Stabiele benaderde vergelijkingen voor ionenacoustische golven

Swenne, Dick

Stabiele benaderde vergelijkingen
voor ionenacoustische golven.

Dick Swenne.

Verslag van het afstudeerwerk
verricht in de vakgroep Theoretische Natuurkunde,
van de afdeling Technische Natuurkunde
van de Technische Hogeschool Eindhoven.

Afstudeerhoogleraar: Prof.dr. LJF Broer.

Eindhoven, maart 1979.

Inhoud.

Samenvatting.

Met behulp van het Hamiltonformalisme zijn stabiele benaderde vergelijkingen afgeleid voor ionenacoustische golven in een n-komponentig koud plasma. Dit is gedaan voor lange, lage en tamelijk lange, tamelijk lage golven.

Voor een 2-komponentig plasma is een Korteweg - De Vries - vergelijking afgeleid voor éénrichtingsgolven.

Voorts wordt het in hoofdstuk 1 ontwikkelde formalisme uitgebreid naar drie dimensies en toegepast op een 1-komponentig plasma. Tenslotte wordt in het geval van bolsymmetrische golven gezocht naar een KDV benadering voor naar buiten lopende golven.

1. Stabiele benaderde vergelijkingen voor ionacoustische golven.

1.0. Inleiding.

Wanneer men voor een probleem nogal gecompliceerde vergelijkingen heeft, dan is men vaak alleen geïnteresseerd in een speciaal soort oplossingen. Bij watergolven bijvoorbeeld kan men geïnteresseerd zijn in getijdegolven of in oppervlaktegolven. Getijdegolven kunnen als lang en laag gekwalificeerd worden. Lang betekent hier dat de golflengte groot is in vergelijking met de golfhoogte en laag wil zeggen dat de golfhoogte klein is ten opzichte van de waterdiepte. Oppervlaktegolven daarentegen zijn laag maar kort, als de diepte groot is.
Afhankelijk van de soort oplossingen waarin men geïnteresseerd is worden dan benaderingen voor het probleem gezocht.
Men kan daarbij het Hamiltonformalisme gebruiken. Uitgangspunt is een stelsel vergelijkingen dat geacht wordt het verschijnsel exact te beschrijven. Wanneer men geïnteresseerd is in een bepaalde categorie oplossingen, bijvoorbeeld vrij lange, vrij lage golven, dan wil men deze vergelijkingen vervangen door een eenvoudiger stelsel dat voor deze soort oplossingen een behoorlijke benaderde beschrijving geeft.
Dit kan direct of indirect gebeuren. Bij de directe methode worden termen in de vergelijkingen die klein zijn voor de bedoelde oplossingen weggelaten. Het bezwaar hiervan is dat de benaderde vergelijking dan een ander karakter kan hebben dan de oorspronkelijke, bijvoorbeeld niet meer stabiel of niet meer conservatief.
Bij de indirecte methode bekijkt men eerst welke eigenschappen van de exacte vergelijkingen essentieel zijn. Vervolgens zoekt men benaderingen die deze eigenschappen in stand houden. Laat de exacte vergelijkingen stabiel en conservatief zijn. Ze zijn dan equivalent met een Hamiltons systeem. De Hamiltoniaan is dan positief (nul in de rusttoestand). We zoeken dan eerst een benaderde Hamiltoniaan, zo dat deze ook positief is en voor de gezochte soort oplossingen dicht in de buurt ligt van de exacte Hamiltoniaan. Er wordt dan verder gewerkt met de vergelijkingen die exact volgen uit deze Hamiltoniaan.
Het Hamiltonformalisme is gebruikt voor de beschrijving van oppervlaktegolven [ref. 2,4,5] en voor de beschrijving van ionacoustische golven in een 1-componentig koud plasma [ref. 7]. Dit hoofdstuk is hierop gebaseerd, en is een uitbreiding van [ref. 7] voor plasma's met meer dan één ionensoort (n-componentig plasma).

1.1. Afleiding van de basisvergelijkingen.

Ionenacoustische golven zijn laagfrekwente quasi-elektrostatische oscillaties die voor kunnen komen in een niet-isotherm plasma met hete elektronen en koude ionen. We beschouwen in hoofdstuk 1 en 2 1-dimensionale golven. Onder deze voorwaarden kunnen de ionen hydrodynamisch worden beschreven door de volgende uitdrukkingen:

Continuïteitsvergelijking voor de ionensoorten:

$$\rho_{i_t} + (\rho_i v_i)_x = 0 \, . \qquad i = 1,2,\ldots n. \tag{1.1}$$

Impulsvergelijking voor de ionensoorten:

$$m_i \left(v_{i_t} + v_i v_{i_x} \right) + Z_i e \Psi_x = 0 \, . \tag{1.2}$$

Omdat de elektronen onder laagfrekwente oscillaties in thermisch evenwicht worden verondersteld, wordt hun dichtheid bepaald door de Boltzmann-verdeling [ref. 1, p.179]:

$$N_e = N_{e_0} \exp \frac{e\Psi}{kT_e} \, . \tag{1.3}$$

We beschouwen longitudinale golven, dwz. het golfgetal $\underline{k}$ is evenwijdig aan de elektrische veldsterkte $\underline{E}$, zodat $\underline{\nabla} * \underline{E} = \underline{0}$ en derhalve van de Maxwellvergelijkingen alleen de Poissonvergelijking overblijft:

$$\Psi_{xx} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(\underline{Z},\underline{N}) + \frac{e N_{e_0}}{\varepsilon_0} \tag{1.4}$$

waarin $(\underline{Z},\underline{N}) := \sum_{j=1}^{n} Z_j N_j$.

In deze vergelijkingen hebben de symbolen de volgende betekenis:

ρ_i := massadichtheid van de i-de ionensoort. (rho)

v_i := snelheid van de deeltjes van de i-de ionensoort.

x := ruimtecoördinaat.

t := tijdcoördinaat.

m_i := massa van de deeltjes van de i-de ionensoort.

e := elementaire lading.

Z_i := lading van de deeltjes van de i-de ionensoort uitgedrukt in elementaire ladingen.

Ψ := electrische potentiaal.

n := aantal componenten van het plasma.

ε_0 := permeabiliteit van vacuüm.

N_i := deeltjesdichtheid van de i-de ionensoort.

N_e := electronendeeltjesdichtheid.

N_{e_0} := evenwichtselectronendeeltjesdichtheid.

k := konstante van Boltzmann.

T_e := electronentemperatuur.

De volgende normeringen worden nu toegepast, om de vergelijkingen te vereenvoudigen:

$$\psi^* := \frac{e}{kT_e}\,\psi$$

$$x^* := \left(\frac{e^2 N_{e_0}}{\varepsilon_0 k T_e}\right)^{1/2} x \qquad \text{waarin} \left(\frac{\varepsilon_0 k T_e}{e^2 N_{e_0}}\right)^{1/2} \text{ de Debyelengte genoemd wordt.}$$

$$N_i^* := \frac{N_i}{N_{e_0}}$$

Toegepast op (1.3) en (1.4) levert dit:

$$\psi^*_{x^*x^*} = \exp \psi^* - (\underline{Z}, \underline{N}^*) .$$

Nu stellen we:

$$t^* := \left(\frac{e^2 N_{e_0}}{\varepsilon_0 M}\right)^{1/2} t \qquad \text{waarin} \left(\frac{e^2 N_{e_0}}{\varepsilon_0 M}\right)^{1/2} \text{ de plasmafrekwentie genoemd wordt.}$$

$$m_i^* := \frac{m_i}{M} \qquad \text{waarin M een willekeurige massa is.} \tag{1.4a}$$

$**$ weglatend geeft dit:

$$\psi_{xx} = \exp \psi - (\underline{Z}, \underline{N}) \tag{1.5}$$

$$P_{i_t} + (P_i v_i)_x = 0 \tag{1.6}$$

$$m_i (v_{i_t} + v_i v_{i_x}) + Z_i \psi_x = 0 . \tag{1.7}$$

Merk op dat $P_i = m_i N_i$. (1.8)

1.2. Het kanonieke theorema.

We proberen nu een Hamiltoniaan te vinden waarvoor de kanonieke vergelijkingen equivalent zijn met (1.5) t/m (1.7)

Als Hamiltoniaan nemen we de som van de kinetische en electrostatische energie:

$$\mathcal{H} = \int H\, dx = \int \tfrac{1}{2} \left(\sum_j P_j \phi_{j_x}^2 \right) dx + \mathcal{U}\{P_1 \ldots P_n\} . \tag{1.9}$$

Alle integralen over dx lopen van $-\infty$ tot ∞.

In (1.9) wordt ϕ gedefinieerd door

$$\underline{v} = \underline{\phi}_x \tag{1.10}$$

$\underline{\phi}$ heet de snelheidspotentiaal.

In (1.9) is $\underline{v}$ door $\underline{\phi}_x$ vervangen omdat uit de gasdynamica blijkt dat $\underline{P}$ en $\underline{\phi}$ kanoniek geconjugeerde variabelen zijn.

De kanonieke vergelijkingen zijn [ref.10, p.70] :

$$\begin{cases} p_{i_t} = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_i} & (1.11) \\ \phi_{i_t} = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_i} \,. & (1.12) \end{cases}$$

De variatie van $\mathcal{H}$ is in het algemeen:

$$\delta \mathcal{H} = \int \sum_j \left\{ \left(H_{p_j} - \frac{d}{dx} H_{p_{j_x}} \right) \delta p_j + \left(H_{\phi_j} - \frac{d}{dx} H_{\phi_{j_x}} \right) \delta \phi_j \right\} dx \,.$$

Hier en in het vervolg veronderstellen we dat alle functies van x voldoen aan $f(\pm\infty) = 0$. Dit is nodig in verband met partieel integreren.
Uit (1.11) krijgen we

$$p_{i_t} = -(p_i \phi_{i_x})_x \qquad (1.13)$$

Deze vergelijking komt overeen met (1.6).
Uit (1.12) krijgen we:

$$\phi_{i_t} = -\tfrac{1}{2} \phi_{i_x}^2 - \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta p_i} \,. \qquad (1.14)$$

Deze vergelijking moet equivalent zijn met (1.7), dus moet gelden:

$$\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta p_i} = \alpha_i \Psi \qquad (1.15)$$

met

$$\alpha_i := \frac{Z_i}{m_i} \,.$$

Aan deze eis wordt voldaan door:

$$\mathcal{U} = \int U\, dx = \int \left(\Gamma \Psi - \exp \Psi - \tfrac{1}{2} \Psi_x^2 + 1 \right) dx \qquad (1.16)$$

waarin $\Gamma := (\underline{\alpha} \cdot \underline{p}) = (\underline{Z}, \underline{N})$ (1.17)

de ionenladingsdichtheid is.
De variatie van $\mathcal{U}$ is immers:

$$\delta \mathcal{U} = \int \left\{ \Psi (\underline{\alpha}, \underline{\delta p}) + (\Gamma - \exp \Psi + \Psi_{xx}) \delta \Psi \right\} dx$$

en mbv. (1.5) blijkt hieruit dat aan (1.15) voldaan is.
De vergelijkingen (1.5) t/m (1.7) zijn dus inderdaad equivalent met (1.13) en (1.14).
De laatste term van U is formeel overbodig. Hij is toegevoegd om er voor te zorgen dat U = 0 in evenwicht, waar $\Psi = 0$ en $\Gamma = 1$.
Men kan (1.16) nog anders schrijven:
A) Door de e-macht te elimineren en $\Psi_x(\pm\infty) = 0$ te gebruiken krijgt men

$$\mathcal{U} = \int \left\{ \Gamma (\Psi - 1) - \tfrac{1}{2} \Psi_x^2 + 1 \right\} dx \,. \qquad (1.18)$$

B) Door eliminatie van Γ en partieel integreren krijgt men:

$$\mathcal{U} = \int \left\{ (\Psi - 1) \exp \Psi + \tfrac{1}{2} \Psi_x^2 + 1 \right\} dx \,. \qquad (1.19)$$

Omdat de functies $f(\Psi_x) := \frac{1}{2}\Psi_x^2$ en $g(\Psi) := (\Psi - 1)\exp\Psi + 1$ in (1.19) beide niet-negatief zijn, is stabiliteit hier geen probleem.

1.3. Benaderde Hamiltonianen.

In deze § worden drie benaderde Hamiltonianen behandeld, een hydrodynamische benadering voor lange golven; een lineaire benadering voor lage golven en een niet lineaire benadering voor tamelijk lange, tamelijk lage golven.
In alle gevallen zoeken we naar een functie $\Psi(\Gamma)$ die een benaderde oplossing van (1.5) is en verkrijgen $\mathcal{U}$ door integratie van (1.15) (en dus niet door substitutie van $\Psi(\Gamma)$ in (1.16)).
Opgemerkt kan nog worden dat bij de beschrijving van oppervlaktegolven het juist de kinetische energie functionaal $\mathcal{T}$ is die benaderd wordt [ref. 4]

1.3.1. Hydrodynamische benadering.

Als de golflengte erg groot is, geldt $\Psi_{xx} \ll \exp\Psi - \Gamma$
Nu reduceert (1.5) tot:

$$\Psi = \ln\Gamma \qquad (1.20)$$

en $\mathcal{U}$ wordt:

$$\mathcal{U}_a = \int(\Gamma\ln\Gamma - \Gamma + 1)\,dx. \qquad (1.21)$$

$\mathcal{U}_a$ is stabiel als $U_a \geqslant 0$,wat het geval is wanneer $\Gamma > 0$ dwz. als altijd en overal de ionenladingsdichtheid positief is.

