

## MASTER

### Een numerieke en experimentele bepaling van een luchtstroming door een rechthoekig kanaal

Kessels, H.P.J.

*Award date:*  
1978

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

EEN NUMERIEKE EN EXPERIMENTELE BEPALING  
VAN EEN LUCHTSTROMING DOOR EEN RECHT-  
HOEKIG KANAAL.

Afstudeerverslag van H.P.J. Kessels.  
December 1977.

Afstudeerhoogleraar : Prof. Dr. D.A. de Vries  
Afstudeerbegeleider : Ir. C. Nieuwvelt

Hierbij zou ik allen die een bijdrage hebben geleverd tot mijn afstudeerwerk willen danken. In het bijzonder J.C. Stouthart voor zijn technische assistentie, Ir. Peauw voor het ter beschikking stellen van het computerprogramma "Genmix", en mijn vrouw Maria voor al het typewerk.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling der Technische Natuurkunde

Vakgroep Transportfysica

1. Titel: EEN NUMERIEKE EN EXPERIMENTELE BEPALING VAN EEN LUCHTSTROMING DOOR EEN RECHTHOEKIG KANAAL.

2. Auteur: H.P.J. KESSELS

3. Datum: DECEMBER 1977

4. Docent/contactpersoon: PROF. DR. D.A. DE VRIES

5. Begeleider(s): IR. C. NIEUWVELT, IR. J.M. BESSEM

6. Stageverslag no.:

7. Afstudeerverslag no.: R308A

8. Intern Rapport no.:

9. Korte samenvatting:

Ten behoeve van het ontwerp van een meetsectie voor een windtunnel is een numerieke procedure ontwikkeld, die de gemiddelde snelheidsverdeling van een stroming door een rechthoekig kanaal berekent. Daarbij is er vanuit gegaan dat er op elk der vier wanden een identieke turbulente grenslaag aangroeit. De numerieke resultaten zijn vergeleken met experimentele waarden.

Daarnaast zijn er met deze procedure voorspellingen gedaan omtrent luchtstromingen door divergerende en convergerende rechthoekige kanalen, waarbij de aandacht sterk is gericht op de gemiddelde snelheidsprofielen in de turbulente grenslagen en de drukgradiënt in de lengterichting van het kanaal.

## SAMENVATTING.

Gedurende deze afstudeerperiode is een computerprogramma ontwikkeld dat de luchtstroming door een rechthoekig kanaal (0,7m x 1,05m x 8m) en de bijbehorende drukgradiënt berekent. Daartoe zijn de vier turbulente grenslagen op de wanden van het kanaal vervangen door hun verplaatsingsdiktes. Bovendien zijn de interacties tussen de grenslagen op de wanden van het kanaal niet bij de berekeningen betrokken. Door deze vereenvoudigingen is het probleem gereduceerd tot een tweedimensionaal, parabolisch probleem, en wel tot het berekenen van een aangroeiende turbulente grenslaag op een vlakke wand met een drukgradiënt, die zodanig moet worden berekend, dat deze overeenkomt met de drukgradiënt in het kanaal.

Voor de berekening van dit probleem is de impulsvergelijking getransformeerd naar  $(x, \omega)$ -coördinaten, waarin  $\omega$  een dimensieloze stroomfunctie is. De variabelen zijn berekend op de roosterpunten van een, met de grenslaag meegroeiend, rooster. In  $(x, \omega)$ -coördinaten is dit rooster orthogonaal. Binnen het rooster wordt, uitgaande van een bekend beginprofiel, de "marching-procedure" uitgevoerd.

De turbulente viscositeit wordt in het programma door de Van Driest-formulering van Prandtl's mengweghypothese beschreven.

De numerieke resultaten zijn vergeleken met de experimentele waarden, welke zijn verkregen uit metingen aan een, binnen de werkgroep ontworpen, kanaal. Naast boven omschreven kanaalberekeningen zijn er met behulp van het geschreven computerprogramma voorspellingen gedaan omtrent luchtstromingen door divergerende en convergerende kanalen, waarbij de aandacht sterk gericht is op de gemiddelde snelheidsprofielen en de drukgradiënt in de lengterichting van het kanaal. Gezien de goede resultaten bij de berekening van een luchtstroming door een rechthoekig kanaal, mag worden verwacht dat deze voorspellingen goed in overeenstemming zullen zijn met de werkelijkheid.

Bovendien mag uit de verkregen resultaten worden geconcludeerd dat de beschouwde rechthoekige-kanaalstroming redelijk goed door het ontwikkelde computerprogramma wordt voorspeld. De fout in de voorspelling (ca. 3 %) ligt in de orde van de experimentele onnauwkeurigheid (ca. 2 %).

## INHOUDSOPGAVE

	pagina
INLEIDING	
1. Doel van het onderzoek	1
2. Probleemstelling	1
3. Numerieke methoden	5
1. SECUNDAIRE STROMINGEN	
1.1 Algemeen	7
1.2 Vorticititeit in de $x_1$ -richting	8
1.3 Discussie	10
2. NUMERIEKE METHODEN	
2.1 Het gebruikte rooster en de gebruikte vergelijking	11
2.2 Organisatie van het rooster en het gebruikte differentieschema	17
2.3 Organisatie van het computerprogramma	24
2.4 Test van het computerprogramma (laminair)	30
2.5 Het turbulentiemodel	36
2.6 "De truc aan de wand"	41
2.7 De drukgradiënt in het kanaal	45
3. METINGEN AAN EEN RECHTHOEKIG KANAAL	
3.1 Algemeen	48
3.2 C.T.A.-methode en Preston-buis	48
3.3 Het kanaal en het verplaatsingsmechanisme	51
3.4 Resultaten en numerieke berekeningen	53
4. VOORSPELLINGEN	
4.1 Voorspellingen	59
4.2 Discussie	61
4.3 Conclusies	63
4.4 Nabeschouwing	64
SYMBOLENLIJST	65
LITERATUURLIJST	67
APPENDIX A	69
APPENDIX B	78
BIJLAGE:	
HANDLEIDING VOOR HET COMPUTERPROGRAMMA "MEETSECTIE/WINDTUNNEL"	

## INLEIDING.

### 1. Doel van het onderzoek.

In 1976 is ten behoeve van het onderzoek van de werkgroep "Turbulentie", behorende tot de vakgroep "Transportfysica-THE", in het laboratorium van deze werkgroep een nieuwe windtunnel gebouwd. Alleen dát gedeelte van de windtunnel waarin de experimenten worden uitgevoerd, de meetsectie, is nog niet voltooid. De meetsectie van deze windtunnel bestaat in principe uit een rechthoekig kanaal met een hoogte van 1,05m, een breedte van 0,7m en een lengte van 8m (fig. i.1).

