

Het Z-profiel, belast door normaalkrachten op het lijf

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D. (1964). *Het Z-profiel, belast door normaalkrachten op het lijf*. (DCT rapporten; Vol. 1964.021). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1964

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Het Z-profiel, belast door normaalkrachten op het lijf

0. Samenvatting

Een Z-profiel wordt aan zijn uiteinden belast door normaalkrachten, die op het lijf aangrijpen. De resultante van al deze krachten zij een kracht langs de "as" van het profiel. Bij deze belastingstoestand treden in de balk naast normaalspanningen vaak aanzienlijke schuifspanningen op. Bovendien treden de dwarsdoorsneden ten opzichte van elkaar.

V. I. Vlasov heeft een theorie ontwikkeld, die deze effecten zou kunnen verklaren. In dit rapport wordt genoemde theorie toegepast op bovengestand probleem.

1. Inleiding

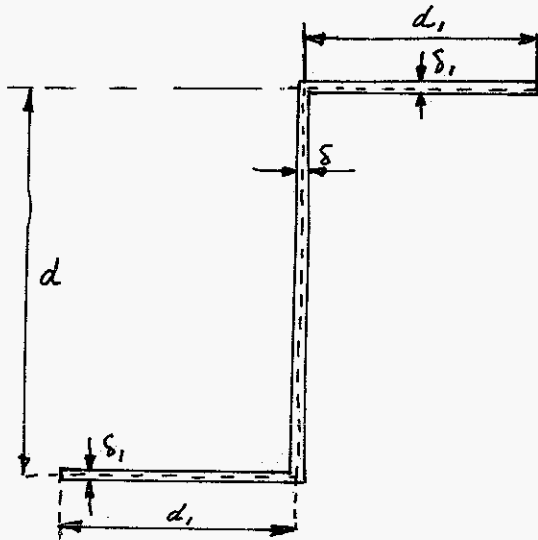
In een rapport uit mei 1964 - in samenvatting van enige in het najaarsemester 1963/1964 gegeven mechanica colloquia - wordt de algemene Vlasov-theorie van dunwandige cilindrische balken met open dwarsdoorsneden gegeven.

Dit rapport is als appendix toegevoegd.

Ghiina volgend wordt Vlasov's theorie als bekend verondersteld. De hier gebruikte notatie- en tekenafspraken zijn in de appendix aangegeven.

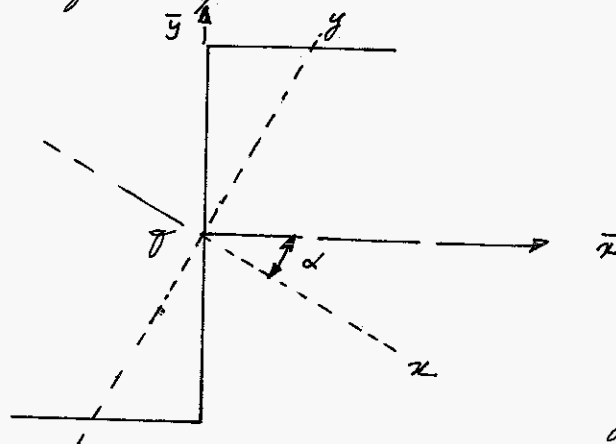
Het is de bedoeling de leer van het Z-profiel met gebruikte theorie te toetsen met behulp van enkele experimenten. Zowel vervormingen als spanningen zullen daarbij gemeten worden. Dit verslag is dan ook bedoeld om de theoretische formules volgens Vlasov's theorie af te leiden.

2. Coördinatenstelsel en geometrische karakteristieken



Gegeven is de dwarsdoorsnede van het Z-profiel, gekarakteriseerd door d , d_1 , s en s_1 .

