

MASTER

Absorptiecoëfficiënten van inhomogene magnetoplasma's

Timmerman, Tim H.B.

*Award date:*  
1985

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Absorptiecoëfficiënten van  
inhomogene magnetoplasma's.

T.H.B. Timmerman.

1985-10

*When you said that the Sun does not move  
Did it show you the answer ?  
When the ships do not fall off the World,  
Does it mean ~~th~~ere is a wall there ?*

Afstudeerwerk, verricht bij de  
vakgroep Theoretische Natuurkunde,  
onder begeleiding van:

Ir. J. Nijs,

Prof. dr. F.W. Sluijter.

### Samenvatting.

In dit verslag wordt een onderzoek gepresenteerd, dat in het kader van een afstudeeropdracht bij de vakgroep Theoretische Natuurkunde van de Technische Hogeschool Eindhoven verricht werd.

Het onderzoek behelst het verschijnsel van linear mode conversion, met specifieke aandacht voor het oplossen van een vierde orde differentiaalvergelijking, die het verloop van het electricisch veld in een inhomogeen magneto-plasma beschrijft.

Dit verslag beschrijft de afleiding van de vergelijking, waarna de vergelijking in de limiet voor lage plasmatemperatuur wordt opgelost.

Tenslotte presenteren we een programma, specifiek geschreven om de vierde orde vergelijking op te lossen, en geven we de eerste, voorlopige resultaten van dit programma.

Inhoud.	
Voorwoord.	1
1. De basisvergelijkingen.	2
1.1 Situatieschets, en afleiding twee gekoppelde tweede orde vergelijkingen	4
1.1.1 De Vlasov-Maxwellvergelijkingen.	5
1.1.2 De tweede orde vergelijkingen.	9
1.2 De vierde orde vergelijking.	11
1.2.1 De oplossing in de singuliere punten.	12
1.3 Asymptotisch gedrag van de oplossingen voor kleine $y$	14
1.4 Asymptotisch gedrag van de oplossingen, $y \rightarrow \infty$	18
1.5 Geval $\beta \rightarrow 0$ ; kleine invalshoek.	20
1.6 De vergelijking voor de $E_y$ component.	22
2. De koude vergelijking.	23
2.1 Inleiding.	24
2.2 De koude vergelijking: gedrag van de oplossingen.	26
2.2.1 Het punt $y = -\beta$ .	26
2.2.2 Het punt $y = 0$	27
2.3 Asymptotisch gedrag van de oplossingen.	28
2.4 De absorptiecoëfficiënt.	30
2.5 Numerieke oplossing van de koude vergelijking.	33
2.5.1 Inleiding	33
2.5.2 Methode en gebruikte vergelijkingen.	34
2.5.3 De beginvoorwaarden.	36
2.5.4 Bespreking van het programma.	37
2.6 De resultaten.	39
3. Numerieke oplossing van de vierde orde vergelijking.	46
3.1 Waarom de vierde orde vergelijking?	47
3.2 Numerieke aanpak en beschrijving van het programma.	48
3.2.1 Fysische overwegingen en algemene aanpak.	48
3.2.2 Bepaling van de korte golfoplossing voor $y > 0$ .	49

3.2.3 Bepaling van de lange golfoplossing voor $y > 0$ .	50
3.2.4 Bepaling van correcte startwaarden in $y = 0$ .	51
3.2.5 Behandeling van de singuliere punten.	52
3.2.6 De integratie voor $y < 0$ .	53
3.2.7 Bepaling van de absorptiecoëfficiënt.	53
3.3 De eerste resultaten.	55

Voorwoord.

Hoewel het ongebruikelijk is, om in een afstudeerverslag een voor- of dankwoord op te nemen wil ik dit toch doen.

De studie voor Natuurkundig Ingenieur, waarvan het afstuderen slechts de laatste fase is, is zeker geen eenvoudige, en in het algemeen een vrij langdurige zaak.

Tijdens mijn studie heb ik nogal wat hulp en adviezen gehad, die zowel op die studie als op de dingen daaromheen betrekking hadden.

Enkele van de adviseurs en hulpverleners, als dat tenminste het goede woord is, wil ik hier speciaal bedanken.

In de eerste plaats natuurlijk de mensen met wie ik in het afgelopen jaar heb samen gewerkt: Jo Nijs, Frans Sluijter, en Leon Kamp.

De leden van mijn vakgroep, voor de koffie en gezelligheid.

بهرتان فرید از بهر معاونت شکر میکنم .

Verder een aantal mensen, die weinig met de studie te maken hadden:

Ad en Ron, Voor de Borrel.

Lenny, voor het motto van dit verslag.

Jan K., voor zijn gepraat.

Mijn kamergenoten over de jaren heen, voor hun geduld.

en al die anderen die ik vergeten ben.

Tim.

Hoofdstuk 1. De basisvergelijkingen.

*"Just the place for a Snark", The Bell man cried,  
As he landed his crew with care,  
Supporting each man on the top of the tide,  
By a finger entwined in his hair.*

*"Just the place for a Snark. I have said it twice.  
That alone should satisfy the crew.  
Just the place for a Snark. I have said it thrice,  
What I tell you three times is true."*

## 1. De Basisvergelijkingen.

De laatste jaren heeft het verschijnsel van linear mode conversion sterk de aandacht getrokken. Dit verschijnsel berust op het bestaan van een gebied in het plasma, waar de dispersierelaties van twee modes samenvallen, waardoor energie kan worden overgedragen tussen deze twee modes.

Toepassingen van deze theorie zijn legio, variërend van Astrofysica (bijvoorbeeld het uitzenden van electromagnetische straling door sterren, hetgeen voor een deel berust op het inverse proces), fusieonderzoek (te denken valt aan het verhitten van een plasma door middel van lasers of radiofrequente bronnen.), plasma-diagnostiek (meten van plasma dichtheden), stabilisatie van plasma's en het genereren van millimeter en sub millimetergolven.

In dit hoofdstuk zullen we de vergelijking afleiden die we gebruiken om dit verschijnsel te beschrijven. In deze vergelijking zullen drie parameters een belangrijke rol spelen.

We zullen ons verder bezighouden met het gedrag van de oplossingen van deze vergelijking in de omgeving van een aantal bijzondere punten van de vergelijking, en vervolgens het asymptotisch gedrag van de oplossingen bestuderen, nabij en ver van het gebied waarin de conversie plaatsvindt.



1.1 Situatieschets, en afleiding van twee gekoppelde tweede orde vergelijkingen.

In het navolgende gaan we ons bezighouden met de wisselwerking van een electromagnetische golf met een half-oneindig, inhomogeen magnetoplasma.

Om dit probleem te beschrijven, nemen we in de ruimte een rechtsdraaiend coördinatenstelsel aan:

De y-as van dit stelsel kiezen we in de richting van de plasma dichtheidsgradiënt, het magneetveld staat evenwijdig aan de z-as. De x-as tenslotte staat loodrecht op de overige twee assen.

De oorsprong van dit stelsel wordt zo gekozen dat daar zal gelden:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \quad (1.1)$$

met  $\omega$  : hoekfrequentie invallende golf

$\omega_p$  : plasmafrequentie

$\omega_c$  : electronen-cyclotronfrequentie.

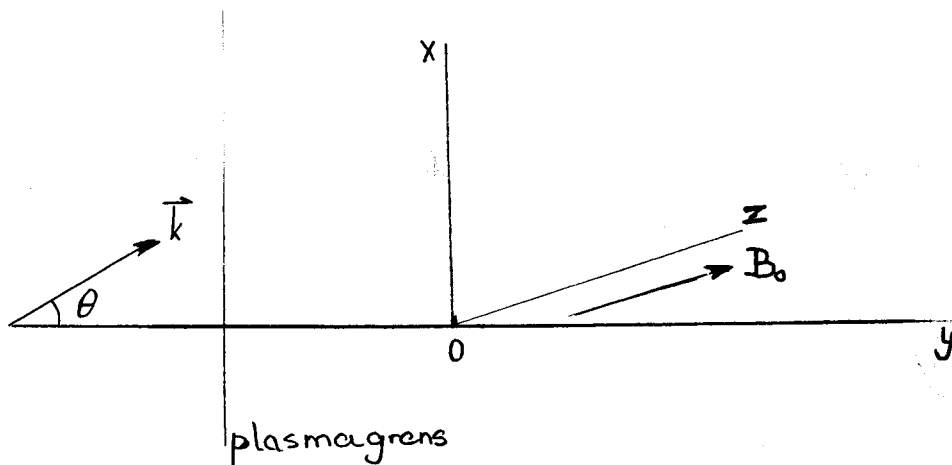
Deze laatste twee grootheden worden gegeven door:

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N(y)}{\epsilon_0 m_e} \quad (1.2) \quad \omega_c = \frac{eB}{m_e} \quad (1.2)$$

De electromagnetische golf is p-gepolariseerd in het x-y-vlak.

De bijbehorende golf vector  $\vec{k}$  zal in vacuum een hoek  $\theta$  met de y-as maken.

Het geheel is schematisch weergegeven in figuur 1.



1.1.1. De Vlasov-Maxwell vergelijkingen.

De voortplanting van een electromagnetische golf wordt beschreven door de vergelijkingen van Maxwell:

$$\text{rot}_{\underline{x}} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

en

$$\text{rot}_{\underline{x}} \underline{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \mu_0 \underline{j} \quad (1.5)$$

De  $\underline{j}$  in formule (1.5) wordt gegeven door:

$$\underline{j} = q \int \underline{v} \cdot f_e^1(\underline{v}) d\underline{v} \quad (1.6)$$

waarin  $f_e^1(\underline{v})$  een storing op de verdelingsfunctie van de electronen voorstelt. De evenwichtsverdeling zullen we aanduiden met  $f_e^0(\underline{v})$ .

De verstoorde verdelingsfunctie is via de Vlasov-vergelijking gekoppeld met het electrisch veld. Deze vergelijking luidt:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} + \frac{q}{m_e} (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \nabla_{\underline{v}} \right\} f_e^1(\underline{v}) = -\frac{q}{m_e} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot \nabla_{\underline{v}} f_e^0(\underline{v}) \quad (1.7)$$

De combinatie van 1.4, 1.5, en 1.6, 1.7 duiden we aan met de term Vlasov-Maxwell vergelijkingen.

Aangezien de plasma dichtheid gegeven wordt door:

$$N = N(y) \quad (1.8)$$

zullen we het elektrisch veld in het plasma beschrijven met

$$\underline{E} = \underline{E}(y) \exp i(k_x x - \omega t) \quad (1.9)$$

Omdat vergelijking 1.7 lineair is, zal dan ook gelden

$$f_e^1(\underline{v}) = f_e^1(y, \underline{v}) \exp i(k_x x - \omega t) \quad (1.10)$$

We zullen aannemen dat de ongestoorde verdelingsfunctie  $f_e^0$  de Maxwellverdeling is gegeven door:

$$f_e^0(\underline{v}) = N(y) \left[ \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_e \underline{v}^2}{2 k_B T} \right] \quad (1.11)$$

Substitutie van deze formules in de Vlasov-Maxwell vergelijkingen levert ons

$$\frac{d^2}{dy^2} E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x(y) - ik_x \frac{d}{dy} E_y(y) = -i \omega \mu_0 j_x \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2\right) E_y(y) - ik_x \frac{d}{dy} E_x(y) = -i\omega\mu_0 j_y \quad (1.13)$$

Om de  $\underline{j}$  te bepalen zullen we 1.10 en 1.11 in de Vlasov-vergelijking 1.7 substitueren en de resterende vergelijking integreren langs de karakteristieken, de deeltjesbanen gegeven door

$$v_x(\tau) = v \cos(\phi - \omega_c \tau) \quad (1.14)$$

$$v_y(\tau) = v \sin(\phi - \omega_c \tau) \quad (1.15)$$

met  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  (1.16)

$$x(\tau) = x + \frac{v}{\omega_c} (\sin(\phi) - \sin(\phi - \omega_c \tau)) \quad (1.17)$$

$$y(\tau) = y + \frac{v}{\omega_c} (\cos(\phi) - \cos(\phi - \omega_c \tau)) \quad (1.18)$$

die de beweging van deeltjes rond de magnetische veldlijnen beschrijven. In deze uitdrukkingen is  $\phi$  een arbitraire fase factor.

Dit leidt tot de volgende uitdrukking voor  $f_e^1(y, \underline{v})$

$$f_e^1(y, \underline{v}) = -\frac{q}{m_e} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau \left[ e^{-i\omega\tau} e^{ik_x \frac{v}{\omega_c} (\sin(\phi) - \sin(\phi - \omega_c \tau))} \times \right. \\ \left. \times \left[ E_x(y(\tau)) \delta_{v_x(\tau)} + E_y(y(\tau)) \delta_{v_y(\tau)} \right] f_e^0(y, v_z, v_x, y) \right] \quad (1.19)$$

We nemen aan dat de straal van de deeltjesbanen, de zogenaamde Larmorradius, gegeven door

$$r_L = \frac{mv}{qB} \quad (1.20)$$

veel kleiner is als de gradiënt lengte van de plasmadichtheid, en klein is ten opzichte van de karakteristieke lengte van variaties in het elektrisch veld.

In dat geval mogen we in goede benadering zeggen dat:

$$N(y(\tau)) \sim N(y) \quad (1.21)$$

en kunnen we het elektrische veld ontwikkelen in een reeks naar  $y$ :

$$E_{x,y}(y(\tau)) \sim E_{x,y}(y) + \frac{v}{\omega_c} (\cos(\omega_c \tau - \phi) - \cos(\phi)) \frac{d}{dy} E_{x,y}(y) + \frac{1}{2} \frac{v^2}{\omega_c^2} (\cos(\omega_c \tau - \phi) - \cos(\phi))^2 \frac{d^2}{dy^2} E_{x,y}(y) \quad (1.22)$$

Na substitutie van 1.22 in 1.19 en uitvoeren van de integratie, onder aanname dat

$$\frac{k_x v_{th}}{\omega_c} = \sin(\theta) \frac{\omega}{\omega_c} \frac{v_{th}}{c} \ll 1 \quad (1.23)$$

is, komen we tot de volgende uitdrukkingen voor  $j_x$  en  $j_y$ .

$$j_x = \frac{q^2 N(y)}{m_e} \left[ \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} E_x - \frac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} E_y + \frac{k_B T}{m} \frac{2k_x}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \frac{d}{dy} E_y - i \frac{k_B T}{m} \left( \frac{8\omega_c^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - 4\omega_c^2)} + \frac{\omega^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - 4\omega_c^2)} \right) \frac{d^2}{dy^2} E_x + \frac{k_B T}{m} \frac{6\omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - 4\omega_c^2)} \frac{d^2}{dy^2} E_y \right] \quad (1.24)$$

$$j_y = \frac{q^2 N(y)}{m_e} \left[ \frac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} E_x + \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} E_y + \frac{k_B T}{m} \frac{2k_x}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \frac{d}{dy} E_x - \frac{k_B T}{m} \frac{6\omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - 4\omega_c^2)} \frac{d^2}{dy^2} E_x - i \frac{k_B T}{m} \frac{3\omega}{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - 4\omega_c^2)} \frac{d^2}{dy^2} E_y \right] \quad (1.25)$$

De voorwaarde 1.23 betekent dat de Larmorstraal klein is ten opzichte van de golflengte van het elektromagnetische veld.

Aan de hierboven genoemde uitdrukkingen is te zien dat de hier behandelde theorie niet geldt als  $\omega \approx \omega_c$ ,  $2\omega_c$ , de zogenaamde cyclotronresonanties. Bij deze frequenties treedt een koppeling op tussen de elektromagnetische golf en de banen van de geladen deeltjes om de magnetische veldlijnen. Deze banen gaan een

seculier gedrag vertonen, hetgeen in feite wil zeggen dat op de normale cirkelspiraal een in de tijd aangroeiende component wordt gesuperponeerd.

Bij de afleiding van bovenstaande vergelijkingen hebben we gebruik gemaakt van een aantal vereenvoudigingen, zoals de aanname dat de reeksontwikkeling voor het elektrische veld 1.22 mag worden afgebroken na de tweede orde term, en de veronderstelling dat

$$\frac{\delta\omega}{n\omega_c - \omega} \ll 1. \text{ Vooral dit laatste gaat als } n\omega_c \rightarrow \omega \text{ niet op.}$$

Ook in dit geval zijn exacte uitdrukkingen, waarin onder andere termen  $\omega^2 - \omega_c^2$  voorkomen, af te leiden, maar deze zijn erg ingewikkeld. (Jo Nijs, private communication).

1.1.2. De Tweede orde vergelijkingen.

Na substitutie van 1.24, 1.25 in 1.12 en 1.13 komen we na enige algebra tot een stelsel van twee tweede orde gekoppelde differetiaalvergelijkingen:

$$E_x^{II} + \epsilon E_x = i\alpha_1 E_y + ik_x E_x^I - 6i\delta\omega_c \alpha_2 E_y^{II} \quad (1.26)$$

$$3\delta\omega_c \alpha_2 E_y^{II} + \Delta E_y = -i\alpha_1 E_x + ik_x E_x^I + 6i\delta\omega_c \alpha_2 E_x^{II} \quad (1.27)$$

Waarbij een aantal termen die klein zijn is verwaarloosd.

In bovenstaande vergelijkingen is de volgende notatie gebruikt:

$$\alpha_1 = \frac{\omega \omega_c}{c^2} \frac{\omega^2 p}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (1.28)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{(\omega^2 - 4\omega_c^2)} \frac{\omega^2 p}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \quad (1.29)$$

$$\epsilon = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 p}{\omega^2 - \omega_c^2} \right) \quad (1.30)$$

$$\Delta = \epsilon - k_x^2 \quad (1.31)$$

Deze vergelijkingen zijn te beschouwen als een stelsel van twee vergelijkingen met drie onbekenden, te weten  $E_y$ ,  $E_y^I$  en  $E_y^{II}$ .

De derde vergelijking, nodig om het stelsel op te lossen, volgt uit:

$$\frac{d^2}{dy^2} E_y = \frac{d}{dy} E_y^I = E_y^{II} \quad (1.32)$$

De methode die we gebruikt hebben om de vergelijkingen 1.26, 1.27 te ontkoppelen, staat beschreven in appendix A1.

In deze sectie geven we slechts het resultaat:

$$\begin{aligned}
 & 3\delta\omega\alpha_2 E_x^{IV} + 3\delta\omega(\alpha_2^I - \frac{\Delta^I}{\Delta}\alpha_2) E_x^{III} + \\
 & + (k_x^2 + \Delta - \frac{6\delta\omega\alpha_2\alpha_1^I + 3\delta\omega\alpha_1\alpha_2^I}{k_x} + \frac{\Delta^I}{\Delta} \frac{3\delta\omega\alpha_2}{k_x} \alpha_1) E_x^{II} \\
 & - (4k_x \frac{\omega}{\omega} \Delta - \frac{\Delta^I}{\Delta} k_x^2) E_x^I \\
 & - (\alpha_1^2 - \Delta\epsilon + k_x \alpha_1^I - k_x \frac{\Delta^I}{\Delta} \alpha_1) E_x = 0
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

De romeinse cijfers en de accenten duiden differentiatie naar de onafhankelijk variabele  $y$  aan, en

$$\delta = \frac{k_B T}{mc^2} \tag{1.34}$$

is een kleine parameter. (Zie tabel I).

$\delta$	T(K)	T(eV)
1.0 E -8	5.93013 E+1	5.1109 E-3
1.0 E -7	5.93013 E+2	5.1100 E-2
1.0 E -6	5.93013 E+3	5.1100 E-1
1.0 E -5	5.93013 E+4	5.1100 E 0
1.0 E -4	5.93013 E+5	5.1100 E+1

Tabel 1.

1.2. De vierde orde vergelijking.

Tot nu toe hebben we nog geen aanname gemaakt over de exakte vorm van het dichtheidsprofiel.

In het voorafgaande is al gezegd dat de oorsprong van het coördinatenstelsel zo gekozen wordt dat daar

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \quad (1.1)$$

Als we aanemen dat de gradientlengte van de plasmadichtheid groter is dan de Debyelengte, dan mogen we nabij de resonantie aanemen dat

$$\omega_p^2 = (\omega^2 - \omega_c^2)(1+y/L) \quad (1.35)$$

Met dit dichtheidsprofiel, en na transformatie

$$\tilde{y} = \left( \frac{\omega^2}{c^2 L} \right)^{1/3} y = ay \quad (1.36)$$

vinden we, na weglaten van de tilde

$$\begin{aligned} & 3\delta \frac{1+2y}{1-4\eta^2\gamma} E_x^{IV} - \frac{3\delta}{1-4\eta^2\gamma} \frac{1+\eta y}{y+\beta} E_x^{III} \\ & + \left( -y + \frac{3\delta}{1-4\eta^2\gamma} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{(1+\eta y)^2}{y+\beta} \right) E_x^{II} \\ & - \frac{\beta}{y+\beta} E_x^I \\ & + (y(y+\beta) - \gamma(1+\eta y)^2 + \sqrt{\beta\gamma} \frac{1-\eta\beta}{y+\beta}) E_x = 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

waarin

$$\eta = \frac{1}{aL} = \left( \frac{c}{\omega L} \right)^{2/3} \quad (1.38)$$

$$\gamma = \left( \frac{\omega_c \omega}{c^2} \right)^2 / a^4 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left( \frac{L\omega}{c} \right)^{4/3} \quad (1.39)$$

$$\beta = k_x^2 / a^2 = \sin^2 \theta \left( \frac{L\omega}{c} \right)^{2/3} \quad (1.40)$$

De vergelijking 1.37 heeft twee regulier singuliere punten, te weten:

$$y = -1/\eta \quad (1.41)$$

$$y = -\beta \quad (1.42)$$

Het gedrag van de oplossing in deze punten zullen we in de volgende subsecties nader onderzoeken.



1.2.1. De oplossing in de singuliere punten.

a)  $y = -1/\eta$  : Dit punt komt overeen met de plasma-vacuum-overgang. De oplossing in dit punt is regulier.