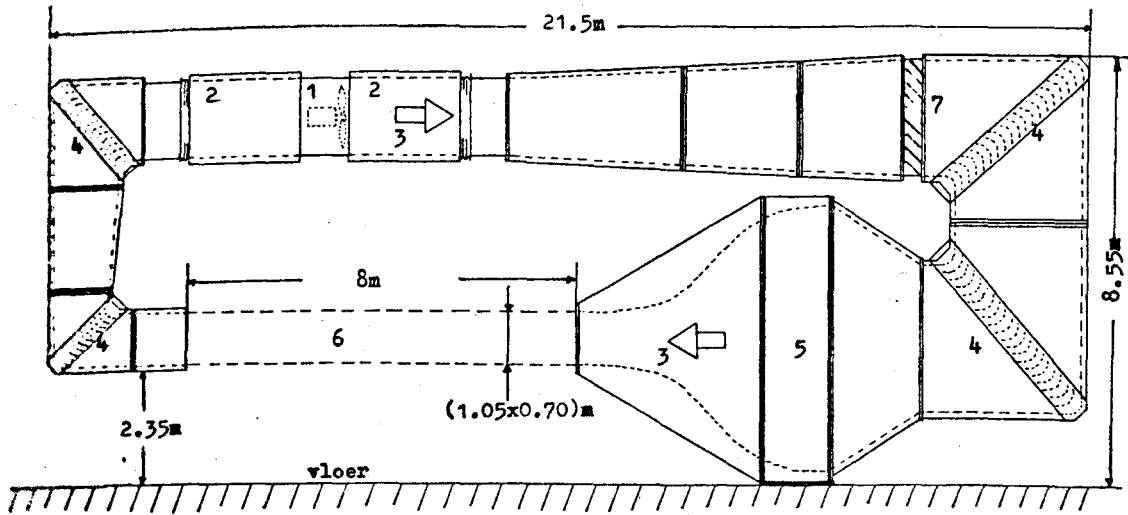
Wanneer er door dit kanaal lucht stroomt, zal er een (negatieve) drukgradiënt in de lengterichting van het kanaal optreden. Uit theoretische overwegingen is het echter gewenst, dat er in de meetsectie een drukgradiënt gelijk aan nul heerst, of nog idealer, dat de drukgradiënt instelbaar is. Vanuit deze behoefte is mijn afstudeeropdracht tot stand gekomen, om een computerprogramma te schrijven voor de berekening van een rechthoekige-kanaalstroming, dit programma te testen m.b.v. experimenten met de nieuwe windtunnel, en uiteindelijk voorspellingen te doen omtrent stromingen in andere configuraties van meetsecties dan de geteste configuratie.

### 2. Probleemstelling.

Een nadere beschouwing van het probleem laat ons zien dat we te maken hebben met vier turbulente grenslagen die vanaf het begin van de meetsectie aangroeien op de vier wanden van het kanaal. Buiten de grenslagen is de stroming uniform en nagenoeg laminair. Figuur i.2. laat het kanaal met het gebruikte assenstelsel zien. De  $x_1$ -richting valt samen met de hoofdstroomrichting van de lucht. De  $x_2$ -richting is de richting loodrecht op de benedenwand, naar boven gericht. De  $x_3$ -as staat loodrecht op de  $x_1$ - en de  $x_2$ -as en de richting is zodanig dat er een rechtsdraaiend assenstelsel wordt gevormd.

Aan het begin van het kanaal ( $x_1=0$ ), zal uit symmetrie-overwegingen op alle vier de wanden een "tripping-wire" worden aangebracht om op die plaats vier gelijke turbulente grenslagen te doen ontstaan.

Van deze turbulente grenslagen is voor dit onderzoek alleen het gemiddelde snelheidsprofiel van belang (fig. i.3.a). Voor de snelheden gelden de symbolen  $U_1$  voor de component in de  $x_1$ -richting,  $U_2$  voor de component in de  $x_2$ -richting en  $U_3$  voor de component in de  $x_3$ -richting.



- |                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| 1. ventilator     | 5. contractie   |
| 2. geluiddemper   | 6. meetsectie   |
| 3. windrichting   | 7. waterkoeling |
| 4. bocht-lamellen |                 |

fig. 1.1: De windtunnel

Het aangroeien van een turbulente grenslaag betekent ook het groter worden van de verplaatsingsdikte,  $d_1$ . Deze verplaatsingsdikte wordt voor het benedenvlak wiskundig gedefinieerd door

$$d_1 = \frac{1}{U_0} \int_0^{\infty} (U_0 - \bar{U}_1) dx_2 \quad \dots i.1$$

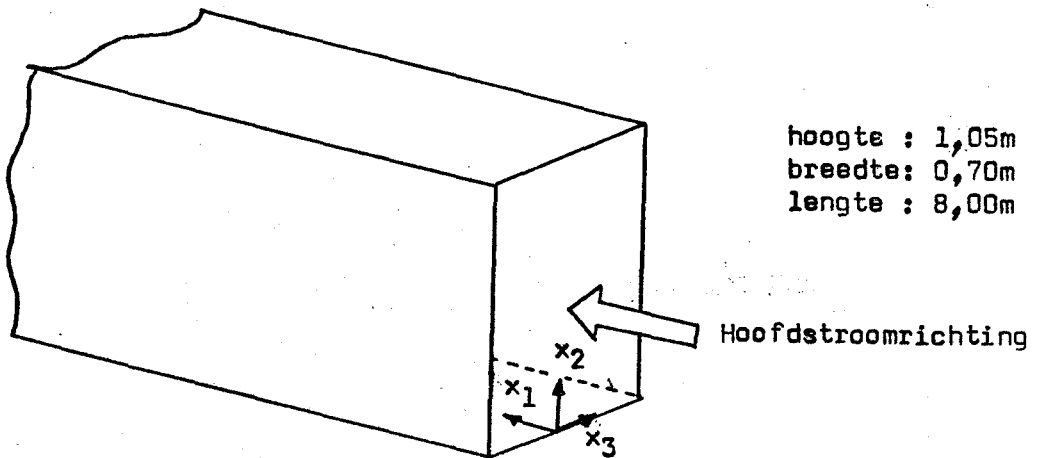


fig. 1.2: Rechthoekig kanaal met assenstelsel.

waarin  $U_0$  de hoofdstroomsnelheid voorstelt. De fysische betekenis van de verplaatsingsdikte is als volgt: Ten gevolge van de grenslaag is de volumestroom dicht bij de wand kleiner dan wanneer het profiel recht was geweest. Het verschil wordt gegeven door

$$\int_0^{\infty} (U_0 - \bar{U}_1) dx_2$$

hetgeen equivalent is met een volumestroom met snelheid  $U_0$  door een laagje ter dikte  $d_1$  (fig. 1.3.b). Men kan ook zeggen: de hoofdstroming ziet als het ware een lichaam met een wand die over een afstand  $d_1$  verplaatst is.

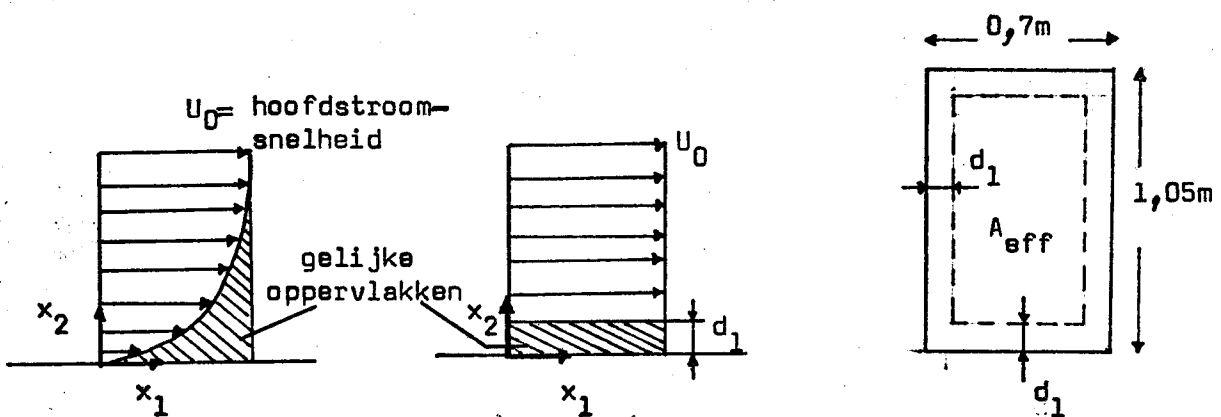


fig. 1.3.a:  
het gemiddelde  
snelheidsprofiel

fig. 1.3.b:  
de verplaatsings-  
dikte

fig. 1.3.c: afname van de  
effectieve doorsnede van  
het kanaal

Voor de vier turbulente grenslagen kunnen voor dit doel de verplaatsingsdiktes worden gesubstitueerd. Het groter worden van deze verplaatsingsdiktes komt dan overeen met het kleiner worden van de effectieve doorsnede,  $A_{eff}$ , van het kanaal, want hoogte en breedte worden elk verminderd met de afstand  $2d_1$  (fig. 1.3.c). Deze verandering van effectieve doorsnede gaat gepaard met het ontstaan van een drukgradiënt.