1.3.2. Lineaire benadering.

Het is handig om te definieren:

$$\gamma := \Gamma - 1 \qquad (1.22)$$

de afwijking van de evenwichtsionenladingsdichtheid.
We lineariseren (1.5): $\exp\Psi = 1 + \Psi$
en krijgen

$$\gamma = \Psi - \Psi_{xx} \qquad (1.23)$$

Een benaderde oplossing van (1.23) is

$$\Psi = \gamma + \gamma_{xx} \qquad (1.24)$$

zodat

$$\mathcal{U}_b = \int\left(\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_x^2\right)dx \qquad (1.25)$$

$\mathcal{U}_b$ is echter alleen stabiel als het spectrum van γ beperkt is tot $|k| \leq 1$ waarin k het golfgetal voorstelt.
We proberen het stabiliteitsgebied uit te breiden door (1.23) exact op te lossen:

$$\Psi = R\gamma \qquad (1.26)$$

waarin $$R := \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \qquad (1.27)$$

zodat nu

$$\mathcal{U}_c = \int \tfrac{1}{2}\gamma R\gamma\,dx \qquad (1.28)$$

Deze potentiële energiedichtheid $\mathcal{U}$ heeft de dimensie van een ladingsdichtheid * potentiaal. We zullen nu laten zien dat inderdaad $\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \rho_i} = \alpha_i \psi$ en vervolgens dat $\mathcal{O}(Rf) = \mathcal{O}(f)$, wat we daarna nodig hebben.

<u>Eigenschap 1.A.</u> $R^{+} = R$.

Bewijs: Door 2 maal partieel integreren blijkt dat $\int f g_{xx}\, dx = \int g f_{xx}\, dx$ en dus ook dat $\int f R^{-1} g\, dx = \int g R^{-1} f\, dx$

maw. $R^{-1+} = R^{-1}$, derhalve is ook $R^{+} = R$. □

Door (1.28) uit te schrijven ziet men dat:

$$\delta \mathcal{U}_c = \int \sum_j \left(\tfrac{1}{2} R\gamma \cdot \delta\beta_j + \tfrac{1}{2}\gamma \cdot \delta R \beta_j \right) dx$$

waarin $\beta_i = \alpha_i \rho_i$ (1.29)

de uitwijking van de ladingsdichtheid van de i-de component is,

met $\rho_i :=$ de uitwijking van de massadichtheid van de i-de component.

Merk op dat $\gamma = (\underline{\alpha}, \underline{\rho})$. (1.30)

Gebruik makend van het feit dat R hermitisch is en dat $\delta\beta_i = \alpha_i \delta\rho_i$ leidt dit tot:

$$\frac{\delta \mathcal{U}_c}{\delta \rho_i} = \alpha_i R\gamma \qquad (1.31)$$

en met (1.26) tot (1.15). □

<u>Eigenschap 1.B.</u> $\mathcal{O}(Rf) = \mathcal{O}(f)$

Bewijs: Uit de definitie van R (1.27) volgt dat

$$R^{-1} f = f - f_{xx}$$

dus $Rf = f + R f_{xx}$ (1.32)

Partieel integreren levert

$$\int f R f\, dx = \int f^2\, dx - \int f_x R f_x\, dx \qquad (1.33)$$

De operator R is positief: $\int g R g\, dx \geqslant 0$ (1.34)

omdat R^{-1} positief is, dus

$$\int f R f\, dx \leq \int f^2\, dx \qquad (1.35)$$

waaruit volgt dat $\mathcal{O}(Rf) = \mathcal{O}(f)$. □

Als we nu vervolgens γ en v van $\mathcal{O}(\varepsilon)$ veronderstellen, is het consistent om te nemen:

$$\mathcal{H}_c = \int \left(\tfrac{1}{2} \sum P_{o_j} \phi_{jx}^2 + \tfrac{1}{2} \gamma R \gamma \right) dx \qquad (1.36)$$

waarin $P_{o_i} :=$ de evenwichtsmassadichtheid van de i-de ionensoort,

zodat $\underline{P} = \underline{P}_o + \underline{\rho}$ (1.37)

en wegens ladingsneutraliteit $(\underline{\alpha} \cdot \underline{P}_o) = 1$. (1.38)

Alle termen van (1.36) zijn dan van gelijke orde.

De kanonieke vergelijking (1.11) geeft nu:

$$P_{i_t} = -P_{o_i}\,\phi_{i_{xx}} \tag{1.39}$$

en de kanonieke vergelijking (1.12) geeft mbv. (1.31)

$$\phi_{i_t} = -\alpha_i R\gamma \,. \tag{1.40}$$

Definieer nu $B_{o_i} := \alpha_i P_{o_i}$, de evenwichtsladingsdichtheid van de i-de ionensoort (Beta).

Differentiatie van (1.40) naar t en gebruik van (1.30) en (1.39) geeft

$$(\underline{B}_o \cdot \underline{\phi}_{xx})\,\underline{\alpha} - \underline{\phi}_{tt} + \underline{\phi}_{xxtt} = 0 \tag{1.41}$$

Differentiatie van (1.41) naar x geeft dezelfde vergelijking voor $\underline{v}$.
Combinatie van de twee maal naar x gedifferentieerde vergelijking (1.40) met de naar t gedifferentieerde vergelijking (1.39) levert:

$$(\underline{\alpha} \cdot \underline{P}_{xx})\,\underline{B}_o - \underline{P}_{tt} + \underline{P}_{xxtt} = 0 \tag{1.42}$$

Deze vergelijking kan ook geschreven worden als

$$(\underline{B}_o \cdot \underline{\ell}_{xx})\,\underline{\alpha} - \underline{\ell}_{tt} + \underline{\ell}_{xxtt} = 0 \tag{1.43}$$

met $\ell_i := \dfrac{\rho_i}{P_{o_i}}$.

Merk op dat $\gamma = (\underline{\ell} \cdot \underline{B}_o)$.

Vermenigvuldiging van de i-de vergelijking (1.42) met α_i en optelling levert met $\Psi = R\gamma$ (1.26)

$$c^2 \Psi_{xx} - \Psi_{tt} + \Psi_{xxtt} = 0 \tag{1.44}$$

waarin $c := (\underline{\alpha} \cdot \underline{B}_o)^{1/2}$, (1.45)

de snelheid van de golf voor $k \to 0$.

Merk op dat als n = 1 (1.41) t/m (1.44) reduceren tot

$$c^2 f_{xx} - f_{tt} + f_{xxtt} = 0 \;, \quad f = \phi, v, P, N, \rho, \ell, \Psi \,. \tag{1.46}$$

Deze vergelijking komt ook voor als een benadering voor de lineaire snaar [ref. 6].

De vergelijkingen (1.41), (1.43) en (1.44) kunnen ook rechtstreeks uit de gelineariseerde vergelijkingen (1.5) t/m (1.7) verkregen worden.

Uit (1.5) volgt $\Psi - \Psi_{xx} = (\underline{\ell} \cdot \underline{B}_o)$ (1.47)

uit (1.6) $\underline{\ell}_t + \underline{v}_x = \underline{0}$ (1.48)

en uit (1.7) $\underline{v}_t + \Psi_x \underline{\alpha} = \underline{0}$. (1.49)

Deze drie vergelijkingen geven (1.41), (1.43) en (1.44).

Beschouw nu lopende golven, dus neem $\Psi = \exp i(kx - \omega t)$. (1.50)

Dit geeft als dispersierelatie voor (1.44)

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{1 + k^2} \,. \tag{1.51}$$

Met (1.50) geeft (1.49) $\underline{v} = \dfrac{k}{\omega}\,\underline{\alpha}\, \exp i(kx - \omega t)$

en (1.48) levert $\underline{\ell} = \dfrac{k^2}{\omega^2}\,\underline{\alpha}\, \exp i(kx - \omega t)$

Ook voor $\Psi = \exp i(-kx - \omega t)$ kan men dit opschrijven. Voor elke k is er dus een lopende golf in beide richtingen.

1.3.3. Tamelijk lange, tamelijk lage golven.

In deze § beschouwen we amplitude en dispersie als effecten van dezelfde orde. Beschouw γ, Ψ, v en $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $\mathcal{O}(\varepsilon)$. We eisen dat de vergelijkingen goed zijn tot op $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ en de benaderde $\mathcal{H}$ tot op $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.
Schrijf (1.5) als $\varepsilon^2 \Psi_{xx} = \exp \varepsilon\Psi - (1+\varepsilon\Psi)$
ontwikkel $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \dots$, neem termen van dezelfde orde samen en stel $\varepsilon = 1$
Dan krijgt men:

Termen met ε : $0 = \Psi_0 - \gamma$ (1.52)

$$\varepsilon^2 : \quad \Psi_{0_{xx}} = \Psi_1 + \tfrac{1}{2}\Psi_0^2 = \Psi - \Psi_0 + \tfrac{1}{2}\Psi_0^2 \,. \tag{1.53}$$

Substitutie van (1.52) in (1.53) levert:

$$\Psi = -\tfrac{1}{2}\gamma + \gamma + \gamma_{xx} \,. \tag{1.54}$$

Integratie hiervan geeft:

$$\mathcal{U}_d = \int \left(-\tfrac{1}{6}\gamma^3 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_x^2\right) dx \tag{1.55}$$

zodat

$$\mathcal{H}_d = \int \Big[\sum_j P_j \phi_{j_x}^2 - \tfrac{1}{6}\gamma^3 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_x^2 \Big] dx \,. \tag{1.56}$$

Door de term $-\frac{1}{2}\gamma_x^2$ leidt dit tot een te beperkt stabiliteitsgebied, dwz, alleen voor zeer lange golven geldt $H_d \geqslant 0$.
Om het stabiliteitsgebied uit te breiden, stellen we analoog aan § 1.3.2:

$$\Psi = R\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma^2 \tag{1.57}$$

zodat $\mathcal{U}_e = \int \left(\tfrac{1}{2}\gamma R\gamma - \tfrac{1}{6}\gamma^3\right) dx$ (1.58)

Nu is dus:

$$\mathcal{H}_e = \int \Big(\sum \tfrac{1}{2} P_j \phi_{j_x}^2 + \tfrac{1}{2}\gamma R\gamma - \tfrac{1}{6}\gamma^3 \Big) dx \tag{1.59}$$

We zullen nu laten zien dat $\mathcal{H}_e - \mathcal{H}_d = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$.
Omdat $\mathcal{H}_d$ tot op $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ goed is, is $\mathcal{H}_e$ het dan ook.
Uit $R\gamma = \gamma + R\gamma_{xx}$ (1.32) volgt:

$$R\gamma = \gamma + \gamma_{xx} + R\gamma_{xxxx} \,. \tag{1.60}$$

Omdat $\gamma\gamma_{xx} + \gamma_x^2 = (\gamma\gamma_x)_x$ krijgen we uit (1.60)

$$\mathcal{H}_e - \mathcal{H}_d = \int \gamma R \gamma_{xxxx}\, dx = \int \gamma_{xx} R \gamma_{xx}\, dx \,.$$

en omdat $\mathcal{O}(R\gamma) = \mathcal{O}(\gamma)$ (eigenschap 1.B), is $\mathcal{H}_e - \mathcal{H}_d = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$
□

De kanonieke vergelijkingen (1.11) en (1.12) geven:

$$\begin{cases} P_{i_t} = -(P_i \phi_{i_x})_x & (1.61) \\ \phi_{i_t} = -\tfrac{1}{2}\phi_{i_x}^2 - \alpha_i \left(R\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma^2\right) & (1.62) \end{cases}$$

waar we (1.31) gebruikten:

$$\frac{\delta}{\delta P_i} \int \tfrac{1}{2}\gamma R\gamma\, dx = \alpha_i R\gamma$$

(1.61) en (1.62) geven met $\Psi = R\gamma - \frac{1}{2}\gamma^2$ (1.57) de oorspronkelijke vergelijkingen

(1.6) en (1.7).

1.4. Een kanonieke transformatie.

De vergelijkingen (1.61) en (1.62) hebben de onplezierige eigenschap dat ze niet stabiel genoeg zijn: de operator R wordt naar beneden slechts begrensd door 0 (dwz. het gelijkteken in $\int fRf\,dx \geqslant 0$ (1.34) kan voorkomen) en daarom kan $\mathcal{H}$ (1.59) voor korte golven en grote waarden van γ onstabiel worden, dwz. $U_e < 0$.