Als coördinatenstelsel in de dwarsdoorsnede wordt genomen het x - y assenstelsel samenvallend met de centrale hoofdraaglijdsassen van de dwarsdoorsnede



O : Zwaartepunt

Het \bar{x} - \bar{y} assenstelsel wordt als hulpassenstel genomen.

$$\begin{aligned} \text{Er geldt:} \quad x &= \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \\ y &= \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{of wel} \quad \bar{x} &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \bar{y} &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

De hoek α is bepaald uit de conditie: $I_{xy} = 0$ of

$$\tan 2\alpha = \frac{2 I_{\bar{x}\bar{y}}}{I_{\bar{y}} - I_{\bar{x}}}$$

$$I_{\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF = \frac{2}{3} \delta_1 d_1^3$$

$$I_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \frac{1}{2} \delta_1 d_1 d^2 + \frac{1}{12} \delta d^3$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x} \bar{y} dF = \frac{1}{2} \delta_1 d_1^2 d$$

Dus:

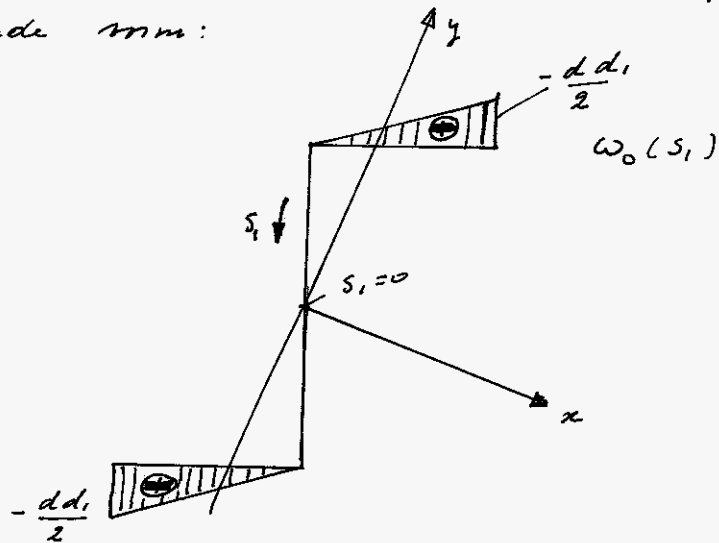
$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{\delta_1 d_1^2 d}{\frac{2}{3} \delta_1 d_1^3 - \frac{1}{2} \delta_1 d_1 d^2 - \frac{1}{12} \delta d^3} = \\ &= \frac{12 \delta_1 d_1^2 d}{8 \delta_1 d_1^3 - 6 \delta_1 d_1 d^2 - \delta d^3} \end{aligned}$$

De coördinaten van de hoofdpool A volgen uit (zie appendix p. 6):

$$a_x = \frac{I_{\omega_0 y}}{I_x}$$

$$a_y = - \frac{I_{\omega_0 x}}{I_y}$$

Het sectieoppervlak met pool O en oorsprong O heeft de volgende vorm:



$$\int_F \omega_0 y \, dF = 0$$

$$\int_F \omega_0 x \, dF = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_F \omega_0 y \, dF = 0 \\ \int_F \omega_0 x \, dF = 0 \end{array} \right\} \text{Dus } \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{A \equiv O}$$

De hoofdpool valt in dit geval dus samen met het zwaartepunt van de doorsnede.

De hoofdoriëntering moet zo zijn dat $S_{\omega} = 0$ ofwel:

$$\omega_A(s_1 = s_1^*) = \frac{1}{F} \int_F \omega_A(s_1) \, dF$$

Waarbij $s_1 = s_1^*$ correspondeert met de hoofdoriëntering θ_1 .
Men geldt:

$$F = d\delta + 2d_1\delta_1$$

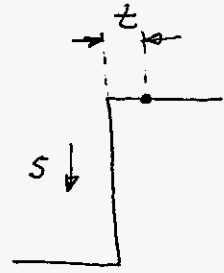
$$\omega_A(s_1 = s_1^*) = - \frac{\frac{1}{2} \delta_1 d d_1^2}{d\delta + 2d_1\delta_1}$$

Geven we de plaats van de oorsprong aan met t , gemeten vanaf het lijf langs de flens, dan is $\omega_A(t) = - \frac{t d}{2}$

$$\frac{t d}{2} = \frac{\frac{1}{2} \delta_1 d d_1^2}{d \delta + 2 d_1 \delta_1}$$