Dit bewijzen we aan de hand van de theorie in appendix A2. De indiciaalvergelijking luidt:

$$f_0(\sigma) = \sigma(\sigma-1)(\sigma-2)(\sigma-3)$$

zodat we als mogelijke oplossingen vinden:

$$\sigma_0=3; \sigma_1=2; \sigma_2=1; \sigma_3=0;$$

We onderzoeken deze oplossingen nu op het bestaan van logaritmische singulariteiten .

1. Oplossing, behorend bij  $\sigma_1$

Logaritmische singulariteiten kunnen zich voordoen

voor  $v = \sigma_0 - \sigma_1 = 1$ .

$$F_1(\sigma_1) = F(2) = -f(2+1) \frac{c}{f_0} = 0$$

Deze oplossing bevat dus geen logaritmische singulariteit.

2. Oplossing, behorend bij  $\sigma_2$

Mogelijke singulariteiten  $v = \sigma_1 - \sigma_2 = 1$

$$v = \sigma_0 - \sigma_2 = 2$$

$$v = 1 \quad F_1(\sigma_2) = -f_0(2) \frac{c_1}{c_0} = 0$$

$$v = 2 \quad F_2(\sigma_2) = f_0(2) \cdot f_0(3) \frac{c_2}{c_0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_2} = 0$$

Ook deze oplossing bevat dus geen logaritmische singulariteit.

3. Oplossing, behorend bij  $\sigma_3$

Logaritmische singulariteiten zijn mogelijk voor

$v=1; v=2; v=3$ .

Wat eenvoudige algebra leert echter dat alle relvante afgeleiden nul zijn voor  $\sigma = \sigma_3$ .

Hierdoor kunnen we concluderen dat alle oplossingen in  $y = -1/\eta$  regulier zijn.

b) De oplossing in  $y = -\beta$ .

In het stelsel gekoppelde differentiaal vergelijkingen 1.26, 1.27, komt dit punt overeen met  $\Delta=0$ , oftewel

$$\varepsilon = k \frac{\omega^2}{x} \quad (1.42)$$

hetgeen voor het lineaire profiel wordt:

$$y = \left( \frac{\omega^2}{c^2 L} \right)^{-1/3} k \frac{\omega^2}{x} \quad (1.43)$$

Met behulp van de theorie in appendix A2, is eenvoudig aan te tonen dat ook in dit punt de oplossingen regulier zijn.

1.3 Asymptotisch gedrag van de oplossingen voor kleine y.

In deze sectie zullen we de oplossingen van 1.37 voor kleine y bestuderen. hiertoe voeren we de volgende notatie in:

$$\lambda^2 = \frac{1-4\eta^2\gamma}{3\delta} \quad (1.44)$$

We schrijven 1.37 in de normaalvorm, dat wil zeggen in een vorm met de derde afgeleide verwijderd.

Hiertoe transformeren we de afhankelijk variabele volgens

$$\begin{aligned} E_x &= w.v \\ &= (y+\beta)^{-1/4} \cdot w \end{aligned} \quad (1.45)$$

We voeren verder in:

$$\alpha_4 = \sqrt{\beta\gamma} (1-\eta\beta) \quad (1.46)$$

Dit levert ons uiteindelijk de vergelijking:

$$\begin{aligned} w^{IV} + \lambda^2 \left( -\frac{y}{1+\eta y} + \frac{1}{\lambda^2} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{1+\eta y}{y+\beta} - \frac{9}{8} \frac{1}{(y+\beta)^2} \right) \right) w^{II} \\ + \left( \frac{-\beta}{(y+\beta)(1+\eta y)} - \frac{y}{1+\eta y} + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{2}{(y+\beta)^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{(y+\beta)^3} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} \frac{1}{(y+\beta)} + \frac{1+\eta y}{(y+\beta)} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \right) \right) w^I \\ + \left( \frac{y(y+\beta)}{1+\eta y} - \gamma(1+\eta y) + \frac{\alpha_4}{(y\beta)(1+\eta y)} + \frac{\frac{3}{16}y - \frac{1}{4}\beta}{(y+\beta)^2(1+\eta y)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda^2} \left( -\frac{315}{256} \frac{1}{(y+\beta)} - \frac{3(1+\eta y)}{16(y\beta)^4} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \right) \right) w = 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

In het geval dat  $|y| \ll \beta < 1/\eta$  en  $\lambda^2$  groot, is dit tot op eerste orde:

$$w^{IV} + \lambda^2 \left( -y w^{II} - w^I + \left( \frac{\alpha_4}{\beta} - \gamma \right) w \right) = 0 \quad (1.48)$$

In navolging van het werk van Rabinstein proberen we oplossingen van de vorm

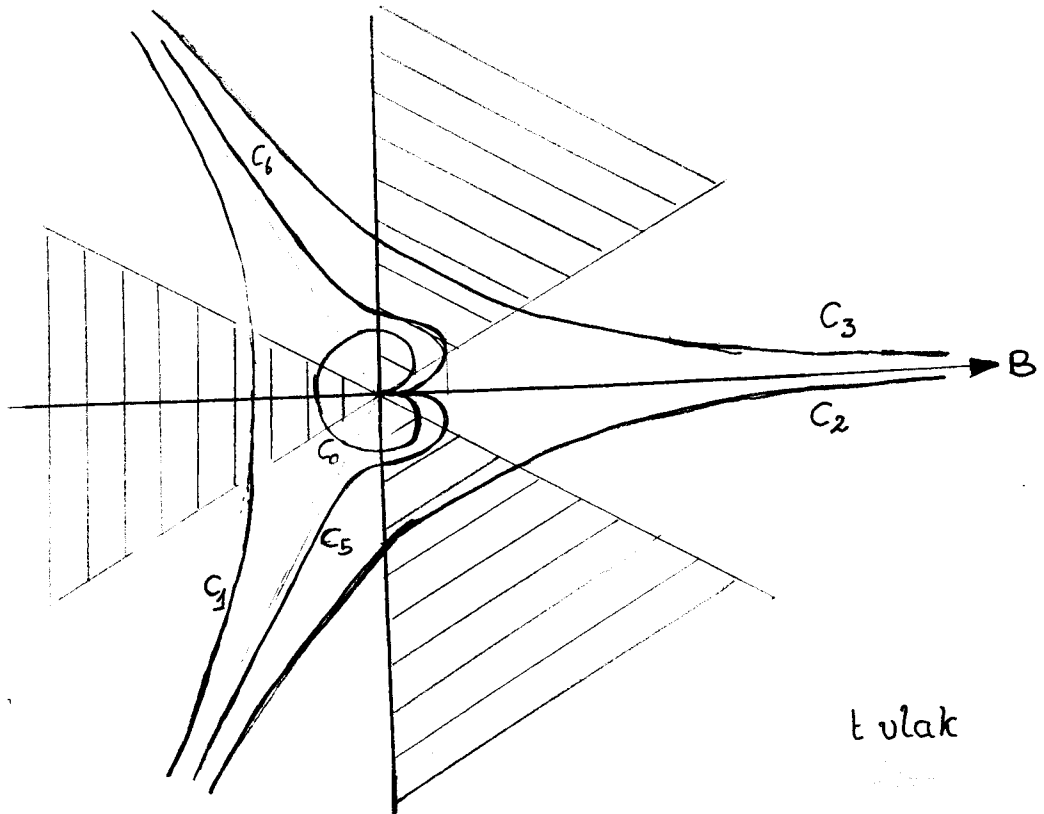
$$W = \int_C f(t) \exp(\gamma t) dt \quad (1.49)$$

en vinden:

$$W_i = \int_{C_i} t^{-1} \exp\left(-\frac{1}{3} \lambda^{-2} t^3 - \frac{B}{t} + yt\right) dt \quad (1.50)$$

met  $B = \gamma - \frac{\alpha_4 - \frac{1}{4}}{\beta}$  (1.51)

De gebruikte contouren  $C_i$  zijn in onderstaande figuur geschetst.



De resultaten van deze integratie zijn, op een constante na:

$$W_0 = J_0(2\sqrt{By}) \quad \text{alle } y \quad (1.52)$$

$$W_6 = \begin{cases} \frac{1}{2}H_0^{(1)}(2\sqrt{By}) & y > 0 \\ \frac{1}{2}H_0^{(1)}(2\sqrt{By}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\xi^{3/4}} \exp(-2i\xi^{3/2}/3) & \arg(y) = +\pi \end{cases} \quad (1.53)$$

$$W_5 = \begin{cases} -\frac{1}{2}H_0^{(2)}(2\sqrt{By}) & y > 0 \\ -\frac{1}{2}H_0^{(2)}(2\sqrt{By}) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{+i\pi/4}}{\xi^{3/4}} \exp(+2i\xi^{3/2}/3) & \arg(y) = -\pi \end{cases} \quad (1.54)$$

$$W_{6+3} = \begin{cases} \frac{1}{2}H_0^{(1)}(2\sqrt{By}) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\xi^{3/4}} \exp(2i\xi^{3/2}/3) & \\ \frac{1}{2}H_0^{(1)}(2\sqrt{By}) & \arg(y) = \pi \end{cases} \quad (1.55)$$

waarbij  $-\pi < \arg(By) < \pi$  (1.56)

$$\xi = \frac{|y|}{(3\delta)^{1/3}} (1-4\eta^2\gamma)^{1/3} \quad (1.57)$$

Dit zijn combinaties van lang- en kortgolvlige oplossingen, waarbij geen interactie optreedt voor  $|y| \gg ((1-4\eta^2\gamma)/(3\delta))^{1/3}$

Zoals al wrd opgemerkt door Rabinstein, zijn in het gebied

$\beta \gg |y| \gg ((1-4\eta^2\gamma)/(3\delta))^{1/3}$ , de bovengenoemde oplossingen met een langolvig karakter (de  $H_0^{(1,2)}$ ) tevens goede benaderingen

voor de oplossingen van:

$$-yE_x^{II} - \frac{\beta}{(y+\beta)} E_x^I + (y(y+\beta) - \gamma(1+\eta y)^2 + \frac{\alpha_4}{(y+\beta)}) E_x = 0 \quad (1.58)$$

hetgeen de zogenaamde koude limiet is van de vierde orde vergelijking 1.37 .

Het bovengenoemde gebied,  $\beta \gg |y| \gg ((1-4n^2\gamma)/(3\delta))^{1/3}$  duiden we aan met de term "intermediate region".

In dit gebied zal de fysisch juiste oplossing beschreven worden door een lineaire combinatie van de oplossingen 1.52 t/m 1.55 .

In deze combinatie zal  $W_{6+3}$  niet voorkomen wegens de sterk exponentiele groei van deze oplossing voor  $y > 0$ .

$W_6$  valt af omdat deze oplossing een op de resonantie invallende kortegolf bevat, hetgeen fysisch overeenkomt met de conversie van plasma- naar electromagnetische golven.

De overblijvende oplossingen kunnen, zoals ook al genoemd door Pilya, gekoppeld worden door middel van analytische voortzetting in het onderste complexe halfvlak.

Dit betekent, dat we, om de absorptiecoëfficiënt te vinden, in principe kunnen volstaan met het oplossen van de koude vergelijking 1.58, waarbij om de singuliere punten van deze koude vergelijking heen integreren via het onderste halfvlak.

Dit is in overeenstemming met het artikel van Erokhin en Moiseev.

1.4 Asymptotisch gedrag van de oplossingen,  $y \rightarrow \infty$

In het navolgende beschouwen we het gedrag van de oplossingen van 1.37 voor grote  $y$ .

Dit betekent dat:

$$|y| \gg 1/\eta \quad (1.60)$$

$$|y| \gg \beta \quad (1.61)$$

Hiervan maken we gebruik, door de coëfficiënten in 1.37 te ontwikkelen in een reeks naar  $y^{-1}$ .

De nodige algebra, met de definitie van  $\lambda$  als voorheen, levert ons:

$$\lambda^{-2} E_x^{IV} - \frac{1}{\eta} E_x^{II} + \left( \frac{1}{\eta} - \eta\gamma \right) y E_x = 0 \quad (1.62)$$

Op voldoende grote afstand van de resonantie (intermediate region), worden de lange golf componenten goed beschreven door het tweede orde deel van de vergelijking 1.62

$$E_x^{II} - (1 - \eta^2 \gamma) y E_x = 0 \quad (1.63)$$

Deze vergelijking heeft de volgende oplossing (zie Abramowitz/ Stegun, formule 9.1.51):

$$E_x = y^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}_{1/3} \left( 2i(1 - \eta^2 \gamma)^{\frac{1}{2}} y^{3/2} \gamma \right) \quad (1.64)$$

waarbij  $\mathcal{G}_{1/3}$  een willekeurige Bessel of Hankelfunctie van orde 1/3 voorstelt, of een lineaire combinatie van die functies.

Door de transformatie

$$z = (1 - \eta^2 \gamma)^{1/3} y \quad (1.65)$$

gaat 1.63 over in

$$E_x^{II} - z E_x = 0 \quad (1.65)$$

de differentiaal vergelijking van Airy, met als oplossingen de Airy-functies  $Ai(z)$  en  $Bi(z)$ .

Voor grote  $z$  zijn deze oplossingen te benaderen door

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \exp(-2z^{3/2}/3) + o(z^{-3/2}) \quad (1.67)$$

$$Bi(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \exp(2z^{3/2}/3) + o(z^{-3/2}) \quad (1.68)$$

De sterk aangroeiende oplossing 1.68 is fysisch niet acceptabel.

In termen van  $y$  wordt 1.67:

$$Ai(y) \sim \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} (1-\eta^2\gamma)^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{4}} \exp(-2(1-\eta^2\gamma)^{\frac{1}{2}} y^{3/2}/3) \quad (1.69)$$

Differentiatie van de oplossingen in termen van Besselfuncties, 1.64 gebruik makend van de bekende recurrente betrekkinge voor de Besselfuncties (zie bijvoorbeeld Abramowitz/Stegun ch.9.), stelt ons nu in staat het begrip " $\lambda$  groot" te kwantificeren.

Het blijkt dat moet gelden:

$$|\lambda| \gg z^{-5/4} \quad (1.70)$$

De oplossingen van vergelijking 1.63, zullen in hoofdstuk 2 weer opduiken bij de beschouwing van het asymptotisch gedrag van de koude vergelijking.



1.5. Geval  $\beta \rightarrow 0$ ; kleine invalshoek.

In het geval dat  $\beta = 0$ , is eenvoudig in te zien dat vergelijking 1.37 singulier is, immers, de coefficient van  $E_x^{III}$  groeit aan met  $\beta^{\frac{1}{2}}$

Dit gedrag wordt veroorzaakt doordat bij de ont koppeling van de tweede orde vergelijkingen 1.26 en 1.27, een aantal verwaarlozingen zijn gemaakt ten opzichte van  $\beta$ , die voor  $\beta$  klein dus niet gemaakt mogen worden.

We zullen dus het geval  $\beta = 0$  apart moeten bekijken.

Hiertoe bedenken we dat  $\beta = 0$  overeenkomt, op grond van de definitie van  $\beta$ , 1.40, met loodrechte inval.

In dit geval worden de tweede orde vergelijkingen 1.26 en 1.27

$$E_x^{II} + \epsilon E_x = i\alpha_1 E_y - 6i\delta\omega_c \alpha_2 E_y^{II} \quad (1.71)$$

$$3\delta\omega_c \alpha_2 E_y^{II} + \epsilon E_y = -i\alpha_1 E_x + 6i\delta\omega_c \alpha_2 E_x^{II} \quad (1.72)$$

De ont koppeling wordt in dit geval eenvoudig, aangezien 1.71 en 1.72 te beschouwen zijn als een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden,  $E_y$  en  $E_y^{II}$ .

Door te bedenken dat :

$$\frac{d^2}{dy^2} E_y = E_y^{II} \quad (1.73)$$

en na substitutie van het lineaire profiel 1.35 en de schaling 1.36 wordt de resulterende vergelijking:

$$\begin{aligned} & 3\delta \frac{1+\eta\gamma}{1-4\eta^2\gamma} E_x^{IV} - 6\delta \frac{\eta}{1-4\eta^2\gamma} \frac{1+\eta\gamma}{1-\eta\gamma} E_x^{III} \\ & + \left( \frac{3\delta}{1-4\eta^2\gamma} (-y-2\eta(1+\eta\gamma)) + 2 \frac{\eta^2}{(1-\eta\gamma)^2} + 2 \frac{\eta\sqrt{\gamma}}{1-4\eta^2\gamma} (1+\eta\gamma) \right. \\ & \quad \left. -y+\delta\eta \frac{1}{1-4\eta^2\gamma} (1+8\eta^2\gamma) \right) E_x^{II} \\ & + 6 \frac{1}{1-4\eta^2\gamma} (-1-2\eta^2\gamma; (-y-2\eta\gamma(1+\eta\gamma)) \frac{\eta}{1-\eta\gamma}) E_x^I \\ & + \left( \frac{3\delta}{1-4\eta^2\gamma} \left( \frac{-\eta}{(1-\eta\gamma)} + \frac{2\eta^2\gamma}{1-\eta\gamma} + (-1-2\eta^2\gamma) \frac{\eta}{(1-\eta\gamma)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2(-y+2\eta\gamma(1+y)) \frac{\eta^2}{(1-\eta\gamma)^2} \right) - \gamma(1+\eta\gamma)^2 y^2 \right) E_x = 0 \quad (1.74) \end{aligned}$$

Voor een koud plasma  $\delta \rightarrow 0$ , gaat 1.74 over in

$$-y E_x^{II} - (\gamma(1+\eta y)^2 - y^2) E_x = 0 \quad (1.75)$$

hetgeen te schrijven is als

$$E_x^{II} + \left( \frac{\gamma}{y} (1+\eta y)^2 - y \right) E_x = 0 \quad (1.76)$$

wat overeenkomt met de limiet  $\beta \rightarrow 0$  voor de koude vergelijking 1.58.

1.6. De vergelijking voor de  $E_y$  component.

Als een nevenresultaat van de ont koppeling, zoals beschreven in appendix A1, van het stelsel gekoppelde tweede orde vergelijkingen, 1.26 en 1.27, vinden we een relatie tussen  $E_y$  en  $E_x$  en zijn afgeleiden:

$$E_y = \frac{i}{y + \beta} (\sqrt{\gamma} (1 + \eta \gamma) E_x - \sqrt{\beta} E_x^I + 3\delta \frac{1}{(1 - 4\eta^2 \gamma)} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} (1 + \eta \gamma)^2 E_x^{II} - 3\delta \frac{1}{(1 - 4\eta^2 \gamma)} (1 + \eta \gamma) \sqrt{\frac{1}{\beta}} E_x^{III}) \quad (1.77)$$

Deze uitdrukking is weer singulier voor  $y = -\beta$ , waar, zoals aangetoond in sectie 1.2.1. de  $E_x$  velden regulier zijn.

Het blijkt dat in dit punt het  $E_y$  veld ook regulier is.

Verder wordt vergelijking 1.77 singulier voor  $\beta \rightarrow 0$ .

In dat geval moet men bovenstaande vergelijking vervangen door:

$$E_y = -i \left( \frac{\eta \gamma - 2\eta \sqrt{\gamma} (1 + \eta \gamma)}{1 - \eta \gamma} E_x + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{1 + \delta (1 + \eta \gamma)}{1 - \eta \gamma} E_x^{II} \right) \quad (1.78)$$

Hoofdstuk 2. De koude vergelijking.

*You may seek it with thimbles-and seek it with care-  
You may hunt it with forks and hope  
You may threaten its life with a Railwayshare,  
You may charm it with smiles and soap.*

2. De koude vergelijking.

2.1 Inleiding.

Als we in de vierde orde ("heet" plasma) vergelijking 1.37 voor  $E_x$  substitueren:

$$E_x = e^{ky} \quad (2.1)$$

dan vinden we de zogenaamde karakteristieke vergelijking:

$$\begin{aligned} \epsilon(1+\eta y)k^4 - \epsilon \frac{1+\eta y}{y+\beta} k^3 + (-y+\epsilon \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{(1+\eta y)^2}{y+\beta}) k^2 \\ - \frac{\beta}{y+\beta} k + (y(y+\beta) - \gamma(1+\eta y)^2 + \frac{\alpha_4}{y+\beta}) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Beschouwen we in deze context de oplossingen 1.52 tot en met 1.55 dan zien we dat deze bestaan uit een combinatie van Hankelfuncties  $H_0^{(1,2)}$  en de exponentiële functie.

Voor voldoende grote  $y$  geldt:

$$H_0^{(1,2)}(2\sqrt{By}) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{By}} \exp(\pm i(2\sqrt{By} - \pi/4)) \quad (2.3)$$

Als we deze asymptotische uitdrukking vergelijken met de vorm 2.1 dan vinden we dat

$$k = 2\sqrt{\frac{B}{y}}$$

hetgeen klein is.

De exponentiële delen vna 1.552 tot en met 1.55 hebben de vorm:

$$\frac{\epsilon^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}} \exp(\pm i \epsilon^{\frac{1}{2}} y^{3/2} / 2/3)$$

waar, evenals in 2.2

$$\epsilon = \frac{3 \delta}{1 - 4\eta^2 \gamma}$$

De vergelijkbare  $k$  van deze uitdrukkingen is:

$$k = \sqrt{2i\epsilon y / 3}$$

Voor voldoende grote  $y$  wordt het gedrag van de lange electromagnetische golven, in hoofdzaak bepaald door het koude deel van vergelijking 2.2, omdat bij substitutie van de asymptotische vorm blijkt dat termen  $\epsilon k^4$ ,  $\epsilon k^3$ , en  $\epsilon k^2$  klein zijn.

Door Pilya en Fedorov wordt aangetoond dat de absorptiecoëfficiënt voor een electromagnetische golf in een "koud" plasma, gelijk is aan de conversiecoëfficiënt voor conversie van de electromagnetische golf in een "heet" plasma.