We kunnen een kanonieke transformatie uitvoeren en op deze manier een (toegestane) 4de orde verandering in $\mathcal{H}_e$ maken om het stabiliteitsgebied van de beschrijvende vergelijkingen (1.61) en (1.62) uit te breiden.

Ontbind R voor dit doel:

$$R = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1} = T^{\dagger}T. \qquad (1.63)$$

$T^{\dagger}$ is de geadjungeerde van T, omdat $T^{-1\dagger}$ de geadjungeerde van T^{-1} is; dit laatste volgt door partieel integreren.

We moeten ter voorbereiding twee dingen laten zien.

Eigenschap 1.C: $\mathcal{O}(Tf) = \mathcal{O}(f)$

Bewijs: Analoog aan bewijs van eigenschap 1.B. in § 1.3.2. De operator T is positief omdat T^{-1} positief is. □

Merk voorts op dat:

$$\int \gamma R \gamma\,dx = \int \gamma T^{\dagger}T\gamma\,dx = \int (T\gamma)^2\,dx. \qquad (1.64)$$

Neem nu

$$\mathcal{H}_f := \int \Big[\sum_j \tfrac{1}{2}(P_{0_j} + T\rho_j)\,\phi_{j_x}^{2} + \tfrac{1}{2}(\underline{\alpha}, T\underline{\rho})^2 - \tfrac{1}{6}(\underline{\alpha}, T\underline{\rho})^3 \Big] dx. \qquad (1.65)$$

Uit eigenschap 1.C. en (1.64) volgt nu dat $\mathcal{H}_f - \mathcal{H}_e = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$, zodat $\mathcal{H}_f$ goed is tot op $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

Opmerking: Wanneer men nu $\frac{\delta U_c}{\delta P_i} = \frac{\delta U_f}{\delta \rho_i}$ berekent, krijgt men een Ψ die in 2de orde benadering gelijk is aan de Ψ's uit § 1.3.2. en § 1.3.3.

Deze Ψ is hier verder niet interessant.

We stellen nu:

$$\begin{cases} \underline{u} := T\underline{\rho} & (1.66) \\ \underline{\xi} := T^{\dagger^{-1}}\underline{\phi} & (1.67) \end{cases}$$

Dat dit een kanonieke transformatie is wordt bewezen in § 2.2.1.

Vergelijking (1.65) wordt:

$$\mathcal{H}_f = \int \Big[\sum_j \tfrac{1}{2}(P_{0_j} + u_j)(T^{\dagger}\xi_{j_x})^2 + \tfrac{1}{2}(\underline{\alpha}, \underline{u})^2 - \tfrac{1}{6}(\underline{\alpha}, \underline{u})^3 \Big] dx. \qquad (1.68)$$

De variatie van $\mathcal{H}_f$ is:

$$\delta\mathcal{H}_f = \int \Big\{ \sum_j \Big[\Big(T^{\dagger}\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\dagger} (P_{0_j} + u_j) T^{\dagger}\xi_{j_x} \Big] \delta\xi_j + \sum_j \Big[\tfrac{1}{2}(T^{\dagger}\xi_{j_x})^2 + \alpha_j(\underline{\alpha}, \underline{u}) - \tfrac{1}{2}\alpha_j(\underline{\alpha}, \underline{u})^2 \Big] \delta u_j \Big\} dx. \qquad (1.69)$$

De kanonieke vergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} u_{i_t} = \dfrac{\delta \mathcal{H}_f}{\delta \xi_i} = -T \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(P_{0_i} + u_i)\, T^{+} \xi_{i_x}\right] & (1.70) \\[2ex] \xi_{i_t} = -\dfrac{\delta \mathcal{H}_f}{\delta u_i} = -\frac{1}{2}\left(T^{+}\xi_{i_x}\right)^2 - \alpha_i(\underline{\alpha}, \underline{u}) + \frac{1}{2}\alpha_i(\underline{\alpha}, \underline{u})^2 . & (1.71) \end{cases}$$

Omdat volgens (1.67)

$$\underline{v} = \phi_x = T^{+} \underline{\xi}_x \qquad (1.72)$$

is: $\underline{\xi}_x = T^{+^{-1}} \underline{v} = \underline{v} + \underline{v}_x .$ (1.73)

Nu geven (1.70) en (1.72):

$$u_{i_t} - u_{i_{xt}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(P_{0_i} + u_i)\, v_i \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_f}{\partial v_i} \qquad (1.74)$$

en (1.71) t/m (1.73):

$$v_{i_t} + v_{i_{xt}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} v_i^2 + \alpha_i(\underline{\alpha}, \underline{u}) - \frac{1}{2}\alpha_i(\underline{\alpha}, \underline{u})^2 \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_f}{\partial u_i} \cdot \qquad (1.75)$$

De laatste leden van (1.74) en (1.75) blijken uit $H_f = \sum_j \frac{1}{2}(P_{0_j} + u_j) v_j^2 + \frac{1}{2}(\underline{\alpha}, \underline{u})^2 - \frac{1}{6}(\underline{\alpha}, \underline{u})^3$

Deze vergelijkingen hebben H_f als beweginsconstante, dus zijn ze stabiel. [ref. 7]

Deze vergelijkingen (1.74) en (1.75) hebben het voordeel dat ze van 2de orde zijn, in tegenstelling tot de vergelijkingen (24) en (25) van [ref.7] , die van de 3de orde zijn. Dit komt door het gebruik van een andere kanonieke transformatie.

De vergelijkingen (1.74) en (1.75) zijn stabiel zolang $H_f \geqslant 0$, wat in ieder geval zo is als $u_i^2 + v_i^2 < 4$, waar de vergelijkingen al geen goede beschrijving van de ionenacoustische golven meer vormen.

2. Afleiding van de Korteweg-De Vries vergelijking.

2.0. Inleiding.

In dit hoofdstuk zal een benaderde vergelijking (de KDV vergelijking) worden afgeleid voor vlakke ionenacoustische golven in een 2 componentig plasma, die in één richting lopen. De uitbreiding naar n componenten is straight forward. Het blijkt dat $\mathcal{H}$(1.36) niet van ρ_1 en ρ_2 afzonderlijk afhangt, maar alleen van $\gamma = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$. Dit geeft ons het idee om een kanonieke transformatie $(\underline{\rho}, \underline{\phi}) \to (\underline{\sigma}, \underline{\vartheta})$ uit te voeren, zo dat $\sigma_1 \sim \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$ en σ_2 daarvan onafhankelijk. Als men op deze manier $\underline{\sigma}$ bepaald heeft, moet men $\underline{\vartheta}$ bepalen, zo dat de transformatie $(\underline{\rho}, \underline{\phi}) \to (\underline{\sigma}, \underline{\vartheta})$ kanoniek is.
Dan schrijft men de kanonieke vergelijkingen op. Om éénrichtingsgolven te krijgen is het nodig deze vergelijkingen te splitsen. We beschouwen eerst het lineaire geval om te kijken hoe dit moet en gebruiken het resultaat bij het niet-lineaire geval. Omdat in $\mathcal{H}$(1.59) ρ_1 en ρ_2 wel afzonderlijk voorkomen, zij het in een 3de orde term, zal de splitsing in het niet-lineaire geval niet exact zijn.
Zoals uit bovenstaande blijkt is de bepaling van σ_2 niet uniek. In § 2.1. zal een voor de hand liggende keuze worden gedaan, die echter niet tot het gewenste resultaat, (de KDV vergelijking is een goede benadering voor éénrichtingsgolven) leidt. In § 2.2 zal nagegaan worden welke keuze wel tot het gewenste resultaat leidt.

2.1. Hoe het niet moet.

2.1.1. De kanonieke transformatie.

We nemen $\underline{\sigma} := P\underline{\rho}$, met $P := (\underline{\alpha},\underline{\alpha})^{1/2}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ -\alpha_2 & \alpha_1\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2 & A_1\end{pmatrix}$.

Er geldt $$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

en det P = 1.
De factor $(\underline{\alpha},\underline{\alpha})^{-1/2}$ is toegevoegd om te zorgen dat $P^{-1} = P^T$; dit bespaart verderop enig rekenwerk.
Hoe moeten we nu $\underline{\phi}$ transformeren tot $\underline{\vartheta}$, opdat $\underline{\vartheta}$ kanoniek geconjugeerd is met $\underline{\sigma}$?
Een transformatie is kanoniek als er een genererende functionaal $\mathcal{F}$ bestaat zodat geldt [ref. 10, p.75] :

$$\begin{cases} \rho_i = \dfrac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi_i} \\[2ex] \vartheta_i = \dfrac{\delta \mathcal{F}}{\delta \sigma_i} \end{cases} . \qquad (2.2)$$

Neem voor $\mathcal{F} := \int \underline{\phi} \cdot P^T\underline{\sigma}\ dx = \int \underline{\sigma} \cdot P\underline{\phi}\ dx$

De variatie van $\mathfrak{F}$ is $\delta\mathfrak{F} = \int (P\underline{\phi}\,.\,\delta\underline{\sigma} + P^T\underline{\sigma}\,.\,\delta\underline{\phi})\,dx$

Hieruit volgt met (2.2):

$$\underline{\rho} = P^T\underline{\sigma} \qquad \text{dus} \qquad \underline{\sigma} = P\underline{\rho}$$

en $\underline{\vartheta} = P\underline{\phi}$.

De transformatie wordt dus nu:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = P\underline{\rho} \\ \underline{\vartheta} = P\underline{\phi} \end{cases} \tag{2.3}$$

ofwel:

$$\begin{cases} \underline{\rho} = P^{-1}\underline{\sigma} \\ \underline{\phi} = P^{-1}\underline{\vartheta} \end{cases} \tag{2.4}$$

P is meetkundig een draaiing in de $\underline{\rho}$ resp. $\underline{\phi}$ ruimte; dit blijkt als genomen wordt: $A_1 = \cos a$ en $A_2 = -\sin a$.

2.1.2. De lineaire Hamiltoniaan.

Substitueer (2.4) in $\mathcal{H}$(1.36):

$$\mathcal{H} = \int \tfrac{1}{2}(k_1 \vartheta_{1x}^2 + 2k_2 \vartheta_{1x}\vartheta_{2x} + k_3 \vartheta_{2x}^2 + \lambda^2 \sigma_1 R \sigma_1)\,dx$$

waarin
$$\begin{cases} k_1 := P_{0_1} A_1^2 + P_{0_2} A_2^2 = \lambda^{-2}(\underline{\alpha}\cdot\underline{B}_0) \\ k_2 := -A_1 A_2 P_{0_1} + A_1 A_2 P_{0_2} \\ k_3 := A_2^2 P_{0_1} + A_1^2 P_{0_2} \\ \lambda := (\underline{\alpha},\underline{\alpha})^{1/2} \quad \text{, zodat } \gamma = \lambda\sigma_1 \end{cases} \tag{2.5}$$

De Hamiltonvergelijkingen luiden:

$$\begin{cases} \sigma_{i_t} = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\vartheta_i} \\ \vartheta_{i_t} = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma_i} \end{cases} \tag{2.6}$$

R is hermitisch, dus $\delta\int \tfrac{1}{2} f R f\,dx = \int Rf.\delta f\,dx$. (2.7)

Dit geeft nu met (2.6):

$$\begin{cases} \sigma_{1_t} + k_1 \vartheta_{1_{xx}} + k_2 \vartheta_{2_{xx}} = 0 \\ \sigma_{2_t} + k_2 \vartheta_{1_{xx}} + k_3 \vartheta_{2_{xx}} = 0 \\ \vartheta_{1_t} + \lambda^2 R\sigma_1 = 0 \\ \vartheta_{2_t} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Deze vergelijkingen kunnen ook met substitutie (2.4) uit (1.39) en (1.40) gehaald worden.

Deze vergelijkingen worden wat vereenvoudigd door te stellen:

$$\underline{v} := \underline{\vartheta}_x \tag{2.9}$$

$$w := v_1 + \frac{k_2}{k_1} v_2 \tag{2.10}$$

(2.8) wordt hiermee:

$$\begin{cases} \sigma_{1_t} + k_1 w_x = 0 \\ \sigma_{2_t} + k_2 w_x + \left(k_3 - \frac{k_2^2}{k_1}\right) v_{2_x} = 0 \\ w_t + \lambda^2 R\sigma_{1_x} = 0 \\ v_{2_t} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

De eerste en derde vergelijking van (2.11) beschrijven een lineaire golf met dispersie. Door R = 1 te stellen (geen dispersie) ziet men dat $c := \lambda\sqrt{k_1}$ (2.12)
de voortplantingssnelheid van de lange golven is.
Deze c is dezelfde als die gedefinieerd door (1.45)
Deze twee vergelijkingen kunnen nu geschreven worden als:

$$\begin{cases} \lambda \sigma_{1_t} + c\sqrt{k_1}\, w_x = 0 \\ \sqrt{k_1}\, w_t + c\lambda R \sigma_{1_x} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

(2.13) is equivalent met

$$\begin{cases} R c^2 \sigma_{1_{xx}} - \sigma_{1_{tt}} = 0 \\ R c^2 w_{xx} - w_{tt} = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Merk op dat (2.14) van hetzelfde type is als (1.46).
We willen nu een éénrichtingsgolf hebben. Het is bekend dat de gewone golfvergelijking, dus (2.14) met R = 1, exact splitsbaar is, dwz. de oplossing is de som van twee willekeurige functies van $\xi := x - ct$ en $\eta := x + ct$.
Opmerking: Hier wordt het begrip splitsbaar anders gebruikt dan in [ref. 10, p.93]. (2.13) wordt hiermee, met R = 1:

$$\begin{cases} (\lambda\sigma_1 - \sqrt{k_1}\, w)_\xi + (\lambda\sigma_1 + \sqrt{k_1}\, w)_\eta = 0 \\ (\lambda\sigma_1 - \sqrt{k_1}\, w)_\xi - (\lambda\sigma_1 + \sqrt{k_1}\, w)_\eta = 0 \end{cases}$$

zodat

$$\begin{cases} \lambda\sigma_1 + \sqrt{k_1}\, w =: f(\xi) \\ \lambda\sigma_1 - \sqrt{k_1}\, w =: b(\eta) \end{cases} \tag{2.15}$$

Dit wil zeggen: als men stelt $b(\eta) = 0$, dan houdt men alleen een met snelheid c naar rechts lopende golf over.

