3.17) \quad E_1 = \hat{E} e^{-\gamma z},$$

waarin \hat{E} konstant is.

Er zijn oplossingen van (3.14) te verwachten van de vorm

$$(3.18) \quad J_1 = \hat{J} e^{-\gamma z}, \quad \hat{J} \text{ konstant.}$$

Met behulp van (3.17 ; 3.18) gaat (3.14) over in

$$(\gamma - j\beta_e)^2 \hat{J} = -j\beta_e \frac{q_e}{mv_0^2} J_0 \hat{E}.$$

De energievergelijking voor de elektronen, die in een elektrisch veld met potentiaalval V_0 met snelheid v_0 bewegen luidt

$$(3.19) \quad -q_e V_0 = \frac{1}{2} m_e v_0^2,$$

waarmede

$$\hat{J} = \frac{j\beta_e J_0}{2V_0 (\gamma - j\beta_e)^2} \hat{E}.$$

Door integratie van de laatste uitdrukking over de dwarsoppervlakte van de bundel ontstaat

$$(3.20) \quad \hat{I} = \frac{j\beta_e I_0}{2V_0 (\gamma - j\beta_e)^2} \hat{E}.$$

De grootte I_0 is de gelijkstroom.

Vergelijking (3.20) is de elektronvergelijking voor de voortplantingsexponent van elektromagnetische golven in de warme buis.

4. DE VERTRAGINGSSTRUKTUUR

4.1 Excitatie

Naast het effect van een (langzame) elektromagnetische golf op de elektronenbundel is de excitatie van elektromagnetische golven door de gemoduleerde bundel van belang. In het eerste geval onderstelden wij in feite een oneindig sterk veld E_1 , in de nu te behandelen situatie een oneindig sterke stroomverdeling J_1 .

Het probleem is dus een verband te vinden tussen E_1 en J_1 , maar van de golfstructuur uit gerekend.

Bij de oplossing zouden wij gebruik kunnen maken van een "analoog" transmissielijnmodel, dat door de aanwezigheid van de elektronenbundel aktief is. De moeilijkheid is echter een model te kiezen, dat een vertragingstructuur van willekeurige gedaante weergeeft; het laatste is van belang met het oog op een zo algemeen mogelijke toepasbaarheid van de te ontwikkelen theorie.

De moeilijkheid is te omzeilen (en zoals zal blijken: te verplaatsen) door het accent te leggen op de zich in de structuur voortplantende golf, waarvan de fasesnelheid ongeveer gelijk is aan de elektronsnelheid.

Voor deze golf geven wij een als het ware primitieve symbolisering als geschetst in figuur 1. De "cellen" ($L_0; C_0$) zijn via de verplaatsingsstroom

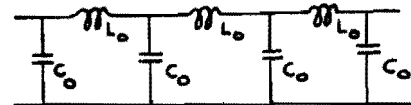


fig.1

aan de elektronenbundel gekoppeld. De fase van de aangelegde spanning en het complex stromen verandert bij doorgang door het laddercircuit, waarbij wij ons moeten voorstellen dat de elektrische veldsterkte gerepresenteerd is door de capaciteit en de magnetische door de zelfinductie.

De lengte van een "cel" zij Δz ; de zelfinductie L_0 en de capaciteit C_0 zijn gegeven door

$$(4.1) \quad \begin{aligned} L_0 &= L \cdot \Delta z, \\ C_0 &= C \cdot \Delta z, \end{aligned}$$

waarin L en C de zelfinductie en capaciteit per lengte-eenheid betekenen.

Beschouwen wij twee cellen tussen de knooppunten $(n-1)$, (n) en $(n+1)$, figuur 2, met ladingen, spanningen en stromen als aangegeven.

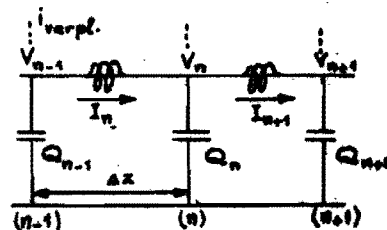


fig. 2

De totale lading op een capaciteit onder knooppunt (n) , Q_n , is

$$(4.2) \quad Q_n = q_n + \rho_n \Delta z,$$

waarin q_n bepaald is door

$$(4.3) \quad I_n - I_{n+1} = \frac{dq_n}{dt},$$

en ρ_n de elektrondichtheid per lengte-eenheid in de buurt van knooppunt (n) is.

