Het Z-profiel, belast door normaalkrachten op het lijf

T.H.E
WE-64/21

Het Z-profiel, belast door normaalkrachten op het lijf

0. Samenvatting

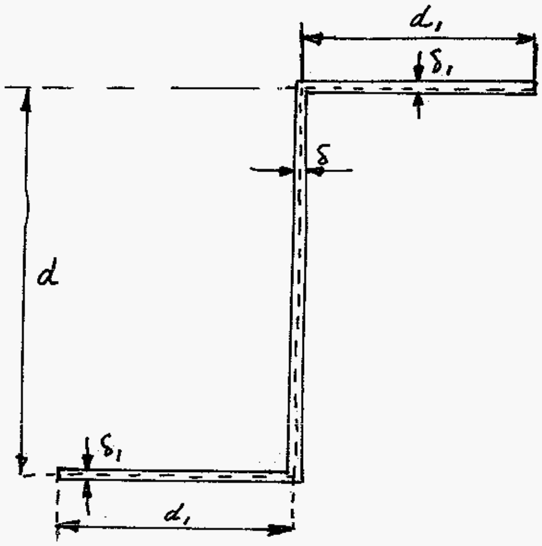
Een Z-profiel wordt aan zijn uiteinden belast door normaalkrachten, die op het lijf aangrijpen. De resultante van al deze krachten zij een kracht langs de "as" van het profiel. Bij deze belastingtoestand treden in de balk naast normaalspanningen vaak aanzienlijke schuifspanningen op. Bovendien verdraaien de dwarsdoorsneden ten opzichte van elkaar.
V. Z. Vlasov heeft een theorie ontwikkeld, die deze effecten zou kunnen verklaren. In dit rapport wordt genoemde theorie toegepast op bovenstaand probleem.

1. Inleiding

In een rapport uit mei 1964 – in samenvatting van enige in het najaarssemester 1963/1964 gegeven mechanica colloquia – wordt de algemene Vlasov-theorie voor dunwandige cilindrische balken met open dwarsdoorsneden gegeven.
Dit rapport is als appendix toegevoegd.
Hierna volgend wordt Vlasov's theorie als bekend verondersteld. De hier gebruikte notatie- en tekenafspraken zijn in de appendix aangegeven.

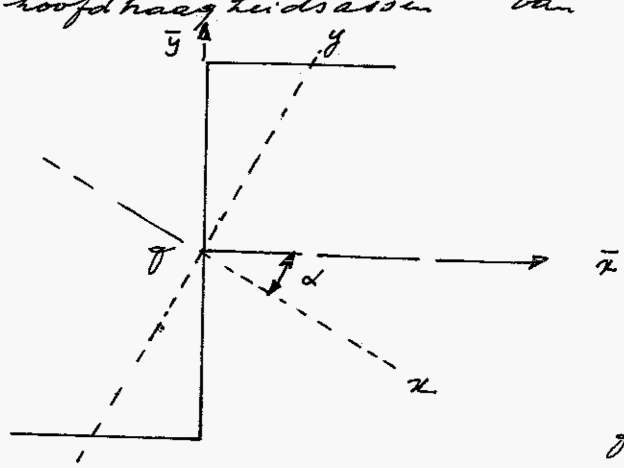
Het is de bedoeling de hier van het Z-profiel uitgewerkte theorie te toetsen met behulp van enkele experimenten. Zowel vervormingen als spanningen zullen daarbij gemeten worden. Dit verslag is dan ook bedoeld om de theoretische formules volgens Vlasov's theorie af te leiden.

2. Coördinatensysteem en geometrische karakteristieken



Gegeven is de dwarsdoorsnede van het Z-profiel, gekarakteriseerd door d, d_1, δ en δ_1.

Als coördinatenstelsel in de dwarsdoorsnede wordt gekozen het x-y assenstelsel samenvallend met de centrale hoofdtraagheidsassen van de dwarsdoorsnede



O: zwaartepunt

Het $\bar{x}$-$\bar{y}$ assenkruis wordt als hulpassenstel genomen.