Bovenstaande globale beschrijving is echter te simplistisch. Zal het karakter van de turbulente grenslagen langs de wanden voornamelijk bepaald worden door de aanwezigheid van één wand, in de vier hoeken zijn er twee loodrecht op elkaar staande wanden die de grenslaag bepalen. In de hoeken treedt er een interactie op tussen twee turbulente grenslagen, elk behorende tot een wand. Deze interactie heeft tot gevolg dat er niet te verwaarlozen gemiddelde snelheden optreden in het vlak loodrecht op de hoofdstroomrichting.



Deze z.g. secundaire stromingen (zie hoofdstuk 1) beperken zich weliswaar tot een relatief klein gebied in de hoeken, maar zorgen ervoor dat het te onderzoeken probleem een driedimensionaal karakter heeft. Omdat dit grote numerieke moeilijkheden geeft, heb ik deze secundaire stromingen niet bij de berekeningen betrokken. Hiermee heb ik het probleem gereduceerd tot het berekenen van een tweedimensionale turbulente grenslaag langs een vlakke wand, met een drukgradiënt die overeen moet komen met de drukgradiënt welke in de meetsectie zou heersen.

De partiële differentiaalvergelijkingen die het gemiddelde snelheidsprofiel van een stationaire, niet-samendrukbare turbulente grenslaag met constante stofparameters beschrijven, luiden in de grenslaagbenadering voor de benedenwand:

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \eta_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad *) \quad \dots i.2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \dots i.3$$

$$\begin{aligned} \text{Randvoorwaarden : } x_2=0 & : \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0 \\ & x_2=\infty : \bar{u}_1 = u_0 \end{aligned}$$

Hierin duidt de streep boven de symbolen op de gemiddelde waarde.  $\eta_{\text{eff}}$  is de effectieve viscositeitscoëfficiënt welke gegeven wordt door

$$\boxed{\eta_{\text{eff}} = \eta + \eta_t} \quad \dots i.4$$

waarin  $\eta_t$  de turbulente viscositeit voorstelt. Deze turbulente viscositeit is een eigenschap van de stroming waarvoor een wiskundig model, het zogeheten turbulentie-model, gebruikt moet worden. Het vinden van een goed model is een belangrijk onderdeel van het onderzoek.

\*) Voor de betekenis van de symbolen zie de symbolenlijst.

### 3. Numerieke methoden.

De moeilijkheidsgraad van numerieke berekeningen van turbulente stromingen hangt voornamelijk af van

- a. de aard van het probleem: 2-of 3-dimensionaal, parabolisch of elliptisch
- b. het turbulentiemodel dat gekozen wordt

Het bovenstaand probleem is een tweedimensionaal, parabolisch probleem.

Het woord "parabolisch" is een wiskundige classificatie van de p.d.v.

(= part. differentiaalvergelijkingen) die het probleem beschrijven.

Fysisch betekent het parabolisch zijn, dat stroomafwaartse verstoringen géén invloed hebben op het stroomopwaartse stromingsbeeld. (Voor een uitgebreidere beschrijving van parabolische en elliptische problemen, zie lit. (1) en lit. (2))

Dit parabolisch karakter van het probleem zal zeer sterk ten goede komen aan de economie (weinig geheugenplaatsen en korte rekentijden) van het te schrijven computerprogramma.

Hoewel in principe de waarden van de variabelen in het hele gebied van de grenslaag van belang zijn, moeten we bij numerieke berekeningen onze aandacht tot een eindig aantal punten van het gebied beperken. Dit is om geheugen en rekentijd te besparen.

Deze punten liggen op de knooppunten van een rooster dat gevormd wordt door twee stelsels lijnen die (vrijwel) rechte hoeken met elkaar maken (fig. 1.4). Een stelsel heeft de richting van de hoofdstroomrichting, terwijl het andere stelsel de richting van de belangrijkste veranderingen heeft.

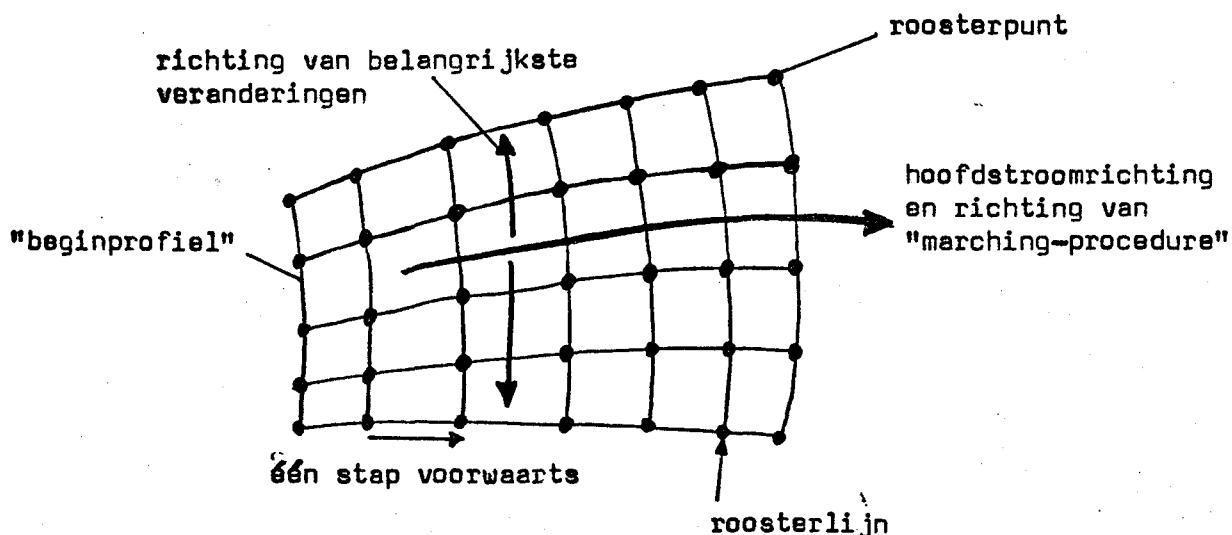


fig. 1.4: Rooster dat het rekengebied opvult.

Het parabolisch zijn van de vergelijkingen biedt de mogelijkheid om bij de numerieke berekeningen gebruik te maken van de z.g. "marching-procedure". D.w.z. uitgaande van een volledig bekend snelheidsprofiel, het beginprofiel, kunnen door discretisatie van de p.d.v. met behulp van de roosterpunten, de variabelen op de volgende roosterlijn worden berekend. Uitgaande van deze roosterlijn worden weer de variabelen op de volgende roosterlijn berekend etc., waarbij de informatie van de vorige roosterlijn verloren gaat. Dit betekent een één dimensionaal geheugen voor een tweé dimensionaal probleem!

Bij deze methode moeten wel de randvoorwaarden op de uiteinden van de roosterlijnen bekend zijn. Op de laatste roosterlijn stroomafwaarts is er geen randvoorwaarde nodig. Deze randoplossing is een uitkomst van de berekening. Deze methode is mogelijk omdat niet-uniformiteiten stroomafwaarts geen invloed hebben op de reeds berekende oplossing stroomopwaarts.