Eveneens geldt voor de totale lading

$$(4.4) \quad Q_n = C_0 V_n.$$

terwijl het spanningsverschil over de zelfinductie gegeven is door

$$(4.5) \quad V_{n-1} - V_n = L_o \frac{\partial I_n}{\partial t} .$$

Uit (4.3 ; 4.5) volgt

$$(4.6) \quad \frac{1}{L_o} [V_{n-1} - V_n - (V_n - V_{n+1})] = \frac{\partial^2 q_n}{\partial t^2} .$$

De lading q_n kan uit (4.6) geëlimineerd worden met behulp van de uit (4.2 ; 4.4) volgende relatie

$$q_n = C_o V_n - \rho_n \Delta z ,$$

hetgeen -met (4.1)- aanleiding geeft tot

$$(4.7) \quad \frac{1}{L \cdot \Delta z} \{ (V_{n+1} - V_n) - (V_n - V_{n-1}) \} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C V_n - \rho_n) \Delta z$$

Teneinde tot een continuüm te geraken beschouwen wij (4.7) in limiet voor $z \rightarrow 0$: de tweede gedeelde differentie van V_n gaat dan over in het tweede orde differentiaalquotient van V_n naar z . Hiermede geldt in ieder punt z :

$$(4.8) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - L \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} .$$

Voor harmonische tijdsafhankelijkheid wordt (4.8), met gebruikmaking van (3.13)^C gereduceerd tot

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} + \omega^2 LC v_1 = j\omega L \frac{dJ_1}{dz} ,$$

waarin V_1 en J_1 evenals in par.3 duiden op de z -afhankelijke wisselgrootheden.

Daar in het continuüm steeds geldt

$$(4.9) \quad E_1 = - \frac{dV_1}{dz}$$

wordt tenslotte gevonden

$$(4.10) \quad \frac{d^2 E_1}{dz^2} - ZY E_1 = - Z \frac{d^2 J_1}{dz^2},$$

waarin

$$Z = j\omega L,$$

$$Y = j\omega C.$$

Vergelijking (4.10) geeft als oplossing de axiale komponent van de elektrische veldsterkte, resulterend uit de opgedrukte elektronenstroombichtheid.

4.2 De circuitvergelijking

Voor een gegeven wisselkomponent van de stroomdichtheid (J_1) is uit (4.10) de axiale elektrische komponent der geëxciteerde elektromagnetische golf te bepalen.

Zij -analoog aan par. 3.3-

$$(4.11) \quad J_1 = \hat{J} e^{-\gamma z},$$

en laten

$$(4.12) \quad (ZY)^{\frac{1}{2}} = \gamma_0$$

$$\left(\frac{Z}{Y}\right)^{\frac{1}{2}} = K_0$$

de voortplantingsexponent resp. de karakteristieke impedantie van de koude buis zijn (vergelijk (4.10) voor $J_1 = 0$).

Dan zijn oplossingen van (4.10) te verwachten in de vorm van

$$(4.13) \quad E_1 = \hat{E} e^{-\gamma z}.$$

Substitutie van (4.11 ; 4.12 ; 4.13) in (4.10) levert uiteindelijk de circuitvergelijking voor de voortplantings-exponent van golven in de warme buis :

$$(4.14) \quad \hat{E} = - \frac{\gamma_0 K_0 \gamma^2}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \hat{i}.$$

5. OPLOSSINGEN UIT DE VEREENVOUDIGDE THEORIE

5.1 De voortplantingsexponenten van golven in de warme buis (γ)

De processen, resulterend in de elektronvergelijking (3.20) en de circuitvergelijking (4.14) treden gelijktijdig op. Aan beide vergelijkingen moet derhalve simultaan door γ voldaan zijn.

Aldus volgt γ als oplossing van de vierdegraadsbetrekking

$$(5.1) \quad \frac{j \beta_0 \gamma_0 K_0 I_0}{2V_0} \cdot \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 - \gamma_0^2)(\gamma - j\beta_0)^2} = -1.$$

In het algemeen zijn γ_0 en K_0 complex, zodat ook complexe waarden van γ te verwachten zijn. Dit laatste is zeer gewenst; wij eisen immers akkumulatieve golfverschijnselen, waarvoor -bij axiale afhankelijkheid volgens $\exp(-\gamma z)$ - $\text{Re } \gamma$ negatief dient te zijn en in ieder geval niet nul mag worden.