2.1.3. De niet lineaire Hamiltoniaan.

We nemen nu de Hamiltoniaan met nietlineariteiten $\mathcal{H}$(1.59):

$$\mathcal{H} = \int \left(\tfrac{1}{2}\rho_1 \phi_{1_x}^2 + \tfrac{1}{2}\rho_2 \phi_{2_x}^2 + \tfrac{1}{2}\gamma R \gamma - \tfrac{1}{6}\gamma^3 \right) dx, \tag{2.16}$$

transformeren deze, schrijven de kanonieke vergelijkingen op en splitsen op dezelfde manier als in § 2.1.2. Vervolgens stellen we dan $b = \sigma_2 = v_2 = 0$.
Transformatie (2.4) toegepast op (2.16) levert:

$$\mathcal{H} = \int \left[\begin{matrix} \tfrac{1}{2}(\rho_{o_1} + A_1\sigma_1 - A_2\sigma_2)(A_1\mu_{1x} - A_2\mu_{2x})^2 + \tfrac{1}{2}(\rho_{o_2} + A_2\sigma_1 + A_1\sigma_2)(A_2\mu_{1x} + A_1\mu_{2x})^2 \\ + \tfrac{1}{2}\lambda^2\sigma_1 R\sigma_1 - \tfrac{1}{6}\lambda^3\sigma_1^3 \end{matrix} \right] dx \tag{2.17}$$

immers $\underline{\rho} = \underline{\rho_o} + \underline{\varrho}$. (1.37)
De Hamiltonvergelijkingen (2.6) geven nu:

$$\begin{cases} \sigma_{1_t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \vartheta_{1_x} + k_2 \vartheta_{2_x} + k_4 \sigma_1 \vartheta_{1_x} + k_5 \sigma_1 \vartheta_{2_x} + k_5 \sigma_2 \vartheta_{1_x} + k_6 \sigma_2 \vartheta_{2_x}\right) \\ \sigma_{2_t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 \vartheta_{1_x} + k_3 \vartheta_{2_x} + k_5 \sigma_1 \vartheta_{1_x} + k_6 \sigma_1 \vartheta_{2_x} + k_6 \sigma_2 \vartheta_{1_x} + k_7 \sigma_2 \vartheta_{2_x}\right) \\ \vartheta_{1_t} = -\frac{1}{2}\left(k_4 \vartheta_{1_x}^2 + 2k_5 \vartheta_{1_x}\vartheta_{2_x} + k_6 \vartheta_{2_x}^2\right) - \lambda^2 R \sigma_1 + \frac{1}{2}\lambda^3 \sigma_1^2 \\ \vartheta_{2_t} = -\frac{1}{2}\left(k_5 \vartheta_{1_x}^2 + 2k_6 \vartheta_{1_x}\vartheta_{2_x} + k_7 \vartheta_{2_x}^2\right) \end{cases} \qquad (2.18)$$

waarin k_1 t/m k_3 gedefinieerd worden door (2.5) en

$$\begin{cases} k_4 := A_1^3 + A_2^3 \\ k_5 := -A_1^2 A_2 + A_1 A_2^2 \\ k_6 := A_1^2 A_2 + A_1 A_2^2 \\ k_7 := A_1^3 - A_2^3 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen worden ook verkregen door substitutie van transformatie (2.4) in (1.61) en (1.62).

Stel nu, net als in § 2.1.2.:

$$\underline{v} := \vartheta_x \qquad (2.9)$$

$$w := v_1 + \frac{k_2}{k_1} v_2 \qquad (2.10)$$

en $k_0 := \frac{k_2}{k_1}$.

De vergelijkingen (2.18) worden nu met de transformatie's (2.9) en (2.10):

$$\begin{cases} \sigma_{1_t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1 w + k_4 \sigma_1 w + k_{11} \sigma_1 v_2 + k_5 \sigma_2 w + k_{12} \sigma_2 v_2\right] \\ \sigma_{2_t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[k_2 w + k_{13} v_2 + k_5 \sigma_1 w + k_{12} \sigma_1 v_2 + k_6 \sigma_2 w + k_{14} \sigma_2 v_2\right] \\ w_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} k_{15} w^2 + k_{16} w v_2 + \frac{1}{2} k_{17} v_2^2 + \lambda^2 R \sigma_1 - \frac{1}{2}\lambda^3 \sigma_1^2\right] \\ v_{2_t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} k_5 w^2 + k_{12} w v_2 + \frac{1}{2} k_{18} v_2^2\right] \end{cases} \qquad (2.19)$$

waarin

$$\begin{cases} k_{11} := -k_0 k_4 + k_5 \\ k_{12} := -k_0 k_5 + k_6 \\ k_{13} := -k_0 k_2 + k_3 \\ k_{14} := -k_0 k_6 + k_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_{15} := k_0 k_5 + k_4 \\ k_{16} := -k_0^2 k_5 - k_0 k_4 + k_0 k_6 + k_5 \\ k_{17} := k_0^3 k_5 + k_0^2 k_4 - 2k_0^2 k_6 - 2k_0 k_5 + k_0 k_7 + k_6 \\ k_{18} := k_0^2 k_5 - 2k_0 k_6 + k_7 \end{cases}$$

Hierbij is eerst v_{2_t} berekend om het resultaat bij de berekening van w_t te gebruiken.

Om nu een éénrichtingsgolf te krijgen stellen we, geïnspireerd door § 2.1.2.:

$$\begin{cases} f := \lambda \sigma_1 + \sqrt{k_1}\, w \\ b := \lambda \sigma_1 - \sqrt{k_1}\, w \, . \end{cases} \qquad (2.15)$$

Nu wordt (2.19):

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{(f+b)_t}{2\lambda} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{k_1}\,(f-b)+\frac{k_4}{4c}(f^2-b^2)+\frac{k_{11}}{2\lambda}(f+b)\,v_2+\frac{k_5}{2\sqrt{k_1}}(f-b)\,\sigma_2+k_{12}\,\sigma_2 v_2\right]\\
\sigma_{2_t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_2}{2\sqrt{k_1}}(f-b)+k_{13}v_2+\frac{k_5}{4c}(f^2-b^2)+\frac{k_{12}}{2\lambda}(f+b)\,v_2+\frac{k_6}{2\sqrt{k_1}}(f-b)\,\sigma_2+k_{14}\,\sigma_2 v_2\right]\\
\frac{(f-b)_t}{2\sqrt{k_1}} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_{15}}{8k_1}w^2+\frac{k_{16}}{2\sqrt{k_1}}wv_2+\tfrac{1}{2}k_{17}v_2^2+\frac{\lambda}{2}R(f+b)-\frac{\lambda}{8}(f+b)^2\right]\\
v_{2_t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_5}{8k_1}(f-b)^2+\frac{k_{12}}{2\sqrt{k_1}}wv_2+\tfrac{1}{2}k_{18}v_2^2\right].
\end{aligned}\right. \tag{2.20}$$

Als we nu $b = \sigma_2 = v_2 = 0$ stellen houden we een éénrichtingsgolf over. Er blijkt echter een complicatie op te treden. Wanneer we $b = \sigma_2 = v_2 = 0$. stellen voor $t = 0$, blijven ze niet gelijk aan 0. Dit is alleen zo in het lineaire geval zonder dispersie, zoals beschreven in § 2.1.2.
Dit is op zichzelf niet zo erg, dit betekent alleen dat de uiteindelijke vergelijking een benadering is. Wat we echter willen is dat de verwaarloosde grootheden klein blijven, maw. dat hun tijdsafgeleide klein is.
Als we nu stellen: $f, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en $b, \sigma_2, v_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ moeten $b_t, \sigma_{2_t}, v_{2_t}$ van orde ε^2 of hoger zijn.
Uit de tweede vergelijking van (2.20) blijkt dat door het optreden van de term $\frac{k_2}{2\sqrt{k_1}}(f-b)$, $\sigma_{2_t} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$.
Daaruit volgt dat de benadering die we uit (2.20) krijgen door $b, \sigma_2, v_2 = 0$ te stellen, voor kleine t al niet goed meer is.

2.2. Hoe het wel moet.

Het probleem zou niet voorkomen als in de tweede vergelijking van (2.18) de term met ϑ_{1_x} niet voor zou komen. Deze term is afkomstig van $\frac{\delta}{\delta\vartheta_{2_x}}\mathcal{H}$(2.17). Dus in $\mathcal{H}$(2.17) had geen term $\vartheta_{1_x}\vartheta_{2_x}$ moeten staan. Dit is als volgt te voorkomen:
We hebben in § 2.0. gezien dat de keuze van $\sigma_2 = -A_2\rho_1 + A_1\rho_2$ niet dwingend is, zolang maar σ_2 onafhankelijk is van $\sigma_1 = A_1\rho_1 + A_2\rho_2$.

2.2.1. De kanonieke transformatie.

Transformeer

$$\left\{\begin{aligned} \underline{m} &:= K\,\underline{\rho}\\ \underline{\Psi} &:= K^{T^{-1}}\underline{\phi}\end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

zodat:

$$\left\{\begin{aligned} \underline{\rho} &= K^{-1}\underline{m}\\ \underline{\phi} &= K^{T}\,\underline{\Psi}\end{aligned}\right. \tag{2.22}$$

waarin:

$$K := \begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ -Q_2A_2 & Q_1A_1\end{pmatrix} \tag{2.23}$$

met
$$\begin{cases} Q_1 := \sqrt{\dfrac{\rho_{01}}{\rho_{02}}} \\ Q_2 := \sqrt{\dfrac{\rho_{02}}{\rho_{01}}} \end{cases} \tag{2.24}$$

Er geldt nu:

$$K^{-1} = \frac{1}{Q_1 A_1^2 + Q_2 A_2^2} \begin{pmatrix} Q_1 A_1 & -A_2 \\ Q_2 A_2 & A_1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

en

$$K^T = \begin{pmatrix} A_1 & -Q_2 A_2 \\ A_2 & Q_1 A_1 \end{pmatrix} . \tag{2.26}$$

Het bewijs dat deze transformatie kanoniek is, is analoog aan het bewijs in § 2.1.1. maar nu met genererende functionaal $\mathcal{G} := \int \underline{\phi} \cdot K^{-1} \underline{m}\, dx = \int \underline{m} \cdot K^{T^{-1}} \underline{\phi}\, dx$ en de voorwaarden:

$$\begin{cases} \rho_i = \dfrac{\delta \mathcal{G}}{\delta \phi_i} \\ \psi_i = \dfrac{\delta \mathcal{G}}{\delta m_i} \end{cases} .$$

2.2.2. De lineaire Hamiltoniaan.

We gaan weer uit van de $\mathcal{H}$(1.36):

$$\mathcal{H} = \int \left(\tfrac{1}{2} \rho_{01} \phi_{1x}^2 + \tfrac{1}{2} \rho_{02} \phi_{2x}^2 + \tfrac{1}{2} \gamma R \gamma \right) dx . \tag{1.36}$$

Substitueer hierin (2.22), bedenkend dat $\gamma = \lambda m_1$:

$$\mathcal{H} = \int \left[\left(\tfrac{1}{2} \rho_{01} A_1^2 + \tfrac{1}{2} \rho_{02} A_2^2 \right)\left(\psi_{1x}^2 + \psi_{2x}^2 \right) + \tfrac{1}{2} \lambda^2 m_1 R m_1 \right] dx .$$

Inderdaad komt in deze $\mathcal{H}$ geen term $\psi_{1x} \psi_{2x}$ voor. Nu moeten we weer uitzoeken hoe we moeten splitsen. Dit gaat, afgezien van een klein verschil, analoog aan de vorige keer. Omdat het resultaat hetzelfde is, zullen we dit hier niet beschrijven.