Er geldt:
$$x = \bar{x} \cos\alpha - \bar{y} \sin\alpha$$
$$y = \bar{x} \sin\alpha + \bar{y} \cos\alpha$$

of wel
$$\bar{x} = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$
$$\bar{y} = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

De hoek α is bepaald uit de conditie: $J_{xy} = 0$ of

$$\tan 2\alpha = \frac{2 J_{\bar{x}\bar{y}}}{J_{\bar{y}} - J_{\bar{x}}}$$

$$J_{\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF = \tfrac{2}{3} \delta_1 d_1^3$$

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \tfrac{1}{2} \delta_1 d_1 d^2 + \tfrac{1}{12} \delta d^3$$

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\bar{y}\, dF = \tfrac{1}{2} \delta_1 d_1^2 d$$

Dus:
$$\tan 2\alpha = \frac{\delta_1 d_1^2 d}{\tfrac{2}{3}\delta_1 d_1^3 - \tfrac{1}{2}\delta_1 d_1 d^2 - \tfrac{1}{12}\delta d^3} =$$

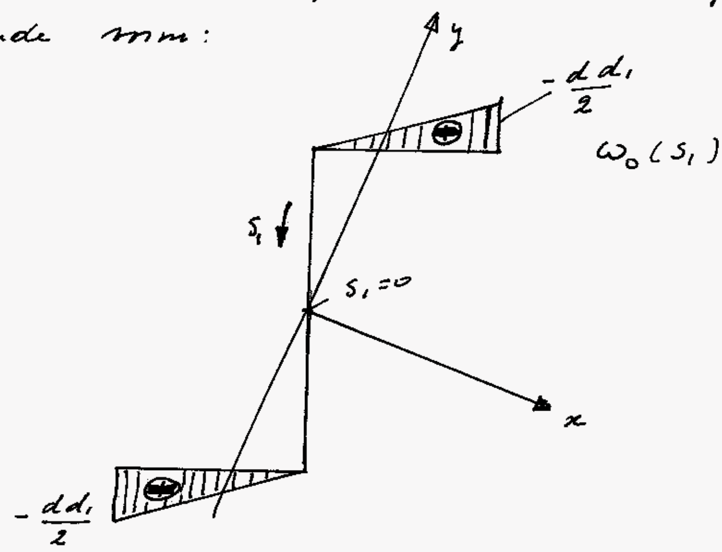
$$= \frac{12\, \delta_1 d_1^2 d}{8\, \delta_1 d_1^3 - 6\, \delta_1 d_1 d^2 - \delta d^3}$$

De <u>coordinaten van de hoofdpool A</u> volgen uit (zie appendix p. 6):

$$a_x = \frac{J_{\omega_0 y}}{J_x}$$

$$a_y = -\frac{J_{\omega_0 x}}{J_y}$$

Het sectoroppervlak met pool O en oorsprong O heeft de volgende vorm:



$$\left.\begin{aligned} J_{\omega_o y} &= \int_F \omega_o\, y\, dF = 0 \\ J_{\omega_o x} &= \int_F \omega_o\, x\, dF = 0 \end{aligned}\right\} \text{ Dus } \begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{A \equiv O}$$

De hoofdpool valt in dit geval dus samen met het zwaartepunt van de doorsnede.