Het blijkt echter mogelijk te zijn de koude buis verregaand te idealiseren door ongedempte golfpropagatie te onderstellen en toch complexe oplossingen voor γ te verkrijgen.

Uit fysische overwegingen kunnen wij voorts stellen, dat een optimaal akkumulerend verschijnsel slechts mogelijk is indien de fasesnelheid van de langzame elektromagnetische golven ($v_f = \omega/\beta$) ongeveer dan wel geheel gelijk is aan de elektronsnelheid ($v_e = \omega/\beta_e$).

Derhalve proberen wij oplossingen te vinden door aan te nemen dat

$$(5.2) \quad \gamma_0 = j\beta_0 = j\beta_e .$$

hetgeen wil zeggen, dat wij de koude buis dusdanig dimensioneren dat de fasesnelheid van de zich erin voortplantende elektromagnetische golf gelijk is aan de elektronsnelheid, zoals die in de warme buis zal kunnen optreden.

Daar wij de warme buis als verstoring van de koude beschouwen is nu

$$(5.3) \quad \gamma = j\beta_e - h$$

waarin h kompleks kan zijn en zo klein is, dat $h \ll \beta_e$.

Met deze gegevens wordt voor (5.1) na substitutie gevonden

$$(5.4) \quad \frac{K_0 I_0 \beta_e^2 (j\beta_e - h)^2}{2V_0 (-2jh\beta_e + h^2)h^2} = 1 .$$

De termen $\beta_e^3 h$ en $\beta_e^2 h^2$ verwaarlozende ten opzichte van β_e^4 en de term h^4 ten opzichte van $2h^3\beta_e$ is in eerste-orde benadering

$$(5.5) \quad h^3 \approx -j\beta_e^3 \frac{K_0 I_0}{4V_0} .$$

Algemeen wordt nu de "versterkingsparameter" C gedefiniëerd :

$$(5.6) \quad C^3 = \frac{K_0 I_0}{4V_0} ,$$

waarmede

$$(5.7) \quad \begin{aligned} h &\approx \beta_e C d, \\ d^3 &= -j. \end{aligned}$$

Er zijn dus drie van de vier mogelijke oplossingen van (5.1) in benaderde uitdrukking gevonden :

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \{-\frac{1}{2}C\sqrt{3} + j(1 + \frac{1}{2}C)\} \beta_e, \\ \gamma_2 &= \{\frac{1}{2}C\sqrt{3} + j(1 + \frac{1}{2}C)\} \beta_e, \\ \gamma_3 &= j(1-C)\beta_e. \end{aligned}$$

De vierde oplossing is verdwenen door de gemaakte verwaarlozingen. Stel -om deze te vinden- en met behoud van (5.2):

$$(5.9) \quad \gamma = (1 + p) \gamma_0 = j(1 + p) \beta_e.$$

Met (5.6) kunnen wij dan voor (5.1) noteren

$$2 C^3 \frac{(1 + p)^2}{(2 + p)^2 p^3} = -1.$$

Het valt op, dat een belangrijke waarde van p in de buurt van (-2) ligt. Stel dus

$$p = -2 + q, \quad q \ll 1,$$

waarmede

$$q(8 - 12q + 6q^2 - q^3) = (1 - 2q + q^2) \cdot 2C^3.$$

In eerste-orde benadering volgt

$$(5.10) \quad q \approx \frac{1}{2} C^3, \quad p \approx -2 + \frac{1}{2} C^3.$$

Het stelsel (5.8) is dus aan te vullen met de oplossing

$$(5.11) \quad \gamma_4 = -j(1 - \frac{1}{2} C^2) \beta_e .$$

Onder de bijzondere, in de aanvang van deze paragraaf gestelde voorwaarde, is dus inderdaad een exponentieel versterkte golf mogelijk : $\exp(-\gamma_1 z)$. Zijn fasesnelheid is lager dan de elektronsnelheid, daar C altijd positief is. De voortplanting van de tweede golf is exponentieel gedempt, terwijl ook zijn fasesnelheid kleiner is dan de elektronsnelheid. Golf no.3 plant zich met fasesnelheid groter dan de elektronsnelheid ongedempt door de buis voort. De vierde golf plant zich -in tegenstelling tot de andere- in de negatieve z-richting voort; indien geen bijzondere voorzorgsmaatregelen genomen worden kan deze golf aanleiding geven tot oscilleren van de buis.