(The metaphorical reference is to a line of soldiers sweeping shoulder to shoulder across the battlefield, and performing their task with such efficiency that they need not return to "mop up" isolated pockets of resistance, nor do they have to retreat and make renewed assaults until the enemy is finally subdued. -- D.B. Spalding, lit.(1).)

Hoofdstuk 2 zal een uitgebreide beschrijving geven van de bovenomschreven numerieke methode voor het berekenen van een turbulente grenslaag.

## Hoofdstuk 1    SECUNDAIRE STROMINGEN.

Hoewel in de inleiding wordt vermeld dat de secundaire stromingen in de hoeken van het kanaal niet bij de berekeningen zijn betrokken, wil ik niet nalaten om, zij het niet al te diepgaand, iets meer te vertellen over dit onderwerp ter rechtvaardiging van deze vereenvoudiging.

### 1.1 Algemeen.

In een laminaire stroming langs een hoek is de snelheidsverdeling zodanig, dat de isotachen (lijnen van constante snelheid in een vlak loodrecht op de hoofdstroming) er uitzien als die welke in fig. 1.1 wordt aangeduid met "laminair". In een turbulente stroming langs een hoek treden er echter secundaire stromingen op, die de isotachen de vorm geven welke in fig. 1.1 wordt aangeduid met "turbulent" (lit. (3)).

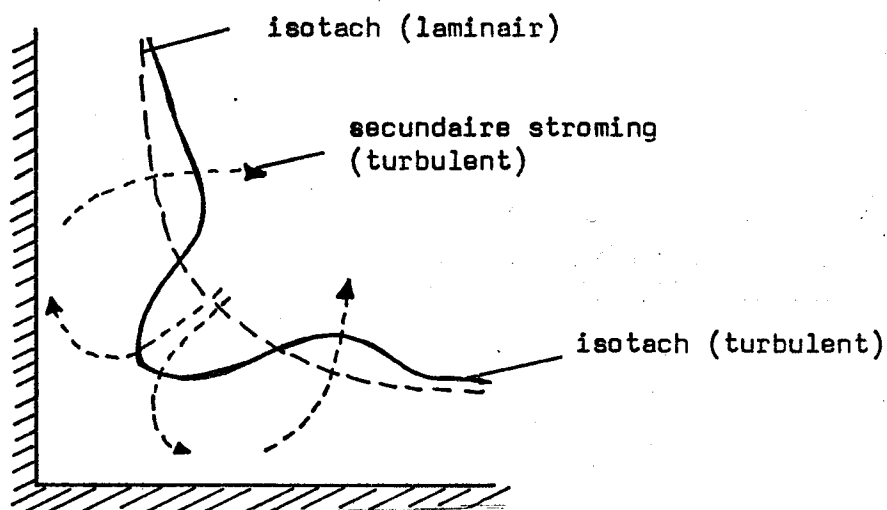


fig. 1.1: Globale isotachenconfiguratie in een hoek voor laminaire en voor turbulente stromingen. Het vlak van tekening staat loodrecht op de hoofdstroomrichting.

Bij een inwendige hoek is er een secundaire stroming langs de bisectrice in de richting van de hoek en van de hoek af langs de zijwanden. Bij een uitwendige hoek is de richting van de secundaire stroming tegengesteld. Uit bovenstaande beschrijving valt af te leiden dat de rechthoekige-kanaalstroming een driedimensionaal probleem is, hetgeen numeriek gezien, het probleem enorm compliceert.

1.2 Vorticiiteit in de  $x_1$ -richting.

Secundaire stromingen zijn door Prandtl (1952) in twee groepen verdeeld (lit. (4)).

a. van de eerste soort: deze ontstaan door buiging van de hoofdstroming (scherpe bochten in pijpen b.v.) en komen ook voor bij laminaire stromingen.

b. van de tweede soort: deze ontstaan door niet-homogeniteit van de wandturbulentie.

De secundaire stromingen in de hoeken zijn van de tweede soort. Een zinvolle benadering van dit probleem is het nader bestuderen van de vergelijking voor de component in de  $x_1$ -richting van de vorticiiteit (= rot ( $\underline{u}$ )).

Voor een stationaire, onsamendrukbare stroming met constante stofparameters luidt deze vergelijking:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \bar{u}_3 \frac{\partial \xi}{\partial x_3} &= \nu \nabla^2 \xi + \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \underbrace{\varphi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \zeta \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}}_{P_1} + \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_1 \bar{u}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_1 \bar{u}_3}{\partial x_2} \right)}_{P_2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left( \bar{u}_2^2 - \bar{u}_3^2 \right)}_{P_3} + \\ &+ \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \bar{u}_2 \bar{u}_3}_{P_4} \end{aligned} \quad \dots 1.1$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \\ \varphi &= \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \\ \zeta &= \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad \text{rot } \underline{u} = (\xi, \varphi, \zeta) \quad \dots 1.2$$

Hierin is de notatie gebruikt van fig. 1.2:

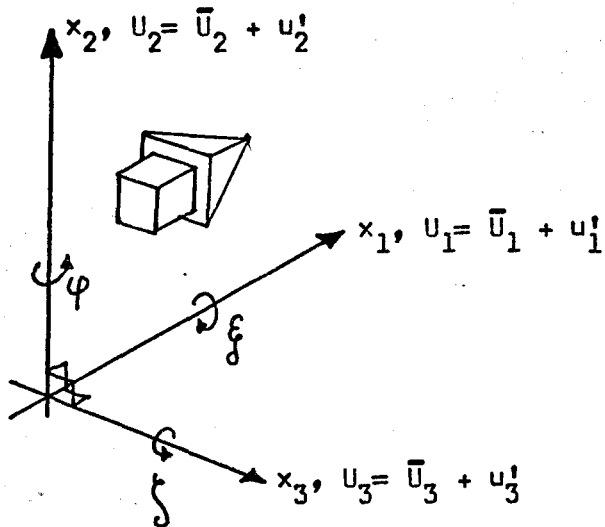


fig. 1.2: Vorticitetscomponenten.

De betekenis van de termen uit 1.1 afzonderlijk is als volgt:

$$* \left( \bar{U}_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right)$$

stelt de convectie voor van  $\xi$  via de gemiddelde snelheden.

$$* \nu \nabla^2 \xi$$

is de visceuze diffusie van  $\xi$ .

$$* \xi \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1}$$

staat in de literatuur beschreven als "vortex-stretching". Dit kan uitgelegd worden als het uitrekken door de hoofdstroming van een spiraalvormige wervel in de hoofdstroomrichting.

$$* P_1 = \varphi \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \zeta \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_1}$$

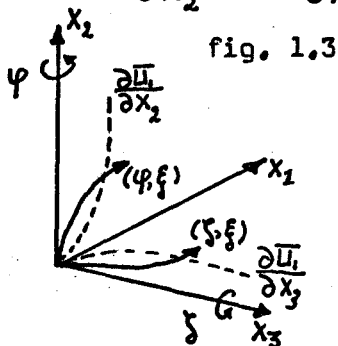


fig. 1.3

Deze term beschrijft de productie van de rotatiecomponent  $\xi$  door het ombuigen van de rotatiecomponenten  $\varphi$  en  $\zeta$  naar de  $x_1$ -as doordat er gradiënten zijn in de hoofdstroomsnelheid (fig. 1.3).

De op deze manier geproduceerde vorticititeit behoort tot Prandtl's eerste soort.

