Een oud probleem uit de computerindustrie

EEN OUD PROBLEEM UIT DE COMPUTERINDUSTRIE

J.H. van Lint

Een aantal jaren geleden bereikte mij een probleem uit een Nederlandse computerindustrie. Het ging over "decodatiebomen" waarvan ik al niet meer weet wat het zijn. Het probleem is al die tijd blijven liggen en wie weet welke gevolgen dit heeft gehad. De productie van dit feestelijk boekwerk gaf mij de gelegenheid er weer eens naar te kijken. Hierbij wordt aan de lezer een oplossing aangeboden die alle mogelijkheden tot verbetering en verfraaiing biedt.

Als inleiding beschouwen we een simplificatie. Zij C_n de verzameling van alle rijtjes $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ uit $\mathbb{Z}^n$ met de eigenschappen

(1) $a_k \geq 0 \quad (1 \leq k \leq n)$,

(2) $a_1+a_2+\dots+a_k \geq 2^k-1 \quad (1 \leq k \leq n-1)$,

(3) $a_1+a_2+\dots+a_n = 2^n-1$.

Het is duidelijk dat geldt

(4) $\forall\, \underline{a} \in C_n\ \forall\, \underline{b} \in C_n\ [(1, \underline{a+b}) \in C_{n+1}]$.

We tonen nu een omkering van (4) aan. Laat $(1, \underline{c}) \in C_{n+1}$. Definieer nu $\underline{a}$ en $\underline{b}$ door

(5) $a_1+a_2+\dots+a_k := [\tfrac{1}{2}(c_1+c_2+\dots+c_k+1)]$,

(6) $b_1+b_2+\dots+b_k := [\tfrac{1}{2}(c_1+c_2+\dots+c_k)]$.

Dat $\underline{a}$ en $\underline{b}$ aan (1) voldoen is nu triviaal. Uit (2) en (3) volgt $c_1+c_2+\dots+c_k \geq 2^{k+1}-2$ met gelijkheid voor $k = n$. Dus voldoen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ ook aan (2) en (3).

Merk op dat de uitspraak niet waar is als we in (1) hadden geschreven $a_k \geq 1$.

Het reeds genoemde probleem is een lastige variant op het bovenstaande. We definiëren nu C_n als de verzameling rijtjes $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uit $\mathbb{N}^n$ met de eigenschappen

(7) er is een k met $a_k = 1$,

(8) voor $1 \le k \le n$ en iedere greep van k verschillende indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ geldt

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} \ge 2^k - 1$$

met gelijkheid als $k = n$.

Ook voor deze klasse C_n geldt eigenschap (4). Weer is de vraag om de omkering te bewijzen. De volgende splitsing illustreert het gestelde.

- (1,5,6,8,11)
  - (*,1,5,3,6)
    - (*,*,4,1,2)
    - (*,*,1,2,4)
  - (*,4,1,5,5)
    - (*,1,*,2,4)
    - (*,3,*,3,1)
      - (*,1,*,2,*)
      - (*,2,*,1,*)

We hebben hier alles teruggebracht tot rijtjes machten van 2.

Beschouw een element $(1,\underline{c})$ uit C_{n+1} met $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ waarbij $c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n$ en $c_1 = 2$. Willen we evenals in de inleiding een $\underline{a}$ en een $\underline{b}$ uit C_n vinden met $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ dan moet $a_1 = b_1 = 1$. De definitie (5),(6) doet het nu weer. De moeilijkheid dat de a_i en b_i niet monotoon toenemen doet zich alleen voor als ruimschoots aan (8) is voldaan. Het is echter wenselijk het intimidatie-element uit deze redenering te verwijderen.

Dit zelfde principe van eerlijk delen moet de basis zijn van de algoritme als $c_1 \ne 2$. We definiëren nu

$$(9) \quad \begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = c_2 - 1,\ a_3 = [\tfrac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3 + 1)],\ a_4 = [\tfrac{1}{2}c_4], \\ b_1 = c_1 - 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = [\tfrac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3)],\ b_4 = [\tfrac{1}{2}(c_4 + 1)]. \end{cases}$$

Met behulp van de ongelijkheden $c_1 \ge 3$, $c_1 + c_2 \ge 6$ en $c_1 + c_2 + c_3 \ge 14$ volgt eenvoudig dat de beginstukken a_1, a_2, a_3, a_4 en b_1, b_2, b_3, b_4 aan (7) en (8) voldoen. We zetten de algoritme weer voort met de verdeling $[\frac{1}{2}c_i]$, $[\frac{1}{2}(c_i+1)]$ zó dat $a_1+\ldots+a_k$ en $b_1+\ldots+b_k$ steeds gelijk zijn, of 1 verschillen. Hiermee is de gewenste splitsing gerealiseerd. Het bewijs dat deze algoritme goed is kan worden geleverd met volledige inductie. Het principe is weer dat de rijtjes a_i en b_i "bijna" toenemend zijn met uitzonderingen alleen in die gevallen dat aan (8) is voldaan met het > teken.

Zoals in de inleiding reeds is vermeld laat het bovenstaande verder onderzoek en verbetering toe.