Tenslotte verwachten wij, dat de akkumulerende golf ook in een minder rigoureuze geïdealiseerde buis zal optreden. Om dit te onderzoeken kan (5.1) opgelost worden met behulp van de substitutie

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= j\beta_e + jb + a , \\ \gamma &= j\beta_e - h , \end{aligned}$$

waarin a en b reëel en h kompleks is. Dit vereist een grafische oplossingsmethode.

5.2 Geldigheid der oplossingen

Door de definitie (5.6) is de parameter C ingevoerd, die een maat is voor de versterking en die blijkens (5.6) een grootte van de koude buis is.

In het licht van de verstoringstheorie zal de versterking per golflengte-interactie-afstand gering zijn. Reden waarom

de verwachting is dat C slechts zeer klein zal kunnen zijn voor de gegeven oplossingen.

Dit is onder meer na te gaan door oplossing (5.8) in (5.1) te substitueren om aldus te zien voor welke waarden van C aan de vergelijking wordt voldaan.

Substitutie van

$$Y_n = j\beta_e - \beta_e C d_n$$

in (5.1) leidt -met $d_n^3 = -j$ - tot

$$C d_n \cdot (2C d_n - 3j) = 0 .$$

Daar C reëel is en (voor het belangrijkste geval) d_1 complex moet C in de gevonden oplossing nul zijn.

Dit wil dus zeggen dat de toegepaste benadering slechts voor tot nul naderende waarden van C zin heeft en gerechtvaardigd is.

6. DE VERSTERKINGSFAKTOR

Wij bepalen de versterkingsfaktor (G) van de lopendegolfbuis bij aanwezigheid van de heenlopende golven; (de teruglopende golf wordt geëlimineerd door reflektievrije overgang van vertragingstruktuur naar uitkoppelcircuit dan wel door middel van keerdempingen).

Over een afstand $(z_1 - z_0)$ is de versterkingsfaktor per golf (ranggetal n)

$$(6.1) \quad G_n = 20 \log \frac{E_n(z=z_1)}{E_n(z=z_0)} .$$

Blijkens (6.1) zijn nu de amplitudines der deelgolven ter plaatse $z=z_1$ en $z=z_0$ te bepalen.

Wij leggen de interactielengte ($z_1 - z_0$) vast in termen van de golflengte der aanwezige golven, λ :

$$\begin{aligned} z_1 &= N\lambda, \quad N \text{ positief, geheel;} \\ z_0 &= 0, \end{aligned}$$

en onderstellen de stroommodulatie aan het begin van de interactie-afstand nul:

$$(6.2) \quad \sum_{n=1}^3 \hat{i}_n \Big|_{z=0} = 0.$$

Met (3.20) is dan te schrijven

$$\frac{j\beta_e I_0}{2V_0} \sum_{n=1}^3 \frac{\hat{E}_n}{(\gamma_n - j\beta_e)^2} \Big|_{z=0} = 0.$$