\*  $P_2$ ,  $P_3$  en  $P_4$  behoren tot de tweede soort en vertegenwoordigen de tijd-gemiddelde convectie van turbulente vorticititeit door de turbulente beweging plus de tijdgemiddelde productie van turbulente vorticititeit.

Uit bovenstaande beschouwing valt af te leiden dat wanneer men de secundaire stromingen van de tweede soort wil bestuderen, dat men dan wiskundige modellen moet zien te vinden voor de Reynoldse spanningen  $\overline{u_1^i u_2^i}$ ,  $\overline{u_1^i u_3^i}$ ,  $\overline{u_2^i u_3^i}$  en  $\overline{u_2^i u_3^i}$ . Op dit gebied is en wordt veel onderzoek gedaan dat geleid heeft tot vaak gecompliceerde turbulentiemodellen (lit.(5)).

### 1.3 Discussie.

De uitgebreidheid van het hoekgebied kan worden geschat op tweemaal de grenslaagdikte in beide richtingen (lit.(6)). Het is daarom te verwachten dat de hoekgebieden een relatief klein gedeelte van de meetsectie zullen uitmaken. Bovendien zal de invloed van de secundaire stromingen bij de middens van de wanden verwaarloosbaar zijn, zodat daar het tweedimensionale karakter vrijwel niet wordt verstoord. Op grond van deze overweging tesamen met de overweging dat de secundaire stromingen enorme theoretische en numerieke problemen met zich meebrengen, heb ik het raadzaam geacht niet te proberen de secundaire stromingen bij de berekeningen te betrekken.

## Hoofdstuk 2    NUMERIEKE METHODEN.

In dit hoofdstuk wordt de theoretische achtergrond beschreven van het door mij geschreven computerprogramma "Meetsectie/windtunnel". Deze theorie is grotendeels gebaseerd op de theorie behorende bij het computerprogramma "Genmix", geschreven door D.B.Spalding (Imperial College of Science and Technology te Londen, lit. (1)). Bovendien komen in dit hoofdstuk enkele tests van het programma ter sprake en wordt het door mij gebruikte turbulentiemodel besproken. Daarna worden nog enkele belangrijke details van het programma speciaal belicht.

### 2.1 Het gebruikte rooster en de gebruikte vergelijking.

Bij het oplossen van de p.d.v. die het probleem beschrijven, moeten we gebruik maken van een rooster. De gevraagde variabelen worden dan berekend op de roosterpunten. De vraag welk rooster te kiezen is niet zo eenvoudig te beantwoorden. Een voor de hand liggende suggestie is een cartesisch rooster (fig. 2.1).

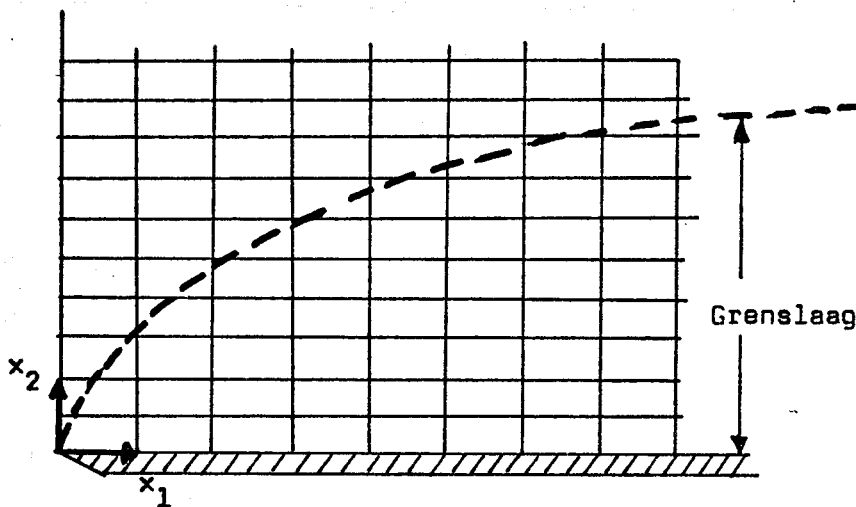


fig. 2.1: Het cartesisch rooster.

Dit rooster heeft echter het bezwaar dat het, daar waar de grenslaag dun is, weinig roosterpunten heeft. Het oplossend vermogen dicht bij de wand, waar grote gradiënten optreden, is dan veel te klein. Wanneer voor kleine  $x_2$ -waarden er veel roosterpunten worden aangebracht om de nauwkeurigheid bij kleine  $x_1$ -waarden te vergroten, dan zijn er bij grote  $x_1$ -waarden teveel roosterpunten, hetgeen teveel rekentijd zal vergen.



Wanneer we nauwkeurigheid en efficiëntie willen combineren, moeten we naar een rooster zoeken dat beter bij de vorm van de grenslaag aansluit.

Om te komen tot een beter rooster worden hieronder eerst enkele definities gegeven:

a. de stroomfunctie  $\Psi$ :  $\Psi = \int_0^y \rho U dy$  ...2.1

Hierin is  $U$  de grootte van de snelheidsvector ( $U_1, U_2$ ) en  $y$  de coördinaat welke loodrecht op de snelheidsvector staat (fig. 2.2).

b. stroomlijnen: lijnen met constante stroomfunctie. De richting van de snelheidsvector in een bepaald punt valt samen met de richting van de stroomlijn door dat punt.  $x$  is de coördinaat langs de stroomlijnen (fig.2.2).

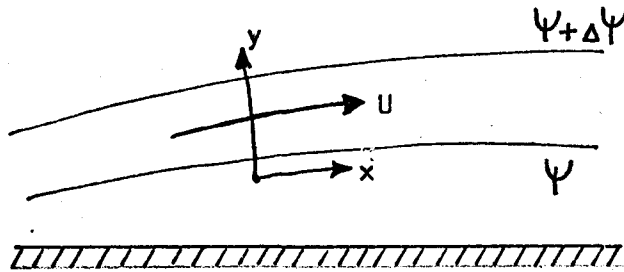


fig. 2.2: Stroomlijnen en snelheidsvector.

Opm. : Nu reeds wil ik er voor de duidelijkheid op wijzen dat er in de theorie van het programma gebruik wordt gemaakt van het zojuist beschreven coördinatensysteem. Daarbij is verondersteld dat in de grenslaag het  $(x,y)$ -coördinatensysteem samenvalt met het  $(x_1,x_2)$ -coördinatensysteem. Bovendien wordt dan de snelheid  $U$  berekend i.p.v.  $U_1$  dat wil zeggen dat  $U_2$  wordt verwaarloosd ten opzichte van  $U_1$ . Dit laatste is toegestaan daar in de grenslaag  $U_2 \ll U_1$ .

De fysische betekenis van  $\Psi(y)$  is, dat de waarde van  $\Psi(y_1)$  overeenkomt met de massastroom tussen de wand ( $y=0$ ) en het punt met  $y=y_1$ .

Het massatransport tussen twee stroomlijnen met stroomfunctie  $\Psi_a$  resp.  $\Psi_b$  ( $\Psi_a > \Psi_b$ ) bedraagt  $\Psi_a - \Psi_b$ , waarbij opgemerkt moet worden dat alle stromen betrekking hebben op de eenheid van lengte in de  $x_3$ - c.q. z-richting.

Naast het cartesisch rooster wordt vaak het  $x-\Psi$ -rooster voorgesteld (fig.2.3).