Uit het voorafgaande mag blijken, dat een studie van de koude vergelijking, en speciaal van de met deze vergelijking geassocieerde absorptiecoëfficiënt, tot belangrijke inzichten over het gedrag van golven in plasma's kan leiden.

De methoden en resultaten van zo'n studie worden in dit hoofdstuk beschreven.

2.2 De koude vergelijking: gedrag van de oplossingen.

De koude vergelijking

$$E_x^{II} + \frac{\beta}{y(y+\beta)} E_x^I - (y+\beta - \frac{\gamma}{y} (1+\eta y) + \frac{\alpha_4}{y(y+\beta)}) E_x = 0$$

heeft twee singuliere punten,  $y=0$  en  $y=-\beta$ .

In deze sectie willen we het gedrag van de oplossing in deze twee punten bestuderen.

2.2.1 Het punt  $y=-\beta$

Nabij dit punt gaat, na substitutie van

$$x=y+\beta \tag{2.4}$$

en onder aanname dat  $|x| \ll \beta$

de koude vergelijking over in:

$$E_x^{II} - \left( \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{\beta} \right)^n \right) E_x^I - \left( x + \frac{\gamma}{\beta} (1+\eta(x-\beta)) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{\beta} \right)^n - \frac{\gamma}{\beta} (1-\eta\beta) \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{\beta} \right)^n E_x = 0 \tag{2.5}$$

Op deze vergelijking passen we de theorie van appendix A2 toe. Na substitutie van

$$E_x = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\rho+\nu} \tag{2.6}$$

vinden we als indiciaal vergelijking:

$$f_0(\rho) = \rho(\rho-2) = 0 \tag{2.7}$$

met als oplossingen:

$$\rho_0 = 2, \rho_1 = 0$$

Logaritmische singulariteiten zijn dus mogelijk voor  $\nu=2$ .

De theorie van appendix A2 leert ons dat de oplossingen vrij zijn van singulariteiten als

$$F_2(0) = f_0(1) f_0(2) \frac{c_1}{c_0} = 0 \tag{2.8}$$

hetgeen natuurlijk triviaal volgt uit 2.7.

De oplossing is dus regulier in  $y=-\beta$ .

2.2.2. Het punt  $y=0$ .

We nemen aan dat in een omgeving van dit punt geldt dat

$$|y| \ll \beta$$

De koude vergelijking wordt dan, tot op eerste orde in  $\frac{y}{\beta}$

$$E_x^{II} + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{\beta} + \frac{y}{\beta^2} \right) E_x^I - \left( \left( 1 - \eta^2 \gamma + \frac{\alpha_4}{\beta^3} \right) y + \left( \beta - 2\eta\gamma - \frac{\alpha_4}{\beta^2} \right) + \left( -\frac{\alpha_4}{\beta} - \gamma \right) \frac{1}{y} \right) E_x = 0 \quad (2.9)$$

De bij deze vergelijking horende indiciaal vergelijking luidt:

$$\rho^2 = 0 \quad (2.10)$$

en heeft twee samenvallende wortels.

Zoals wordt opgemerkt in appendix A2, heeft in dit geval een van de oplossingen altijd een logaritmische singulariteit.

Het punt  $y=0$  is dan de resonantie.



2.3 Asymptotisch gedrag van de oplossingen.

Om het gedrag van de oplossingen te bestuderen voor  $y \rightarrow \infty$  substitueren we in vergelijking 2.2

$$z=y^{-1} \tag{2.11}$$

hetgeen ons de volgende vergelijking levert:

$$E_x^{II} + \left(\frac{2}{z} - \frac{\beta}{1+\beta z}\right)E_x^I + \left(\frac{1}{z^5} + \frac{\beta-2\eta\gamma}{z^4} - \frac{\eta^2\gamma}{z^5} - \frac{\gamma}{z^3} + \frac{\alpha_4}{z^2(z+1)}\right)E_x = 0 \tag{2.12}$$

In  $z=0$  heeft deze vergelijking een essentiële singulier punt zodat we mogen concluderen dat  $y=\infty$  een essentiële singulier punt van de koude vergelijking is.

In navolging van Nayfeh proberen we, om het asymptotisch gedrag van de vergelijking te beschrijven, een oplossing van de vorm:

$$E_x(y) = \exp\Lambda(y) y^\sigma u(y) \tag{2.13}$$

een zogenaamde Thoméexpansie, met  $\Lambda(y)$  een polynoom van graad  $\nu$ , met eerste term  $\lambda y^\nu$ .

$u(y)$  is een machtreeks naar negatieve machten van  $y$ .

Voor grote  $y$  gaat vergelijking 2.2 over in:

$$E_x^{II} - \alpha_1 y E_x = 0 \tag{2.14}$$

met  $\alpha_1 = (1 - \eta^2 \gamma) \tag{2.15}$

Dit is natuurlijk weer de Airyvergelijking. 1.66 .

Substitutie van 2.13 in 2.14 levert:

$$\lambda = \frac{2}{3} \sqrt{\alpha_1} \tag{2.16}$$

$$\nu = \frac{3}{2} \tag{2.17}$$

Dit is een zogenaamde subnormal solution met  $\Lambda(y)$  een polynoom van graad 3 in  $y^{\frac{1}{2}}$  en  $u(y)$  een machtreeks naar  $y^{-\frac{1}{2}}$  (zie bijvoorbeeld Nayfeh, p.311).

Na het nodige rekenwerk vinden we:

$$\Lambda(y) = \frac{2}{\alpha_1} y^{3/2} / 3 + \frac{\beta-2\eta\gamma}{\sqrt{\alpha_1}} y^{\frac{1}{2}} \tag{2.18}$$

$$\sigma = -1/4 \tag{2.19}$$

De eerste zes coëfficiënten in  $u(y)$  worden:

$$C_0 = 1 \quad (2.21)$$

$$C_1 = A/\sqrt{\alpha_1} \quad (2.23)$$

$$C_2 = (AC_1 - B)/(2\sqrt{\alpha_1}) \quad (2.24)$$

$$C_3 = (AC_2 - (B + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}})C_1 + D)/(3\sqrt{\alpha_1}) \quad (2.25)$$

$$C_4 = (AC_3 - BC_2 + (\frac{1}{2} + D)C_1 - F)/(4\sqrt{\alpha_1}) \quad (2.26)$$

$$C_5 = (AC_4 - (\frac{\alpha_4}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} + B)C_3 + (7/2 + D)C_2 - FC_1)/(5\sqrt{\alpha_1}) \quad (2.27)$$

met  $\alpha_2 = \beta - 2\eta\gamma \quad (2.28)$

$$A = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{\alpha_1}} - \beta\sqrt{\alpha_1} \quad (2.29)$$

$$D = 5/16 - \alpha_4 \beta \alpha_2 \quad (2.30)$$

$$F = -\beta^2 \sqrt{\alpha_1} + \frac{\beta \alpha_2}{2\sqrt{\alpha_1}} \quad (2.31)$$

Het is interessant op te merken dat de asymptotiek van de warme vergelijking voor  $y \rightarrow \infty$  (sectie 1.4) aanleiding geeft tot de zelfde vergelijking 1.63 als de asymptotische ontwikkeling van de koude vergelijking 2.14

Dit betekent dat ver van de resonantie, de koude vergelijking een goede benadering is voor het warme plasma probleem.

2.4 De absorptiecoëfficiënt.

De in de vorige sectie afgeleide Thoméexpansie zal worden gebruikt om, na numerieke integratie, de absorptiecoëfficiënt te bepalen.

Hiertoe zullen we de Thoméexpansie moeten splitsen in een naar links en een naar rechts (= positieve y-richting) lopende golven. Deze splitsing wordt uitgevoerd in een punt op de negatieve reële y-as, beschreven door:

$$y = |y| e^{i\pi}$$

We werken eerst het exponentiele deel van de Thomé-expansie 2.13 uit met als resultaat:

$$y^{-\frac{1}{4}} \exp(\Lambda(y)) = (\cos\phi + i \sin\phi) |y|^{-\frac{1}{4}} \quad (2.32)$$

met  $\phi = -2\sqrt{\alpha_1} |y|^{3/2} / \sqrt{3} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} |y|^{\frac{1}{2}} - \pi/4$  (2.33)

Het tweede deel van de Thoméexpansie de reeks  $u(y)$  gegeven door

$$u(y) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s y^{-\frac{1}{2}s} \quad (2.34)$$

wordt op de negatieve reële as:

$$u(y) = i \frac{C_2}{|y|} + \frac{C_4}{|y|} - i \left( \frac{C_1}{|y|^{\frac{1}{2}}} - \frac{C_3}{|y|^{3/2}} + \frac{C_5}{|y|^{5/2}} \right) \quad (2.35)$$

hetgeen we zullen schrijven als

$$u = u_1 + i u_2 \quad (2.36)$$

De Thoméexpansie is dus een complexe functie met reëel deel

$$\text{Re}_T = u_1 \cos\phi + u_2 \sin\phi \quad (2.37)$$

en imaginair deel

$$\text{Im}_T = u_1 \sin\phi - u_2 \cos\phi \quad (2.38)$$

Ver van de resonantie ( $|y|$  groot) wordt dit natuurlijk:

$$\text{Re}_T(\infty) = \cos\phi \quad (2.39)$$

$$\text{Im}_T(\infty) = \sin\phi \quad (2.40)$$

Met behulp van deze formules kunnen we naar links en rechts lopende golven onderscheiden.

De naar links lopende golf:

$$\operatorname{Re}_T - i \operatorname{Im}_T \quad (2.41)$$

De naar rechts lopende golf

$$\operatorname{Re}_T + i \operatorname{Im}_T \quad (2.42)$$

De numerieke oplossing moet, in een punt op de negatieve reële as gelijk zijn aan een lineaire combinatie van naar links en naar rechts lopende golven, als dat punt tenminste ver genoeg van de resonantie verwijderd is.

Als we de numerieke oplossing aanduiden met  $\operatorname{Re}_O + i \operatorname{Im}_O$  betekent dit in feite dat:

$$\operatorname{Re}_O + i \operatorname{Im}_O = (a_1 + ia_2) \operatorname{Re}_T + (b_1 + ib_2) \operatorname{Im}_T \quad (2.43)$$

Gelijkstellen van reële en imaginaire delen levert:

$$\operatorname{Re}_O = a_1 \operatorname{Re}_T + b_1 \operatorname{Im}_T \quad (2.44)$$

$$\operatorname{Im}_O = a_2 \operatorname{Re}_T + b_2 \operatorname{Im}_T \quad (2.45)$$

Dit moet ook gelden voor de eerste afgeleiden:

$$\frac{d}{dy} \operatorname{Re}_O = a_1 \frac{d}{dy} \operatorname{Re}_T + b_1 \frac{d}{dy} \operatorname{Im}_T \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dy} \operatorname{Im}_O = a_2 \frac{d}{dy} \operatorname{Re}_T + b_2 \frac{d}{dy} \operatorname{Im}_T \quad (2.47)$$

Combinatie van 2.44 en 2.46 levert ons twee vergelijkingen met twee onbekenden, evenals de combinatie van 2.45 en 2.47. Het is nu eenvoudig om deze stelsels op te lossen voor  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  en  $b_2$ .

Op grond van 2.39, 2.40 en 2.43 wordt de oplossing in het oneindige gegeven door:

$$E_x(\infty) = (a_1 + ia_2) \cos \phi + (b_1 + ib_2) \sin \phi \quad (2.48)$$

Splitsen we dit in een naar links en naar rechts lopende golf

$$E_x(\infty) = A e^{i\phi} + B e^{-i\phi} \quad (2.49)$$

dan volgt

$$A + B = a_1 + ia_2 \quad (2.50)$$

$$A - B = -i(b_1 + ib_2) \quad (2.51)$$

hetgeen op triviale wijze A en B levert.

Definieren we nu de reflectiecoëfficiënt als de verhouding, in het "oneindige" van de intensiteiten (kwadraat van de amplitudes) van de naar links en rechts lopende golven:

$$\text{Refc} = \left| \frac{A}{B} \right|^2 \quad (2.52)$$

dan wordt de absorptiecoëfficiënt:

$$\text{absc} = 1 - \text{Refc} \quad (2.53)$$

## 2.5 Numerieke oplossing van de koude vergelijking.

### 2.5.1 Inleiding.

Om de in sectie 2.4 ingevoerde absorptiecoëfficiënt te berekenen is een programma geschreven, waarvan de listing is te vinden in appendix A3.

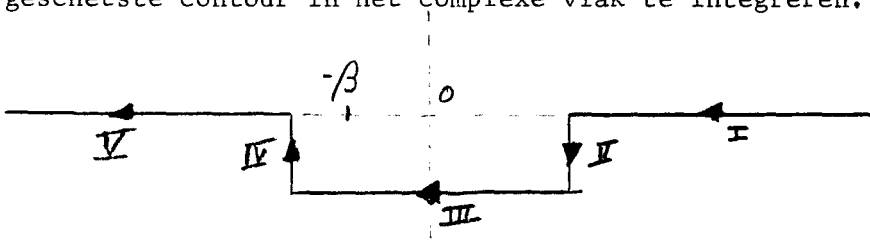
Dit programma berekent niet alleen de absorptiecoëfficiënt, maar zet de resultaten meteen in een grafiek uit. Deze resultaten worden in de volgende sectie gepresenteerd.

In deze sectie wordt eerst de algemene aanpak beschreven, en vervolgens bekijken we een aantal procedures die in het programma gebruikt worden.

2.5.2. Methode en gebruikte vergelijkingen.

De basisvergelijking voor het koude plasma, vergelijking 2.2 heeft de regulier singuliere punten  $y=0$  en  $y=-\beta$ . Alhoewel de oplossing alleen in  $y=0$  singulier is, zullen beide punten problemen geven bij numerieke integratie.

Daarom zullen we die punten omzeilen door langs de in figuur 3 geschetste contour in het complexe vlak te integreren.



figuur 3

Om deze contour te kunnen gebruiken zullen we de vergelijking moeten herschrijven, door invoeren

$$z = x + iy \tag{2.54}$$

en  $E_x = \text{Re} + i \text{Im} \tag{2.56}$

waarbij we aantekenen dat de  $y$  in vergelijking 2.54 een andere is als de tot nu toe gebruikte.

Met deze nieuwe notatie gaan we nu de vergelijkingen voor de diverse contourdelen aangeven.

2.5.2.1 Contour I.

Op deze contour is  $y=0$  en  $x$  variabeel.

We splitsen de koude vergelijking in een reëel en imaginair deel.

Reële deel:

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{Re} + \frac{\beta}{x(x+\beta)} \frac{d}{dx} \text{Re} - (\alpha_1 x + \alpha_2 - \frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha_4}{x(x+\beta)}) \text{Re} = 0 \tag{2.57}$$

Imaginair deel:

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{Im} + \frac{\beta}{x(x+\beta)} \frac{d}{dx} \text{Im} - (\alpha_1 x + \alpha_2 - \frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha_4}{x(x+\beta)}) \text{Im} = 0 \tag{2.58}$$

2.5.2.2 Contour II.

Op deze contour blijft x constant terwijl y variabel is.

De afgeleiden worden nu:

$$E_x^I = -i(\text{Re}' + i \text{Im}') \quad (2.59)$$

$$E_x^{II} = -(\text{Re}^{II} + i \text{Im}^{II}) \quad (2.60)$$

Omwillen van het overzicht voeren we de volgende notatie in:

$$\frac{\beta}{z(z+\beta)} = D(E-iF) \quad (2.61)$$

$$\frac{\gamma}{z} = G-iH \quad (2.62)$$

$$\frac{\alpha_1}{z(z+\beta)} = K(E-iF) \quad (2.63)$$

$$\alpha_1 z = L+iM \quad (2.64)$$

$$\alpha_2 = B \quad (2.65)$$

Uitwerken en splitsen van de vergelijking in een reëel en imaginair deel levert:

Reële deel

$$\text{Re}^{II} + D E \text{Im}^I - D F \text{Re}^I - (L+B-G+K.E)\text{Re} + (M+H-K.F)\text{Im} = 0 \quad (2.66)$$

$$\text{Im}^{II} - D.E \text{Re}^I - D.F \text{Im}^I - (L+B-G+K.E)\text{Im} - (M+H-K.F)\text{Re} = 0 \quad (2.67)$$

2.5.2.3. Contour III.

Op contour III is x variabel en y constant.

De afgeleiden gaan over in

$$E_x^I = \text{Re}' + i \text{Im}' \quad (2.68)$$

$$E_x^{II} = \text{Re}'' + i \text{Im}'' \quad (2.69)$$

Met de in devorige sectie ingevoerde notatie worden de vergelijkingen:

$$\text{Re}'' + D.E \text{Re}' + D.F \text{Im}'' - (L+B-G+K.E)\text{Re} + (M+H-K.F)\text{Im} = 0 \quad (2.70)$$

$$\text{Im}'' + D.E \text{Im}' - D.F \text{Re}' - (L+B-G+K.E)\text{Im} - (M+H-K.F)\text{Re} = 0 \quad (2.71)$$



2.5.2.4. Contouren IV en V.

DE integratie over contour IV maakt gebruik van de zelfde vergelijking als de integratie over contour II, en voor contour V kunnen we dezelfde vergelijkingen gebruiken als bij contour I.

2.5.3. De Beginvoorwaarden.

De integratie begint in een willekuerig, ver van de resonantie gekozen punt op de positieve reële as.

De in dat punt benodigde beginvoorwaarden worden geleverd door de in sectie 2.3 afgeleide Thoméexpansie.

Bij de overgang van de ene contour op de andere wordt gebruik gemaakt van de Cauchy-Riemann randvoorwaarden. Deze leveren de beginwaarden bij de ~~mieuwe~~ integratievariabele. Ze zijn als volgt geformuleerd:

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.74)$$

#### 2.5.4. Bespreking van het programma.

De listing van het programma is te vinden in appendix A3.

Deze listing heeft betrekking op een programma dat grafieken tekent van de absorptiecoëfficiënt als functie van  $\beta$  bij een vaste waarde van  $\gamma$  en in een figuur voor verschillende waarden van  $\eta$ .

Het eigenlijke rekenwerk wordt gedaan door de procedure ABSORPTIE die ook nog een aantal subprocedures bevat. Procedure CADRE tekent een kader voor de plaatjes.

#### 2.54.1. Functiebeschrijving van de procedure ABSORPTIE.

Heading:

```
REAL PROCEDURE ABSORPTIE(BETA,GAMMA,ETA);  
VALUE BETA,GAMMA,ETA; REAL BETA,GAMMA,ETA;
```

Beschrijving:

De namen van de formele parameters geven aan om welke parameters in vergelijking 2.3 het gaat.

Door de gebruikte contour is de maximaal acceptabele waarde van  $\beta=2.9$ . Dit levert in de praktijk weinig problemen op.

Iets lastiger is de beperking die moet worden opgelegd aan de keuze van  $\eta$  en  $\gamma$ . Zoals in sectie 2.3 al is aangegeven moet bij de berekening van de Thoméexpansie gedeeld worden door  $\alpha_1=1-\eta^2\gamma$ . Hieruit volgt dat  $\eta^2$  niet te dicht bij  $\frac{1}{\gamma}$  mag liggen. Fysisch betekent dit dat  $\omega$  niet te dicht bij  $\omega_c$  mag liggen.

In deze procedure zijn een drietal subprocedures opgenomen, te weten RECHTSI, RECHTSII, en RECHTSIII. Deze procedures berekenen het rechterlid van de als

$$E^{II}=L(E,E^I) \quad (2.75)$$

geschreven vergelijkingen uit de vorige sectie.

Integratie van de differentiaalvergelijkingen gebeurt met de standaard NUMLIB procedures RK2 en RK2N. Deze procedures zijn Runge-Kutta methodes van orde vijf voor de integratie van

respectievelijk, tweede orde en stelsels van gekoppelde tweede orde vergelijkingen.

De berekening van de absorptiecoëfficiënt gebeurt met behulp van de in sectie 2.4 afgeleide vergelijkingen.

## 2.6 De resultaten .

De /output van de in de vorige sectie beschreven programma's is te vinden in figuur 3 t/m 11.

Deze figuren zijn te verdelen in twee series:

Serie I: figuren 3 t/m 5 heeft betrekking op de absorptiecoefficient als functie van  $\beta$ .

Serie II: figuren 5 t/m 11 heeft betrekking op de absorptiecoefficient als functie van  $\gamma$ .

### 2.6.1. Serie I.

Het eerste plaatje in deze serie is getekend voor een  $\gamma=0$ . In dit geval gaat vergelijking 2.2 over in:

$$E_x^{II} + \frac{\beta}{y(y+\beta)} E_x^I - (y+\beta) E_x = 0 \quad (2.76)$$

De absorptiecoefficient is nu niet langer afhankelijk van  $\eta$ .

De curves in figuur 3 vallen dan ook samen.

Het geval  $\gamma=0$  komt overeen met een niet gemagnetiseerd plasma.

Dit geval is o.a. bestudeerd door Forslund et al.

Het blijkt dat hun resultaten voor een koud plasma goed overeenstemmen met de onze.

De overige plaatjes in deze serie kunnen voor zich zelf spreken.

### 2.6.2 Serie II.

Het eerste plaatje uit deze serie is getekent voor het geval  $\beta=0$ , dat wil zeggen loodrechte inval. Uit het plaatje blijkt duidelijk de afhankelijkheid van de absorptiecoefficient van de sterkte van het magneetveld. Tevens blijkt dat voor grotere  $\eta$  de absorptie toeneemt.

Een mogelijke verklaring voor dit feit zou kunnen zijn dat voor deze grotere  $\eta$ , het turning point dicht bij de resonantie ligt.

Figuur 7 en 8 geven dezelfde gegevens voor andere invalshoeken.

Interessanter zijn de in figuren 9,10 en 11 weergegeven resultaten. Hier treedt voor grotere  $\eta$  een tweede, kleinere piek op voor de absorptiecoefficient.