dus

$$t = \frac{\delta_1 d_1^2}{d \delta + 2 d_1 \delta_1}$$

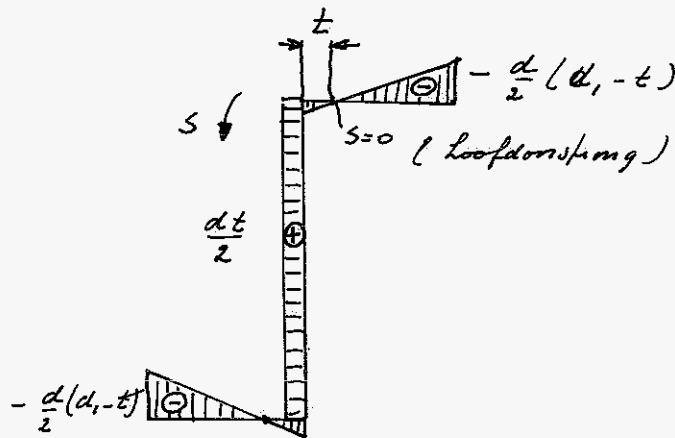


Gemeten met de booglength s vanuit de hoofdoorstroom, is het sectroffervlak ten opzichte van de hoofdfool:

$$\omega_A(s) = \omega_A(s_1) - \omega_A(t)$$

↑
oorsprong σ

We geven het verloop van in de figuur:

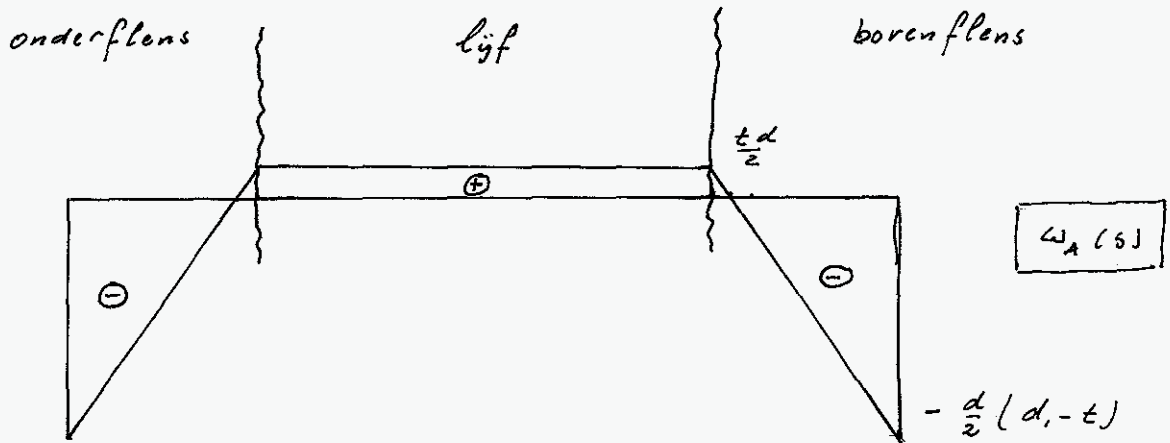


Een grootheid die van het schuifspanningsverloop van belang is, is het statisch moment van het afgesneden stuk van het sectroffervlak: $S_w(q)$, waarbij q de booglength is gemeten van de rechte punt van het profiel

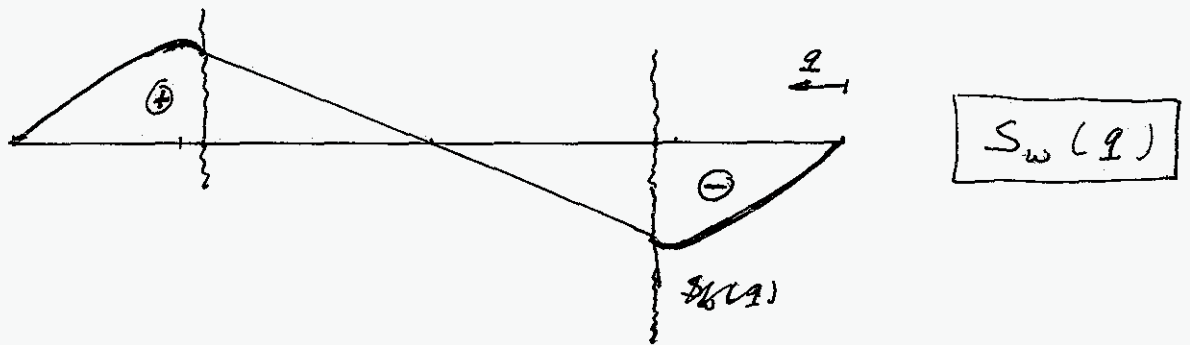
[Opm: In de appendix wordt in plaats van q t geschreven; deze letter is hier echter gebruikt om de plaats van de hoofd oorsprong aan te duiden.]

$$S_w(q) = \int_{q'=0}^q \omega_A(s) dF$$

We rekenen hier toe het Z-profiel als het ware recht getrokken.