2.2.3. De nietlineaire Hamiltoniaan.

We pakken de draad dus weer op bij (2.16):

$$\mathcal{H} = \int \left(\tfrac{1}{2} \rho_1 \phi_{1x}^2 + \tfrac{1}{2} \rho_2 \phi_{2x}^2 + \tfrac{1}{2} \gamma R \gamma - \tfrac{1}{6} \gamma^3 \right) dx . \tag{2.16}$$

Transformatie (2.22) levert nu:

$$\mathcal{H} = \int \left[\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\rho_{01} + \tfrac{Q_1 A_1}{D_k} m_1 - \tfrac{A_2}{D_k} m_2 \right)\left(A_1 \psi_{1x} - Q_2 A_2 \psi_{2x} \right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\rho_{02} + \tfrac{Q_2 A_2}{D_k} m_1 + \tfrac{A_1}{D_k} m_2 \right)\left(A_2 \psi_{1x} + Q_1 A_1 \psi_{2x} \right)^2 \\ &+ \tfrac{1}{2} \lambda^2 m_1 R m_1 - \tfrac{1}{6} \lambda^3 m_1^3 \end{aligned} \right] dx$$

waarin $D_k := Q_1 A_1^2 + Q_2 A_2^2$, de determinant van K.

De Hamiltonvergelijkingen luiden:

$$\begin{cases} m_{i_t} = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi_i} \\ \psi_{i_t} = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta m_i} \end{cases} .$$

Deze geven met behulp van (2.7):

$$\begin{cases} m_{1t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \Psi_{1x} + h_4 m_1 \Psi_{1x} + h_5 m_1 \Psi_{2x} + h_5 m_2 \Psi_{1x} + h_6 m_2 \Psi_{2x}\right) \\ m_{2t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h_3 \Psi_{2x} + h_5 m_1 \Psi_{1x} + h_6 m_1 \Psi_{2x} + h_6 m_2 \Psi_{1x} + h_7 m_2 \Psi_{2x}\right) \\ \Psi_{1t} = -\frac{1}{2}\left(h_4 \Psi_{1x}^2 + 2h_5 \Psi_{1x}\Psi_{2x} + h_6 \Psi_{2x}^2\right) - \lambda^2 R m_1 - \frac{1}{2}\lambda^3 m_1^2 \\ \Psi_{2t} = -\frac{1}{2}\left(h_5 \Psi_{1x}^2 + 2h_6 \Psi_{1x}\Psi_{2x} + h_7 \Psi_{2x}^2\right) \end{cases} \tag{2.27}$$

waarin

$h_1 := P_{o_1} A_1^2 + P_{o_2} A_2^2 \qquad (=k_1)$

$h_3 := P_{o_1} A_2^2 + P_{o_2} A_1^2 \qquad (=k_3)$

$h_4 := \frac{1}{D_k}(Q_1 A_1^3 + Q_2 A_2^3)$

$h_5 := \frac{1}{D_k}(-A_1^2 A_2 + A_1 A_2^2) \qquad \left(=\frac{k_5}{D_k}\right)$

$h_6 := \frac{1}{D_k}(Q_1 A_1^2 A_2 + Q_2 A_1 A_2^2)$

$h_7 := \frac{1}{D_k}(Q_1^2 A_1^3 - Q_2^2 A_2^3)$.

Deze vergelijkingen worden ook verkregen door substitutie van transformatie (2.21) in (1.61) en (1.62). Bij de berekening van (2.27) blijkt dat de coëfficienten van Ψ_{2x} in de eerste vergelijking en van Ψ_{1x} in de tweede vergelijking: $h_2 := -P_{o_1} Q_2 A_1 A_2 + P_{o_2} Q_1 A_1 A_2 = 0$, zodat de in §2.1.3. genoemde moeilijkheid, $m_{2_t} = \mathcal{O}(\varepsilon^{<2})$, inderdaad niet optreedt.
We stellen nu weer, als in (2.9)

$$\underline{u} := \underline{\Psi}_x \quad . \tag{2.28}$$

De transformatie $y := u_1 + \frac{h_2}{h_1} u_2$, die naar analogie van (2.10) uitgevoerd zou kunnen worden, blijft achterwege, omdat $h_2 = 0$. We rekenen gewoon verder met $\underline{u}$.
(2.27) wordt met (2.28):

$$\begin{cases} m_{1t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h_1 u_1 + h_4 m_1 u_1 + h_5 m_1 u_2 + h_5 m_2 u_1 + h_6 m_2 u_2\right) \\ m_{2t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h_3 u_2 + h_5 m_1 u_1 + h_6 m_1 u_2 + h_6 m_2 u_1 + h_7 m_2 u_2\right) \\ u_{1t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} h_4 u_1^2 + h_5 u_1 u_2 + \frac{1}{2} h_6 u_2^2 + \lambda^2 R m_1 - \frac{1}{2}\lambda^3 m_1^2\right) \\ u_{2t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} h_5 u_1^2 + h_6 u_1 u_2 + \frac{1}{2} h_7 u_2^2\right) \end{cases} \tag{2.29}$$

De transformatie (2.15) wordt:

$$\begin{cases} r := \lambda m_1 + \sqrt{h_1}\, u \\ s := \lambda m_1 - \sqrt{h_1}\, u \end{cases}$$

ofwel

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{r+s}{2\lambda} \\ u_1 = \dfrac{r-s}{2\sqrt{h_1}} \end{cases} \quad . \tag{2.30}$$

r en s zijn niet gelijk aan f resp. b, omdat $u \neq w$.
(2.29) transformeert nu tot:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{(r+s)_t}{2\lambda} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{h_1}}{2}(r-s)+\frac{h_4}{4c}(r^2-s^2)+\frac{h_5}{2\lambda}(r+s)u_2+\frac{h_5}{2\sqrt{h_1}}(r-s)m_2+h_6 m_2 u_2\right]\\
m_{2_t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[h_3 u_2+\frac{h_5}{4c}(r^2-s^2)+\frac{h_6}{2\lambda}(r+s)u_2+\frac{h_6}{2\sqrt{h_1}}(r-s)m_2+h_7 m_2 u_2\right]\\
\frac{(r-s)_t}{2\sqrt{h_1}} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h_4}{8h_1}(r-s)^2+\frac{h_5}{2\sqrt{h_1}}(r-s)u_2+\frac{h_6}{2}u_2^2+\frac{\lambda}{2}(r+s)-\frac{\lambda}{2}D(r+s)-\frac{\lambda}{8}(r+s)^2\right]\\
u_{2_t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h_5}{8h_1}(r-s)^2+\frac{h_6}{2\sqrt{h_1}}(r-s)u_2+\frac{h_7}{2}u_2^2\right],
\end{aligned}\right. \tag{2.31}$$

waarin $c := \lambda\sqrt{h_1}$ dezelfde is als de $c := \lambda\sqrt{h_1}$ van (2.12) en de $c := (\underline{\alpha},\underline{B}_0)^{1/2}$ van (1.45) en waarin $D := 1-R$, de dispersie-operator.

<u>Eigenschap 2A:</u> $\mathcal{O}(Df) = \mathcal{O}(f^2)$

Bewijs: Uit (1.35) volgt dat $\int gDg\, dx \geqslant 0$ en samen met (1.33) geeft dit $\int fDf\, dx \leqslant \int f_x^2\, dx$ waaruit met $\frac{\partial}{\partial r} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ het gestelde volgt. □

We tellen nu de eerste en derde vergelijking van (2.31) op:

$$r_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\begin{aligned}& cr + \left(\frac{3h_4}{8\sqrt{h_1}}-\frac{c}{8}\right)r^2-\frac{c}{2}D(r+s)+h_5 r u_2+\frac{h_5\lambda}{2\sqrt{h_1}}rm_2-\left(\frac{h_4}{4\sqrt{h_1}}+\frac{c}{4}\right)rs\\ & -\left(\frac{h_4}{8\sqrt{h_1}}+\frac{c}{8}\right)s^2-\frac{h_5\lambda}{2\sqrt{h_1}}sm_2+h_6\lambda m_2 u_2+\frac{h_6\sqrt{h_1}}{2}u_2^2\end{aligned}\right].$$

Tot nu toe is de afleiding, vanaf de benaderde $\mathcal{H}$, exact. We voeren nu een benadering in door $s = m_2 = u_2 = 0$ te nemen, en $D = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Dit laatste volgt uit de Taylorontwikkeling van R(1.27). deze eist dat $r_{xx} < r$, dus dat de amplitude van de golf weinig verandert over de Debeye-lengte, dus het is geldig voor lange golven. Deze ontwikkeling is toegestaan want de vergelijking is stabiel [ref.7] , dwz. $H \geqslant 0$.

Met deze benadering krijgen we de Korteweg-De Vries-vergelijking:

$$r_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left[cr+\left(\frac{3h_4}{8\sqrt{h_1}}-\frac{c}{8}\right)r^2+\frac{c}{2}r_{xx}\right]. \tag{2.32}$$

Deze is al eerder [ref.9] voor een tweecomponentig plasma afgeleid, echter op een andere manier.

De KDV-vergelijking werd in 1895 afgeleid voor lange watergolven in een ondiep kanaal en daarna ook voor hydrodynamische golven in een koud plasma en acoustische golven in een anharmonisch (niet-lineair) kristal [ref.8] .

<u>2.2.4. De standaardvorm van de KDV.</u>

Vergelijking (2.32) is nog in een andere vorm te schrijven.

Stel daartoe $a := \dfrac{3h_4 - \lambda h_1}{4\sqrt{h_1}}$ en $g := r + \dfrac{c}{a}$

dan wordt (2.32):

$$g_t + a g g_x + \frac{c}{2} g_{xxx} = 0 . \tag{2.33}$$

We willen deze vergelijking schrijven als $g_\eta + gg_\xi + g_{\xi\xi\xi} = 0$, de standaardvorm van de KDV vergelijking.

Stel de standaardvorm: $bg_\eta + bgg_\xi + bg_{\xi\xi\xi} = 0$.

Dan moet
$$\eta_t = b$$
$$\xi_x = \frac{b}{a}$$
en
$$\xi_x = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/3}.$$

Waaruit volgt dat de transformatie moet worden:
$$\xi := \sqrt{\frac{2a}{c}}\,x$$
$$\eta := \sqrt{\frac{2a^3}{c}}\,t$$

zodat hiermee (2.33) overgaat in $g_\eta + gg_\xi + g_{\xi\xi\xi} = 0$.

2.2.5. Foutenbeschouwing.

Tenslotte moet nog nagegaan worden of s_t, m_{2t}, u_{2t} inderdaad $\mathcal{O}(\varepsilon^{\geq 2})$ zijn.

We stellen weer $r, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en s, u_2, $m_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, voor $t = 0$.

Uit de tweede en vierde vergelijking van (2.31) blijkt dat m_{2t}, $u_{2t} = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/2})$.

Om te weten van welke orde s_t is trekken we de eerste en derde vergelijking van (2.31) van elkaar af. Dit levert:

$$s_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-cs + \left(\frac{h_4}{8\sqrt{h_1}} + \frac{c}{8}\right)r^2 + \frac{c}{2}D(r+s) + \frac{h_5\lambda}{2\sqrt{h_1}}rm_2 + \left(\frac{h_4}{4\sqrt{h_1}} + \frac{c}{4}\right)rs + h_5 s u_2 \right.$$
$$\left. - \frac{h_5\lambda}{2\sqrt{h_1}}sm_2 + h_6\lambda m_2 u_2 + \left(\frac{c}{8} - \frac{h_4}{8\sqrt{h_1}}\right)s^2 - \frac{h_6\sqrt{h_1}}{2}u_2^2\right].$$

Hieruit blijkt dat ook $s_t = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/2})$. De benadering (2.32) is dus goed.

3. Ionenacoustische golven in 3 dimensies.

3.0. Inleiding.

In dit hoofdstuk worden enige resultaten van hoofdstuk 1 uitgebreid naar 3 dimensies. Bovendien wordt nog iets gezegd over de Lagrangiaan en energiebehoud. Het was de bedoeling te komen tot een KDV- benadering voor sferische golven. Dit is niet gelukt. Er zijn echter wel een aantal resultaten geboekt die voor verder onderzoek hiernaar van belang kunnen zijn. Deze zijn opgenomen in de hoofdstukken 3,4 en 5.

We gebruiken twee nieuwe grootheden:

N_{o_i} := evenwichtsionendeeltjesdichtheid; $n := N_i - N_{o_i}$, de afwijking van de evenwichtsionendeeltjesdichtheid..

Om deze begrippen met de voorgaande grootheden te integreren geven we eerst enkele gemakkelijk af te leiden eigenschappen.

$\rho_i = m_i n_i \;, \quad \beta_i = Z_i n_i \;, \quad \gamma = (\underline{Z}, \underline{n}) \;, \quad \ell_i = \frac{n_i}{N_{o_i}} \;.$

In dit hoofdstuk beperken we ons tot 1 component. We stellen daarom in (1.4a) M := m zodat $m^* = 1$ wordt. In (1.7) en (1.8) geldt nu dat m = 1. Hierbij zijn de i's weggelaten. Hiermee wordt $P_o = N_o$ en $\gamma = \beta = Zn$.