De <u>hoofdoorsprong</u> moet zó zijn dat $S_\omega = 0$ ofwel:

$$\omega_A(s_1 = s_1^*) = \frac{1}{F}\int_F \omega_A(s_1)\, dF$$

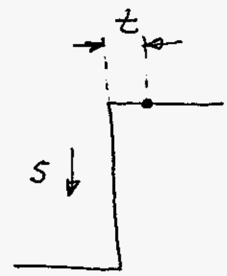
waarbij $s_1 = s_1^*$ correspondeert met de hoofdoorsprong M_1.
Nu geldt:

$$F = d\delta + 2d_1\delta_1$$

$$\omega_A(s_1 = s_1^*) = -\frac{\frac{1}{2}\delta_1\, d d_1^{\,2}}{d\delta + 2d_1\delta_1}$$

Geven we de plaats van de oorsprong aan met t, gemeten vanaf het lijf langs de flens, dan is $\omega_A(t) = -\frac{td}{2}$

$$\frac{t\,d}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\delta_1\, d\, d_1^{\,2}}{d\,\delta + 2\,d_1\,\delta_1}$$

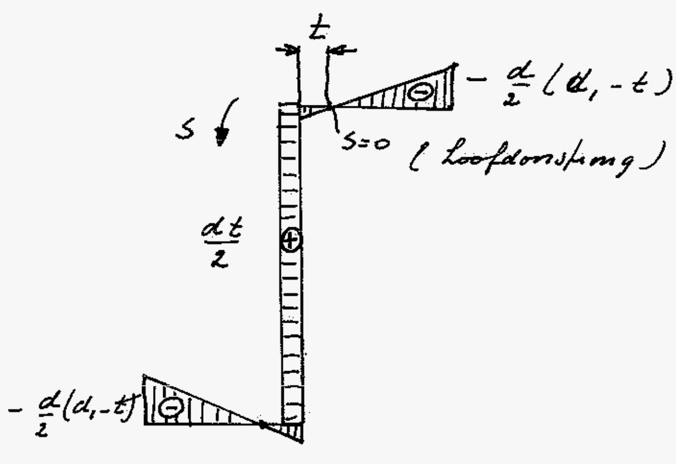


dus $$\boxed{t = \frac{\delta_1\, d_1^{\,2}}{d\,\delta + 2\,d_1\,\delta_1}}$$

Gemeten met de booglengte s vanuit de hoofdoorsprong. is het sectoroppervlak ten opzichte van de hoofdpool:

$$\omega_A(s) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oorsprong } O}}{\omega_A(s_1)} - \omega_A(t)$$

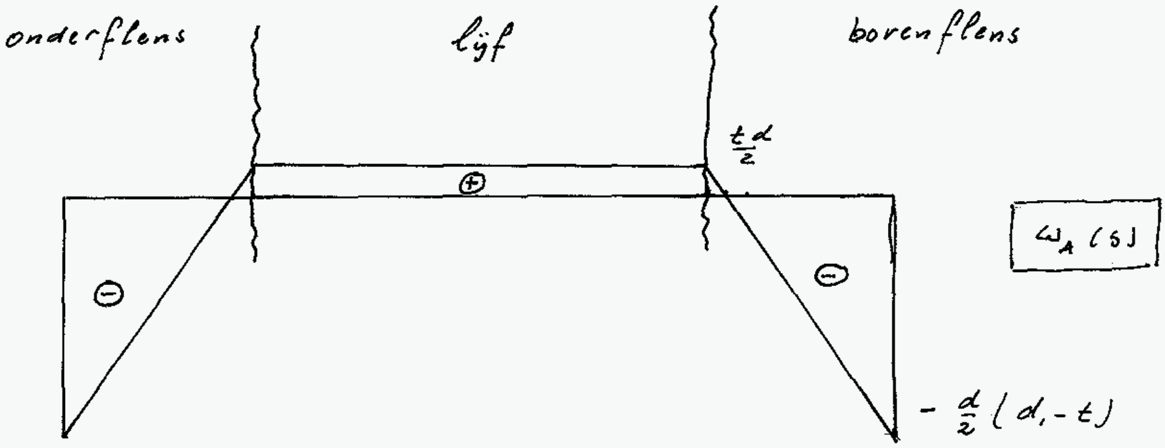
We geven het verloop weer in de figuur:



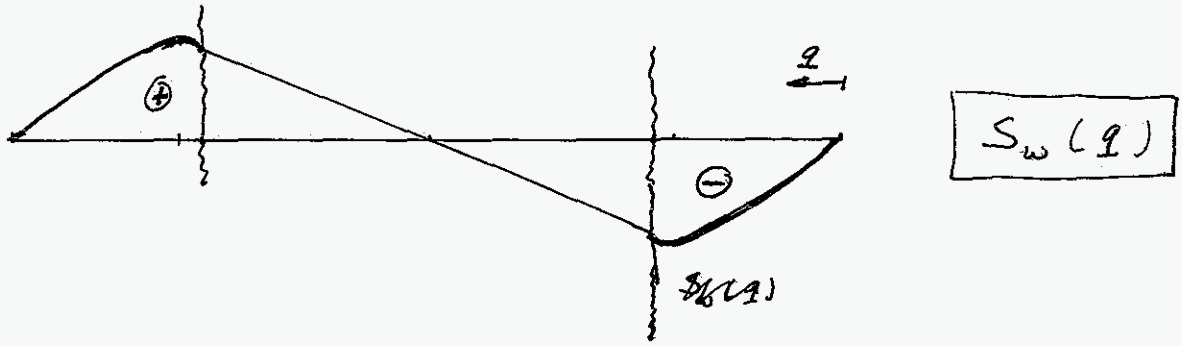
Een grootheid die voor het schuifspanningsverloop van belang is, is het <u>statisch moment van het afgesneden stuk van het sectoroppervlak</u>: $S_\omega(q)$, waarbij q de booglengte is gemeten van de rechtse punt van het profiel
(Opm: In de appendix wordt inplaats van q t geschreven; deze letter is hier echter gebruikt om de plaats van de hoofdoorsprong aan te duiden)

$$S_\omega(q) = \int_{q'=0}^{q} \omega_A(s)\, dF$$

We tekenen hiertoe het Z-profiel als het ware recht getrokken.



$S_\omega(q)$ vinden we door integratie van rechts naar links



In formulevorm:

$0 \le q \le d_1$

$$S_\omega(q) = \delta_1 \left[\frac{d}{4} q^2 - \frac{d}{2}(d_1 - t)\, q \right]$$

met extremum voor $q = d_1 - t$ ter waarde van

$$-\frac{\delta_1 d d_1^2}{4} \cdot \frac{(d\delta + d_1\delta_1)^2}{(d\delta + 2d_1\delta_1)^2}$$

$d_1 \le q \le d_1 + d$

$$S_\omega(q) = \delta_1 \left[-\frac{1}{4} d d_1^2 + \frac{1}{2} d d_1 t \right] + \frac{1}{2} t d\, (q - d_1)$$

De figuur is antimetrisch t.o.v. $q = d_1 + \frac{d}{2}$

Het <u>traagheidsmoment van het sectoroppervlak</u> $\mathcal{J}_\omega$ is gedefinieerd als:

$$\mathcal{J}_\omega = \int_F \omega^2 \, dF$$

Zo juist zagen we:

$0 \le q \le d_1$ $\qquad \omega = \frac{d}{2} q - \frac{d}{2}(d_1 - t)$

$d_1 \le q \le d_1 + \frac{d}{2}$ $\qquad \omega = \frac{td}{2}$

Dus:

$$\mathcal{J}_\omega = \int_F \omega^2 \, dF = 2 \int_0^{d_1} \frac{d^2}{4} \left[q - d_1 + t \right]^2 \delta_1 \, dq \; +$$

$$+ \, 2 \int_{d_1}^{d_1 + \frac{d}{2}} \left(\frac{td}{2} \right)^2 \delta \, dq \qquad =$$

$$\frac{1}{6} d^2 (q - d_1 + t)^3 \delta_1 \Big|_{q=0}^{d_1} + \frac{t^2 d^3}{4} \delta =$$