Als gevolg van (5.8) wordt aan de laatste betrekking voldaan door

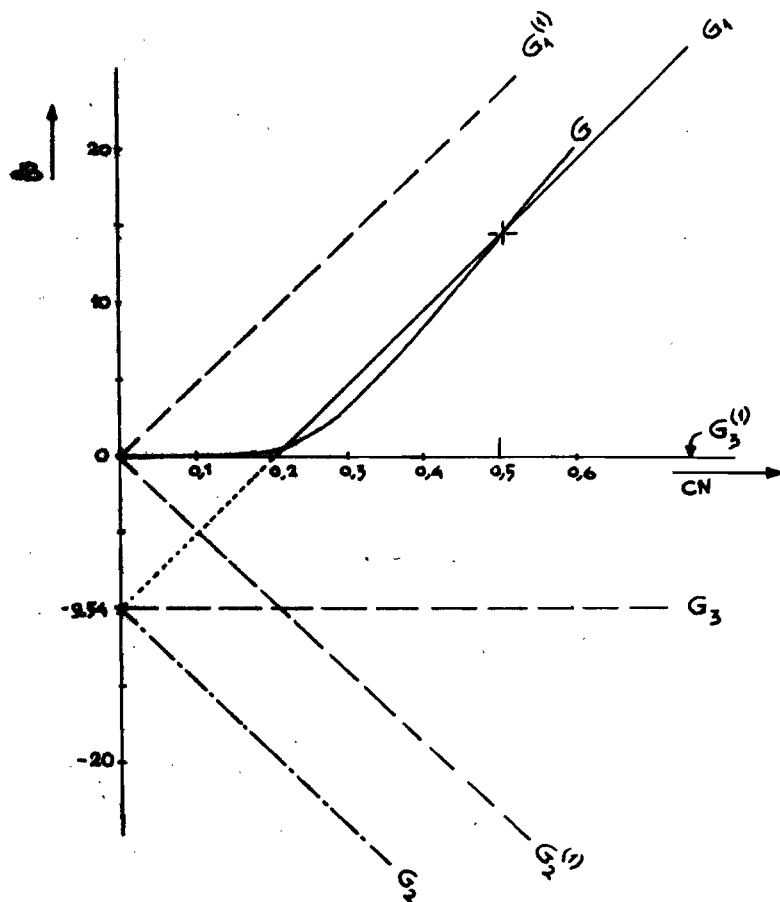
$$(6.3) \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\hat{E}_n}{d_n^2} \Big|_{z=0} = 0.$$

Door substitutie van de gevonden waarden van d_n blijkt (6.3) bevredigd te worden door

$$(6.4) \quad \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E}_3 \quad (z=0).$$

Het ter plaatse $z=0$ aan het systeem toegevoerde signaal \hat{E} wordt dus gelijkelijk over de drie golven verdeeld:

$$(6.5) \quad \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E}_3 = \frac{1}{3} \hat{E} \quad (z=0).$$



figuur 3

Ter plaatse $z=N\lambda$ is het axiale elektrische veld van een golf gegeven door

$$\hat{E}_n \Big|_{z=N} = \frac{1}{3} \hat{E} e^{\beta_e \lambda \cdot CN \cdot \operatorname{Re} h_n},$$

waarmede de versterking per golf over het traject $z=(0;N\lambda)$ gelijk is aan

$$(6.6) \quad G_n^{(1)} = 20^{10} \log e^{2\pi CN \cdot \operatorname{Re} h_n} \text{ dB},$$

immers $\beta_e \lambda = 2\pi \text{ rad.}$

De versterking van de buis daarentegen is -wanneer slechts één golf in rekening wordt gebracht- :

$$(6.7) \quad G_n = 20^{10} \log \frac{1}{3} e^{2\pi CN \cdot \operatorname{Re} h_n} \text{ dB} .$$

omdat het signaal ter plaatse $z=0$ nu \hat{E} bedraagt.

Tenslotte brengen wij alle drie de golven in rekening, als gevolg waarvan de versterking van de buis over de interaktielengte $z=(0;N\lambda)$ geschreven kan worden als

$$(6.8) \quad G = 10^{10} \log \frac{\hat{E} \hat{E}^* \Big|_{z=N\lambda}}{\hat{E}^2 \Big|_{z=0}} ,$$

waarin

$$\hat{E} \Big|_{z=N\lambda} = \frac{\hat{E}}{3} e^{-2\pi j(1-C)N} \left[1 + 2(\cosh CN/\sqrt{3}) \cdot e^{-3\pi jCN} \right]$$

Derhalve is de versterking van de buis

$$(6.9) \quad G = 10^{10} \log \frac{1}{9} \left[1 + 4 \cosh^2 \pi CN/\sqrt{3} + 4(\cosh \pi CN/\sqrt{3}) \cdot (\cos 3\pi CN) \right]$$

De formules (6.6;6.7;6.9) zijn grafisch weergegeven in figuur 3.

7. KOPPELING VEREENVOUDIGDE THEORIE MET VELDENTHEORIE

7.1 Bepaling van de versterkingsparameter C

Via de betrekking

$$(5.6) \quad C^3 = K_0 \frac{I_0}{4V_0}$$

is de grootheid C ingevoerd, die benodigd is voor de bepaling van de versterking (cf (6.7), (6.9)).