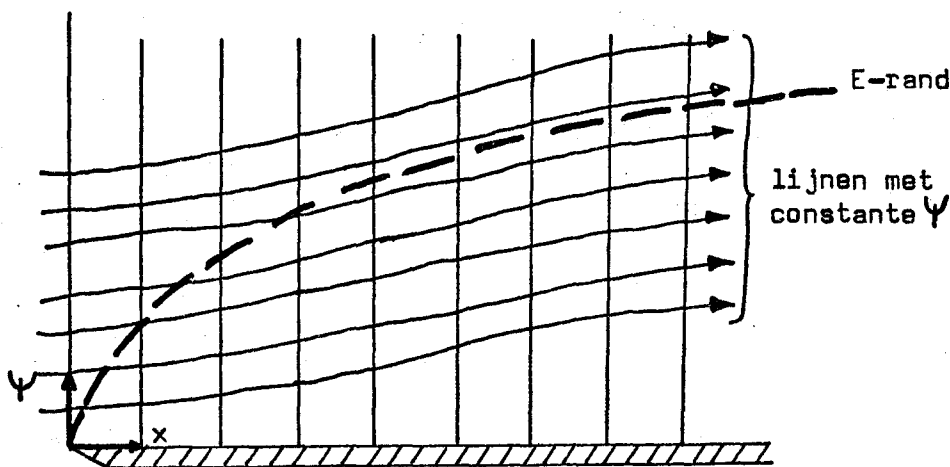


fig. 2.3: Het x-Ψ rooster.

Dit rooster heeft echter hetzelfde nadeel als het cartesisch rooster. Spalding heeft daarom voorgesteld om de stroomfunctie  $\Psi$  te schalen met  $\Psi_E(x)$  (E-rand van de grenslaag).  $\Psi_E(x)$  is de waarde van de stroomfunctie op de rand van de grenslaag. De fysische betekenis van  $\Psi_E(x)$  is dat  $\Psi_E(x)$  gelijk is aan de massastroom binnen de grenslaag. Uiteraard is deze massastroom voor elke x-waarde anders, zodat  $\Psi_E$  een functie is van x. Wanneer we nu de rand van de grenslaag laten samenvallen met de rand van het rooster dan hebben we naast x de nieuwe coördinaat

$$\omega = \frac{\Psi}{\Psi_E(x)} \quad , \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad \dots 2.2$$

Met deze twee coördinaten ziet het rooster eruit als gegeven in fig. 2.4.

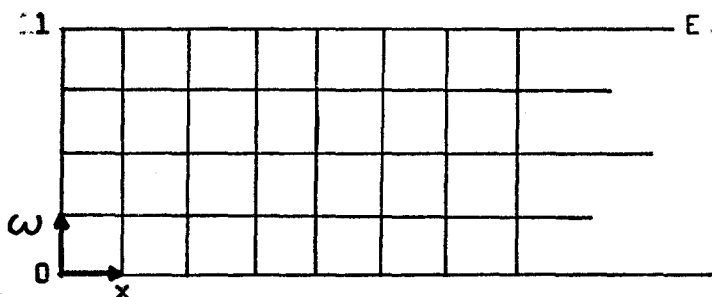


fig. 2.4: Het x-ω-rooster.

Wanneer  $\Psi_E(x)$  bekend is, hebben we een rooster gevonden met een constant aantal roosterpunten op een verticale roosterlijn, dat meegroeit met de grenslaag. M.a.w. we hebben een uitdijend rooster (fig. 2.5).

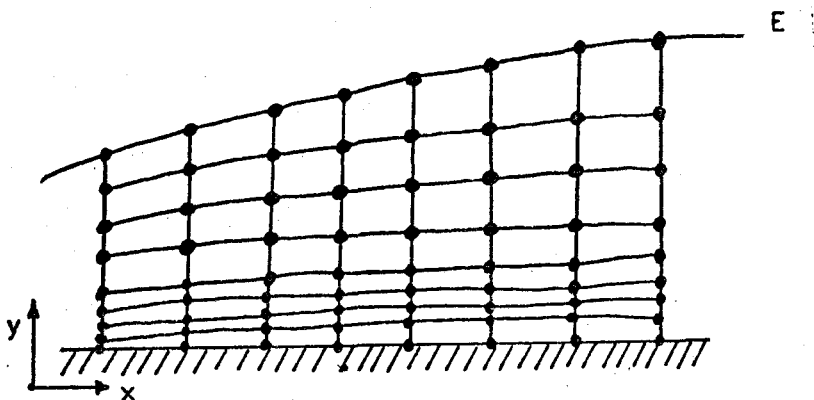


fig. 2.5: Het uitdijende rooster.

Het in fig. 2.4 gegeven, met de grenslaag meegroeiende rooster, is in het computerprogramma gebruikt.

In de inleiding zijn de grenslaagvergelijkingen gegeven in de cartesische coördinaten  $x_1$  en  $x_2$ . Hoe zien de vergelijkingen er nu uit in  $x-\omega$ -coördinaten? Om deze vergelijking af te leiden zullen we eerst de impulsvergelijking opstellen in  $x-\Psi$ -coördinaten (Von Mises-coördinatentransformatie). De definitie van  $\Psi$  luidde:

$$\Psi = \int_0^y \rho U dy$$

...2.3

ofwel:

$$d\Psi = \rho U dy$$

...2.4

We beschouwen nu twee stroomlijnen met stroomfunctie  $\Psi$  en  $\Psi + \Delta\Psi$ . De  $x$ -richting wordt weer gekozen langs de stroomlijnen en de  $y$ -richting is weer loodrecht op de stroomlijnen. We zullen nu de krachten bekijken welke op een elementair volume-elementje  $\Delta x \Delta y \Delta z$  werken, veroorzaakt door de schuifspanningen  $\tau$  en  $\tau + \Delta\tau$  en de drukken  $p$  en  $p + \Delta p$ .  $U$  is in dit geval dus de snelheid langs de stroomlijnen (fig. 2.6).

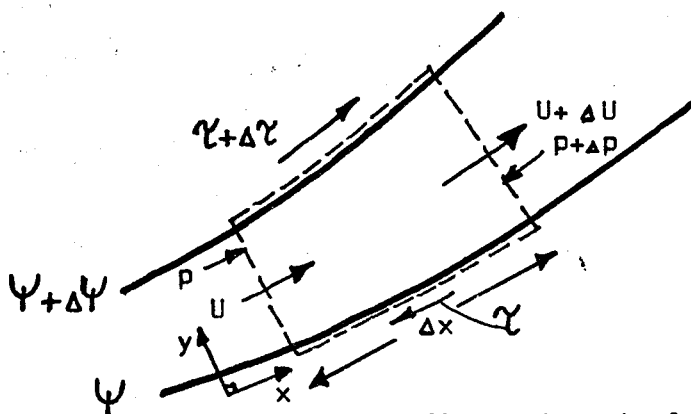


fig. 2.6: Het elementaire volume-elementje.

De impulsvergelijking wordt afgeleid door op het volume-elementje de tweede wet van Newton toe te passen: "De impulsverandering per tijdseenheid is gelijk aan de som van de krachten werkende op het volume-elementje".

Dus:

$$\{(U + \Delta U) - U\} \cdot \Delta \Psi \cdot \Delta z = (\tau + \Delta \tau - \tau) \cdot \Delta x \Delta z - (P + \Delta P - P) \Delta y \Delta z \quad \dots 2.5$$

$$\Delta U \cdot \Delta \Psi = \Delta \tau \cdot \Delta x - \Delta P \cdot \Delta y$$

met vgl. 2.4

$$\Delta U \cdot \Delta \Psi = \Delta \tau \cdot \Delta x - \frac{1}{\rho U} \cdot \Delta P \cdot \Delta y$$

en in differentiaalvorm:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial \Psi} - \frac{1}{\rho U} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots 2.6$$

Met

$$\tau = \eta_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial y} = \rho U \eta_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial \Psi} \quad \dots 2.7$$

krijgen we:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \rho U \eta_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial \Psi} \right) - \frac{1}{\rho U} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots 2.8$$

Bij bovenstaande afleiding dient opgemerkt te worden dat er geen rekening is gehouden met de visceuze uitwisseling van impuls in de x-richting. Deze is in de grenslaagbenadering verwaarloosbaar, daar de gradiënten in de x-richting veel kleiner zijn dan de gradiënten in de y-richting.