$S_w(q)$ vinden we door integratie van rechts naar links



In formulevorm:

$$0 \leq q \leq d, \quad S_w(q) = \delta_1 \left[\frac{d}{4} q^2 - \frac{d}{2} (d, -t) q \right]$$

met extremum voor $q = d, -t$ nu waarde van

$$-\frac{\delta_1 d d_1^2}{4} \cdot \frac{(d\delta + d_1\delta_1)^2}{(d\delta + 2d_1\delta_1)^2}$$

$$d_1 \leq q \leq d_1 + d$$

$$S_w(q) = \delta_1 \left[-\frac{1}{4} d d_1^2 + \frac{1}{2} d d_1 t \right] + \frac{1}{2} t d (q - d_1)$$

De figuur is antisymmetrisch A.O.V. $q = d_1 + \frac{d}{2}$

Het traagheidsmoment van het sectroffvlak
 J_w is gedefinieerd als:

$$J_w = \int_F w^2 dF$$

Tho first zaken we:

$$0 \leq q \leq d_1$$

$$w = \frac{d}{2} q - \frac{d}{2} (d_1 - t)$$

$$d_1 \leq q \leq d_1 + \frac{d}{2}$$

$$w = \frac{td}{2}$$

Dus:

$$J_w = \int_F w^2 dF = 2 \int_0^{d_1} \left(\frac{d}{2} \right)^2 [q - d_1 + t]^2 \delta_1 dq +$$

$$+ 2 \int_{d_1}^{d_1 + \frac{d}{2}} \left(\frac{td}{2} \right)^2 \delta dq =$$

$$\frac{1}{6} d^2 (q - d_1 + t)^3 \delta_1 \Big|_{q=0}^{d_1} + \frac{t^2 d^3}{4} \delta =$$

$$\frac{1}{6} \delta_1 d^2 t^3 - \frac{1}{6} \delta_1 d^2 (-d_1 + t)^3 + \frac{1}{4} \delta t^2 d^3 =$$

$$-\frac{1}{6} \delta_1 d^2 (-3t^2 d_1 + 3t d_1^2 - d_1^3) + \frac{1}{4} \delta t^2 d^3 =$$

$$-\frac{1}{2} \delta_1 d_1^2 d^2 t + \frac{1}{4} d^2 t^2 (2\delta_1 d_1 + \delta d) + \frac{1}{6} \delta_1 d^2 d_1^3 =$$

$$-\frac{1}{2} \delta_1 d_1^2 d^2 t + \frac{1}{4} \delta d^2 d_1^2 t + \frac{1}{6} \delta_1 d^2 d_1^3 =$$

$$\frac{\delta_1 d_1^2 d^2}{12} (-3t + 2d_1) = \frac{\delta_1 d_1^3 d^2}{12} \frac{\delta_1 d_1 + 2\delta d}{\delta d + 2\delta_1 d_1}$$

Dus:

$$\parallel J_w = \frac{\delta_1 d_1^3}{12} \cdot d^2 \cdot \frac{\delta_1 d_1 + 2\delta d}{\delta d + 2\delta_1 d_1}$$

3. Bepaling der vervormingsgrootheden

Hoals uit de veronderstellingen van Vlasov volgt, is de vervorming van de balk gegeven door de waardenfuncties van de 2-condinaat (axiale condinaat):

$f(z)$: verplaatsing van 's doorsnede in zijn geheel in z-richting

$d_x(z)$: verpl. van punt A in x-richting

$d_y(z)$: verpl. van punt A in y-richting

$\vartheta(z)$: verdraaiing van de doorsnede in zijn geheel.