Een mogelijke verklaring voor dit verschijnsel is te vinden in het werk van Ting-wei Tang. Hij vindt, in het geval van een koud plasma, de volgende analytische uitdrukking voor de reflectiecoëfficiënt:

$$|R|^2 = \frac{1-2 \exp(-2\rho M) \sin^2(\rho K) + \exp(-4\rho M) \sin^2(\rho K)}{1+2 \exp(-2\rho M) \sin^2(\rho K) + \exp(-4\rho M) \sin^2(\rho K)} \quad (2.77)$$

met 
$$K = \int_0^\alpha \left( \frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{x} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.78)$$

$$M = \int_{-\beta}^\alpha \left( \frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{-x} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.79)$$

$$\rho = \frac{(2\pi)^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{\eta} \quad (2.80)$$

$$\alpha = \frac{\omega_c}{\omega} + \frac{\omega^2}{\omega^2} \frac{c}{\omega^2} \quad (2.81)$$

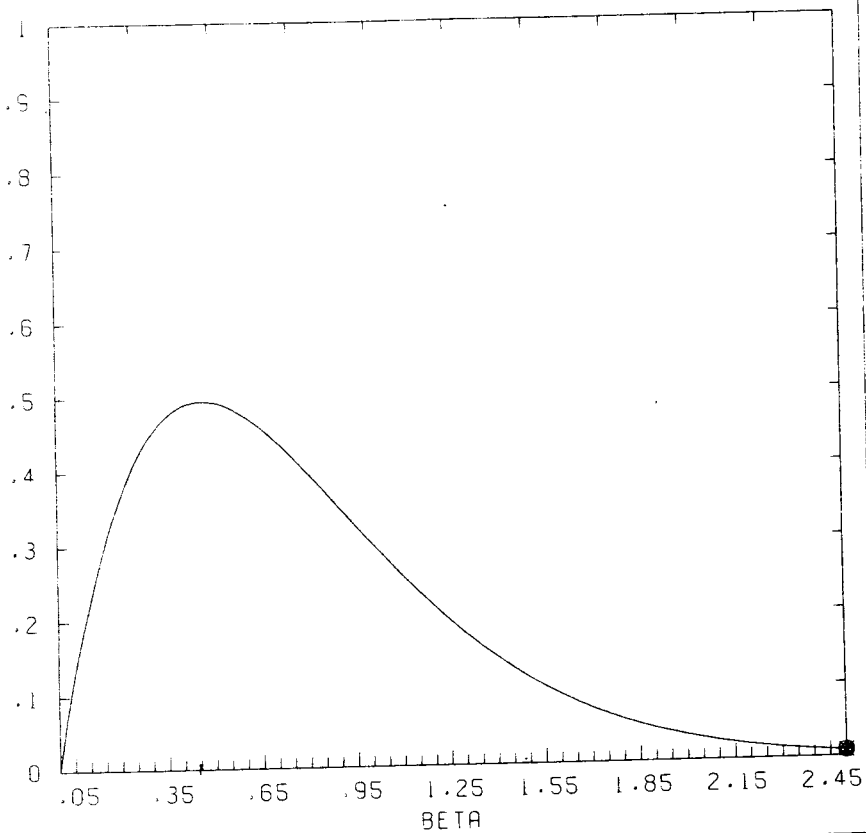
$$\beta = \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega^2}{\omega^2} \frac{c}{\omega^2} \quad (2.82)$$

Zoals uit deze vergelijking blijkt, is  $\rho$  een functie van  $\eta$ .

De uitdrukkingen voor  $K$  en  $M$  zijn niet te vereenvoudigen, maar zoals uit de formules blijkt zijn dit constanten, bij een vaste waarde van  $\gamma$ .

Voor een bepaalde waarde van  $\eta$  zou dus, op grond van deze uitdrukking inderdaad een resonantie kunnen optreden.

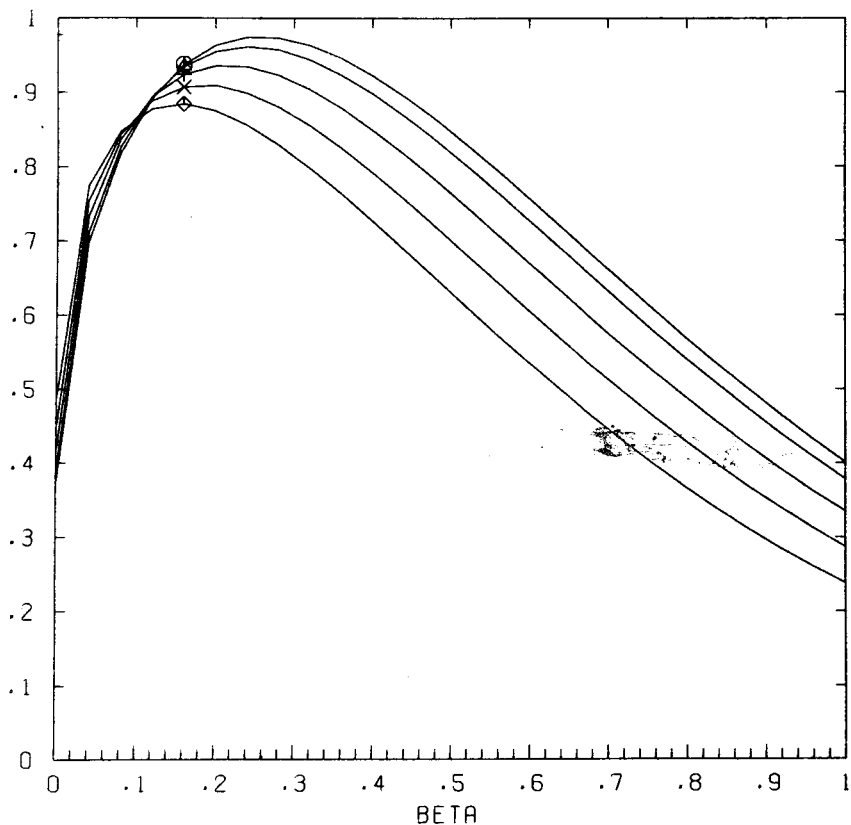
-41-



- :ETA= 0.01000
- △ :ETA= 0.05000
- ⊕ :ETA= 0.10000
- × :ETA= 0.25000
- ◇ :ETA= 0.50000

GAMMA= 0.00000

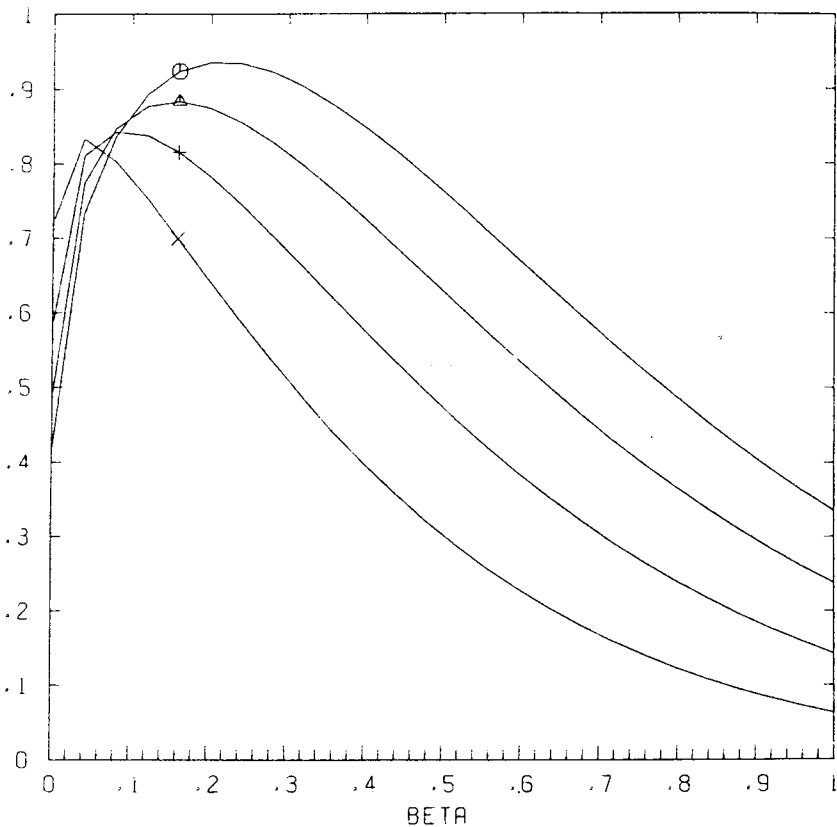
figur 3.



- :ETA= 0.10000
- △ :ETA= 0.25000
- ⊕ :ETA= 0.50000
- × :ETA= 0.75000
- ◇ :ETA= 1.00000

GAMMA= 0.10000

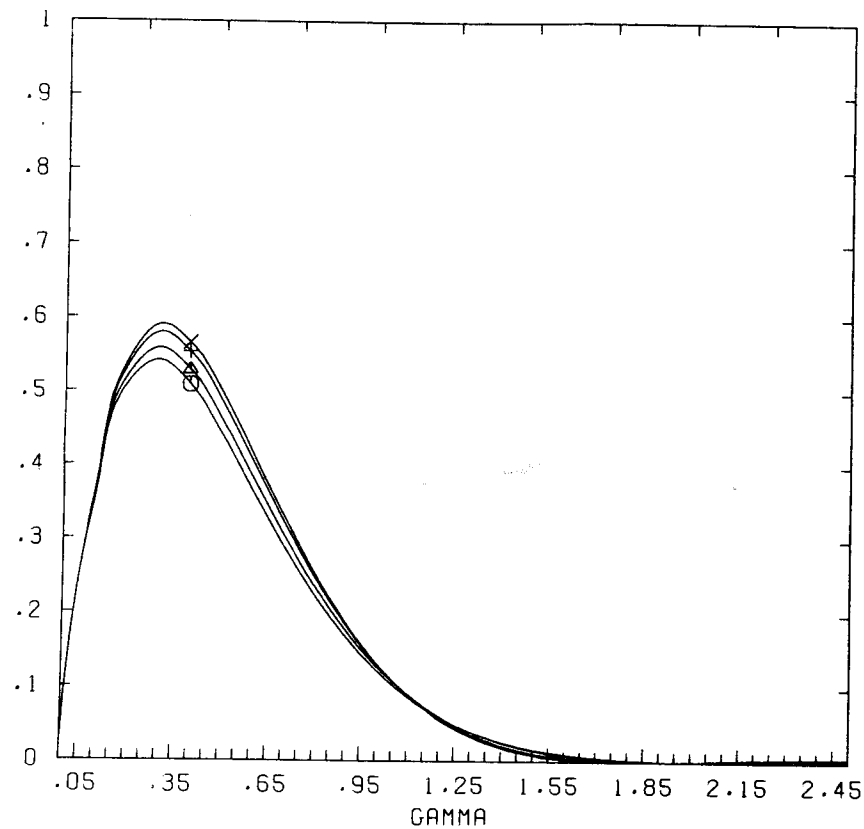
figur 4



○ :ETA= 0.50000  
△ :ETA= 1.00000  
+ :ETA= 1.50000  
× :ETA= 2.00000

GAMMA= 0.10000

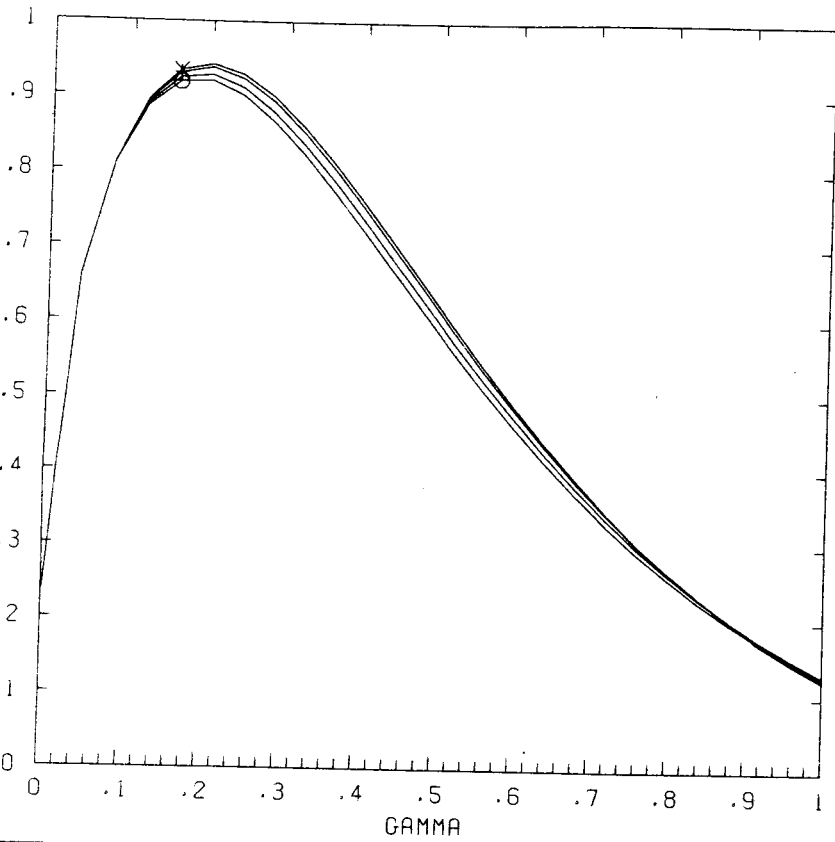
figur 5.



○ :ETA= 0.01000  
△ :ETA= 0.05000  
+ :ETA= 0.10000  
× :ETA= 0.12500

BETA= 0.00000

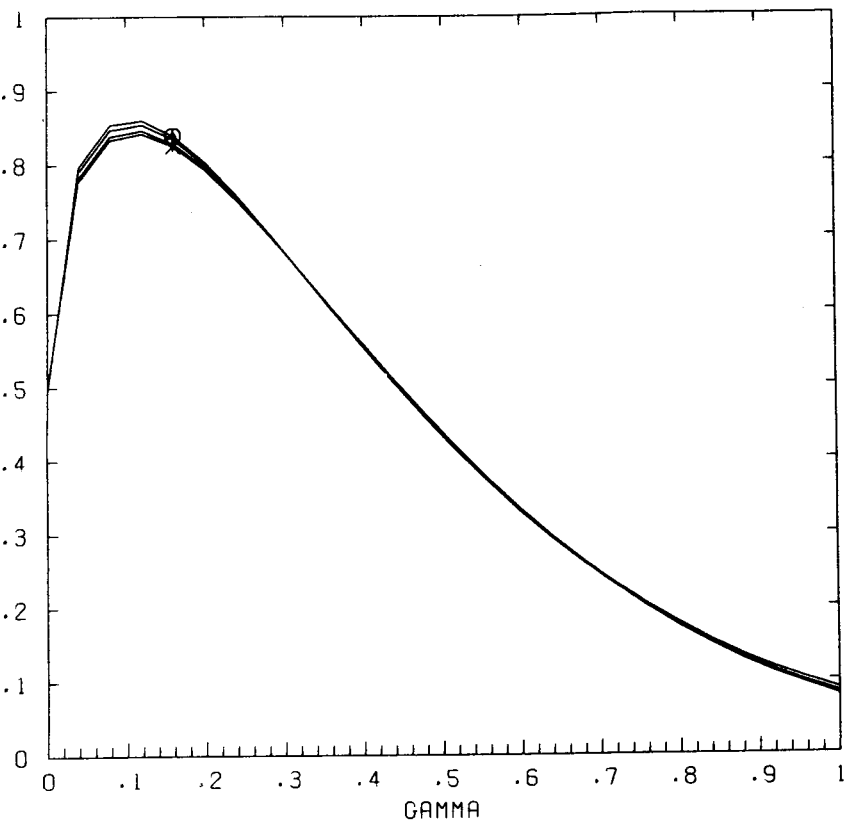
figur 6.



- ⊙ :ETA= 0.01000
- △ :ETA= 0.05000
- ⊕ :ETA= 0.10000
- × :ETA= 0.12500

BETA= 0.10000

figur 7.

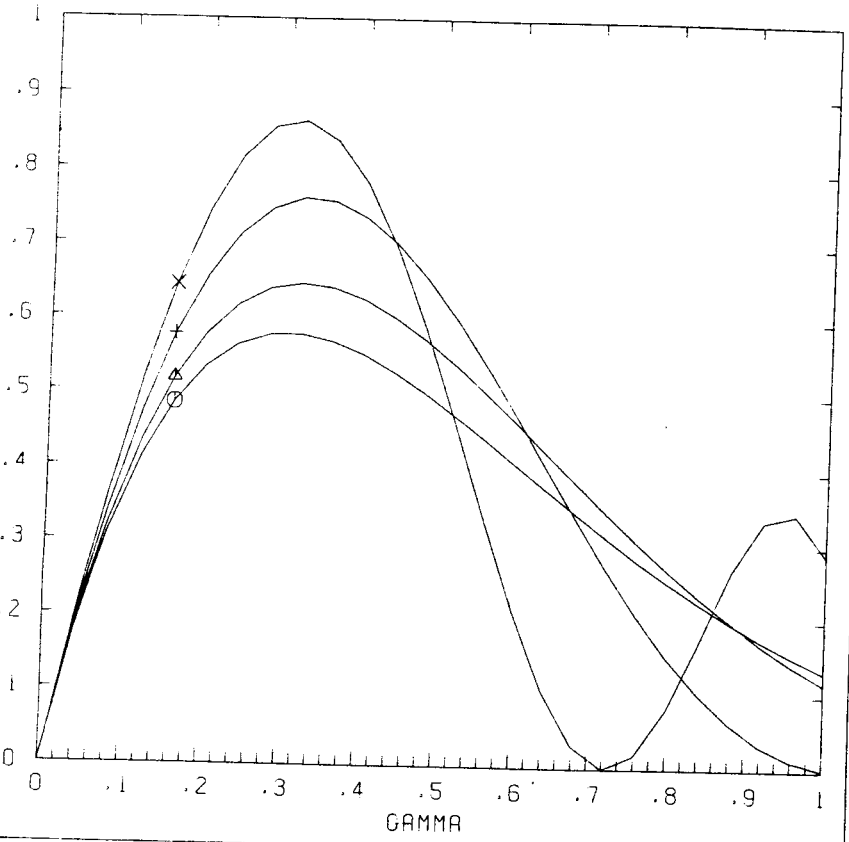


- ⊙ :ETA= 0.01000
- △ :ETA= 0.05000
- ⊕ :ETA= 0.10000
- × :ETA= 0.12500

BETA= 0.50000

figur 8.

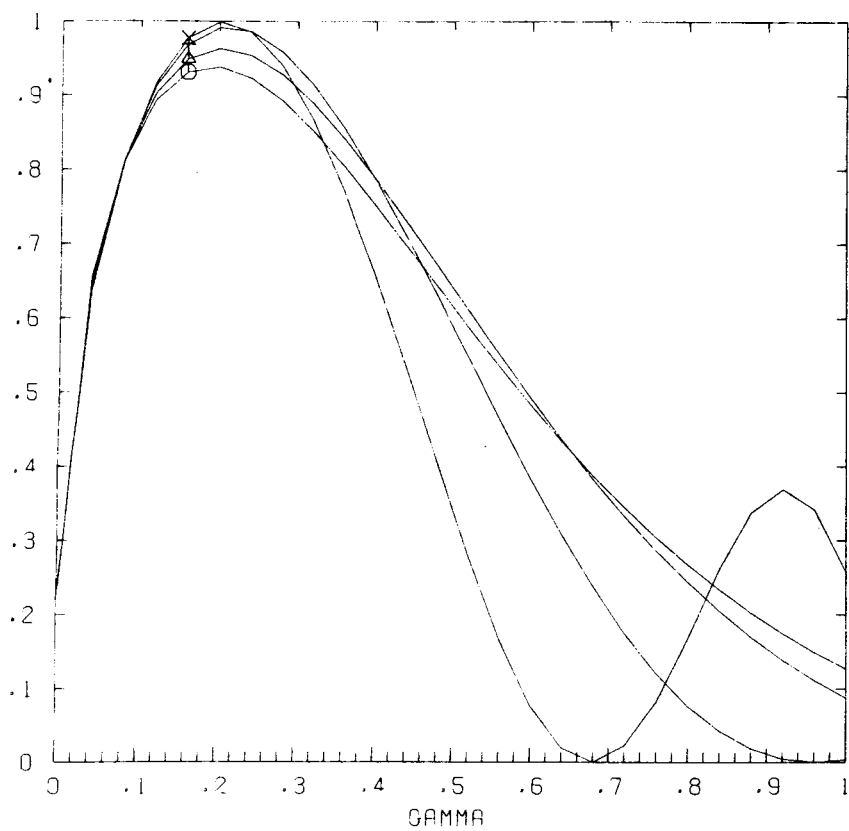




○ :ETA= 0.10000  
△ :ETA= 0.25000  
+ :ETA= 0.50000  
× :ETA= 0.75000

BETA= 0.00000

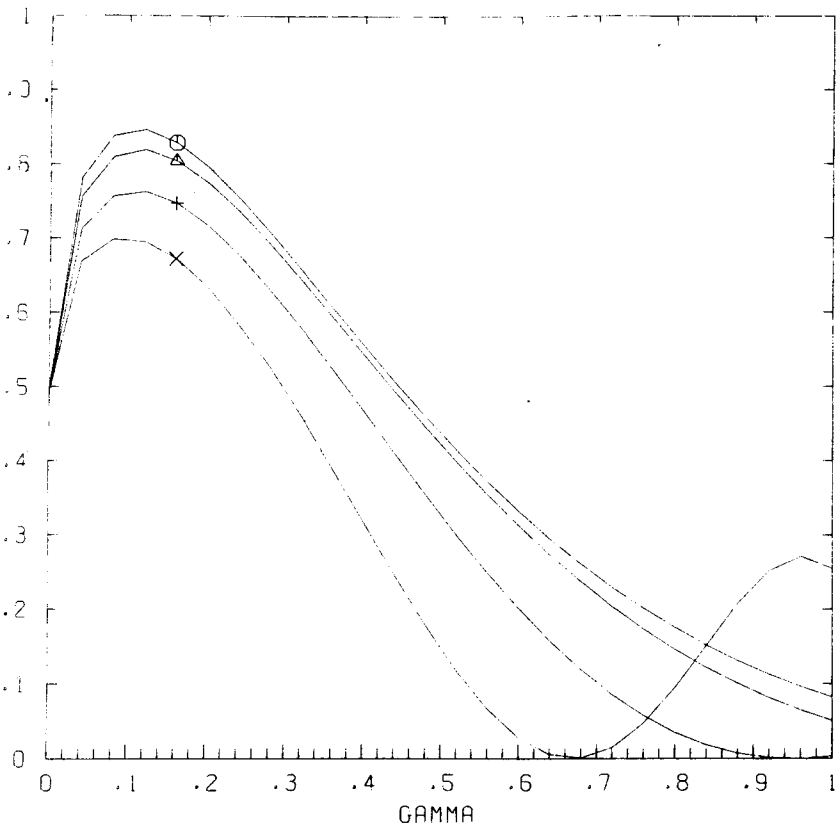
figur 9.



