

Een oud probleem uit de computerindustrie

Citation for published version (APA):

van Lint, J. H. (1977). Een oud probleem uit de computerindustrie. In *Een pak met een korte broek : papers presented to H.W. Lenstra, jr. on the occasion of the publication of his "Euclidische getallenlichamen" / ed. by P. van Emde Boas, J.K. Lenstra, F. Oort ... [et al.]* (blz. 1-3). (Een pak met een korte broek : papers presented to H.W. Lenstra, jr. on the occasion of the publication of his "Euclidische getallenlichamen" / ed. by P. van Emde Boas, J.K. Lenstra, F. Oort ... [et al.], 1977). s.n..

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1977

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

EEN OUD PROBLEEM UIT DE COMPUTERINDUSTRIE

J.H. van Lint

Een aantal jaren geleden bereikte mij een probleem uit een Nederlandse computerindustrie. Het ging over "decodatiebomen" waarvan ik al niet meer weet wat het zijn. Het probleem is al die tijd blijven liggen en wie weet welke gevolgen dit heeft gehad. De productie van dit feestelijk boekwerk gaf mij de gelegenheid er weer eens naar te kijken. Hierbij wordt aan de lezer een oplossing aangeboden die alle mogelijkheden tot verbetering en verfraaiing biedt.

Als inleiding beschouwen we een simplificatie. Zij C_n de verzameling van alle rijtjes $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ uit \mathbb{Z}^n met de eigenschappen

- (1) $a_k \geq 0 \quad (1 \leq k \leq n),$
- (2) $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 2^{k-1} \quad (1 \leq k \leq n-1),$
- (3) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n - 1.$

Het is duidelijk dat geldt

$$(4) \quad \forall \underline{a} \in C_n \quad \forall \underline{b} \in C_n \quad [(1, \underline{a+b}) \in C_{n+1}].$$

We tonen nu een omkering van (4) aan. Laat $(1, \underline{c}) \in C_{n+1}$. Definieer nu \underline{a} en \underline{b} door

- (5) $a_1 + a_2 + \dots + a_k := [\frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \dots + c_k + 1)],$
- (6) $b_1 + b_2 + \dots + b_k := [\frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \dots + c_k)].$

Dat \underline{a} en \underline{b} aan (1) voldoen is nu triviaal. Uit (2) en (3) volgt $c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq 2^{k+1} - 2$ met gelijkheid voor $k = n$. Dus voldoen \underline{a} en \underline{b} ook aan (2) en (3).

Merk op dat de uitspraak niet waar is als we in (1) hadden geschreven $a_k \geq 1.$

Het reeds genoemde probleem is een lastige variant op het bovenstaande. We definiëren nu C_n als de verzameling rijtjes $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ uit \mathbb{N}^n met de eigenschappen

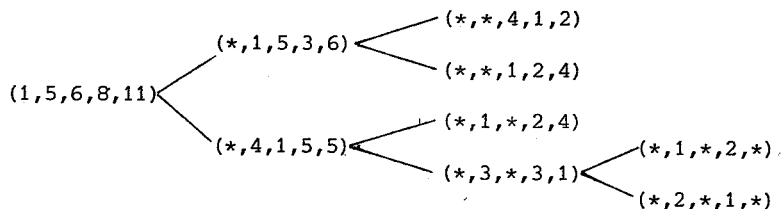
(7) er is een k met $a_k = 1$,

(8) voor $1 \leq k \leq n$ en iedere greep van k verschillende indices i_1, i_2, \dots, i_k geldt

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} \geq 2^k - 1$$

met gelijkheid als $k = n$.

Ook voor deze klasse C_n geldt eigenschap (4). Weer is de vraag om de omkering te bewijzen. De volgende splitsing illustreert het gestelde.



We hebben hier alles teruggebracht tot rijtjes machten van 2.

Beschouw een element $(1, \underline{c})$ uit C_{n+1} met $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ waarbij $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ en $c_1 = 2$. Willen we evenals in de inleiding een \underline{a} en een \underline{b} uit C_n vinden met $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ dan moet $a_1 = b_1 = 1$. De definitie (5), (6) doet het nu weer. De moeilijkheid dat de a_i en b_i niet monotoon toenemen doet zich alleen voor als ruimschoots aan (8) is voldaan. Het is echter wenselijk het intimidatie-element uit deze redenering te verwijderen.

Dit zelfde principe van eerlijk delen moet de basis zijn van de algoritme als $c_1 \neq 2$. We definiëren nu

$$(9) \begin{cases} a_1 = 1, a_2 = c_2 - 1, a_3 = \lfloor \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3 + 1) \rfloor, a_4 = \lfloor \frac{1}{2}c_4 \rfloor, \\ b_1 = c_1 - 1, b_2 = 1, b_3 = \lfloor \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3) \rfloor, b_4 = \lfloor \frac{1}{2}(c_4 + 1) \rfloor. \end{cases}$$

Met behulp van de ongelijkheden $c_1 \geq 3$, $c_1 + c_2 \geq 6$ en $c_1 + c_2 + c_3 \geq 14$ volgt eenvoudig dat de beginstukken a_1, a_2, a_3, a_4 en b_1, b_2, b_3, b_4 aan (7) en (8)

voldoen. We zetten de algoritme weer voort met de verdeling $[\frac{1}{2}c_i], [\frac{1}{2}(c_i+1)]$ zó dat $a_1+\dots+a_k$ en $b_1+\dots+b_k$ steeds gelijk zijn, of 1 verschillen. Hiermee is de gewenste splitsing gerealiseerd. Het bewijs dat deze algoritme goed is kan worden geleverd met volledige inductie. Het principe is weer dat de rijtjes a_i en b_i "bijna" toenemend zijn met uitzonderingen alleen in die gevallen dat aan (8) is voldaan met het $>$ teken.

Zoals in de inleiding reeds is vermeld laat het bovenstaande verder onderzoek en verbetering toe.