De differentiaalvpl. die het probleem beschrijven zijn:

$$f'' = 0 \quad \left[' \equiv \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$d_x^{IV} = 0$$

$$d_y^{IV} = 0$$

$$\vartheta'' - \frac{k^2}{\rho^2} \vartheta'' = 0 \quad \text{met } \frac{k}{\rho} = \sqrt{\frac{G J_d}{E J_w}}$$

(zie appendix pag. 11)

G : glijdingsmodulus

E : elasticiteitsmodulus

J_w : zie pag 7. ondukaan

$$\rightarrow J_d = \frac{1}{3} [2 d_1 \delta_1^3 + d \delta^3]$$

De ggeneraliseerde krachten zijn (zie app. pag 12 en 14)

$$N = EF f'$$

$$M_y = E J_y d_x'''$$

$$M_x = -EJ_x \alpha_y''$$

$$B = -EJ_\omega \vartheta'' \quad (\text{bimoment} \stackrel{\text{def}}{=} \int_F \sigma \omega dF)$$

$$Q_x = -EJ_y \alpha_x'''$$

$$Q_y = -EJ_x \alpha_y'''$$

$$M_\omega = -EJ_\omega \vartheta''' \quad (\text{torsie-buigmoment} \stackrel{\text{def}}{=} \int_F \tau \delta d\omega)$$

Het totale wrijvend moment M is:

$$M = M_\omega + M_W = -EJ_\omega \vartheta''' + GJ_d \vartheta'$$

De randvoorwaarden in dit geval zijn (lengte van de staaf is l):

	$x=0$	$x=l$
	$f = 0$	$N = \bar{N}$ (gegeven)
	$\alpha_x = 0, \alpha_x' = 0$	$M_y = 0 \quad Q_x = 0$
	$\alpha_y = 0, \alpha_y' = 0$	$M_x = 0 \quad Q_y = 0$
	$\vartheta = 0$	$M = 0 \quad B = \bar{B}$ (zie verder)
	$B = \bar{B}$	$M = 0$

Hieruit volgt:

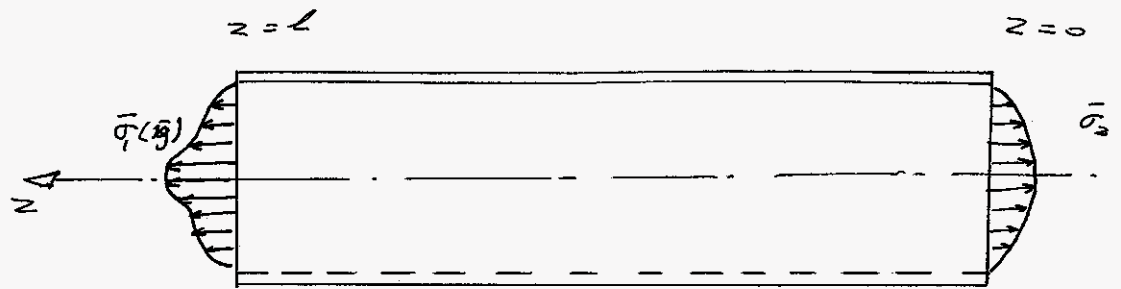
$$f = \frac{\bar{N} z}{EF} \quad N = \bar{N}$$

$$\alpha_x = 0 \quad Q_x = M_y = 0$$

$$\alpha_y = 0 \quad Q_y = M_x = 0$$

De uitdrukking van ϑ moeten we nog bepalen.

Allereerst willen we nog aangeven hoe de staaf belast wordt om een oriëntatie te geven op de hier gegeven randvoorwaarden.



Alleen aan het lijf wordt getrokken in axiale richting, zodat de resultante alleen een kracht in de z -richting levert. Aan de eindvlakken zijn geen schuifspanningen.

De randvoorwaarden voor ξ , x en y zijn dan duidelijk. De beweging als star lichaam kan verhinderd worden door b.v. bij $z=0$ in te klemmen.

$$\bar{N} = \int_{\text{lijf}} \bar{\sigma}_1(z) dF = \int_{\text{lijf}} \bar{\sigma}_2 dF$$

$$\text{Verder } \bar{B} = \int_{\text{lijf}} \bar{\sigma}_1 \frac{dw}{dz} dF = \frac{dt}{z} \int_{\text{lijf}} \bar{\sigma}_1 dF = \frac{dt}{z} \int_{\text{lijf}} \bar{\sigma}_2 dF$$