Bovendien dient nog opgemerkt te worden dat er naast 2.8 geen vergelijking behoeft te worden afgeleid voor behoud van massa, daar er bij de afleiding van 2.8 vanuit wordt gegaan dat er in het beschouwde volume-elementje geen massa verloren gaat. Een snelheidsvector die m.b.v. 2.8 wordt berekend, zal

automatisch aan de wet van behoud van massa voldoen.

Nu we de impulsvergelijking hebben afgeleid in het  $x-\Psi$ -coördinatenstelsel, moet deze nog worden getransformeerd naar het  $x-\omega$ -coördinatenstelsel. De transformatie van  $(x, \Psi)$  naar  $(x', \omega)$  waarin  $x'=x$  kan als volgt worden bepaald:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Psi} = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{\omega} \cdot \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_{\Psi} + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{x'} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{\Psi}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \Psi}\right)_{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{\omega} \cdot \left(\frac{\partial x'}{\partial \Psi}\right)_{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{x'} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \Psi}\right)_{x}$$

Met vgl. 2.2 leidt dit tot

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\Psi} = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)_{\omega} - \frac{\omega}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E(x)}{dx'} \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_{x'} \quad \dots 2.9$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Psi}\right)_{x} = \frac{1}{\Psi_E} \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_{x'} \quad \dots 2.10$$

Wanneer 2.8 volgens 2.9 en 2.10 wordt getransformeerd, leidt dit met  $x'=x$  tot de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\omega}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\rho U \eta_{eff}}{\Psi_E^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) - \frac{1}{\rho U} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\omega}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} \frac{1}{\rho U} \frac{\partial P}{\partial \omega} \quad \dots 2.11$$

We mogen echter veronderstellen dat in de grenslaagbenadering de druk onafhankelijk is van  $\omega$ , hetgeen leidt tot:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\omega}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\rho U \eta_{eff}}{\Psi_E^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) - \frac{1}{\rho U} \frac{dP}{dx}$$

ofwel

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + b \omega \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( c \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) - \frac{1}{\rho U} \frac{dP}{dx}} \quad \dots 2.12$$

waarin

$$b = \frac{-1}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} \quad \text{en} \quad c = \frac{\rho U \eta_{eff}}{\Psi_E^2} \quad \dots 2.12a$$

Vergelijking 2.12 is de niet-lineaire p.d.v. die numeriek moet worden opgelost. Een numerieke oplossing van 2.12 zal voor een bepaalde x-waarde een  $U(x,\omega)$ -snelheidsprofiel opleveren, dat weer moet worden teruggetransformeerd naar een  $U(x,y)$ -snelheidsprofiel.

2.2 Organisatie van het rooster en het gebruikte differentieschema.

a. Organisatie van het rooster.

Bij de oplossing van 2.12 wordt er uitgegaan van een bekend  $U(x,\omega)$ -profiel op een bepaalde x-waarde. In de praktijk zal dit een gemeten  $U(x,y)$ -profiel zijn dat getransformeerd wordt naar  $(x,\omega)$ -coördinaten. Uitgaande van dit bekende profiel op de eerste roosterlijn zal het profiel op de tweede roosterlijn worden berekend, etc.

Alvorens te beschrijven hoe de tweede roosterlijn wordt berekend, volgt eerst aan de hand van fig. 2.7 de beschrijving van het rooster.

$NM1=N-1$   
 $NM2=N-2$

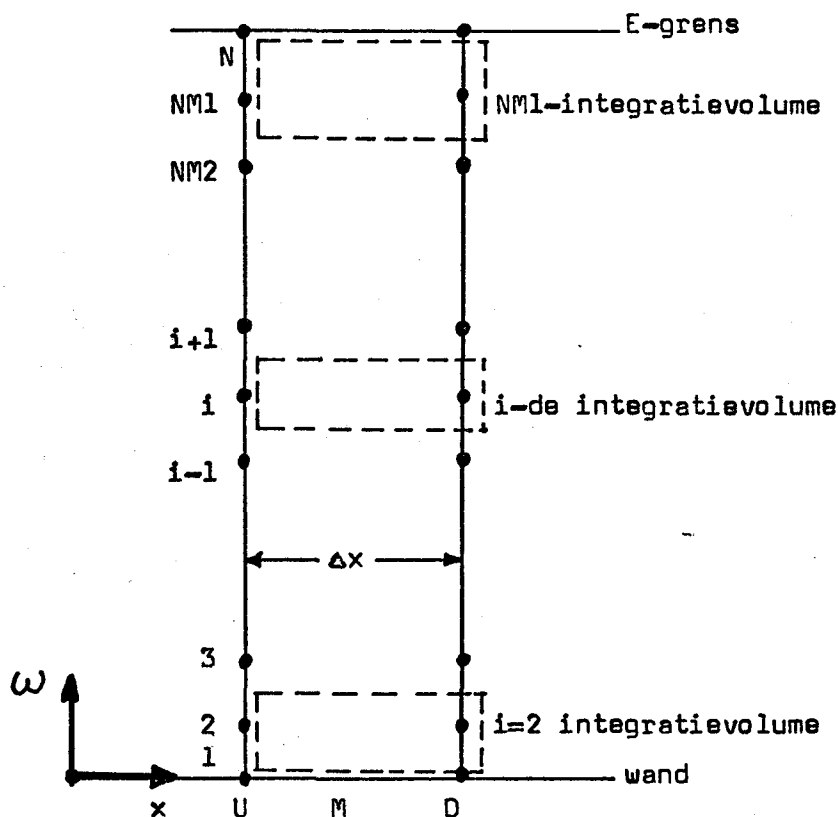


fig. 2.7: Organisatie van het x- $\omega$ -rooster.

indices: U="Upstream"  
M=Midden  
D="Downstream"

Elke roosterlijn bestaat uit N roosterpunten. Het eerste roosterpunt valt samen met  $\omega = 0$  (=de wand) en het N-de roosterpunt valt samen met  $\omega = 1$  (=de



De matrixvergelijking 2.16 is numeriek op een simpele wijze op te lossen.

b. Integratie van de differentiaalvergelijking (bepaling van  $A_i, B_i, C_i$  en  $D_i$ ).  
 Figuur 2.7 geeft een beeld van de integratievolumes  $\Delta x \Delta z \Delta \omega$  welke moeten worden beschouwd.

De grenzen van de integratievolumes worden gegeven door de betrekkingen

$$\omega_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_{i+1})$$

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_{i-1})$$

waarin  $i+\frac{1}{2}$  de bovengrens en  $i-\frac{1}{2}$  de benedengrens aangeeft. De volumes aan de beide randen verschillen hierin met de andere volumes, n.l.

voor  $i=2$  :  $\omega_{2-\frac{1}{2}} = 0$

voor  $i=N-1$  :  $\omega_{NM1+\frac{1}{2}} = 1$

Met behulp van deze definities valt af te leiden dat de totale hoogte van de integratievolumes overeenkomt met de hoogte van het rooster, immers

$$\sum_{i=2}^{NM1} (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) = \omega_{NM1+\frac{1}{2}} - \omega_{2-\frac{1}{2}} = 1 \quad \dots 2.17$$

Dus wanneer in elk volume-elementje afzonderlijk aan de wet van behoud van impuls wordt voldaan, dan wordt er in de hele grenslaag aan voldaan.