De parameter C nu is voor een gegeven "rustbundel" ($I_0; V_0$) uit de evenzo ingevoerde interactie-impedantie K_0 bepaald. Men berekent K_0 voor een gegeven vertragsstructuur uit de veldentheoretische beschouwingen door aan te nemen, dat de elektronenbundel een tweede-orde verstoringseffekt sorteert. Dit wil dus zeggen, dat de versterking in eerste orde nul is: ongedempte propagatie zonder koppeling.

Dan is

$$(7.1) \quad K_0 \approx \frac{E_z^2}{2\beta_e^2 P}$$

waarin E_z de axiale komponent van de elektrische veldsterkte der in de structuur beschouwde elektromagnetische golf is ($v_f = v_e$) en P het door die golf in de z-richting getransporteerde (konstante) vermogen betekent.

Betrekking (7.1) kan worden afgeleid uit de relatie, waar P -gerekend in termen van de vereenvoudigde theorie- aan moet voldoen:

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{K_0}$$

uit welke formule, met $E_z = \partial V_0 / \partial z = -jV_0 \approx -j\beta_e V_0$, het gestelde volgt.

7.2 Langzame golven

Voor vruchtbare wisselwerking tussen elektromagnetische golven en elektronen dient beider (fase)snelheid, v_f ; v_e , gelijk te zijn en kleiner dan de snelheid van vlakke golven in de vrije ruimte c :

$$(7.2) \quad \beta_{(e)} > \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{\frac{1}{2}}.$$

De fasesnelheid v_f kan voldoende klein gemaakt worden door toepassing van golfgeleiders met periodieke structuur (litt.3) die -in open of gesloten vorm- gekarakteriseerd zijn door longitudinale inhomogeniteiten van periodieke aard.

Hiernaast zijn de zuivere -open of afgeschermd- oppervlaktegolfgeleiders te noemen, die gekenmerkt worden door longitudinale homogeniteit der media, en door een inhomogeniteit van diëlektrica en magnetica in transversale richting (litt.4)

Van groot belang zijn de dispersiekrommen van de vrije modi, propagerend langs genoemde structuren: een lineair verband tussen β en ω over een zo groot mogelijk frequentiegebied geeft -ook in het verstoorde geval- een versterkerbuis met maximale bandbreedte.

Een bijzonder gunstig verloopende dispersiekromme treffen wij aan bij de grondmodus op de bandspiraal (tape-helix) en de gesloten spiraal (sheath-helix), (litt.3). Deze structuren geven de lopendegolfbuis een formidabele bandbreedte, (bv. 0,35 - 1,05 GHz !)

Een tweede belangrijk punt wordt gevormd door het synchronisme van elektronen en golven.

Normaal gesproken is v_f bij een vast gekozen verdragingsstructuur volledig vastgelegd door de frequentie.

Synchronisme is dan te bereiken door verandering van de (middelbare) elektronsnelheid (cf (3.19)).

Bij gebruik van ferrieten in oppervlaktegolf-geleiderstructuren wordt een variabele v_f binnen zekere grenzen mogelijk gemaakt door veranderingen in de sterkte van het magnetiseringsveld.

8. VERFIJNINGEN VAN DE VEREENVOUDIGDE THEORIE

8.1 Ruimteladingseffekten

De in paragraaf 3.2 gevolgde afleiding van de differentiaalvergelijking voor J_1 hield geen nadere specificatie van E_w (3.6) in, anders dan als afkomstig te zijn van een langzame elektromagnetische golf.

Dit is ten dele waar. Algemeen bestaat E_w uit twee delen: één deel van de synchroon met de elektronen lopende golf, het andere als gevolg van de plaatselijke ruimtelading in een punt z van de bundel. Deze ruimtelading wordt gecreëerd door alle modi, die in een vertragingstructuur aangestoten zijn maar die een van de elektronsnelheid sterk afwijkende fasesnelheid bezitten.