$$\frac{1}{6} \delta_1 d^2 t^3 - \frac{1}{6} \delta_1 d^2 (-d_1 + t)^3 + \frac{1}{4} \delta t^2 d^3 =$$

$$-\frac{1}{6} \delta_1 d^2 \left(-3t^2 d_1 + 3t d_1^2 - d_1^3 \right) + \frac{1}{4} \delta t^2 d^3 =$$

$$-\frac{1}{2} \delta_1 d_1^2 d^2 t + \frac{1}{4} d^2 t^2 (2\delta_1 d_1 + \delta d) + \frac{1}{6} \delta_1 d^2 d_1^3 =$$

$$-\frac{1}{2} \delta_1 d_1^2 d^2 t + \frac{1}{4} \delta_1 d^2 d_1^2 t + \frac{1}{6} \delta_1 d^2 d_1^3 =$$

$$\frac{\delta_1 d_1^2 d^2}{12} \left(-3t + 2d_1 \right) = \frac{\delta_1 d_1^3}{12} \cdot d^2 \, \frac{\delta_1 d_1 + 2 d \delta}{\delta d + 2 \delta_1 d_1}$$

Dus:

$$\mathcal{J}_\omega = \frac{\delta_1 d_1^3}{12} \cdot d^2 \cdot \frac{\delta_1 d_1 + 2 \delta d}{\delta d + 2 \delta_1 d_1}$$

3. Bepaling der vervormingsgrootheden

Zoals uit de veronderstellingen van Vlasov volgt, is de vervorming van de balk gegeven door de ~~waard~~ functies van de z-coordinaat (axiale coordinaat).

$\xi(z)$: verplaatsing van in doorsnede in zijn geheel in z-richting

$\alpha_x(z)$: verpl. van punt A in x-richting

$\alpha_y(z)$: verpl. van punt A in y-richting

$\vartheta(z)$: verdraaiing van de doorsnede in zijn geheel.

De differentiaalvgl. die het probleem beschrijven zijn:

$$\xi'' = 0 \qquad \left[\ ' \equiv \frac{\partial}{\partial z} \ \right]$$

$$\alpha_x^{IV} = 0$$

$$\alpha_y^{IV} = 0$$

$$\vartheta^{IV} - \frac{k^2}{\ell^2}\vartheta'' = 0 \qquad \text{met } \frac{k}{\ell} = \sqrt{\frac{G\, I_d}{E\, I_\omega}}$$

(zie appendix pag. 11)

G : glijdingsmodulus
E : elasticiteitsmodulus
I_ω : zie pag 7. onderaan

$$\longrightarrow \ I_d = \frac{1}{3}\left[2\, d_1 \delta_1^{\,3} + d\, \delta^3 \right]$$

De gegeneraliseerde krachten zijn (zie app. pag 12 en 14)

$$N = E F \xi'$$
$$M_y = E I_y\, \alpha_x'''$$

$$M_x = -EI_x\,\alpha_y''$$

$$B = -EI_\omega\,\vartheta'' \quad \left(\text{bimoment} \stackrel{def}{=} \int_F \sigma\,\omega\,dF\right)$$

$$Q_x = -EI_y\,\alpha_x'''$$

$$Q_y = -EI_x\,\alpha_y'''$$

$$M_\omega = -EI_\omega\,\vartheta''' \quad \left(\text{torsie-buigmoment} \stackrel{def}{=} \int_F \tau\,\delta\,d\omega\right)$$

Het totale wringend moment M is:

$$M = M_\omega + M_W = -EI_\omega\,\vartheta''' + G I_d\,\vartheta'$$

De randvoorwaarden in dit geval zijn (lengte van de staaf is l):

		$z = l$	
$z = 0$	$\xi = 0$	$N = \bar{N}$	(gegeven)
	$\alpha_x = 0$, $\alpha_x' = 0$	$M_y = 0$	$Q_x = 0$
	$\alpha_y = 0$, $\alpha_y' = 0$	$M_x = 0$	$Q_y = 0$
	$\vartheta = 0$	$M = 0$	$B = \bar{B}$ (zie verder)
	$B = \bar{B}$		