○ :ETA= 0.10000  
△ :ETA= 0.25000  
+ :ETA= 0.50000  
× :ETA= 0.75000

BETA= 0.10000

figur 10.



○ :ETA= 0.10000  
△ :ETA= 0.25000  
+ :ETA= 0.50000  
× :ETA= 0.75000

BETA= 0.50000

figur 11.

Hoofdstuk 3. Numerieke oplossing van de vierde orde vergelijking.

*("That's exactly the method", the Bellman bold  
In a hasty parenthesis cried,  
"That's exactly the way I have always been told.  
That the capture of Snarks should be tried.")*

### 3. Numerieke oplossing van de vierde orde vergelijking.

#### 3.1 Waarom de vierde orde vergelijking?

Zoals in het voorgaande al gezegd is, hebben Pilya en Fedorov aangetoond dat de conversiecoëfficiënt voor conversie van lange electromagnetische golven naar korte plasmagolven in een "heet" plasma, gelijk aan de absorptiecoëfficiënt voor absorptie van electromagnetische golven in een "koud" plasma.

Het lijkt er dus op dat de studie van een vierde orde ("heet") plasma vergelijking geen nieuwe resultaten zal opleveren.

De koude vergelijking komt echter alleen maar overeen met de hete vergelijking in de limiet voor lage temperatuur.

Verder heeft deze koude vergelijking in de oorsprong een logarithmische singulariteit. Hierdoor is deze vergelijking niet geschikt om de velden nabij de oorsprong te beschrijven, hetgeen wel mogelijk is met de vierde orde vergelijking.

Nabij de oorsprong zal de elektrische veldsterkte sterk toenemen, zodat, zelfs voor een kleine amplitude van de invalende golf, niet-lineaire effecten een rol kunnen gaan spelen.

Om de grootte van die effecten te kunnen afschatten, moeten we de gehele vierde orde vergelijking oplossen.

### 3.2. Numerieke aanpak en beschrijving van het programma.

#### 3.2.1. Fysische overwegingen en algemene aanpak.

De in sectie 1.3 afgeleide oplossingen vallen uiteen in oplossingen, die een langolvig electromagnetisch karakter hebben, en golven die een kortgolvig plasma karakter bezitten.

Het feit dat de bij deze golven horende "golfgetallen" sterk kunnen verschillen, levert bij numerieke integratie grote problemen op.

Tengevolge van de rekenonnauwkeurigheden, die inherent zijn aan numerieke berekeningen, zal namelijk de kortgolvice in de integratierichting aangroeiende oplossing, de numerieke oplossing gaan overheersen. Vergelijkingen waarvan de numerieke oplossing dit gedrag vertoont worden stijf genoemd.

De standaard procedures voor numerieke oplossing van stijve differentiaalvergelijkingen, zijn niet of nauwelijks bruikbaar, omdat de differentiaalvergelijking in  $y = -\beta$  een singulier punt heeft, hoewel de oplossing daar regulier is.

Bovendien komt ons probleem niet neer op het vinden van fundamentele oplossingen, maar op het vinden van een oplossing die aan bepaalde fysische voorwaarden voldoet.

We hebben daarom zelf een methode ontwikkeld.

Als we gaan kijken naar de voorwaarden waaraan de oplossing moet voldoen, komen we op de volgende:

In de in sectie 1.1 geschetste situatie is alleen een invallende electromagnetische golf. Er is dus geen invallende korte golf aanwezig.

In wat we het rechtergebied zullen noemen, het gebied met  $y > 0$ , zijn er in principe twee korte golf oplossingen mogelijk. Het zal duidelijk zijn dat de met  $y$  aangroeiende oplossing niet acceptabel is.

De door ons gebruikte methode is, in grote lijnen, de volgende:

Beginnend in een punt op de positieve  $y$ -as, bepalen we , door integratie in de richting van de oorsprong, in het punt  $y=0$  de korte en de langolvige oplossing afzonderlijk. Een lineaire combinatie van deze oplossingen in  $y=0$  wordt gebruikt als startwaarden bij de integratie in negatieve  $y$ -richting. Deze combinatie zal in principe in dit linkergebied aanleiding geven tot een combinatie van lange en korte golven, zowel invallende als uitgaande.

Door een handige keuze van de startwaarden in  $y=0$ , kunnen we die combinatie selecteren waarin de invallende korte golf niet voorkomt.

Omdat de conversie coefficient eenvoudig te bepalen is als we allen te maken hebben met lange golven, dempen we bij de verdere integratie de uitgaande korte golf weg.

Hierdoor houden we uiteindelijk alleen een langolvige oplossing over, die we, na splitsing in naar links en naar rechts lopende golven, gebruiken om de absorptiecoefficient te bepalen.

### 3.2.2. Bepaling van de korte golfoplossing voor $y > 0$ .

De korte golfoplossing wordt eenvoudig gevonden door de vierde orde vergelijking in negatieve  $y$  richting te integreren langs de positieve  $y$ -as. De in positieve  $y$ -richting aangroeiende oplossing is snel verdwenen, terwijl de in positieve  $y$ -richting gedempte golf, die de door ons gezochte korte golf-component weergeeft, snel aangroeit, en de oplossing zal overheersen

In het in appendix A4 gegeven programma wordt dit deel van de integratie gedaan door de procedure SHORTWAVE.

3.2.3. Bepaling van de lange golfoplossing voor  $y > 0$ .

Als we in de vierde orde vergelijking voor  $E_x$  substitueren:

$$E_x = e^{ky} \quad (3.1)$$

vinden we de zogenaamde karakteristieke vergelijking:

$$\begin{aligned} \epsilon(1+\eta y)k^4 - \frac{1+\eta\gamma}{y+\beta} k^3 + (-y+\epsilon\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{(1+\eta y)}{y+\beta}) k^2 \\ - \frac{\beta}{y+\beta} k + (y(y+\beta) - \gamma(1+\eta y)^2 + \sqrt{\beta\gamma} \frac{(1-\eta\beta)}{y+\beta}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Het golfgetal  $k$ , geassocieerd met de lange golf, heeft zoals al eerder genoemd, de vorm:

$$k = \frac{\sqrt{2B}}{\sqrt{y}} \quad (3.3)$$

Het gedrag van deze lange golf oplossing zal dus, zeker voor kleine hoofdzakelijk bepaald worden door het tweede graads (koude)gedeelte van de vergelijking.

We bepalen nu de langgolvlige oplossing voor  $y > 0$  door de tweede orde vergelijking te integreren in negatieve  $y$ -richting, waarbij we het vierde orde deel van de vergelijking als een kleine storing beschouwen.

Dit deel van de berekening wordt uitgevoerd in de procedure LONGWAVE .

### 3.2.4. Bepaling van correcte startwaarden in $y=0$ .

In het linkergebied mag op grond van fysische overwegingen geen invallende korte golf voorkomen.

Bij het voortzetten van de integratie in dat gebied, moeten de startwaarden zo gekozen worden dat de invallende korte golf geelimineerd wordt.

Hiertoe zullen we met behulp van de procedure KORTGEDEMPT de vierde orde vergelijking twee maal integreren, een maal met genormaliseerde randvoorwaarden, gebaseerd op de lange golf, en een maal met genormaliseerde startwaarden, gebaseerd op de korte golf oplossing in  $y=0$ .

Om er voor te zorgen dat we op deze wijze de korte golf oplossing vinden, voeren we een kleine dempingsterm in, waardoor de invallende korte golf sterk zal gaan domineren.

Deze dempingsterm voeren we in door te stellen:

$$\delta = \delta_r + i\delta_i \quad (3.4)$$

$$E_x = E_{xr} + iE_{xi} \quad (3.5)$$

met  $\delta_i > 0$ .

Als we de oplossing die we vinden met behulp van de lange golf startwaarden aanduiden met  $E_1$ , met

$$E_1 = E_{r1} + iE_{i1} \quad (3.6)$$

en de oplossing tengevolge van de korte golf startwaarden met

$$E_k = E_{rk} + iE_{ik} \quad (3.7)$$

dan zijn we in deze fase van de berekeningen op zoek naar startwaarden, zodanig dat:

$$E_1 + (\alpha_1 + i\alpha_2) E_k = 0 \quad (3.8)$$

Als we dit verder uitwerken vinden we:

$$\alpha_1 E_{rk} - \alpha_2 E_{ik} = -E_{r1} \quad (3.9)$$

$$\alpha_1 E_{ik} + \alpha_2 E_{rk} = -E_{i1} \quad (3.10)$$



hetgeen ons voor  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  de volgende uitdrukkingen levert:

$$\alpha_1 = \frac{-(E_{rl}E_{rk} + E_{il}E_{ik})}{E_{rk}^2 + E_{ik}^2} \quad (3.11)$$

$$\alpha_2 = \frac{E_{rl}E_{ik} - E_{rk}E_{il}}{E_{rk}^2 + E_{ik}^2} \quad (3.12)$$

Duiden we de bij de eerste integratie gebruikte startwaarden aan met  $E_{10}$ , en de bij de tweede integratie gebruikte startwaarden met  $E_{k0}$  dan worden, omdat de vergelijking lineair is, de voor eliminatie van de invallende korte golf benodigde startwaarden gegeven door:

$$E_{\text{start}} = E_{10} + (\alpha_1 + i\alpha_2)E_{k0} \quad (3.13)$$

en de afgeleiden van deze waarde.

### 3.2.5 Behandeling van de singuliere punten.

De bij de bepaling van de lange golfoplossing voor  $y > 0$  gebruikte tweede orde vergelijking, heeft in de oorsprong een singulier punt.

Evantuele problemen hiermee worden voorkomen door vlak bij de oorsprong over te schakelen op de volledige vierde orde vergelijking. Dit is toch nodig omdat dicht bij de oorsprong de vierde afgeleide term niet langer als een kleine storing te beschouwen valt.

De vierde orde vergelijking kent twee singuliere punten,  $y = -\beta$  en  $y = -1/\eta$ , waar de oplossing echter wel regulier is.

Het punt  $y = -1/\eta$  is de plasma-vacuum overgang.

In de buurt van dit punt zitten we voldoende vervan de oorsprong en dus van het conversiegebied, dat we de tweede orde vergelijking kunnen gebruiken, die in dit punt regulier is.

In een omgeving van  $y = -\beta$  kunnen we, als we dit punt tenminste voorzichtig benaderen, de oplossing met een Taylorreeks bepalen, omdat de analytische oplossing in dit punt regulier is.

In de praktijk betekent dit, dat we integreren tot een punt  $y = -\beta + \epsilon_1$ , extrapoleren tot  $-\beta - \epsilon_2$  (met  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ) en aan de hand van de met dit punt verkregen startwaarden, verder integreren tot het punt waar we overgaan op de tweede orde vergelijkingen.

### 3.2.6. De integratie voor $y < 0$ .

Aangezien we de absorptie van een lange golf willen bepalen, zijn we in het gebied  $y < 0$  alleen geïnteresseerd in de lange golf oplossing.

De invallende korte golf is al geëlimineerd door de keuze van de correcte startwaarden.

De uitgaande korte golf zullen we elimineren door deze weg te dempen. Deze demping zal als we voorzichtig te werk gaan, weinig invloed hebben op het gedrag van de lange golf oplossing.

Het gevolg is dat we aan het einde van de met kortgedempt uitgevoerde integratie, alleen een combinatie van invallende en uitgaande lange golven overhouden.

### 3.2.7. Bepaling van de absorptiecoëfficiënt.

In de nabijheid van  $y = -1/\eta$  wordt, als we de oplossing schrijven als

$$E_x = e^{iky} \quad (3.14)$$

het "golfgetal"  $k$  gegeven door:

$$k = \sqrt{|\beta + i/\eta|} \quad (3.15)$$

zoals kan worden aangetoond door de coëfficiënten in de karakteristieke vergelijking te ontwikkelen voor  $y = -1/\eta$ , waarbij we bedenken dat  $|\beta - 1/\eta|$  in het algemeen groot is.

Als we de oplossing nabij dit punt aangeven met  $S$ , dan moet gelden:

$$S = A e^{iky} + B e^{-iky} \quad (3.16)$$

en

$$S' = ikA e^{iky} - ikB e^{-iky} \quad (3.17)$$

De  $S$ ,  $A$  en  $B$  zijn in principe complexe getallen, zodat we met invoering van een logische notatie vinden:

$$A_r = \frac{kS_r + S'_i}{2k} e^{-iky} \quad (3.18)$$

$$A_i = \frac{kS_i - S'_r}{2k} e^{-iky} \quad (3.19)$$

$$B_r = \frac{kS_r - S'_i}{2k} e^{iky} \quad (3.20)$$

$$B_i = \frac{kS_i + S'_r}{2k} e^{iky} \quad (3.21)$$

De reflectie en absorptiecoëfficiënt worden weer  $\rho$  gedefinieerd als in sectie 2.4

$$\text{Reflec} = \left| \frac{A}{B} \right|^2 \quad (3.22)$$

$$\text{Absc} = 1 - \text{Reflec} \quad (3.23)$$

### 3.3. Eerste resultaten.

In figuur 3.1 tot en met 3.4 is het verloop van de diverse componenten van het E-veld weergegeven.

De voor  $\delta=10^{-4}$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\eta=0.2$ ,  $\gamma=0.4$  berekende absorptiecoefficient komt goed overeen met de waarde die gevonden is voor het koude plasma.

Ter vergelijking: koud plasma: absorptie=0.755887.

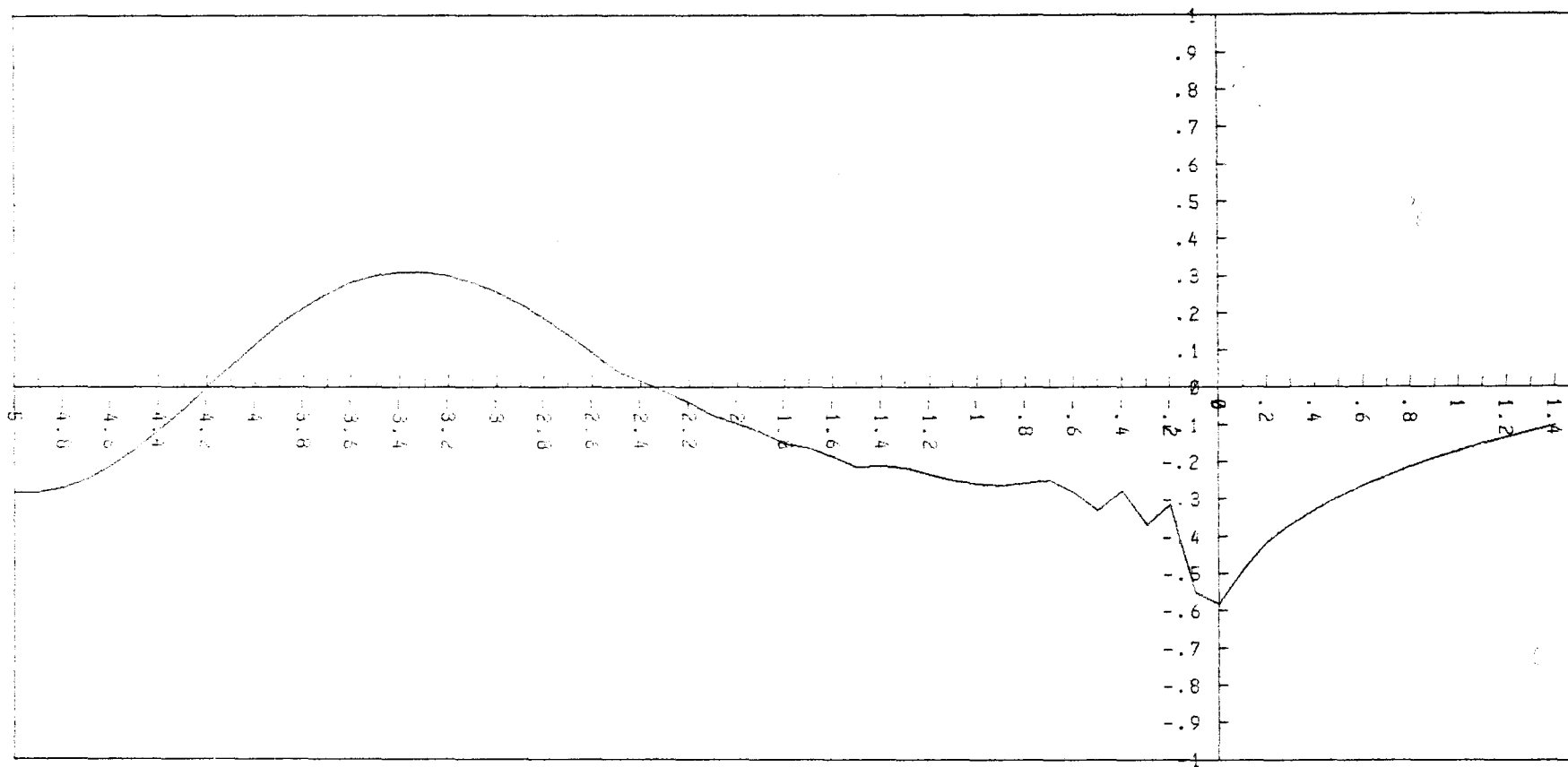
heet plasma: absorptie=0.769961.

Helaas blijkt het antwoord, tengevolge van numerieke instabiliteiten voor andere waarden van  $\delta$ , nogal te verschillen.

Ook de precieze vorm van de gebruikte demping heeft een zij het kleine invloed op het eindresultaat.

Kwalitatief zijn de plaatjes redelijk te noemen, met een redelijke overeenstemming, qua vorm, met de resultaten van Freidberg et. al.

De numerieke instabiliteit kunnen we echter nog niet verklaren.