We schrijven $\frac{dt}{z} = \bar{\omega}$

dus $\bar{B} = \bar{N} \bar{\omega}$ van $z=0$, $z=l$

De algemene oplossing van de d.v. in \mathcal{I} luidt:

$$\mathcal{I}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 \sinh \frac{k}{l} z + c_3 \cosh \frac{k}{l} z$$

hieruit volgt:

$$\mathcal{B}(z) = -g \mathcal{I}_d \left[c_2 \sinh \frac{k}{l} z + c_3 \cosh \frac{k}{l} z \right]$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\omega}}(z) = -g \mathcal{I}_d \frac{k}{l} \left[c_2 \cosh \frac{k}{l} z + c_3 \sinh \frac{k}{l} z \right]$$

$$\mathcal{M}(z) = g \mathcal{I}_d c_1$$

Omdat van $z=l$ $\mathcal{M} = 0$ geldt $c_1 = 0$
 en omdat van $z=0$ $\mathcal{I} = 0$ geldt $c_0 + c_3 = 0$

$$x=0 \quad B = \bar{B} \quad \Rightarrow \quad \bar{B} = -g J_d c_3$$

$$x=l \quad B = \bar{B} \quad \Rightarrow \quad \bar{B} = -g J_d [c_2 \sinh k + c_3 \cosh k]$$

Hiervan volgt:

$$c_3 = -\frac{\bar{B}}{g J_d}$$

$$c_2 = -\frac{\bar{B}}{g J_d} \left(\frac{1 - \cosh k}{\sinh k} \right)$$

$$c_0 = \frac{\bar{B}}{g J_d} \quad c_1 = 0$$

Dus:

$$y(z) = \frac{\bar{B}}{g J_d} \left[1 - \frac{1 - \cosh k}{\sinh k} \sinh \frac{k}{l} z - \cosh \frac{k}{l} z \right]$$


hier geldt: $1 - \cosh k = -2 \sinh^2 \frac{k}{2}$

$$\sinh k = 2 \sinh \frac{k}{2} \cosh \frac{k}{2}$$

dus

$$y(z) = \frac{\bar{B}}{g J_d} \left[1 + \frac{\sinh \frac{k}{2} \sinh \frac{k}{l} z - \cosh \frac{k}{2} \cosh \frac{k}{l} z}{\cosh \frac{k}{2}} \right] =$$

$$= \frac{\bar{B}}{g J_d} \left[1 - \frac{\cosh \frac{k}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\cosh \frac{k}{2}} \right]$$

of  $y(z) = \frac{\bar{N} \cdot \left(\frac{d^2}{2} \right)^{\bar{\omega}}}{g J_d} \left[1 - \frac{\cosh \frac{k}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\cosh \frac{k}{2}} \right]$

: de lockverdraaiing die dus ontstaat op plaats z.

We merken nog op dat $J(z) = J(l-z)$
Er is dus symmetrie ten opzichte van $x = \frac{l}{2}$.

Behalve een lineair met ~~de~~ toenemende
verplaatsing in axiale richting van de doorsneden
{, treedt er ook een verdraaiing der doorsneden
op (D).

Merk op dat het onbelangrijk is hoe de
krachten op het lijf aangrijpen, als de ^{resultante}
meer een kracht \bar{N} langs de staafas is.

Opm:

Men zou geneigd zijn te stellen dat een
mogelijke randvoorwaarden was:

$$u = l \quad M_w = 0.$$

Invrees aan het uiteinde worden geen schuif-
spanning aangebracht, dus ondermeer $\int_F \delta \tau dw = M_w = 0$.

En de hier gebruikte theorie mag dit echter niet
gesteld worden. Als dynamische randvoorwaarden
moet niet gesproken worden over de schuifspanningen
doch alleen over de resultanten van deze schuif-
spanningen: Q_x, Q_y en $M = M_w + M_w$. Alleen
van deze grootheden kan iets gezegd worden.
Er kan dus alleen gesteld worden $M = 0$ en niet
 $M_w = 0$ en $M_w = 0$. Met Vlasov's theorie kan dan
dan ook volgen dat er schuifspanningen aan
de eindvlakken optreden. Zijn bewering is dan
dat deze strijdigheden met de werkelijkheid
slechts lokale invloed hebben (principe van
de. Saint-Venant).

Hetzelfde geldt voor de normaalspanningen.