Hieruit volgt:

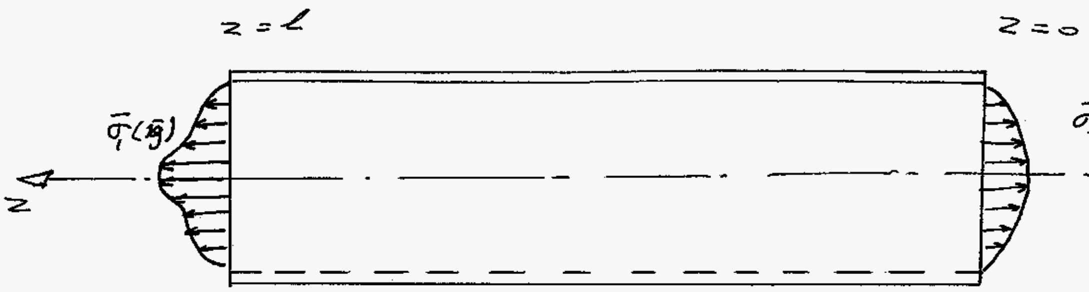
$$\xi = \frac{\bar{N} z}{EF} \qquad N = \bar{N}$$

$$\alpha_x = 0 \qquad Q_x = M_y = 0$$

$$\alpha_y = 0 \qquad Q_y = M_x = 0$$

De uitdrukking van ϑ moeten we nog bepalen.

Allereerst willen we nog aangeven hoe de staaf belast wordt om een toelichting te geven op de hier gegeven randvoorwaarden.



Alleen aan het lijf wordt getrokken in axiale richting, zodat de resultante alleen een kracht in de asrichting levert. Aan de eindvlakken zijn geen schuifspanningen.

De randvoorwaarden ~~voor~~ ξ, α_x en α_y zijn dan duidelijk. De beweging als star lichaam kan verhinderd worden door b.v. bij $z=0$ in te klemmen.

$$\bar N = \int_{lijf} \bar\sigma_1(\bar y)\, dF = \int_{lijf} \bar\sigma_2\, dF$$

Verder $$\bar B = \int_{lijf} \bar\sigma_1 \omega\, dF = \frac{dt}{2}\int_{lijf} \bar\sigma_1\, dF = \frac{dt}{2}\int_{lijf} \bar\sigma_2\, dF$$

We schrijven $\frac{dt}{2} = \bar\omega$

dus $\bar B = \bar N \bar\omega$ voor $z=0$, $z=l$

De algemene oplossing van de d.v. in ϑ luidt:

$$\vartheta(z) = c_0 + c_1 z + c_2 \sinh\frac{k}{l}z + c_3 \cosh\frac{k}{l}z$$

Hieruit volgt:

$$B(z) = -GI_d\left[c_2 \sinh\frac{k}{l}z + c_3 \cosh\frac{k}{l}z\right)$$

$$M_\omega(z) = -GI_d\frac{k}{l}\left[c_2 \cosh\frac{k}{l}z + c_3 \sinh\frac{k}{l}z\right)$$

$$M(z) = GI_d\, c_1$$

Omdat voor $z=l$ $M=0$ geldt $c_1 = 0$

en omdat voor $z=0$ $\vartheta=0$ geldt $c_0 + c_3 = 0$

$z = 0 \qquad B = \bar{B} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{B} = -G\, I_d\, c_3$

$z = l \qquad B = \bar{B} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{B} = -G\, I_d \left[c_2 \sinh k + c_3 \cosh k \right]$