figuur 3.1

BETA = 0.200

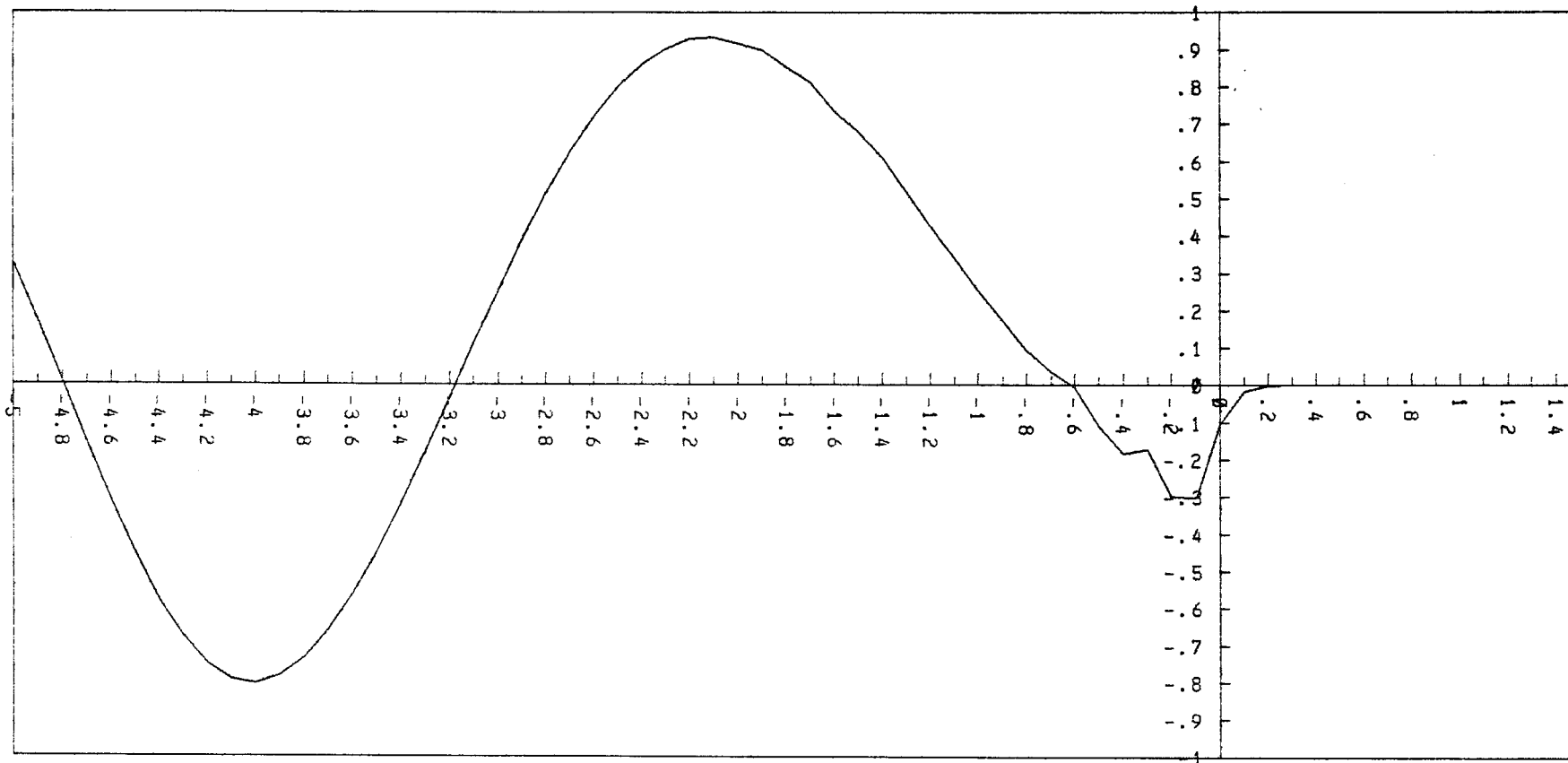
GAMMA = 0.400

ABSORPTIECOEFF = 7.699610-01

ETA = 0.200

DELTA = 1.0000-04

EX, REAL PART



figuur 3.2

BETA = 0.200

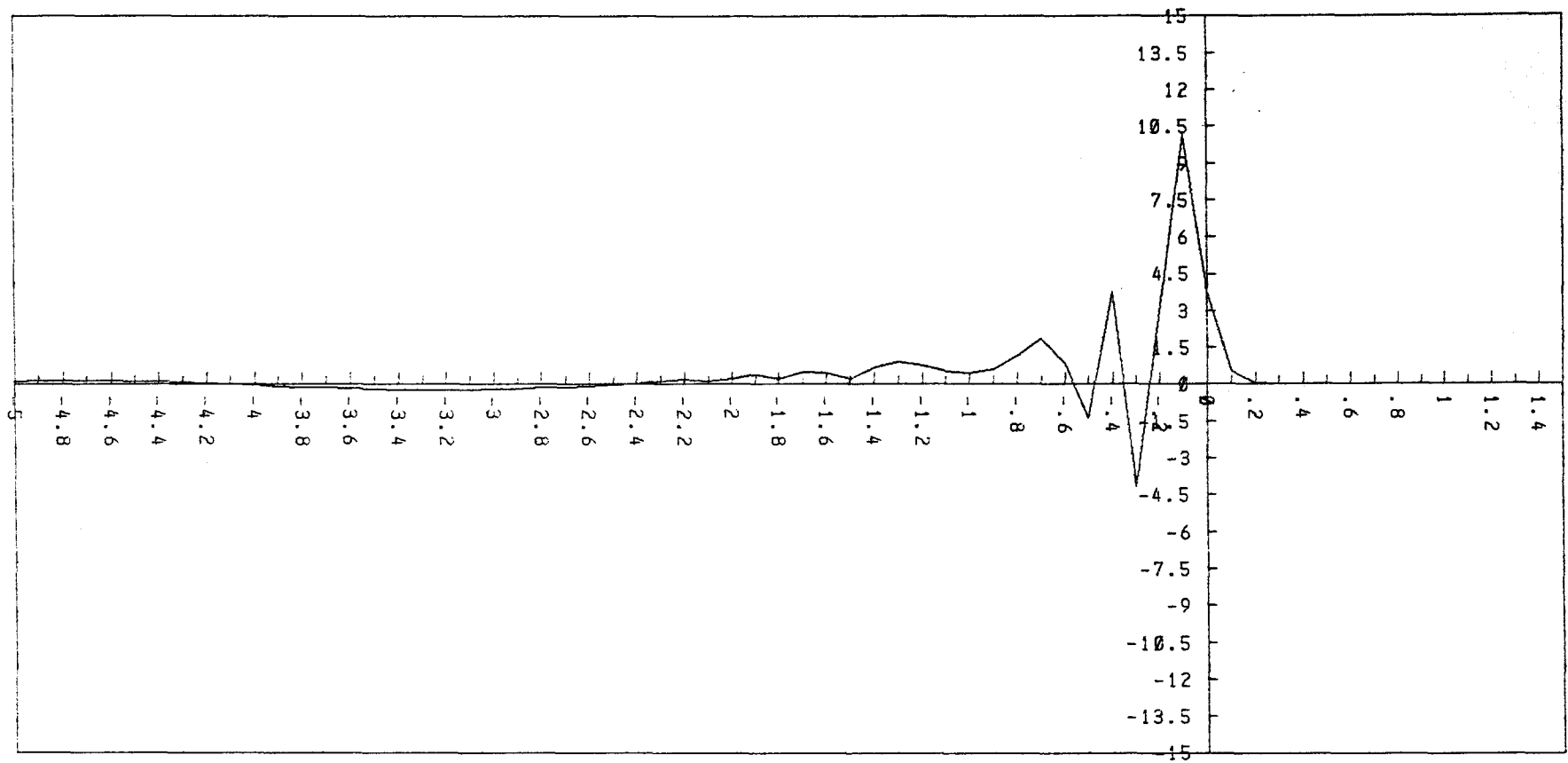
GAMMA = 0.400

ABSORPTIECOEFF = 7.699610-01

ETA = 0.200

DELTA = 1.0000-04

EX, IMAGINARY PART



figuur 3,3

BETA = 0.200

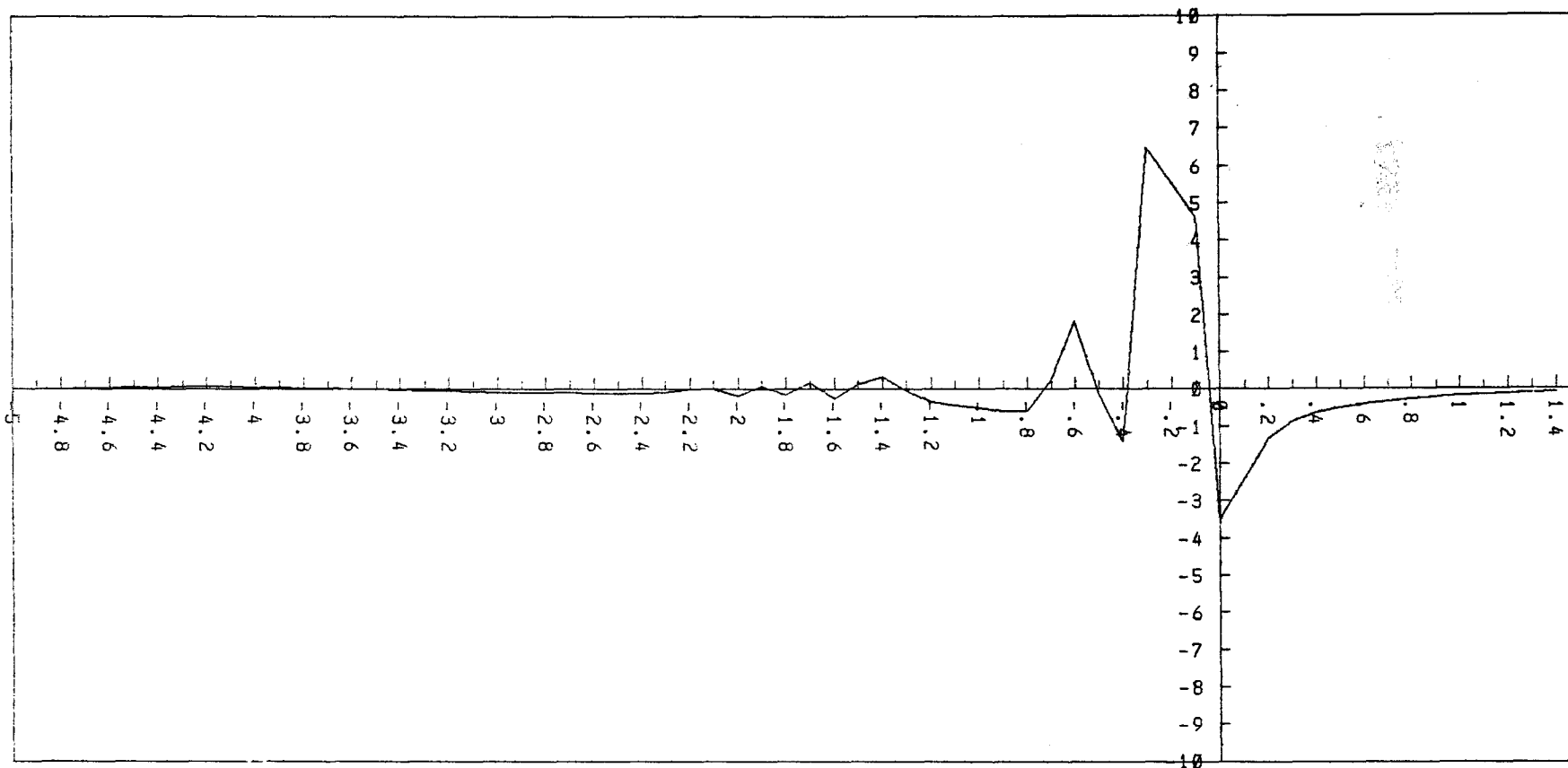
GAMMA = 0.400

ABSORPTIECOEFF = 7.699610-01

ETA = 0.200

DELTA = 1.0000-04

EY, REAL PART



figuur 3.4

BETA= 0.200

GAMMA= 0.400

ABSORPTIECOEFF= 7.69961D-01

ETA = 0.200

DELTA= 1.000D-04

EY, IMAGINARY PART



Appendices.

*In the midst of what he was trying to say  
In the midst of his laughter and glee  
He had softly and suddenly vanished away,  
For the Snark was a Boojum, you see.*

## Appendix A1: Ontkoppeling van de tweede orde differentiaalvergelijkingen.

In het navolgende ligt het niet in de bedoeling om de volledige afleiding van de vierde orde vergelijking 1.33 te geven. Deze appendix bevat een algemeen recept om dit soort problemen aan te pakken.

Vergelijkingen 1.26 en 1.27 schrijven we in de volgende algemene vorm:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = f \quad (\text{A1.1})$$

$$a_{21}x + a_{23}z = g \quad (\text{A1.2})$$

Dit zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden. Deze drie onbekenden zullen in ons geval  $E_y$ ,  $E_y^I$ , en  $E_y^{II}$  zijn.

Tussen de  $x$ ,  $y$  en  $z$  bestaan de volgende relaties:

$$x' = y \quad (\text{A1.3})$$

$$x'' = y' = z \quad (\text{A1.4})$$

waarbij de accenten een differentiatie naar een niet nader gespecificeerde onafhankelijk variabele aangeven.

Uit A1.2 volgt op triviale wijze:

$$z = (g - a_{21}x) / a_{23} \quad (\text{A1.5})$$

Vullen we dit in in A1.1 dan vinden we:

$$(a_{11} - a_{21}a_{13}/a_{23})x + a_{12}y = f - a_{13}g/a_{23} \quad (\text{A1.6})$$

Deze uitdrukking zullen we iets hanteerbaarder maken door te schrijven:

$$A = a_{11} - a_{21}a_{13}/a_{23} \quad (\text{A1.7})$$

$$F = f - a_{13}g/a_{23} \quad (\text{A1.8})$$

De op deze wijze verkregen uitdrukking wordt vervolgens gedifferentieerd met als resultaat:

$$A'x + (A + a_{12}')y + a_{12}z = F' \quad (\text{A1.9})$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van 1.3 en 1.4.

Voor  $z$  substitueren we weer 1.5 waardoor we het volgende stelsel vergelijkingen overhouden:

$$Ax + a_{12}y = F \quad (\text{A1.10})$$

$$(A' - a_{21}a_{12}'/a_{23})x + (A + a_{12}')y = F' - a_{12}f/a_{23} \quad (\text{A1.11})$$

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is op triviale wijze op te lossen.

De uiteindelijke vierde orde vergelijking wordt gevonden door de uit dit stelsel volgende uitdrukkingen voor  $x$  te

differentieren en het resultaat gelijk te stellen aan  $y$ .

Appendix A2: Het gedrag van de oplossingen van een differentiaalvergelijking nabij regulier singuliere punten.

Het navolgende is een samenvatting van de theorie die beschreven wordt in chapter XVI van E. L. Ince's "Ordinary differential equations".

We gaan uit van de volgende vergelijking:

$$z^n \frac{d^n w}{dz^n} + z^{n-1} P_1(z) \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + P_n(z) w = 0 \quad (A2.1)$$

waarbij de  $P_i$  analytische functies van  $z$  in een omgeving van nul, zullen voorstellen.

Deze vergelijking zullen we ook wel kort noteren als:

$$Lw=0 \quad (A2.2)$$

Op deze vergelijking passen we de methode van Fröbenius toe, dat wil zeggen, we stellen

$$w = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\rho+\nu} \quad (A2.3)$$

en substitueren dit in A2.1.

Het resultaat van deze substitutie noteren we als:

$$Lw = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} f(z, \rho+\nu) z^{\nu} \quad (A2.4)$$

waarbij  $f(z, \rho+\nu)$  gegeven wordt door:

$$f(z, \rho+\nu) = (\rho+\nu)_n + (\rho+\nu)_{n-1} P_1(z) + \dots + P_n(z) \quad (A2.5)$$

en  $(\rho+\nu)_n$  het Pochhammersymbool vorstelt,

$$(\rho+\nu)_n = (\rho+\nu)(\rho+\nu-1)\dots(\rho+\nu-n+1) \quad (A2.6)$$

De in A2.5 gedefinieerde functie  $f(z, \rho+\nu)$  ontwikkelen we in een reeks naar  $z$ :

$$f(z, \rho+\nu) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(\rho+\nu) z^{\lambda} \quad (A2.7)$$

Omdat aan A2.1 voldaan wordt, moet de coëfficiënt van elke macht van  $z$  gelijk aan nul zijn.

Dit levert een verzameling reccurente betrekkingen op voor de  $c_{\nu}$ 's:

$$c_0 f_0(\rho) = 0 \quad (A2.8)$$

$$c_1 f_0(\rho+1) + c_0 f_1(\rho) = 0 \quad (A2.9)$$

$$c_{\nu} f_0(\rho+\nu) + c_{\nu-1} f_1(\rho+\nu-1) + \dots + c_0 f_{\nu}(\rho) = 0 \quad (A2.10)$$

Omdat we  $c_0$  niet gelijk aan nul kiezen, moet

$$f_0(\rho) = 0 \quad (A2.11)$$

Dit is de indiciaalvergelijking waarmee  $n$ , niet noodzakelijk verschillende waarden van  $\rho$  bepaalt worden.

Door nu een waarde van  $\rho$  te kiezen, zodanig dat

$$f_0(\rho+v) \neq 0 \quad (A2.12)$$

voor een willekeurige positief gehele  $v$ , kunnen we de  $c_v$ 's bepalen volgens

$$c_v = \frac{(-1)^v c_0 F_v(\rho)}{f_0(\rho+1) f_0(\rho+2) \dots f_0(\rho+v)} \quad (A2.13)$$

Voor de preciese vorm van de functie  $F_v(\rho)$  verwijs ik naar Ince, aangezien in de rest van deze appendix, de volgende triviale uit bovenstaande formule volgende, vorm zullen gebruiken.

$$F_v(\rho) = (-1)^v f_0(\rho+1) f_0(\rho+2) \dots f_0(\rho+v) \frac{c_v}{c_0} \quad (A2.14)$$

Het is duidelijk dat vergelijking A2.13 singulier wordt als een aantal van de oplossingen van A2.11 een geheel getal van elkaar verschillen.

In dat geval zullen we de andere oplossingen als volgt moeten bepalen.

Beschouw de verzameling:

$$\rho_0 \rho_1 \dots \rho_{\alpha-1}$$

Deze verzameling bestaat uit oplossingen van A2.11, die zodanig gerangschikt zijn dat:

$$\rho_k - \rho_\lambda \geq 0, \text{ geheel voor } k < \lambda \quad (A2.15)$$

Voer nu de notatie

$$f(\sigma) = f_0(\sigma+1) f_0(\sigma+2) \dots f_0(\sigma+\omega) \quad (A2.16)$$

in, met

$$\omega = \rho_0 - \rho_{\alpha-1} \quad (A2.17)$$

Definieer

$$\begin{aligned} \bar{w}(z, \sigma) &= f(\sigma) w(z, \sigma) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} c_v f(\sigma) z^{\sigma+v} \end{aligned} \quad (A2.18)$$

Als we nu  $\sigma$  beperken tot een gebied in het complexe  $\sigma$ -vlak dat van de elementen van de bovengenoemde verzameling alleen  $\rho_\mu$  bevat, dan zijn de  $c_v$ 's analytische functies van  $\sigma$ .

Als bovendien de reeks (A2.3) uniform convergeerd, dan mogen we deze  $w$  een willekeurig aantal malen naar  $\sigma$  differentieren. Tevens zijn dan de operatoren  $L$  en  $\frac{\partial}{\partial \sigma}$  verwisselbaar. Hieruit volgt dat:

$$L\left\{\frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{w}(z, \sigma)\right\}_{\sigma=\rho_\mu} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{c_0 F(\sigma) z^\sigma\right\} \quad (\text{A2.19})$$

$$\text{waarin } F(\sigma) = f_0(\sigma) f(\sigma) \quad (\text{A2.20})$$

Uit A2.19 volgt dat

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{w}(z, \sigma)_{\sigma=\rho_\mu}$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking.

Deze oplossing zal in het algemeen logaritmische functies van  $z$  bevatten.

De hamvraag is nu natuurlijk wanneer zo'n oplossing die logaritmische singulariteit niet bevat.

Om dit te onderzoeken schrijven we:

$$\bar{w}(z, \sigma) = z^\sigma \sum_{v=0}^{\infty} g_v(\sigma) z^v \quad (\text{A2.21})$$

De voorwaarden waar een oplossing aan moet voldoen zijn nu als volgt:

De bij de oplossing behorende  $\rho$  moet een enkelvoudige wortel zijn van de indiciaalvergelijking A2.11.

Aangezien in de eerder gedefinieerde verzameling oplossingen een  $\rho_k$  met  $k < \mu$  een positief geheel getal verschilt met  $\rho_\mu$  is elke oplossing van de vorm

$w_\mu + b_1 w_{\mu-1} + \dots + b_{\mu-1} w_1 + b w_0$  een bij  $\rho_\mu$  behorende oplossing. De oplossingen  $w_0, w_1, \dots, w_{\mu-1}$  moeten dus ook vrij zijn van logaritmen.

Dit heeft tot gevolg dat alle  $\rho$ 's verschillend moeten zijn.

Verder is het zo, dat

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} g_v(\sigma)_{\sigma=\rho_\mu} = 0 \quad (\text{A2.22})$$

moet zijn wil de oplossing vrij zijn van logaritmen.

Deze laatste, noodzakelijke en voldoende voorwaarde, werken we verder uit.

Definieer:

$$H_v(\sigma) = \frac{g_v(\sigma)}{g_0(\sigma)} = (-1)^v \frac{F_v(\sigma)}{f_0(\sigma+1)f_0(\sigma+2)\dots f_0(\sigma+v)} \quad (\text{A2.23})$$

Omdat  $g_0(\sigma) = c_0 f(\sigma)$ , bevat  $g_0(\sigma)$  de factor  $(\sigma - \rho_\mu)^\mu$ .

Een noodzakelijk en voldoende voorwaarde is dan dat  $H_v(\rho_\mu)$  eindig of nul is voor alle waarden van  $v$ .

Aangezien  $g_v(\sigma)$  (en dus  $H_v(\sigma)$ ) voldoen aan de recurrente betrekking:

$$H_v(\sigma)f_0(\sigma+v) + H_{v-1}f_1(\sigma+v-1) + \dots + H_0(\sigma)f_v(\sigma) = 0 \quad (\text{A2.24})$$

met  $H_0(\sigma) = 1$ , zal, als de  $H_1(\rho_\mu)$  t/m  $H_{v-1}(\rho_\mu)$  eindig zijn,  $H_v(\rho_\mu)$  ook eindig zijn, tenzij  $v$  zodanige waarden aanneemt dat  $\rho_\mu + v$  een wortel van de indiciaalvergelijking is.

Dit gebeurt als  $v$  een van de waarden

$\rho_{\mu-1} - \rho_\mu; \rho_{\mu-2} - \rho_\mu; \dots; \rho_0 - \rho_\mu$   
aanneemt.

Als nu  $v = \rho_{\mu-r} - \rho_\mu$ , dan zijn er  $r$  factoren in de noemer van  $H_v(\sigma)$  die enkelvoudige nullen hebben voor  $\sigma = \rho_\mu$ , en hieruit volgt dat  $F_v(\sigma)$  tot op orde  $r$  gelijk moet zijn aan nul als  $\sigma = \rho_\mu$ .

In totaal zijn er dus  $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)$  voorwaarden die noodzakelijk en voldoende zijn, waaraan voldaan moet worden, wil de oplossing geheel vrij van logarithmische singulariteiten zijn.