Aldus stellen wij

$$(8.1) \quad E_w = E_w^{sg} + E_w^{rl},$$

(sg = synchrone golf, rl = ruimtelading), waarbij

$$(8.2) \quad \text{div } \underline{D}_w = \text{div}(\epsilon' \underline{E}_w^{rl}) = \rho_w.$$

Wegens de eindige dikte van de bundel en de aanwezigheid van een vertragingstructuur is in (8.2)

$$(8.3) \quad \epsilon' = \epsilon_0 \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_q^2},$$

de effectieve diëlektrische konstante, met de plasmafrekventie, ω_p , door (3.16) gedefiniëerd, en de effectieve plasmafrekventie, ω_q , door

$$(8.4) \quad \omega_q^2 = v_0^2 \beta_p^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\beta_e^2}\right)^{-1}.$$

Uit (8.2) volgt nu met de notatie van paragraaf 3:

$$\frac{dE_1^{r1}}{dz} = - \frac{1}{j\omega\epsilon'} \frac{dJ_1}{dz} ,$$

zodat -aannemende dat $J_w(z=0)$ en $E_w^{r1}(z=0)$ beide nul zijn- door integratie over het traject $(0; z)$ geschreven kan worden

$$(8.5) \quad E_1^{r1} = - \frac{J_1}{j\omega\epsilon'} .$$

Met gebruikmaking van (8.1 ; 8.5) gaat (3.14) nu over in

$$(8.6) \quad \frac{d^2 J_1}{dz^2} + 2j\beta_e \frac{dJ_1}{dz} - (\beta_e^2 - \beta_q^2) J_1 = j\beta_e \frac{J_0}{2V_0} E_1^{(sg)} .$$

Hiermede is het analogon van de elektronvergelijking (3.20) voor het geval de ruimteladingseffekten in rekening worden gebracht:

$$(8.7) \quad \hat{I} = \frac{j\beta_e I_0}{2V_0 [(\gamma - j\beta_e)^2 + \beta_q^2]} \hat{E} .$$

8.2 Ruimteladingsparameter Q

Door invoering van de ruimteladingsparameter Q volgens

$$(8.8) \quad \beta_q^2 = \beta_e^2 \cdot 4QC^3$$

wordt uit (8.7) en (4.14) het analogon van (5.1) gevonden:

$$(8.9) \quad -1 = \gamma^2 K_0 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma^2 - \gamma_0^2} + \frac{2jQ\gamma^2}{\beta_e} \right) \left(\frac{j\beta_e}{(\gamma - j\beta_e)^2} \frac{I_0}{2V_0} \right) .$$

Bij beschouwing van (8.9) zien wij in het rechterlid de gewijzigde circuitvergelijking als eerste faktor verschijnen:

$$(8.10) \quad \hat{E} = -\gamma^2 K_0 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma^2 - \gamma_0^2} + \frac{2jQ\gamma^2}{\beta_e} \right) \hat{I} .$$

Deze laatste vergelijking kan worden gebruikt om de koppel-impedantie K_0 , en daarmee de versterkingsparameter C te berekenen, (methode van Fletcher, litt.5).

Deze methode veronderstelt de aanwezigheid van een holle elektronenbundel van geringe wanddikte, ter plaatse waarvan geldt

$$H_\phi \text{ buiten} - H_\phi \text{ binnen} = \frac{1}{2\pi r_e} \hat{I} ,$$

als r_e de gemiddelde straal van de holle bundel is.

Het verschil in oppervlakte-admittanties buiten en binnen de bundel is dan

$$Y = Y_{bu} - Y_{bi} = \frac{1}{2\pi r_e} \cdot \frac{\hat{I}}{\hat{E}}$$

waaruit blijkt, vergelijk (8.10), dat Y op de een of andere manier evenredig is met K_0^{-1} . Zie verder litt.5 .

LITTERATUUR

1. Pierce, J.R., *Traveling-Wave Tubes*,
D. Van Nostrand Company, Inc., 1950.
2. Hutter, R.G.E., *Beam and Wave Electronics in Microwave Tubes*,
Idem, 1960.
3. Kooy, C., *Golfgeleiders met periodieke structuur*,
Rapport 1963-ET1, en de daarin aangegeven
litteratuur.
4. Barlow, H.M., and J. Brown, *Radio Surface Waves*,
Oxford University Press, London, 1962,
en de daarin aangegeven litteratuur.
5. Fletcher, R.C., *Proc. I.R.E.*, 38, p. 413-417, (1950).