3.1. De lineaire Hamiltoniaan.

De lineaire Hamiltoniaan in 3 dimensies is een uitbreiding van $\mathcal{H}$(1.36):

$$\mathcal{H} = \iiint \left(\tfrac{1}{2} N_o |\nabla\phi|^2 + \tfrac{1}{2} Z^2 n S n \right) d\underline{r} \qquad (3.1)$$

waarin $S := (1 - \Delta)^{-1}$ (3.2)

en $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, de Laplaceoperator.

$d\underline{r}$ is het volumeelement en alle integralen over $d\underline{r}$ lopen over de hele ruimte.

Ter voorbereiding op de kanonieke vergelijkingen leiden we eerst twee eigenschappen af.

Eigenschap 3A: $\underline{\nabla}^+ = -\underline{\nabla}$.

Bewijs: Volgens de eerste identiteit van Green geldt:

$$\iiint (u \Delta v + \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v) \, d\underline{r} = 0$$

indien voldaan is aan $r^2 u v_r \to 0$ voor $r \to \infty$.

Neem nu $\underline{f} = \underline{\nabla} v$ en $g = u$ dan volgt dat:

$$\iiint (\underline{f} \cdot \underline{\nabla} g + g \underline{\nabla} \cdot \underline{f}) \, d\underline{r} = 0 \;.$$

Hieruit blijkt dat $\underline{\nabla}^+ = -\underline{\nabla}$ □

Eigenschap 3B: $S^+ = S$.

Bewijs: Omdat $\Delta = -\underline{\nabla}^+ \cdot \underline{\nabla}$ geldt dat $\Delta^+ = \Delta$ dus ook $S^{-1^+} = S^{-1}$ en derhalve $S^+ = S$.

□

Mbv. eigenschap 3B verkrijgt men voor de variatie van $\mathcal{H}$(3.1):

$$\delta\mathcal{H} = \iiint \left(\underline{\nabla}^{+}\cdot N_0 \underline{\nabla}\phi \; \delta\phi + Z^2 S n \; \delta n \right) d\underline{r} \qquad (3.2a)$$

Omdat (ϕ, ρ) kanoniek geconjugeerde variabelen zijn, zijn (ϕ, n) het ook.
De kanonieke vergelijkingen luiden, gebruik makend van eigenschap 3A:

$$\begin{cases} n_t = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi} = -N_0 \Delta\phi & (3.3) \\ \phi_t = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta n} = -Z^2 S n. & (3.4) \end{cases}$$

Een analoge afleiding als die voor (1.41) en (1.42) geeft hieruit:

$$\phi_{tt} - \Delta\phi_{tt} - c^2\Delta\phi = 0 \qquad (3.5)$$

en dezelfde vergelijking voor n.
Hierin is $c^2 = Z^2 N_0 = Z$, dezelfde c als in (1.45).
$ZN_0 = 1$ wegens ladingsneutraliteit.
De snelheid van de golf is dus evenredig met de wortel uit het ionenladingsgetal. Dit is in overeenstemming met de literatuur [ref.1, p.384]
De gelineariseerde, tot 3 dimensies uitgebreide Poissonvergelijking (1.5) luidt: $\Psi = ZSn.$ (3.6)
Uit (3.2a) blijkt dat voldaan is aan (1.15):

$$\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta n} = Z\Psi . \qquad (3.7)$$

3.2. Afleiding mbv. de Lagrangiaan.

(3.5) kan ook mbv. een Lagrangiaan worden afgeleid.
Neem

$$\mathcal{L} = \iiint \left(\frac{1}{2Z^2}\phi_t^2 + \frac{1}{2Z^2}|\underline{\nabla}\phi_t|^2 - \tfrac{1}{2}N_0|\underline{\nabla}\phi|^2 \right) d\underline{r} . \qquad (3.8)$$

De variatie van $\mathcal{L}$ is

$$\delta\mathcal{L} = \iiint \left(\frac{1}{Z^2}\phi_t\,\delta\phi_t + \underline{\nabla}^{+}\cdot\frac{1}{Z^2}\underline{\nabla}\phi_t\;\delta\phi_t - \underline{\nabla}^{+}\cdot N_0\underline{\nabla}\phi\;\delta\phi \right) d\underline{r} .$$

De Euler-vergelijking luidt

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_t} = 0 \qquad (3.9)$$

zodat

$$c^2\Delta\phi - \phi_{tt} + \Delta\phi_{tt} = 0 ,$$

dezelfde vergelijking als (3.5).
In dit verslag wordt n als gegeneraliseerde plaats en ϕ als gegeneraliseerde impuls beschouwd. Dit komt tot uitdrukking in de plaats van het minteken in de kanonieke vergelijkingen. Men kan ook ϕ als plaats en $-n$ als impuls beschouwen.
Definieer nu een impuls $n := -\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_t}$ zodat $\phi_t = -Z^2 Sn$. Dit komt overeen met (3.4). Definieer vervolgens een Hamiltoniaan $\mathcal{H} := \iiint -n\phi_t \, d\underline{r} - \mathcal{L}$.

Uitwerken hiervan resulteert met gebruik van eigenschap 3A in de reeds bekende $\mathcal{H}$(3.1).

3.3. Energiebehoud.

In deze § wordt de behoudswet van energie behandeld. Deze luidt:

$$E_t + \underline{\nabla}\cdot\underline{F} = 0 \tag{3.10}$$

waarin E de energiedichtheid is en $\underline{F}$ de energiefluxdichtheid is.

3.3.1. Lineair, geen dispersie.

In deze sub§ beschouwen we de dispersieloze benadering van $\mathcal{H}$(3.1) en kanonieke vergelijking (3.4), waarin daarom S = 1 genomen wordt.
De golfvergelijking (3.5) wordt

$$\phi_{tt} = c^2 \Delta \phi . \tag{3.11}$$

H (3.1) en kanonieke vergelijking (3.4) geven:

$$E = \tfrac{1}{2}N_0 |\underline{\nabla}\phi|^2 + \frac{1}{2Z^2}\phi_t^2 .$$

Hiermee en mbv. (3.11) volgt:

$$\underline{F} = -N_0 \phi_t \underline{\nabla}\phi . \tag{3.12}$$

Merk op dat

$$E \pm \frac{|\underline{F}|}{c} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{N_0}|\underline{\nabla}\phi| \mp \frac{1}{Z}\phi_t\right) \geqslant 0,$$ dwz. dat de energiestroomsnelheid niet groter is dan c.

3.3.2. Lineair, met dispersie.

We vragen ons af wat in dit geval $\underline{F}$ is.
Volgens H (3.1) en de kanonieke vergelijking (3.4) is nu

$$E = \tfrac{1}{2}N_0 |\underline{\nabla}\phi|^2 + \frac{1}{2Z^2}\phi_t^2 - \frac{1}{2Z^2}\phi_t \Delta \phi_t .$$

We willen echter een positief definiete uitdrukking voor de energiedichtheid.
Uit de definitie van S (3.2) volgt $S(1-\Delta) = 1$ dus

$$S - S\Delta - 1 = 0 . \tag{3.13}$$

Hiermee kunnen we $\mathcal{H}$(3.1) schrijven als

$$\mathcal{H} = \iiint \left\{ \tfrac{1}{2}N_0|\underline{\nabla}\phi|^2 + \tfrac{1}{2}Z^2(Sn)^2 + \tfrac{1}{2}Z^2|\underline{\nabla}Sn|^2 \right\} d\underline{r}$$

en dus

$$E = \tfrac{1}{2}N_0|\underline{\nabla}\phi|^2 + \tfrac{1}{2}Z^2(Sn)^2 + \tfrac{1}{2}Z^2|\underline{\nabla}Sn|^2 . \tag{3.14}$$

Mbv. de kanonieke vergelijkingen (3.3) en (3.4) en (3.13) vindt men:

$$E_t = -c^2 SnS\Delta\phi - c^2\underline{\nabla}S\phi\cdot\underline{\nabla}Sn$$

zodat mbv. de energiebehoudswet (3.10) volgt dat

$$\underline{F} = c^2 Sn\underline{\nabla}S\phi . \tag{3.15}$$

Voor S = 1 komt dit overeen met (3.12).
(3.14) kan door toepassing van kanonieke vergelijking (3.4) nog geschreven worden als:

$$E = \tfrac{1}{2}N_o|\underline{\nabla}\phi|^2 + \frac{1}{2Z^2}\phi_t^2 + \frac{1}{2Z^2}|\underline{\nabla}\phi_t|^2$$

waaruit mbv. golfvergelijking (3.5) volgt dat

$$\underline{F} = -N_o\,\phi_t\,\underline{\nabla}\phi - \frac{1}{Z^2}\phi_t\,\underline{\nabla}\phi_{tt} \, .$$

Deze $\underline{F}$ is gelijk aan $\underline{F}$ (3.15).

3.4. Tamelijk lange, tamelijk lage golven.

Deze § is een uitbreiding naar 3 dimensies van §1.3.3. De Hamiltoniaan is de uitbreiding van $\mathcal{H}$(1.59) en luidt:

$$\mathcal{H} = \iiint \left(\tfrac{1}{2}N|\underline{\nabla}\phi|^2 + \tfrac{1}{2}Z^2 n\,Sn - \tfrac{1}{6}Z^3 n^3\right) d\underline{r} \, . \tag{3.16}$$

Men krijgt voor de variatie van $\mathcal{H}$

$$\delta\mathcal{H} = \iiint \left\{ \underline{\nabla}^{+}\cdot N\underline{\nabla}\phi\;\delta\phi + \left(\tfrac{1}{2}|\underline{\nabla}\phi|^2 + Z^2 Sn - \tfrac{1}{2}Z^3 n^2\right)\delta n \right\} d\underline{r}$$

en voor de kanonieke vergelijkingen:

$$\begin{cases} n_t = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi} = -\underline{\nabla}\cdot N\underline{\nabla}\phi & (3.17) \\[2mm] \phi_t = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta n} = -\tfrac{1}{2}|\underline{\nabla}\phi|^2 - Z^2 Sn + \tfrac{1}{2}Z^3 n^2 \, . & (3.18) \end{cases}$$

Omdat volgens (3.7) $\dfrac{\delta\mathcal{U}}{\delta n} = Z\Psi$
moet zijn geldt hier dat

$$\Psi = ZSn - \tfrac{1}{2}Z^2 n^2 \, . \tag{3.19}$$

De wet van behoud van massa luidt:

$$N_t + \underline{\nabla}\cdot N\underline{v} = 0 \, . \tag{3.20}$$

Dit is een uitbreiding naar 3 dimensies van (1.6) en komt overeen met (3.17). De wet van behoud van impuls luidt:

$$\underline{v}_t + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} + Z\underline{\nabla}\Psi = 0 \, . \tag{3.21}$$

Dit is een uitbreiding naar 3 dimensies van (1.7).
Mbv. Ψ(3.19) wordt (3.18)

$$\phi_t + \tfrac{1}{2}|\underline{\nabla}\phi|^2 + Z\Psi = 0 \, .$$

Neem hiervan de gradient dan krijgt men (3.21).

4. Sferische golven 1.

4.0. Inleiding.

In dit hoofdstuk werken we hoofdstuk 3 uit voor het geval de golven bolsymmetrie vertonen.

In dit hoofdstuk komt de Hamiltondichtheid voor, gedefinieerd door $\mathcal{H} = \int H \, 4\pi r^2 dr$. Alle integralen over r lopen van 0 tot ∞. Deze H komt overeen met de energiedichtheid E. F is evenals in hoofdstuk 3 de energiefluxdichtheid.

De hermitisch geadjungeerde P^{+} van een operator P wordt gedefinieerd door: $\int fP^{+}g \, 4\pi r^2 dr = \int gPf \, 4\pi r^2 dr$. De variatie-afgeleide tenslotte wordt gegeven door de volgende definitie:

Indien $\delta\mathcal{L} = \int f \, \delta\phi \, 4\pi r^2 dr$ dan is $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = f$.

4.1. De lineaire Hamiltoniaan.

De lineaire Hamiltoniaan ingeval van bolsymmetrie is een speciaal geval van $\mathcal{H}$(3.1.):

$$\mathcal{H} = \int \left(\tfrac{1}{2} N_0 \phi_r^2 + \tfrac{1}{2} Z^2 n Q n \right) 4\pi r^2 dr \tag{4.1}$$

waarin $Q := (1 - \Delta)^{-1}$ (4.2)

met $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$, het radiale deel van Δ.

Men kan bij rekenen met Q desgewenst gebruiken dat

$$[Q, \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r} r] = [Q, \Delta] = 0 .$$

Echter $[Q, \frac{\partial}{\partial r}] \neq 0$ en $[Q, \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2] \neq 0$.