Appendix A3.

listing programma plaatjes/beta.



```
100 BEGIN
200 %%%%%%%%%%
300 %%%%%%%%%%
400 %%%%%%%%%% ***PLAATJES/BETA***
500 %%%%%%%%%% *DIT PROGRAMMA BEREKENT, BIJ*
600 %%%%%%%%%% *GEGEVEN GAMMA WAARDES, EEN PLAATJE*
700 %%%%%%%%%% *MET EEN AANTAL CURVES VAN DE*
800 %%%%%%%%%% *ABSORPTIECOEFFICIENT ALS FUNCTIE*
900 %%%%%%%%%% *VAN BETA*
1000 %%%%%%%%%%
1100 %%%%%%%%%%
1200 $ INCLUDE "NUMLIB/ALGOL/DECLARATION ON APPL."
1300 SINCLUDE "NUMLIB/ALGOL/ALLPROCS ON APPL."
1400 $ INCLUDE "PLOTTER/ALGOL/DECLARATION ON APPL"
1500 $ INCLUDE "PLOTTER/ALGOL/ALLPROCS ON APPL"
1600 FILE PIX(KIND=PENPLOTTERSSMALL);
1700 REAL LPOS,GAMMA,ETA;REAL ARRAY B,AB[0:25];
1800 INTEGER I,OBJ1,OBJ2,MARKNO;
1900 REAL PROCEDURE ABSORPTIE(BETA,GAMMA,ETA);
2000 VALUE BETA,GAMMA,ETA;REAL BETA,GAMMA,ETA;
2100 %%%%%%%%%%
2200 %%%%%%%%%%
2300 %%%%%%%%%% *DEZE PROCEDURE BEPAALT*
2400 %%%%%%%%%% *DE ABSORPTIECOEFFICIENT*
2500 %%%%%%%%%% *ALS FUNCTIE VAN BETA, GAMMA EN ETA *
2600 %%%%%%%%%%
2700 %%%%%%%%%%
2800 BEGIN
2900 REAL X,XB,Y,SIEN,KOOS,RE,REI,A1,B,D,F,G,M;
3000 REAL HULP,H,WXB,XB1,WXB1,EKSP,XHULP;
3100 REAL AO1,AO2,DAO1,DAO2,DET,ARGUMENT,WY,P4,A2,B1,B2,RC;
3200
3300
3400 REAL ARRAY ALIF[1:4],A[0:5],AE,FX,FY,DFX,DFY[1:2];
3500
3600 INTEGER N,I;
3700 REAL PROCEDURE POLI(X,C,N).
3800 REAL X;REAL ARRAY C[*];INTEGER N;
3900 BEGIN INTEGER I;REAL HELP;
4000 HELP:=C[N];
4100 FOR I:=N-1 STEP -1 UNTIL 0
4200 DO HELP:=HELP*X+C[I];
4300 POLI:=HELP;
4400 END;
4500 REAL PROCEDURE RECHTSI(X,RE,REI);
4600 REAL X,RE,REI;
4700 %%%%%%%%%%
4800 %%%%%%%%%%
4900 %%%%%%%%%% *RECHTERLID INTEGRATIE OVER*
5000 %%%%%%%%%% *CONTOUR I EN V*
5100 %%%%%%%%%%
5200 %%%%%%%%%%
5300 BEGIN REAL XXPB;
5400 XXPB:=X*(X+BETA);
5500 RECHTSI:=- (BETA/XXPB)*REI+(ALIF[1]*X+ALIF[2]-GAMMA/X+ALIF[4]/XXPB)*RE;
5600 END;
5700 REAL PROCEDURE RECHTSII(Y,FY,DFY,I);
5800 REAL Y;REAL ARRAY FY,DFY[*];INTEGER I;
```

```

5900  %%%%%%%%%%
6000  %%%%%%%%%%
6100  %%%%%%%%%% *RECHTERLID INTEGRATIE*
6200  %%%%%%%%%% *CONTOUR II EN IV*
6300  %%%%%%%%%%
6400  %%%%%%%%%%
6500  BEGIN REAL D,E,F,G,H,K,L,M,HULP,HULP1,
6600  HULP:=X*X+Y*Y;
6700  HULP1:=(X+BETA)**2+Y*Y;
6800  D:=BETA/(HULP*HULP1);
6900  E:=X*X+BETA*X-Y*Y;
7000  F:=(2*X+BETA)*Y;
7100  G:=(GAMMA/HULP)*X;
7200  H:=(GAMMA/HULP)*Y;
7300  K:=ALIF[4]/(HULP*HULP1);
7400  L:=ALIF[1]*X;M:=ALIF[1]*Y;
7500  HULP:=L+ALIF[2]-G+K*E;
7600  HULP1:=M+H-K*F;
7700  RECHTSII:=CASE (I-1) OF
7800  ((+D*E*DFY[2]-D*F*DFY[1]-HULP*FY[1]+HULP1*FY[2]),
7900  (-D*E*DFY[1]-D*F*DFY[2]-HULP*FY[2]-HULP1*FY[1]));
8000  END;
8100  REAL PROCEDURE RECHTSIII(X,FX,DFX,I):
8200  %%%%%%%%%%
8300  %%%%%%%%%%
8400  %%%%%%%%%% *RECHTERLID INTEGRATIE*
8500  %%%%%%%%%% *CONTOUR III*
8600  %%%%%%%%%%
8700  %%%%%%%%%%
8800  REAL X;REAL ARRAY FX,DFX[*];INTEGER I;
8900  BEGIN REAL D,E,F,G,H,K,L,M,HULP,HULP1;
9000  HULP:=X*X+Y*Y;
9100  HULP1:=(X+BETA)**2+Y*Y;
9200  D:=BETA/(HULP*HULP1);
9300  E:=X*X+BETA*X-Y*Y;
9400  F:=(2*X+BETA)*Y;
9500  G:=(GAMMA/HULP)*X;
9600  H:=(GAMMA/HULP)*Y;
9700  K:=ALIF[4]/(HULP*HULP1);
9800  L:=ALIF[1]*X;M:=ALIF[1]*Y;
9900  HULP:=L+ALIF[2]-G+K*E;
10000 HULP1:=M+H-K*F;
10100 RECHTSIII:= CASE (I-1) OF
10200 ((-D*E*DFX[1]-D*F*DFX[2]+HULP*FX[1]-HULP1*FX[2]),
10300 (-D*E*DFX[2]+D*F*DFX[1]+HULP*FX[2]+HULP1*FX[1]));
10400 END;
10500 XB:=7;
10600 %%%%%%%%%%
10700 %%%%%%%%%%
10800 %%%%%%%%%% *BEREKENING THOMEY PANSIE*
10900 %%%%%%%%%%
11000 %%%%%%%%%%
11100 ALIF[1]:=1-GAMMA*ETA*ETA;
11200 ALIF[2]:=BETA-2*ETA*GAMMA;
11300 ALIF[3]:=GAMMA;
11400 ALIF[4]:=SQRT(BETA*GAMMA)*(1-ETA*BETA);
11500 HULP:=SQRT(ALIF[1]);
11600 A1:=ALIF[3]+(ALIF[2]**2)/(4*ALIF[1]);
11700 B:=ALIF[2]/(2*HULP)-BETA*HULP;
11800 D:=5/16-ALIF[4];
11900 F:=BETA*(-BETA*HULP+ALIF[2]/(2*HULP));
12000 A[0]:=1;

```

```

12100 A[1]:=A1/HULP;
12200 A[2]:=(A1*A[1]-B)/(2*HULP);
12300 A[3]:=(A1*A[2]-(B+ALIF[2]/(2*HULP))*A[1]+D)/(3*HULP);
12400 A[4]:=(A1*A[3]+(-ALIF[2]/HULP-B)*A[2]+(1+D)*A[1]+F)/(4*HULP);
12500 A[5]:=(A1*A[4]+(-(3/2)*(ALIF[2]/HULP)-B)*A[3]+(2.5+D)*A[2]
12600 +F*A[1])/(5*HULP);
12700 AE[1]:=AE[2]:=@-5;H:=@-5;
12800 WXB:=SQRT(XB);XB1:=XB+@-6;WXB1:=SQRT(XB1);
12900 EKSP:=EXP(((2*HULP/3)*XB+ALIF[2]/HULP)*WXB)/SQRT(WXB);
13000 RE:=POLI(1/WXB,A,5)*EKSP;
13100 EKSP:=EXP(((2*HULP/3)*XB1+ALIF[2]/HULP)*WXB1)/SQRT(WXB1);
13200 REI:=(POLI(1/WXB1,A,5)*EKSP-RE)*@6;
13300 X:=XB;Y:=0;
13400 %%%%%%%%%%%
13500 %%%%%%%%%%%
13600 %%%%%%%%%%% *INTEGRATIE OVER VOLGENDE* %%%%%%%%%%%
13700 %%%%%%%%%%% *CONTOUR* %%%%%%%%%%%
13800 %%%%%%%%%%% -----+ +----- %%%%%%%%%%%
13900 %%%%%%%%%%% V ! ! I %%%%%%%%%%%
14000 %%%%%%%%%%% IV! !II %%%%%%%%%%%
14100 %%%%%%%%%%% +-----+ %%%%%%%%%%%
14200 %%%%%%%%%%% III %%%%%%%%%%%
14300 %%%%%%%%%%%
14400 %%%%%%%%%%%
14500 RK2(RECHTSI(X,RE,REI),X,RE,REI,2-XB,H,@-5,@-5,N);
14600 FX[1]:=RE;DFX[1]:=REI;
14700 FY[1]:=FX[1];DFY[1]:=0;
14800 FY[2]:=0;DFY[2]:=DFX[1];
14900 RK2N(2,RECHTSII(Y,FY,DFY,I),Y,FY,DFY,I,-2,H,AE,AE,N);
15000 FX[1]:=FY[1];FX[2]:=FY[2];
15100 DFX[1]:=DFY[2];DFX[2]:=-DFY[1];
15200 RK2N(2,RECHTSIII(X,FX,DFX,I),X,FX,DFX,I,-5,H,AE,AE,N);
15300 FY[1]:=FX[1];FY[2]:=FX[2];
15400 DFY[1]:=-DFX[2];DFY[2]:=DFX[1];
15500 RK2N(2,RECHTSII(Y,FY,DFY,I),Y,FY,DFY,I,2,H,AE,AE,N);
15600 FX[1]:=FY[1];FX[2]:=FY[2];
15700 DFX[1]:=DFY[2];DFX[2]:=-DFY[1];
15800 RE:=FX[1];REI:=DFX[1];XHULP:=X;
15900 RK2(RECHTSI(X,RE,REI),X,RE,REI,-8,H,@-5,@-5,N);
16000 FX[1]:=RE;DFX[1]:=REI;
16100 RE:=FX[2];REI:=DFX[2];X:=XHULP;
16200 RK2(RECHTSI(X,RE,REI),X,RE,REI,-8,H,@-5,@-5,N);
16300 FX[2]:=RE;DFX[2]:=REI;
16400 Y:=X;
16500 WY:=SQRT(-Y);P4:=ARCTAN(1);
16600 HULP:=SQRT(ALIF[1]);
16700 %%%%%%%%%%%
16800 %%%%%%%%%%%
16900 %%%%%%%%%%% *BEREKENING ABSORPTIECOEFF.* %%%%%%%%%%%
17000 %%%%%%%%%%%
17100 %%%%%%%%%%%
17200 ARGUMENT:=((2*HULP/3)*Y+ALIF[2]/HULP)*WY-P4;
17300 KOOS:=COS(ARGUMENT);SIEN:=SIN(ARGUMENT);
17400 AO1:=KOOS/SQRT(WY)*(1+A[2]/Y+A[4]/(Y*Y))+
17500 SIEN/SQRT(WY)*(1/WY*(A[1]+A[3]/Y+A[5]/(Y*Y)));
17600 AO2:=SIEN/SQRT(WY)*(1+1/Y*(A[2]+A[4]/Y))+
17700 KOOS/SQRT(WY)*(-A[1]/WY-A[3]/(Y*WY)-A[5]/(Y*Y*WY));
17800 Y:=Y+.000001;WY:=SQRT(-Y);
17900 HULP:=SQRT(ALIF[1]);
18000 ARGUMENT:=((2*HULP/3)*Y+ALIF[2]/HULP)*WY-P4;
18100 KOOS:=COS(ARGUMENT);SIEN:=SIN(ARGUMENT);
18200 DA01:=1000000*(KOOS/SQRT(WY)*(1+A[2]/Y+A[4]/(Y*Y))+

```

```

18300          SIEN/SQRT(WY)*(1/WY*(A[1]+A[3]/Y+A[5]/(Y*Y)))-AO1);
18400  DAO2:=1000000*(SIEN/SQRT(WY)*(1+A[2]/Y+A[4]/(Y*Y))+
18500          KOOS/SQRT(WY)*(-1/WY*(A[1]+A[3]/Y+A[5]/(Y*Y)))-AO2);
18600  DET:=AO1*DAO2-AO2*DAO1;
18700  A1:=(FX[1]*DAO2-DFX[1]*AO2)/DET;
18800  B1:=(AO1*DFX[1]-DAO1*FX[1])/DET;
18900  A2:=(FX[2]*DAO2-DFX[2]*AO2)/DET;
19000  B2:=(AO1*DFX[2]-DAO1*FX[2])/DET;
19100  RC:=((A1-B2)*(A1-B2)+(A2+B1)*(A2+B1))/((A1+B2)*(A1+B2)+
19200          (A2-B1)*(A2-B1));
19300  ABSORPTIE:=1-RC;
19400  END;
19500  PROCEDURE CADRE(GAMMA);
19600  VALUE GAMMA;REAL GAMMA;
19700  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19800  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19900  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% *KADER VOOR PLAATJE* %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20000  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20100  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20200  BEGIN
20300  STRAIGHTLINEPIECE(OBJ1,0.5,1,28,1,1);
20400  STRAIGHTLINEPIECE(OBJ1,28,1,28,19.5,1);
20500  STRAIGHTLINEPIECE(OBJ1,28,19.5,0.5,19.5,1);
20600  STRAIGHTLINEPIECE(OBJ1,0.5,19.5,0.5,1,1);
20700  STRAIGHTLINEPIECE(OBJ1,18,1,18,19.5,1);
20800  AXISCOMPLETE(OBJ1,2.5,2.5,17.5,2.5,50,0,0,1,TRUE,FALSE,0.3,"BETA");
20900  BASICAXIS(OBJ1,17.5,2.5,17.5,16.5,10,0,0.3);
21000  BASICAXIS(OBJ1,17.5,16.5,2.5,16.5,10,0,0.3);
21100  AXISCOMPLETE(OBJ1,2.5,16.5,2.5,2.5,10,0,1,0,FALSE,TRUE,0.3,"ABSORPTIE");
21200  TEXT(OBJ1,19,2.5,22.5,2.5,0,"GAMMA=");
21300  NNUMBER(OBJ1,22.5,2.5,27.5,2.5,0,"F9.5",GAMMA);
21400  END OF CADRE;
21500  BEGIN FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 25 DO B[I]:=I/25;
21600  FOR GAMMA:=0.1,0.5
21700  DO BEGIN NEWOBJECT(OBJ1);
21800  NEWOBJECT(OBJ2);
21900  LPOS:=17;MARKNO:=1;
22000  CADRE(GAMMA);
22100  FOR ETA:=0.1,0.25,0.5,0.75,1
22200  DO BEGIN FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 25
22300  DO AB[I]:=ABSORPTIE(B[I],GAMMA,ETA);
22400  POLYGON(OBJ2,I,0,25,B[I],AB[I],1);
22500  MARK(OBJ2,B[4],AB[4],MARKNO,0.02);
22600  MARK(OBJ1,20.5^|^DRAWOBJECT(PIX,OBJ1,0,0,30,25);
23300  DISPOSEOBJECT(OBJ1);
23400  DISPOSEOBJECT(OBJ2);
23500  SKIPPAPER(PIX);
23600  END;
23700  END;
23800  END.

```

Appendix A4.

listing van het bij de oplossing van de vierde  
orde vergelijking gebruikte programma.

```

100 BEGIN
101 %%%%%%%%%%
102 %%%%%%%%%%
103 %%%%%%%%%% Dit programma berekent de absorptie-
104 %%%%%%%%%% coefficient van een heet plasma.
105 %%%%%%%%%% Tevens levert het de gegevens voor
106 %%%%%%%%%% het plotprogramma.De output is verdeeld
107 %%%%%%%%%% in de volgende files:
108 %%%%%%%%%% 1:LONGOUT bevat output procedure
109 %%%%%%%%%% longwave.
110 %%%%%%%%%% 2:SHORTOUT bevat de output van de
111 %%%%%%%%%% shortwave.
112 %%%%%%%%%% 3:DEMPOUTRE bevat het reeele deel
113 %%%%%%%%%% van de output van kortgedempt.
114 %%%%%%%%%% 4:DEMPOUTIM bevat het imaginaire deel
115 %%%%%%%%%% van diezelfde output.
116 %%%%%%%%%% 5:DATAUIT bevat de rest van de output
117 %%%%%%%%%% voor het electrisch veld.
118 %%%%%%%%%% 6:DIAGNOSTICS bevat de informatie
119 %%%%%%%%%% die verder van belang is voor de
120 %%%%%%%%%% run:BETA,ETA,GAMMA,DELTA,tussen
121 %%%%%%%%%% uitvoer van longwave en shortwave
122 %%%%%%%%%% alfal en alfa2,en tenslotte de
123 %%%%%%%%%% de absorptiecoefficient.
124 %%%%%%%%%%
125 %%%%%%%%%%
200 $INCLUDE "NUMLIB/ALGOL/DECLARATION ON APPL."
300 $INCLUDE "NUMLIB/ALGOL/RK2 ON APPL."
400 $INCLUDE "NUMLIB/ALGOL/RK2N ON APPL."
401 %%%%%%%%%%
402 %%%%%%%%%%
403 %%%%%%%%%% Nu volgen enkele hulp procedures
404 %%%%%%%%%% voor longwave en shortwave
405 %%%%%%%%%%
406 %%%%%%%%%%
500 REAL BETA,ETA,GAMMA,DELTA,EPS;
600 REAL PROCEDURE A(Y);
700 VALUE Y;REAL Y;
800 BEGIN A:=1+ETA*Y END;
900 REAL PROCEDURE B(Y);
1000 VALUE Y;REAL Y;
1100 BEGIN B:=-A(Y)/(Y+BETA) END;
1200 REAL PROCEDURE C(Y);
1300 VALUE Y;REAL Y;
1400 BEGIN C:=-Y END;
1500 REAL PROCEDURE D(Y);
1600 VALUE Y;REAL Y;
1700 BEGIN D:=SQRT(GAMMA/BETA)*A(Y)*A(Y)/(Y+BETA) END;
1800 REAL PROCEDURE F(Y);
1900 VALUE Y;REAL Y;
2000 BEGIN F:=-BETA/(Y+BETA) END;
2100 REAL PROCEDURE G(Y);
2200 VALUE Y;REAL Y;
2300 BEGIN G:=Y*(Y+BETA)-GAMMA*A(Y)*A(Y)+SQRT(BETA*GAMMA)*(1-ETA*BETA)/
2400 (Y+BETA);
2500 END;
2600 REAL PROCEDURE VIERDEORDE(Y,I,E4X,DE4X);
2700 VALUE Y,I;REAL Y;INTEGER I;REAL ARRAY E4X,DE4X[*];

```

```

2800 BEGIN
2900 VIERDEORDE:=IF I=1 THEN E4X[2]
3000 ELSE -(EPS*B(Y)*DE4X[2]+(C(Y)+EPS*D(Y))*E4X[2]+
3100 F(Y)*DE4X[1]+G(Y)*E4X[1])/(EPS*A(Y));
3200 END;
3300 PROCEDURE LONGWAVE(ELO);
3400 REAL ARRAY ELO[*];
3401 %%%%%%%%%%%
3402 %%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%
3403 %%%%%%%%%%% Deze procedure berekend het veld ten- %%%%%%%%%%%
3404 %%%%%%%%%%% gevolge van het langegolf gedeelte %%%%%%%%%%%
3405 %%%%%%%%%%% voor Y>0. %%%%%%%%%%%
3406 %%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%
3407 %%%%%%%%%%%
3500 BEGIN
3600 FILE LONGOUT(KIND=DISK,NEWFILE=TRUE,PROTECTION=SAVE);
3700 REAL ARRAY E4X,DE4X,AEX,REX[1:2];
3800 REAL Y,Y0,E,DE,AE,RE,YBEGIN,YEND,EBEGIN,EEND,DEBEGIN,DEEND,E20,E21,
3900 E22,E23,E24,E30,E40,E50,E60,BIGSTEP,SMALLSTEP,INTERVAL,H,
4000 STORINGNIEUW,STORINGOUD;
4100 BOOLEAN TESTCRIT;
4200 INTEGER IT,ITMAX,M,I;
4300 REAL PROCEDURE STORING(E30,E40,E50,E60,X,X0):
4400 VALUE E30,E40,E50,E60,X,X0;
4500 REAL E30,E40,E50,E60,X,X0;
4600 BEGIN REAL XH,E3H,E4H;
4700 XH:=X-X0;
4800 E3H:=E30+XH*E40+XH*XH*E50/2;
4900 E4H:=E40+XH*E50+XH*XH*E60/2;
5000 STORING:=EPS*(A(X)*E4H)/(C(X));
5100 END;
5200 REAL PROCEDURE LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0);
5300 VALUE Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0;
5400 REAL Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0;
5500 BEGIN LANGRECHTS:=-((F(Y)*DE+G(Y)*E)/(C(Y))-
5600 STORING(E30,E40,E50,E60,Y,Y0));
5700 END;
5800 BEGIN
5900 EPS:=3*DELTA/(1-4*ETA*ETA*GAMMA);
6000 Y:=YEND:=YBEGIN:=4;EEND:=EBEGIN:=1@-5;AE:=RE:=1@-5;
6100 INTERVAL:=-0.1;SMALLSTEP:=-@-2;
6200 BIGSTEP:=INTERVAL-2*SMALLSTEP;
6300 WHILE ((Y>0.2) AND (ABS(STORINGOUD)<=ABS(Y*E22)/100))
6400 DO BEGIN THRU 3
6500 DO BEGIN Y:=YBEGIN;E:=EBEGIN;DE:=DEBEGIN;Y0:=YEND;
6600 H:=BIGSTEP/2;
6700 RK2(LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0),Y,E,DE,BIGSTEP,H,AE,RE,M);
6800 E20:=LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0);H:=SMALLSTEP/2;
6900 RK2(LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0),Y,E,DE,SMALLSTEP,H,AE,RE,M);
7000 E21:=LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0);
7100 RK2(LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0),Y,E,DE,SMALLSTEP,H,AE,RE,M);
7200 E22:=LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0);
7300 YEND:=Y;EEND:=E;DEEND:=DE;
7400 RK2(LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0),Y,E,DE,SMALLSTEP,H,AE,RE,M);
7500 E23:=LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0);
7600 RK2(LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0),Y,E,DE,SMALLSTEP,H,AE,RE,M);
7700 E24:=LANGRECHTS(Y,E,DE,E30,E40,E50,E60,Y0);
7800 E30:=(E23-E21)/(2*SMALLSTEP);
7900 E40:=(E23-2*E22+E21)/(SMALLSTEP*SMALLSTEP);
8000 E50:=(E24-2*E23+2*E21-E20)/(2*(SMALLSTEP**3));
8100 E60:=(E24-4*E23+6*E22-4*E21+E20)/(SMALLSTEP**4);
8200 END;