4. Bepaling van de spanningen

In de appendix pag. 12-13 ^{is} de normaal-spanningsverdeling gegeven

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B}{I_w} \omega$$

In dit geval:

$$\sigma_z = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{B(z)}{I_w} \omega$$

Voor $B(z)$ kunnen we met behulp van $B = -E I_w \mathcal{J}''$ schrijven:

$$B(z) = \frac{\bar{N} \cdot \bar{\omega}}{i_w} \cdot \frac{\cosh \frac{k}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\cosh \frac{k}{2}}$$

Dus:

$$\sigma_z = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{\bar{N} \cdot \bar{\omega}}{I_w} \cdot \frac{\cosh \frac{k}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\cosh \frac{k}{2}} \cdot \omega$$

De schuifspanningsverdeling ^{gelijkmatig verdeeld over de dikte} wordt gegeven door (zie app. pag. 14):

$$\tau \delta^* = - \frac{Q_x}{I_y} S_y(q) - \frac{Q_y}{I_x} S_x(q) - \frac{M_w}{I_w} S_w(q)$$

δ^* : dikte in plaats q

In dit geval:

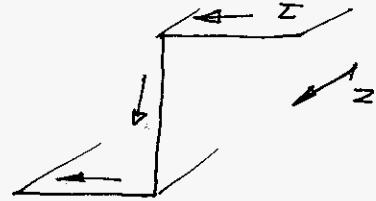
$$\tau \delta^* = - \frac{M_w}{I_w} S_w(q)$$

$$\tau S^* = \frac{\bar{N} \cdot \bar{\omega}}{d \omega} \cdot \frac{k}{l} \cdot \frac{\sinh \frac{k}{l} (\frac{l}{2} - z)}{\cosh \frac{k}{l}} \cdot S_{\omega}(q)$$

hierin is dus $\delta^* = \delta_1$ van $0 \leq q \leq d_1$
 $d_1 + d \leq q \leq 2d_1 + d$

en $\delta^* = \delta$ van $d_1 \leq q \leq d_1 + d$

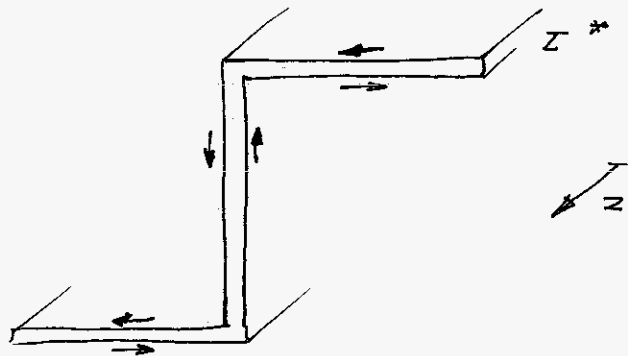
De positieve richting van τ is hieronder aan-
 gegeven:



De lineair met de afstand tot de profiellijn
 veranderende schuifspanning is gegeven door de
 maximale waarde:

$$\tau^* = g \mathcal{D}' \delta^* = \frac{\bar{N} \cdot \bar{\omega}}{J_x} \cdot \frac{k}{l} \cdot \frac{\sinh \frac{k}{l} (\frac{l}{2} - z)}{\cosh \frac{k}{l}} \cdot \delta^*$$

De positieve richting van τ^* is hieronder aangegeven:

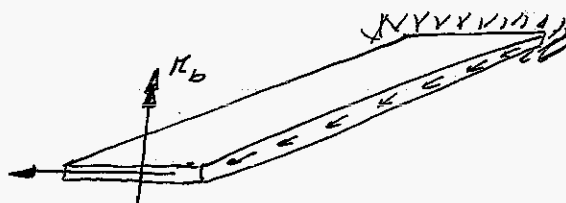


5. Opmerkingen

Het in het voorgaande behandelde probleem, leent zich goed om experimenteel te worden gegeven theorie te verifiëren.

Getracht zal worden om zowel σ_{L2} als de spanningen te toetsen.

Men zou dit probleem graag met meer elementaire hulpmiddelen te lijf willen gaan, door b.v. flenzen en lijf van elkaar in gedeelten te scheiden en in het onijvlak de mogelijke haectgrootheden aan te geven. Men zou dan kunnen constateren dat de flenzen a.o.v. het lijf verplaatst. Door lijf en flenzen over een hoek te draaien is het profiel meer als een geheel samen te voegen. Om de verplaatsing van een flens na te gaan moet eerst de verplaatsing bepaald worden van onderstaand maatstuk:



We zullen ons op dit moment met deze "elementaire" afleiding niet bezig houden.

Uithoorn, 15 oktober 1964

J. Janssen.
v. J. D. Janssen
Groep Techn. Mech.