Dit kan worden bewezen mbv. de eigenschap dat $[A,B]=0 \Leftrightarrow [A,B^{-1}]=0$

Ter voorbereiding op de kanonieke vergelijkingen leiden we eerst twee eigenschappen af:

Eigenschap 4A: $\frac{\partial}{\partial r}^{+} = -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2$

Bewijs: Door partieel integreren blijkt dat

$\int (r^2 f) g_r \, 4\pi dr = -\int g (r^2 f)_r \, 4\pi dr$

indien voldaan is aan rf, rg$\to 0$ voor r $\to \infty$

Anders geschreven:

$\int f \frac{\partial}{\partial r} g \, 4\pi r^2 dr = -\int g \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right) f \, 4\pi r^2 dr$

waaruit het gestelde volgt. $\square$

Eigenschap 4B: $Q^{+} = Q$

bewijs: Omdat $\Delta = -\frac{\partial}{\partial r}^{+}\frac{\partial}{\partial r}$ geldt dat $\Delta^{+} = \Delta$, dus ook $Q^{-1+} = Q^{-1}$

en derhalve $Q^{+} = Q$. $\square$

Mbv. eigenschap 4B krijgt men voor de variatie van $\mathcal{H}$(4.1):

$$\delta\mathcal{H} = \int \left(\frac{\partial}{\partial r}^{+} N_0 \frac{\partial}{\partial r} \phi \,.\, \delta\phi + Z^2 Q n \,.\, \delta n \right) 4\pi r^2 dr . \tag{4.3}$$

De kanonieke vergelijkingen luiden, gebruik makend van eigenschap 4A:

$$\begin{cases} n_t = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} = -N_0 \Delta \phi & (4.4) \\ \phi_t = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta n} = -Z^2 Q n \,. & (4.5) \end{cases}$$

Een analoge afleiding als die voor (3.3) en (3.4) geeft hieruit:

$$\phi_{tt} - \Delta \phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0 \qquad (4.6)$$

en dezelfde vergelijking voor n .

Deze vergelijking wordt ook verkregen door in (3.5) te nemen dat ϕ resp. n alleen van r afhangt.

De driedimensionale Poissonvergelijking (3.6) wordt in geval van bolsymmetrie:

$$\Psi = ZQn \,.$$

Uit (4.3) blijkt dat voldaan is aan (3.7).

(4.6) heeft als monochromatische oplossing

$$\phi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} + \frac{e^{i(-kr-\omega t)}}{4\pi r} \,. \qquad (4.7)$$

Om dit te laten zien kan men gebruik maken van de eigenschap dat

$$\Delta \frac{f}{r} = \frac{f_{rr}}{r} \,.$$

We willen slechts naar buiten lopende golven beschouwen. Uit §4.3 zal blijken dat

$$\phi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} \qquad (4.8)$$

de naar buiten lopende golf is.

Voor n wordt dezelfde oplossing verkregen.

Uit (4.6) volgt nu de dispersierelatie

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{1+k^2} \qquad (4.9)$$

dezelfde als (1.51).

4.2. Afleiding mbv. de Lagrangiaan.

In geval van bolsymmetrie wordt $\mathcal{L}$(3.8)

$$\mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{2Z^2} \phi_t^2 + \frac{1}{2Z^2} \phi_{rt}^2 - \frac{1}{2} N_0 \phi_r^2 \right) 4\pi r^2 dr \,. \qquad (4.10)$$

De variatie van $\mathcal{L}$ is:

$$\delta \mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{Z^2} \phi_t \, \delta\phi_t + \frac{\partial}{\partial r}^{+} \cdot \frac{1}{Z^2} \frac{\partial}{\partial r} \phi_t \; \delta \phi_t - \frac{\partial}{\partial r}^{+} N_0 \frac{\partial}{\partial r} \phi \,.\, \delta\phi \right) 4\pi r^2 dr$$

en met de Eulervergelijking (3.9) geeft dit:

$$c^2 \Delta\phi - \phi_{tt} + \Delta \phi_{tt} = 0 \,.$$

Hetzelfde resultaat als (4.6).

Op dezelfde manier als in § 3.2. kan men nu een impuls definieren waarmee men via $\mathcal{H} := \int -n\,\phi_t \,.\, 4\pi r^2 dr - \mathcal{L}$
weer $\mathcal{H}$(4.1) krijgt.

4.3. Energiebehoud.

De energiebehoudswet (3.10) neemt in geval van bolsymmetrie de volgende gedaante aan:

$$E_t + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 F = 0 \,. \tag{4.11}$$

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2$ is het radiale deel van de divergentie.

Op analoge wijze als in § 3.3.2. blijkt dat in dit geval

$$E = \tfrac{1}{2} N_o \phi_r^{\,2} + \tfrac{1}{2} Z^2(Qn)^2 + \tfrac{1}{2} Z^2(Qn)_r^2 \tag{4.12}$$

en $$F = c^2 Qn \,.\, (Q\phi)_r = -N_o \phi_r \phi_t - \frac{1}{Z^2}\phi_t \phi_{rtt} \,. \tag{4.13}$$

We zullen nu aantonen dat $E + \frac{F}{v_g} \geqslant 0$, dwz. dat de energiestroomsnelheid niet groter is dan de groepsnelheid.
De groepsnelheid $v_g = c(1 + k^2)^{-3/2}$ (4.14)
volgt uit de dispersierelatie (4.9).
Gebruik E(4.12) en F(4.13) in de vorm

$$E = \tfrac{1}{4} N_o \phi_r^* \phi_r + \frac{1}{4Z^2}\phi_t^* \phi_t + \frac{1}{4Z^2}\phi_{rt}^* \phi_{rt} + cc$$

$$F = -\tfrac{1}{2} N_o \phi_r^* \phi_t - \frac{1}{2Z^2}\phi_t^* \phi_{rtt} + cc \,.$$

Waarin $*$ betekent: complex toegevoegd en cc: complex toegevoegde.
Mbv. de monochromatische oplossing (4.8) krijgt men:

$$E \pm \frac{F}{v_g} = \left[\frac{N_o}{2r^2} + \frac{N_o k^2}{2} + \frac{\omega^2}{2Z^2} + \frac{\omega^2 k^2}{2Z^2} + \frac{\omega^2}{2Z^2 r^2} \pm \frac{N_o \omega k}{c}(1+k^2)^{3/2} \mp \frac{\omega^3 k}{Z^2 c}(1+k^2)^{3/2}\right] |\phi|^2 \,.$$

Mbv. de dispersierelatie (4.9) wordt dit

$$E \pm \frac{F}{v_g} = N_o\left[\frac{1}{r^2} + \frac{k^2}{2r^2} + k^2 \pm k^2\right] |\phi|^2 \geqslant 0 \,.$$

We zien hierin dat de energiestroomsnelheid nadert tot de groepsnelheid als $r \to \infty$.
We zien dus dat voor $\phi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}$ geldt dat :

$$F = N_o \omega k - \frac{\omega^3 k}{Z^2} \,. \tag{4.15}$$

Met $\omega = \frac{ck}{\sqrt{1+k^2}}$ wordt dit $F = \frac{N_o c k^2}{(1+k^2)^{3/2}} \geqslant 0$.

Uit F(4.13) volgt dat voor deze oplossing $F_r = -\frac{2 N_o c k^2}{r(1+k^2)^{3/2}} \leqslant 0$.

Voor de oplossing $\phi = \frac{e^{i(-kr-\omega t)}}{4\pi r}$ van (4.6) geldt ook (4.15) maar met $\omega = -\frac{ck}{\sqrt{1+k^2}}$ wordt dit $F = -\frac{N_0 c k^2}{(1+k^2)^{3/2}} \leq 0$ en

$F_r = \frac{2N_0 c k^2}{r(1+k^2)^{3/2}} \geq 0.$

Hieruit blijkt dat de oplossing $\phi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}$ de naar buiten

gerichte energiestroom heeft.

4.5. Tamelijk lange, tamelijk lage golven.

In het bolsymmetrische geval wordt $\mathcal{H}$(3.16)

$$\mathcal{H} = \int \left(\tfrac{1}{2} N \phi_r^2 + \tfrac{1}{2} Z^2 n Q n - \tfrac{1}{6} Z^3 n^3 \right) 4\pi r^2 dr$$

waarvan de variatie is:

$$\delta\mathcal{H} = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial r}^{+} N \frac{\partial}{\partial r} \phi \,.\, \delta\phi + \left[\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + Z^2 Q n - \tfrac{1}{2} Z^3 n^2 \right] \delta n \right\} 4\pi r^2 dr .$$

De kanonieke vergelijkingen luiden:

$$\begin{cases} n_t = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi} = -N\Delta\phi - N_r \phi_r & (4.16) \\ \phi_t = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta n} = -\tfrac{1}{2}\phi_r^2 - Z^2 Q n + \tfrac{1}{2} Z^3 n^2 . & (4.17) \end{cases}$$

Deze vergelijkingen komen overeen met de bolsymmetrische vergelijkingen van massa en impuls, afgeleid van (3.20) en (3.21).

5. Sferische golven 2.

5.0. Inleiding.

In dit hoofdstuk wordt dmv. een transformatie duidelijk hoe we moeten splitsen om een KDV - benadering te krijgen. Doorrekenen leidt echter niet tot een KDV.

In de literatuur komt wel een KDV - achtige benadering voor sferische golven voor [ref.3] , maar deze wordt anders afgeleid.

In dit hoofdstuk komt de Hamiltondichtheid $\tilde{H}$ voor, gedefinieerd door $\mathcal{H} = \int \tilde{H}\, dr$. Deze $\tilde{H}$ komt overeen met de energie in een bolschil $\tilde{E}$. $\tilde{F}$ is de energieflux door een bolschil. De hermitisch geadjungeerde $P^{\dagger}$ van een operator P wordt gedefinieerd door $\int fP^{\dagger}g\, dr = \int gPf\, dr$. De variatie-afgeleide tenslotte wordt gegeven door de volgende definitie:

Indien $\delta\mathcal{L} = \int g\, \delta p\, dr$ dan is $\widetilde{\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta p}} = g$.

5.1. De lineaire Hamiltoniaan.

Ga over op de variabelen

$$u := 2\sqrt{\pi}\; r n \tag{5.1}$$

en

$$p := 2\sqrt{\pi}\; r\phi \; . \tag{5.2}$$

Uit $\int (rf)f_r dr = - \int f(rf)_r\, dr$ volgt dat

$$\int \frac{v^2 + 2rvv_r}{r^2}\, r^2 dr = 0 \; . \tag{5.3}$$

Definieer $M := \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)^{-1}$, $A := ru\, Q\, \frac{u}{r}$ en $B := uMu$.

Uit de definities van A en B volgt resp: $Q^{-1}\, \frac{A}{ru} = \frac{u}{r}$ en $M^{-1}\, \frac{B}{u} = u$.

Dit zijn gelijke vergelijkingen voor A en B dus

$$ru\, Q\, \frac{u}{r} = uMu. \tag{5.4}$$

Mbv. (5.3) en (5.4) krijgt men uit $\mathcal{H}$(4.1)

$$\mathcal{H} = \int \left(\tfrac{1}{2} N_0\, p_r^2 + \tfrac{1}{2} Z^2 u M u \right) dr \; . \tag{5.5}$$

Men kan bij het rekenen met M desgewenst gebruiken dat

$$\left[M, \frac{\partial}{\partial r}\right] = \left[M, \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right] = 0 \; .$$

Ter voorbereiding op de kanonieke vergelijkingen leiden we eerst twee eigenschappen af.

Eigenschap 5A. $\frac{\partial}{\partial r}^{\dagger} = - \frac{\partial}{\partial r}$.

Bewijs: Met partieel integreren en f(0) = g(0) = 0. □

Eigenschap 5B. $\tilde{M}^{\dagger} = M$.

Bewijs: Omdat $\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}^{\dagger}\frac{\partial}{\partial r}$ geldt dat $\frac{\partial^2}{\partial r^2}^{\dagger} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$, dus ook $M^{-1\dagger} = M^{-1}$ en derhalve $M^{\dagger} = M$. □

Mbv. eigenschap 5B krijgt men voor de variatie van $\mathcal{H}$(5.5):

$$\delta\mathcal{H} = \int \left(\frac{\partial}{\partial r}^{\dagger} N_0 \frac{\partial}{\partial r} p\; \delta p + Z^2 Mu \,.\, \delta u \right) dr \; .$$

De kanonieke vergelijkingen , mbv. eigenschap 5A:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta p} = -N_0 p_{rr} & (5.6) \\ p_t = -\dfrac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta u} = -Z^2 M u\ . & (5.7) \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen ook mbv. de transformaties (5.1) en (5.2) uit de kanonieke vergelijkingen (4.4) en (4.5) gehaald worden. Hieruit blijkt dat (u,p) inderdaad kanoniek geconjugeerde variabelen zijn mbt. de variatie-afgeleide $\sim$.

Een analoge afleiding als die voor (3.3) en (3.4) geeft uit (5.6) en (5.7)

$$p_{tt} - p_{rrtt} - c^2 p_{rr} = 0 \qquad (5.8)$$

en dezelfde vergelijking voor u.

Differentiatie van (5.8) naar r geeft dezelfde vergelijking voor s.

Deze vergelijking is van het type (1.46).