```

```

8300      STORINGOUD:=3*DELTA*(1+ETA*YEND)*E40;
8400      YBEGIN:=YEND;EBEGIN:=EEND;DEBEGIN:=DEEND;
8500      WRITE(LONGOUT,<5(E12.5,X2)>,YBEGIN,EEND,DEEND,E22,E30);
8600      END;
8700      Y:=YEND;E4X[1]:=EEND;DE4X[1]:=DEEND;
8800      E4X[2]:=E22;DE4X[2]:=E30;
8900      AEX[1]:=AEX[2]:=REX[1]:=REX[2]:=1@-5;
9000      H:=INTERVAL/8;
9100      WHILE Y>@-7
9200      DO BEGIN RK2N(2,VIERDEORDE(Y,I,E4X,DE4X),Y,E4X,DE4X,I,INTERVAL,
9300          H,AEX,REX,M);
9400          WRITE(LONGOUT,<5(E12.5,X2)>,Y,E4X[1],DE4X[1],E4X[2],DE4X[2]);
9500      END;
9600      ELO[1]:=E4X[1];ELO[2]:=DE4X[1];ELO[3]:=E4X[2];ELO[4]:=DE4X[2];
9700      END;
9800      LOCK(LONGOUT,CRUNCH);
9900      END;% OF LONGWAVE
10000     PROCEDURE SHORTWAVE(ECO);
10100     REAL ARRAY ECO[*];
10101     %%%%%%%%%%%
10102     %%%%%%%%%%%
10103     %%%%%%%%%%%      Deze procedure berekend het veld t.g.v.
10104     %%%%%%%%%%%      het korte golf gedeelte voor Y>0
10105     %%%%%%%%%%%
10106     %%%%%%%%%%%
10200     BEGIN
10300     FILE SHORROUT(KIND=DISK,NEWFILE=TRUE,PROTECTION=SAVE);
10400     REAL Y,INTERVAL,H;
10500     REAL ARRAY E4X,DE4X,AEX,REX[1:2];
10600     INTEGER I,M;
10700     BEGIN
10800     EPS:=3*(DELTA/(1-4*ETA*ETA*GAMMA));
10900     Y:=1.5;INTERVAL:=-0.1;H:=-0.01;
11000     E4X[1]:=1@-5;E4X[2]:=DE4X[1]:=DE4X[2]:=0;
11100     AEX[1]:=AEX[2]:=REX[1]:=REX[2]:=1@-5;
11200     WHILE Y>0.5@-7
11300     DO BEGIN RK2N(2,VIERDEORDE(Y,I,E4X,DE4X),Y,E4X,DE4X,I,INTERVAL,
11400         H,AEX,REX,M);
11500         WRITE(SHORROUT,<5(E12.5,X2)>,Y,E4X[1],DE4X[1],E4X[2],DE4X[2]);
11600     END;
11700     ECO[1]:=E4X[1];ECO[2]:=DE4X[1];ECO[3]:=E4X[2];ECO[4]:=DE4X[2];
11800     END;
11900     LOCK(SHORROUT,CRUNCH);
12000     END;% OF SHORTWAVE
12100     REAL PROCEDURE DELI(Y);
12200     VALUE Y:REAL Y;
12201     %%%%%%%%%%%
12202     %%%%%%%%%%%
12203     %%%%%%%%%%%      Deze damping wordt gebruikt om de in-
12204     %%%%%%%%%%%      vallende korte golf te elimineren.
12205     %%%%%%%%%%%
12206     %%%%%%%%%%%
12300     BEGIN DELI:=IF Y>-BETA-0.5 THEN 0
12400         ELSE 0.5*(Y+BETA+0.5)*DELTA;
12500     END;%OF DELI(Y)
12600     REAL PROCEDURE DEMP(Y);
12700     VALUE Y:REAL Y;
12701     %%%%%%%%%%%
12702     %%%%%%%%%%%
12703     %%%%%%%%%%%      Deze damping wordt gebruikt om de
12704     %%%%%%%%%%%      uitgaande korte golf te verwijderen.
12705     %%%%%%%%%%%

```



```

12706 %%%%%%%%%%%
12800 BEGIN DEMP:=IF Y>-(BETA+0.2) THEN 0
12900 ELSE 5*(Y+BETA+0.2);
13000 END;% OF DEMP(Y)
13100 REAL PROCEDURE TWEEDEORDE(X,E,DE);
13200 VALUE X,E,DE;REAL X,E,DE;
13300 BEGIN TWEEDEORDE:=(-F(X)*DE-G(X)*E)/(C(X));
13400 END;%OF TWEEDE ORDE
13500 PROCEDURE KORTGEDEMPT(ESTART,EEIND,DEMP,Y,FIRST,PRINT,XEND,TYPE);
13600 REAL ARRAY ESTART,EEIND[*];REAL DEMP,Y,XEND;BOOLEAN FIRST,PRINT;
13700 INTEGER TYPE;
13701 %%%%%%%%%%%
13702 %%%%%%%%%%%
13703 %%%%%%%%%%% Deze procedure wordt gebruikt om %%%%%%%%%%%
13704 %%%%%%%%%%% 1: door twee keer te integreren vanaf %%%%%%%%%%%
13705 %%%%%%%%%%% Y=0 met randvoorwaarden,gebaseerd op %%%%%%%%%%%
13706 %%%%%%%%%%% longwave resp. shortwave,de constantes %%%%%%%%%%%
13707 %%%%%%%%%%% alf1 en alf2 te bepalen,die nodig zijn %%%%%%%%%%%
13708 %%%%%%%%%%% voor: %%%%%%%%%%%
13709 %%%%%%%%%%% 2: integreren van de vergelijking,m.b.v. %%%%%%%%%%%
13710 %%%%%%%%%%% de uit de voorgaande resultaten bepaalde %%%%%%%%%%%
13711 %%%%%%%%%%% randvoorwaarden,om het verloop van het %%%%%%%%%%%
13712 %%%%%%%%%%% veld te bepalen. %%%%%%%%%%%
13713 %%%%%%%%%%%
13714 %%%%%%%%%%%
13800 BEGIN REAL ARRAY EC,DEC[1:4];
13900 FILE DEMPOUTRE(KIND=DISK,PROTECTION=SAVE,NEWFILE=TRUE);
14000 FILE DEMPOUTIM(KIND=DISK,PROTECTION=SAVE,NEWFILE=TRUE);
14100 REAL PROCEDURE ALFA1(Y);
14200 VALUE Y;REAL Y;
14300 BEGIN ALFA1:=3*((DELTA*DELTA+DEMP*DEMP)/(1-4*ETA*ETA*GAMMA))*
14400 (1+ETA*Y);
14500 END;
14600 REAL PROCEDURE A(Y);
14700 VALUE Y;REAL Y;
14800 BEGIN A:=3*((DELTA*DELTA)/(1-4*ETA*ETA*GAMMA))*(1+ETA*Y);
14900 END;
15000 REAL PROCEDURE EEN(Y);
15100 VALUE Y;REAL Y;
15200 BEGIN EEN:=1/(Y+BETA);
15300 END;
15400 REAL PROCEDURE TWEE(Y);
15500 VALUE Y;REAL Y;
15600 BEGIN TWEE:=-DELTA*Y/ALFA1(Y)+(1+ETA*Y)*SQRT(GAMMA/BETA)*EEN(Y);
15700 END;
15800 REAL PROCEDURE DRIE(Y);
15900 VALUE Y;REAL Y;
16000 BEGIN DRIE:=-DEMP*Y/ALFA1(Y);
16100 END;
16200 REAL PROCEDURE VIER(Y);
16300 VALUE Y;REAL Y;
16400 BEGIN VIER:=BETA*EEN(Y)/ALFA1(Y);
16500 END;
16600 REAL PROCEDURE B(Y);
16700 VALUE Y;REAL Y;
16800 BEGIN B:=Y*(Y+BETA)-GAMMA*(1+ETA*Y)*(1+ETA*Y)+
16900 SQRT(BETA*GAMMA)*(1-ETA*BETA)*EEN(Y);
17000 END;
17100 REAL PROCEDURE VIJF(Y);
17200 VALUE Y;REAL Y;
17300 BEGIN VIJF:=B(Y)/ALFA1(Y);
17400 END;

```

```

17500 REAL PROCEDURE RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE);
17600 VALUE I,Y; INTEGER I,TYPE; REAL Y; REAL ARRAY EC,DEC[*];
17700 BEGIN IF TYPE=1 THEN
17800     RECHTS:=CASE (I-1) OF
17900         (EC[2],
18000         (EEN(Y)*DEC[2]-TWEE(Y)*EC[2]-DRIE(Y)*EC[4]
18100         +VIER(Y)*(DELTA*DEC[1]+DEMP*DEC[3])-
18200         VIJF(Y)*(DELTA*EC[1]+DEMP*EC[3])),
18300         EC[4],
18400         (EEN(Y)*DEC[4]-TWEE(Y)*EC[4]+DRIE(Y)*EC[2]+
18500         VIER(Y)*(DELTA*DEC[3]-DEMP*DEC[1])-VIJF(Y)*
18600         (DELTA*EC[3]-DEMP*EC[1])));
18700     IF TYPE=2 THEN
18800     BEGIN IF I=1 THEN RECHTS:=EC[2];
18900         IF I=3 THEN RECHTS:=EC[4];
19000     IF I=2 THEN RECHTS:=DEC[2]*(1/(Y+BETA)-DEMP)
19100     +EC[2]*(DELTA*Y/A(Y)-SQRT(GAMMA/BETA)*(1+ETA*Y)/(Y+BETA))
19200     +DEC[1]*BETA*DELTA/(A(Y)*(Y+BETA))-B(Y)*DELTA*EC[1]/A(Y);
19300     IF I=4 THEN RECHTS:=DEC[4]*(1/(Y+BETA)-DEMP)
19400     +EC[4]*(DELTA*Y/A(Y)-SQRT(GAMMA/BETA)*(1+ETA*Y)/(Y+BETA))
19500     +DEC[3]*BETA*DELTA/(A(Y)*(Y+BETA))-B(Y)*DELTA*EC[3]/A(Y);
19600     END;
19700 END;
19800 PROCEDURE EXTRAPOL(EC,DEC,Y,DX);
19900 VALUE Y,DX; REAL ARRAY EC,DEC[*]; REAL Y,DX;
20000 BEGIN REAL ARRAY ECH,DECH[1:4];
20100     INTEGER I; REAL ER4H,EI4H;
20200     ER4H:=RECHTS(2,Y,EC,DEC,TYPE);
20300     EI4H:=RECHTS(4,Y,EC,DEC,TYPE);
20400     FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
20500     DO BEGIN ECH[I]:=EC[I];
20600         DECH[I]:=DEC[I];
20700     END;
20800     EC[1]:=ECH[1]+DX*DECH[1]+DX*DX*ECH[2]/2;
20900     EC[2]:=ECH[2]+DX*DECH[2]+DX*DX*ER4H/2;
21000     EC[3]:=ECH[3]+DX*DECH[3]+DX*DX*ECH[4]/2;
21100     EC[4]:=ECH[4]+DX*DECH[4]+DX*DX*EI4H/2;
21200     DEC[1]:=DECH[1]+DX*ECH[2]+DX*DX*DECH[2]/2;
21300     DEC[2]:=DECH[2]+DX*ER4H;
21400     DEC[3]:=DECH[3]+DX*ECH[4]+DX*DX*DECH[4]/2;
21500     DEC[4]:=DECH[4]+DX*EI4H;
21600 END;
21700 REAL ARRAY AE,RE,ECH,DECH[1:4];
21800 REAL XT,INTERVAL,HULPINT,H;
21900 INTEGER I,M;
22000 PROCEDURE OUTPUT;
22100 BEGIN WRITE(DEMPOUTRE,<5(E12.5,X2)>,XT,EC[1],DEC[1],EC[2],DEC[2]);
22200     WRITE(DEMPOUTIM,<5(E12.5,X2)>,XT,EC[3],DEC[3],EC[4],DEC[4]);
22300     END;
22400 BEGIN
22500     FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
22600     DO AE[I]:=RE[I]:=@-5;
22700     EC[1]:=ESTART[1]; DEC[1]:=ESTART[2]; EC[2]:=ESTART[3];
22800     DEC[2]:=ESTART[4]; EC[3]:=ESTART[5]; DEC[3]:=ESTART[6];
22900     EC[4]:=ESTART[7]; DEC[4]:=ESTART[8];
23000     XT:=0; INTERVAL:=-0.1; H:=INTERVAL/4;
23100     Y:=0;
23200     INTERVAL:=-0.1; H:=INTERVAL/2;
23300     WHILE Y>(-BETA-INTERVAL+@-7)
23400     DO BEGIN
23500     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,INTERVAL,H,AE,RE,M);
23600     XT:=XT+INTERVAL;
23700

```

```

23800     IF PRINT THEN OUTPUT;
23900     END;
24000     HULPINT:=-0.01;H:=HULPINT/2;
24100     WHILE Y>(-BETA-2*HULPINT-@-7)
24200     DO BEGIN
24300     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,HULPINT,H,AE,RE,M);
24400     XT:=XT+HULPINT;
24500     % IF PRINT THEN OUTPUT;
24600     END;
24700     HULPINT:=-0.0001;H:=HULPINT/2;
24800     WHILE Y>(-BETA-2*HULPINT-@-7)
24900     DO BEGIN
25000     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,HULPINT,H,AE,RE,M);
25100     XT:=XT+HULPINT;
25200     % IF PRINT THEN OUTPUT;
25300     END;
25310     FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
25320     DO BEGIN ECH[I]:=EC[I];
25330     DECH[I]:=DEC[I];
25340     END;
25345     EXTRAPOL(EC,DEC,Y,-@-4);
25350     XT:=XT-@-4;
25360     IF PRINT THEN OUTPUT;
25370     FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
25380     DO BEGIN EC[I]:=ECH[I];
25385     DEC[I]:=DECH[I];
25390     END;
25400     EXTRAPOL(EC,DEC,Y,-2@-4);
25500     Y:=Y-2@-4;
25600     XT:=XT-@-4;
25700     HULPINT:=-0.0009;
25800     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,HULPINT,H,AE,RE,M);
25900     %IF PRINT THEN OUTPUT;
26000     XT:=XT+HULPINT;
26100     HULPINT:=-0.009;
26200     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,HULPINT,H,AE,RE,M);
26300     XT:=XT+HULPINT;
26400     %IF PRINT THEN OUTPUT;
26500     HULPINT:=-0.09;
26600     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,HULPINT,H,AE,RE,M);
26700     XT:=XT+HULPINT;
26800     IF PRINT THEN OUTPUT;
27000     IF FIRST THEN
27100     BEGIN WHILE (ABS(EC[1])<@5 AND Y>-2.5)
27200     DO BEGIN
27300     RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,INTERVAL,H,AE,RE,M);
27400     XT:=XT+INTERVAL;
27500     IF PRINT THEN OUTPUT;
27600     END;
27700     FIRST:=FALSE;XEND:=Y;
27800     END
27900     ELSE BEGIN
28000     WHILE (Y>XEND)
28100     DO BEGIN RK2N(4,RECHTS(I,Y,EC,DEC,TYPE),Y,EC,DEC,I,INTERVAL,H,AE,RE,M);
28200     XT:=XT+INTERVAL;
28300     IF PRINT THEN OUTPUT;
28400     END;
28500     END;
28600     EEIND[1]:=EC[1];EEIND[2]:=DEC[1];EEIND[3]:=EC[2];EEIND[4]:=DEC[2];
28700     EEIND[5]:=EC[3];EEIND[6]:=DEC[3];EEIND[7]:=EC[4];EEIND[8]:=DEC[4];
28800     END;
28900     LOCK(DEMPOUTRE,CRUNCH);

```

```

29000 LOCK(DEMPOUTIM,CRUNCH);
29100 END;% OF KORTGEDEMP
29200 BEGIN
29201 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29202 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29203 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Hier begint het eigenlijke programma %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29204 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Volgorde van de werkzaamheden: %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29205 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% bepaling lange golf,Y>0;bepaling korte %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29206 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% golf,Y>0;bepaling alf1,alf2;bepaling %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29207 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ex-veld,Y<0;bepaling absorptiecoefficient. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29208 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29209 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29300 REAL ARRAY ELO,ECO,ESTART,ELEND,ESEND,EEIND[1:8];
29400 REAL ALF1,ALF2,ABSCOEFF,YEND,HULP,ERL,EIL,ERS,EIS,Y,
29500 AE,RE,ER,DER,EI,DEI,KY,RA,RB,IA,IB,X1,X2,DX,H1,H2;
29600 INTEGER I,M,TYPE;
29700 FILE DIAGNOSTICS(KIND=DISK,PROTECTION=SAVE,NEWFILE=TRUE);
29800 FILE DATAUIT(KIND=DISK,PROTECTION=SAVE,NEWFILE=TRUE);
29900 BOOLEAN FIRST,PRINT;
30000 BEGIN BETA:=0.2;ETA:=0.1;GAMMA:=0.3;DELTA:=.5@-4;
30100 WRITE(DIAGNOSTICS,<4(E12.5,X2)>,BETA,ETA,GAMMA,DELTA);
30200 LONGWAVE(ELO);
30300 WRITE(DIAGNOSTICS,<4(E12.5,X2)>,ELO[1],ELO[2],ELO[3],ELO[4]);
30400 FOR I:=2 STEP 1 UNTIL 4
30500 DO ELO[I]:=ELO[I]/ELO[1];
30600 ELO[1]:=1;
30700 SHORTWAVE(ECO);
30800 WRITE(DIAGNOSTICS,<4(E12.5,X2)>,ECO[1],ECO[2],ECO[3],ECO[4]);
30900 FOR I:=2 STEP 1 UNTIL 4
31000 DO ECO[I]:=ECO[I]/ECO[1];
31100 ECO[1]:=1;
31200 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
31300 DO ESTART[I]:=ELO[I];
31400 FIRST:=TRUE;PRINT:=FALSE;
31500 TYPE:=1;
31600 KORTGEDEMP(ESTART,ELEND,DELI(Y),Y,FIRST,PRINT,YEND,TYPE);
31700 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
31800 DO ESTART[I]:=ECO[I];
31900 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
32000 DO ESTART[I+4]:=0;
32100 Y:=0;PRINT:=FALSE;
32200 KORTGEDEMP(ESTART,ESEND,DELI(Y),Y,FIRST,PRINT,YEND,TYPE);
32300 ERL:=ELEND[1];EIL:=ELEND[5];
32400 ERS:=ESEND[1];EIS:=ESEND[5];
32500 HULP:=ERS*ERS+EIS*EIS;
32600 ALF1:=-((ERL*ERS+EIL*EIS)/HULP);
32700 ALF2:=(ERL*EIS-ERS*EIL)/HULP;
32800 WRITE(DIAGNOSTICS,<2(E12.5,X2)>,ALF1,ALF2);
32900 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
33000 DO ESTART[I]:=ELO[I]+ALF1*ECO[I];
33100 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4
33200 DO ESTART[I+4]:=ALF2*ECO[I];
33300 PRINT:=TRUE;Y:=0;FIRST:=FALSE;YEND:=YEND-1;
33400 TYPE:=2;
33500 KORTGEDEMP(ESTART,EEIND,DEMP(Y),Y,FIRST,PRINT,YEND,TYPE);
33600 X1:=X2:=YEND;
33700 DX:=-0.1;H1:=H2:=DX/4;
33800 AE:=RE:=1@-5;
33900 ER:=EEIND[1];DER:=EEIND[2];
34000 EI:=EEIND[5];DEI:=EEIND[6];
34100 WHILE (X1>-1/ETA+@-7)
34200 DO BEGIN RK2(TWEEDEORDE(X1,ER,DER),X1,ER,DER,DX,H1,AE,RE,M);

```

```
34300          RK2(TWEEDEORDE(X2,EI,DEI),X2,EI,DEI,DX,H2,AE,RE,M);
34400  WRITE(DATAUIT,<5(E12.5,X2)>,X1,ER,DER,EI,DEI);
34500          END;
34600          KY:=SQRT(ABS(BETA-1/ETA));
34700          RA:=(KY*ER+DEI)/(2*KY);
34800          IA:=(KY*EI-DEI)/(2*KY);
34900          RB:=(KY*ER-DEI)/(2*KY);
35000          IB:=(KY*EI+DEI)/(2*KY);
35100          ABSCOEFF:=1-((RB*RB+IB*IB)/(RA*RA+IA*IA));
35200          WRITE(DIAGNOSTICS,<E12.5>,ABSCOEFF);
35300  END;
35400  LOCK(DIAGNOSTICS,CRUNCH);
35500  LOCK(DATAUIT,CRUNCH);
35600  END;
35700  END.
```

Literatuur.

A.L. Rabinstein, Asymptotic solutions of  $u^{iv} + \lambda^2 (zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$  for large  $|\lambda|$ , Arch. Rat. Mech. Anal. 1 418.

N.S. Erokhin, S.S. Moiseev, Wave processes in an inhomogenous plasma. Reviews of Plasma Physics, vol 7. 181.

Abramowitz/Stegun, Handbook of mathematical functions, Dover publications.

A.D. Pilya, V.I. Fedorov, Linear wave conversion in an inhomogenous magnetoactive plasma. Soviet Physics JETP 30 653.

A. Nayfeh Perturbation methods, Wiley.1973

Ting-wei Tang, Mode conversion in a weakly inhomogenous collisionless magnetoplasma. Phys. Fluids, 13 121.

E.L. Ince, Ordinary differential equations. Dover publications.

D.W. Forslund, J.M. Kindel, K. Lee, E.L. Lindman, R.L. Morse, Theory and simulation of resonant absorption in a hot plasma, Phys. Rev. A 11 679.

Rev. Ch.L. Dodgson, The hunting of the Snark.1876.

J.P. Freidberg, R.W. Mitchell, R.L. Morse, R.L. Rudsinski, Resonant absorption of laser light by plasma targets, Phys. Rev. Let. 28, 795.