Hieruit volgt:

$$c_3 = -\frac{\bar{B}}{G I_d}$$

$$c_2 = -\frac{\bar{B}}{G I_d} \left(\frac{1 - \cosh k}{\sinh k} \right)$$

$$c_0 = \frac{\bar{B}}{G I_d} \qquad\qquad c_1 = 0$$

Dus:

$$\vartheta(z) = \frac{\bar{B}}{G I_d} \left[1 - \frac{1 - \cosh k}{\sinh k} \sinh \frac{k}{l} z - \cosh \frac{k}{l} z \right]$$

Nu geldt: $\quad 1 - \cosh k = -2 \sinh^2 \frac{k}{2}$

$$\sinh k = 2 \sinh \frac{k}{2} \cdot \cosh \frac{k}{2}$$

dus

$$\vartheta(z) = \frac{\bar{B}}{G I_d} \left[1 + \frac{\sinh \frac{k}{2} \sinh \frac{k}{l} z - \cosh \frac{k}{2} \cosh \frac{k}{l} z}{\cosh \frac{k}{2}} \right] =$$

$$= \frac{\bar{B}}{G I_d} \left[1 - \frac{\cosh \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\cosh \frac{k}{2}} \right]$$

of $\quad \vartheta(z) = \dfrac{\bar{N} \cdot \overset{\bar{\omega}}{\left(\frac{d\,t}{2}\right)}}{G I_d} \left[1 - \dfrac{\cosh \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\cosh \frac{k}{2}} \right]$

: de hoekverdraaiing der dwarsdoorsnede ter plaatse z.

We merken nog op dat $\vartheta(z) = \vartheta(l-z)$
Er is dus symmetrie ten opzichte van $z = \frac{l}{2}$.

Behalve een lineair met ~~z~~ toenemende verplaatsing in axiale richting van de doorsneden ξ, treedt er ook een verdraaiing der doorsneden op (ϑ).

Merk op dat het onbelangrijk is hoe de krachten op het lijf aangrijpen, als de (enige) resultante maar een kracht $\bar{N}$ langs de staafas is.

Opm:

Men zou geneigd zijn te stellen dat een mogelijke randvoorwaarde was:

$z = l$ $\qquad M_\omega = 0$.

Immers aan het uiteinde worden geen schuifspanning aangebracht, dus ondermeer $\int_F \delta\tau \, d\omega = M_\omega = 0$.

In de hier gebruikte theorie mag dit echter niet gesteld worden. Als dynamische randvoorwaarden moet niet gevraagd worden naar de schuifspanningen doch alleen naar de resultanten van deze schuifspanningen: Q_x, Q_y en $M = M_\omega + M_W$. Alleen van deze grootheden kan iets geëist worden. Er kan dus alleen gesteld worden $M = 0$ en niet $M_\omega = 0$ en $M_W = 0$. Uit Vlasov's theorie kan dan dan ook volgen dat er schuifspanningen aan de eindvlakken optreden. Zijn bewering is dan dat deze strijdigheden met de werkelijkheid slechts locale invloed hebben (principe van de Saint-Venant).
Hetzelfde geldt voor de normaalspanningen.

4. Bepaling van de spanningen

In de appendix pag. 12-13 ~~zijn~~ is de normaalspanningsverdeling gegeven

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

In dit geval.

$$\sigma_z = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{B(z)}{J_\omega} \omega$$

Voor $B(z)$ kunnen we met behulp van $B = -EJ_\omega \vartheta''$ schrijven:

$$B(z) = \bar{N} \cdot \bar{\omega} \cdot \frac{\cosh \frac{k}{\ell}\left(\frac{\ell}{2} - z\right)}{\cosh \frac{k}{2}}$$

Dus:

$$\sigma_z = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{\bar{N} \cdot \bar{\omega}}{J_\omega} \cdot \frac{\cosh \frac{k}{\ell}\left(\frac{\ell}{2} - z\right)}{\cosh \frac{k}{2}} \cdot \omega$$