(5.8) kan ook mbv. substitutie (5.2) uit (4.6) verkregen worden en de vergelijking voor u mbv. substitutie (5.1) uit de vergelijking voor n.

Als men in (5.7) M = 1 stelt geven (5.6) en (5.7):

$$\begin{cases} Z u_t + c\sqrt{N_0}\,(p_r)_r = 0 & (5.9) \\ \sqrt{N_0}\,(p_r)_t + c Z u_r = 0 & (5.10) \end{cases}$$

zodat blijkt dat we moeten splitsen in: (zie §2.1.2.)

$$\begin{cases} f := \sqrt{N_0}\, s + Z u & (5.11) \\ b := \sqrt{N_0}\, s - Z u & (5.12) \end{cases}$$

met $s := p_r$. (5.13)

Omdat we geen KDV in het niet-lineaire geval gevonden hebben, leiden we een benadering voor naar buiten lopende golven af. Voer daartoe in de kanonieke vergelijkingen (5.6) en (5.7), de substititie (5.13) door en schrijf M als M = 1 - D.

Dit geeft:

$$\begin{cases} u_t + N_0 s_r = 0 \\ s_t + Z^2 u_r - Z^2 D\, u_r = 0\ . \end{cases}$$

Gebruik de transformaties (5.11) en (5.12) en tel de vergelijkingen bij elkaar op, resp. trek van elkaar af:

men krijgt dan

$$\begin{cases} f_t + c f_r - \frac{c}{2} D(f - b)_r = 0 & (5.14) \\ b_t - c b_r - \frac{c}{2} D(f - b)_r = 0\ . & (5.15) \end{cases}$$

Naar analogie van §2.1.2. blijkt dat f de naar buiten lopende golf beschrijft en b de naar binnen lopende golf.

Benader voorts D door $D = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ en stel b = 0, dan verkrijgt men uit (5.14)

$$f_t + c f_r + \frac{c}{2} f_{rrr} = 0\ . \qquad (5.16)$$

Deze vergelijking komt overeen met de KDV (2.32) zonder nietlineaire term.
Stel $\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dan blijkt uit een analoge afleiding als voor eigenschap 2A in § 2.2.3. dat $D = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Veronderstel voorts $f = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en $b = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ op $t = 0$ dan ziet men met (5.15) dat $b_t = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/2})$. De benadering is dus goed in de zin van § 2.1.3.

5.2. Afleiding mbv. de Lagrangiaan.

(5.8) kan ook uit een Lagrangiaan gehaald worden: Voer de transformatie (5.2) uit in $\mathcal{L}$ (4.10) met gebruikmaking van (5.3):

$$\mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{2Z^2} p_t^2 + \frac{1}{2Z^2} p_{rt}^2 - \frac{1}{2} N_0 \, p_r^2 \right) dr \, .$$

De variatie hiervan is:

$$\delta \mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{Z^2} p_t \, \delta p_t + \frac{\partial}{\partial r}^{\dagger} \frac{1}{Z^2} \frac{\partial}{\partial r} p_t \, \delta p_t - \frac{\partial}{\partial r}^{\dagger} N_0 \frac{\partial}{\partial r} p \, \delta p \right) dr$$

Met de Eulervergelijking

$$\frac{\widetilde{\delta \mathcal{L}}}{\delta p} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\widetilde{\delta \mathcal{L}}}{\delta p_t} = 0$$

geeft dit:

$$p_{tt} - p_{rrtt} - c^2 p_{rr} = 0$$

hetgeen overeenkomt met (5.8).
Definieer een impuls $u := - \frac{\widetilde{\delta \mathcal{L}}}{\delta p_t}$, zodat $p_t = -Z^2 Mu$. Dit komt overeen met (5.7). Definieer vervolgens een Hamiltoniaan $\mathcal{H} := \int -u p_t \, dr - \mathcal{L}$. Uitwerken hiervan resulteert mbv. eigenschap 5A in de reeds bekende $\mathcal{H}$(5.5)

5.3. Energiebehoud.

Men kan deze wet ook voor een bolschil opschrijven. Dit wordt:

$$\tilde{E}_t + \tilde{F}_r = 0 \; . \tag{5.17}$$

Deze wet heeft dezelfde vorm als de behoudswet in één dimensie, omdat ook de bijbehorende golfvergelijking dezelfde gedaante heeft.
Op analoge wijze als in § 3.3.2. blijkt dat in dit geval

$$\tilde{E} = \tfrac{1}{2} N_0 p_r^2 + \tfrac{1}{2} Z^2 (Mu)^2 + \tfrac{1}{2} Z^2 (Mu_r)^2$$

en

$$\tilde{F} = c^2 Mu . Mp_r = -N_0 p_r p_t - \frac{1}{Z^2} p_t p_{rtt} .$$

In dit geval kan men nu laten zien dat $\tilde{E} + \frac{\tilde{F}}{v_g} \geqslant 0$. Dit gaat geheel analoog aan de berekening in § 4.3., met de monochromatische oplossing :

$p = e^{i(kr - \omega t)}$ die mbv. de transformatie (5.2) uit de oplossing (4.8) volgt, en de dispersierelatie (1.51). Dit levert

$$\tilde{E} \pm \frac{\tilde{F}}{v_g} = \left[N_0 k^2 \pm N_0 k^2 \right] |p|^2 \geqslant 0 \, .$$

5.5. Tamelijk lange, tamelijk lage golven.

Nu worden de in § 5.1. genoemde transformaties uitgevoerd om volgens de verderop in die § genoemde procedure de KDV - vergelijking te vinden. Pas de transformaties (5.1) en (5.2) toe op de nietlineaire vergelijkingen (4.16) en (4.17) en gebruik (5.4) dan krijgt men:

$$ru_t + p_{rr}u + N_o r p_{rr} + p_r u_r - \frac{p_r u}{r} - \frac{p u_r}{r} + \frac{pu}{r^2} = 0 \qquad (5.18)$$

$$rp_t + \frac{p_r^2}{2} - \frac{pp_r}{r} + \frac{p^2}{2r^2} + Z^2 rMu - \frac{Z^3u^2}{2} = 0 \;. \qquad (5.19)$$

De transformatie s := p_r (5.13) is moeilijker door te voeren omdat in (5.18) en (5.19) niet alleen p_r maar ook p voorkomt.
Een manier gaat als volgt: volg onderstaande aanwijzingen op en vervang in voorkomende gevallen p_r door s.

(i) (5.18).
deel door de coëfficient van p: $\frac{u}{r^2} - \frac{u_r}{r}$, differentieer naar r, vermenigvuldig met $\left(\frac{u}{r^2} - \frac{u_r}{r}\right)^2$; dit levert:

$$3ru_r u_t + r^2 u_r u_{rt} - 3uu_t - ruu_{rt} - r^2 u_{rr} u_t + rs_{rr} uu_r + N_o r^2 s_{rr} u_r - s_{rr} u^2$$
$$- N_o r s_{rr} u - r s_r u_{rr} u - N_o r^2 s_r u_{rr} + 2r s_r u_r^2 + 3N_o r s_r u_r - 3N_o s_r u - \frac{s_r u^2}{r} = 0 \qquad (5.20)$$

(ii) (5.19).
Noem g(u) := $Z^2 rMu - \frac{Z^3u^2}{2}$, deel door de coëfficient van p^2 : $\frac{1}{r^2}$, differentieer naar r, deel door de coëfficient van p_t : r^2, differentieer naar r, deel door de coëfficient van p : $\frac{rs_{rr} - s_r}{r^2}$, differentieer naar r, vermenigvuldig met $\frac{(rs_{rr} - s_r)^2}{r^2}$; dit geeft:

$$8s_t s_{rr} + 7rs_{rt} s_{rr} + r^2 s_{rrt} s_{rr} - \frac{8s_t s_r}{r} - 7s_{rt} s_r - rs_{rrt} s_r - 4rs_t s_{rrr}$$
$$- r^2 s_{rt} s_{rrr} - 2s_{rrr} s_r s - rs_{rrr} s_r^2 - rs_{rrr} g_{rr} - 2s_{rrr} g_r + \frac{2s_{rrr} g}{r} \qquad (5.21)$$
$$- 2s_{rr} s_r^2 + 3rs_{rr}^2 s_r + rs_{rr} g_{rrr} + 4s_{rr} g_{rr} - \frac{s_r^3}{r} - s_r g_{rrr} - \frac{4s_r g_{rr}}{r} = 0$$

Als men nu in (5.20) en (5.21) de transformaties f(5.11) en b(5.12) invoert, M ontwikkelt en alleen termen t/m $\mathcal{O}(\varepsilon^{5/2})$ meeneemt (de hoogste orde term in de KDV) krijgt men:

$$\begin{cases} \frac{r}{2} f_r f_t - \frac{1}{2} f f_t - \frac{r}{6} f f_{rt} - \frac{c}{2} f f_r = 0 \\ \frac{r}{2} f_r f_t + \frac{c}{2} f f_r = 0. \end{cases}$$

Optellen of aftrekken van deze vergelijkingen levert geen KDV.
Het woord is aan mijn opvolger.

Appendix: Q en M als integraaloperator.

We zoeken een integraalvoorstelling voor Q en M.

Kanonieke vergelijking (5.7) luidt:

$$p_t = - Z^2 M u \tag{A.1}$$

Waaruit volgt

$$p_{rrt} - p_t = Z^2 u$$

De functie van Green $\tilde{G}$ van de operator M wordt nu bepaald door:

$$\begin{cases} \tilde{G}_{rr}(r,\rho) - \tilde{G}(r,\rho) = \delta(r-\rho) \\ \tilde{G}(0,\rho) = \tilde{G}(\infty,\rho) = 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

Hieraan voldoet

$$\tilde{G}(r,\rho) = -\tfrac{1}{2}\left[e^{-|r-\rho|} - e^{-(r+\rho)}\right] = \begin{cases} - e^{-r}\sinh\rho & \text{als } r > \rho \\ - e^{-\rho}\sinh r & \text{als } r < \rho \end{cases}$$

Als de randvoorwaarde was geweest: $\tilde{G}(\pm\infty,\rho) = 0$, wat optreedt in het ééndimensionale geval, dan was alleen de eerste term opgetreden. De tweede term is een oplossing van $p_{rrt} - p_t = 0$ en is toegevoegd om te bewerkstelligen dat $\tilde{G}(0,\rho) = 0$.

We kunnen nu (A.1) schrijven als:

$$p_t = - Z^2 \int_0^\infty \tilde{G}(r,\rho)\, u(\rho)\, d\rho \tag{A.3}$$

Voor de integraalvoorstelling van Q moet gelden, mbv. de kanonieke vergelijking (4.5)

$$\phi_t = - Z^2 \int_0^\infty G(r,\rho)\, n(\rho)\, 4\pi\rho^2\, d\rho \tag{A.4}$$

Mbv. de transformaties (5.1) en (5.2) volgt uit (A.3) en (A.4):

$$G(r,\rho) = \frac{\tilde{G}(r,\rho)}{4\pi r\rho}$$

en hiermee uit (A.2) dat G voldoet aan

$$\begin{cases} \Delta G(r,\rho) - G = \dfrac{\delta(r-\rho)}{4\pi r\rho} \\ r\, G(r,\rho) \to 0 \qquad \text{als } r \to 0 \text{ of als } r \to \infty \end{cases}$$

Merk op dat $G(r,\rho) = G(\rho,r)$ en $\tilde{G}(r,\rho) = \tilde{G}(\rho,r)$. Dit is in overeenstemming met het feit dat $Q^{\dagger} = Q$ resp. $M^{\tilde{\dagger}} = M$.

Literatuur.

[1] Akhiezer AI, IA Akhiezer, RV Polovin, AG Sitenko and KN Stepanov
Plasma Electrodynamics, Volume 1 Linear Theory
Pergamon Press, Oxford (1975)

[2] Broer LJF
Approximate Equations for Long Water Waves
Appl. Sci. Res. 31 (1975) 377

[3] Broer LJF
Hidden Hamiltonians of First-Order Equations
Physica 79A (1975) 583

[4] Broer LJF
On the Hamiltonian Theory of Surface Waves
Appl. Sci. Res. 29 (1974) 430

[5] Broer LJF, EWC Groesen and JMW Timmers
Stable Model Equations for Long Water Waves
Appl. Sci. Res. 32 (1976) 619

[6] Broer LJF and MFH Schuurmans
On a Continuum Representation for the Linear Chain Problem
Physica 51 (1971) 493

[7] Broer LJF and FW Sluijter
Stable Approximate Equations for Ion-Acoustic Waves
Ph. of Fluids 20 (1977) 1458

[8] Gardner CS, JM Greene, MD Kruskal and RM Miura
Method for Solving the Korteweg-De Vries Equation
Ph. Rev. Letters 19 (1967) 1095

[9] Tran MQ and PJ Hirt
The Korteweg-De Vries Equation for a Two Component Plasma
Plasma Physics 16 (1974) 617

[10] Varst P vd
Bewegingsvergelijkingen, Variatieprincipes en Behoudswetten
Collegedictaat 3.303, TH Eindhoven (1975)