De schuifspanningsverdeling (gelijkmatig verdeeld over de dikte) wordt gegeven door (zie app. pag. 14) :

$$\tau \delta^* = -\frac{Q_x}{J_y} S_y(q) - \frac{Q_y}{J_x} S_x(q) - \frac{M_\omega}{J_\omega} S_\omega(q)$$

δ^*: dikte ter plaatse q

In dit geval:

$$\tau \delta^* = -\frac{M_\omega}{J_\omega} S_\omega(q)$$

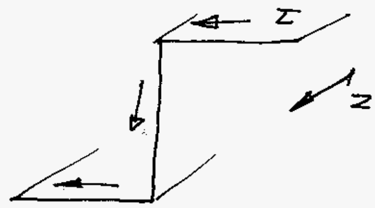
$$\tau\delta^* = \frac{\bar{N}\cdot\bar{\omega}}{J_\omega}\cdot\frac{k}{l}\cdot\frac{\sinh\frac{k}{l}\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\cosh\frac{k}{2}}\cdot S_\omega(q)$$

hierin is dus $\delta^* = \delta_1$ voor $0 \le q \le d_1$,

$d_1 + d \le q \le 2d_1 + d$

en $\delta^* = \delta$ voor $d_1 \le q \le d_1 + d$

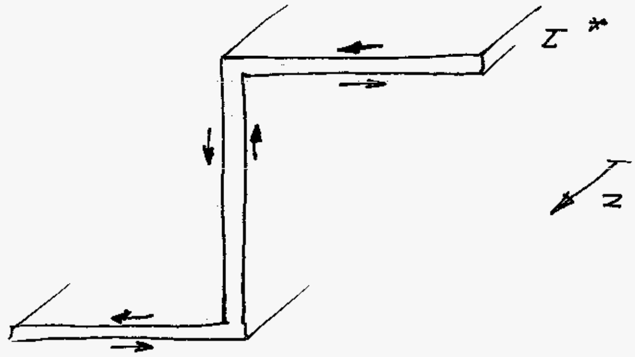
De positieve richting van τ is hieronder aangegeven:



De lineair met de afstand tot de profiellijn veranderende schuifspanning is gegeven door de maximale waarde:

$$\tau^* = G\vartheta'\delta^* = \frac{\bar{N}\cdot\bar{\omega}}{J_d}\cdot\frac{k}{l}\cdot\frac{\sinh\frac{k}{l}\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\cosh\frac{k}{2}}\cdot\delta^*$$

De positieve richting van τ^* is hieronder aangegeven:

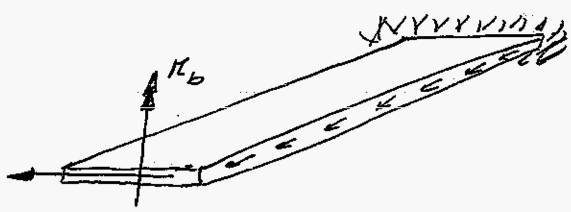


5. Opmerkingen

Het in het voorgaande behandelde probleem, leent zich goed om experimenteel ~~te~~ ~~aan~~ de gegeven theorie te verifiëren.

Getracht zal worden om zowel $\vartheta(z)$ als de spanningen te toetsen.

Men zou dit probleem graag met meer elementaire hulpmiddelen te lijf willen gaan, door b.v. flenzen en lijf van elkaar in gedachten te scheiden en in het snijvlak de mogelijke krachtgrootheden aan te geven. Men zou dan kunnen constateren dat de flenzen t.o.v. het lijf verplaatsen. Door lijf en flenzen over een hoek te draaien is het profiel weer als een geheel samen te voegen. Om de verplaatsing van een flens na te gaan moet echter de verplaatsing bepaald worden van onderstaand vlakstuk:



We zullen ons op dit moment met deze "elementaire" afleiding niet bezighouden.

Eindhoven, 15 oktober 1964

J. Janssen

ir. J.D. Janssen
Groep Techn. Mech.