De coëfficiënten  $A_i, B_i, C_i$  en  $D_i$  worden verkregen door integratie van 2.12 over een integratievolume  $\Delta x \Delta z \Delta \omega$  (fig. 2.8).

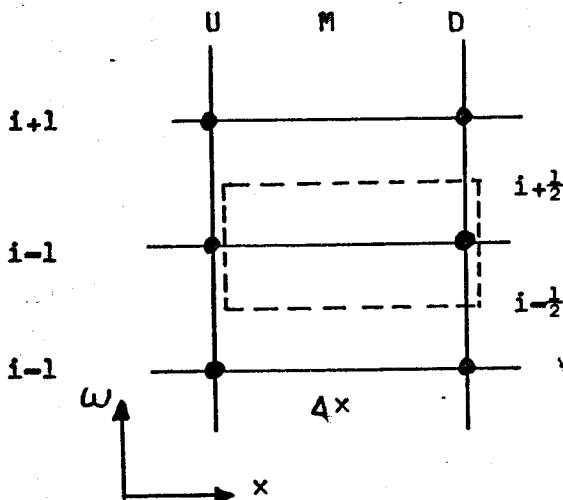


fig. 2.8: Detail van het  $(x, \omega)$ -rooster met integratievolume.



Daar alle termen onafhankelijk van  $z$  zijn, komt integratie over  $z$  neer op vermenigvuldiging met  $\Delta z$ ; na uitdelen van  $\Delta z$  blijft integratie over  $x$  en  $\omega$  over. Als integratie over  $x$  niet exact kan worden uitgevoerd, wordt de integraal benaderd door  $\Delta x$  maal de waarde van de integrand tussen  $x_U$  en  $x_D$ . Dit wordt aangegeven met de index  $M$ . Na delen door  $\Delta x$  krijgen we

$$\frac{1}{\Delta x} \iint dx d\omega. \text{ (vgl. 2.12)}$$

hetgeen overeenkomt met

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \int_{i-1/2}^{i+1/2} (U_D - U_U) d\omega && \dots \text{term A} \\ & - b \left[ \int_{i-1/2}^{i+1/2} U d\omega \right]_M && \dots \text{term B} \\ & + \left[ (b\omega U)_{i+1/2} - (b\omega U)_{i-1/2} \right]_M && \dots \text{term C} \\ & = \left[ \left( c \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_{i+1/2} - \left( c \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_{i-1/2} \right]_M && \dots \text{term D} \\ & + \left[ \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{-1}{\rho U} \frac{dP}{dx} d\omega \right]_M && \dots \text{term E} \end{aligned}$$

...2.18

Om nu 2.18 te herleiden tot 2.15 zullen er enkele aannamen omtrent het snelheidsprofiel en de gradiënten worden gemaakt.

De eerste aanname die wordt gemaakt is, dat voor  $\omega_{i-1/2} \leq \omega \leq \omega_{i+1/2}$  de snelheid gelijk is aan  $U_i$ . Voor term A betekent dit, dat deze geschreven kan worden als

$$\frac{(U_{i,D} - U_{i,U})}{\Delta x} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \quad \dots 2.19$$

De definitie van b (2.12a) houdt in dat term B geschreven kan worden als

$$\frac{-1}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} \cdot U_{i,M} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \quad \dots 2.20$$

De volgende aanname die wordt gemaakt, is dat  $U_{i,M} = U_{i,D}$ . Ook de U-waarden uit term C en de gradiënten uit term D worden genomen op het stroomafwaartse station. Dit is gedaan uit stabiliteitsoverwegingen m.b.t. het computerprogramma (lit.(1)).

Voor de term C geldt de afspraak

$$U_{i\pm 1/2,D} = 1/2 (U_{i,D} + U_{i\pm 1,D}) \quad \dots 2.21$$

De gradiënten uit term D worden met 2.12a en 2.2 en 2.4 weer herleid tot

$$\left( \frac{\rho U \eta_{eff}}{\Psi_E^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_{i+1/2} = \left( \frac{1}{\Psi_{E,U}} \eta_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{i+1/2,D} =$$

$$\frac{1}{\Psi_{E,D}} \cdot \eta_{eff i+1/2,U} \cdot \frac{(U_{i+1} - U_i)_D}{(Y_{i+1} - Y_i)_U} \quad \dots 2.22$$

Daar bij de berekening van de snelheden op de stroomafwaartse roosterlijn alle grootheden op deze lijn onbekend zijn, worden in 2.22 hiervoor de stroomopwaartse waarden genomen. Dit is toegestaan daar de veranderingen in de x-richting zwak zijn. De onbekende snelheden blijven staan om tot 2.15 te komen.

De laatste term, term E, kan worden geschreven als

$$\frac{-1}{\rho U_{i,D}} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \quad \dots 2.23$$

Omdat  $U_{i,D}$  in de noemer staat, wordt het lineaire karakter van 2.15 verstoord. Schrijven we echter  $U_{i,D} = U_{i,U} + \Delta U$ , waarin  $\Delta U = U_{i,D} - U_{i,U}$ , dan wordt 2.23 door eerste ordebenadering van  $1/U_{i,D}$  in  $\Delta U$  benaderd door de lineaire relatie:

$$S_i + S'_i U_{i,D} \quad \dots 2.24$$

waarin

$$S_i = \frac{-2}{\rho U_{i,u}} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \quad \dots 2.25$$

en

$$S'_i = \frac{1}{\rho U_{i,u}^2} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \quad \dots 2.26$$

In appendix A wordt een volledige en uitgebreide herleiding van 2.18 tot 2.15 volgens de bovenstaande methode beschreven. Bovendien worden in appendix A de volumes aan beide randen apart behandeld. Deze herleiding geeft voor de coëfficiënten  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  en  $D_i$  de volgende uitdrukkingen:

$$A_i = (T - 1/2 m)_{i+1/2} \quad \dots 2.27$$

$$B_i = (T + 1/2 m)_{i-1/2} \quad \dots 2.28$$

$$C_i = U_{i,u} \frac{\Psi_{E,D}}{\Delta X} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) + S_i \cdot \Psi_{E,D} \quad \dots 2.29$$

$$D_i = A_i + B_i + \frac{\Psi_{E,D}}{\Delta X} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) - S'_i \cdot \Psi_{E,D} \quad \dots 2.30$$

waarin

$$T_{i+1/2} = \frac{\rho_{eff, i+1/2, u}}{(\gamma_{i+1} - \gamma_i) u} \quad \dots 2.31$$

$$T_{i-1/2} = \frac{\rho_{eff, i-1/2, u}}{(\gamma_i - \gamma_{i-1}) u} \quad \dots 2.32$$

$$m_{i+1/2} = -1/2 \cdot (\omega_{i+1} - \omega_i) \frac{d\psi_E}{dx} \quad \dots 2.33$$

$$m_{i-1/2} = -1/2 (\omega_i - \omega_{i-1}) \frac{d\psi_E}{dx} \quad \dots 2.34$$

Daar  $\eta_{\text{eff}}$  de effectieve viscositeit is, welke een functie van de afstand tot de wand kan zijn, wordt  $\eta_{\text{eff}}$  ook een index  $i$  meegegeven. Deze functie wordt bepaald door het gekozen turbulentiemodel.

Bij nauwkeurige beschouwing van de coëfficiënten  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  en  $D_i$  blijkt dat deze allen worden berekend uit bekende grootheden, op  $d\psi_E/dx$  na. Deze grootheid is een maat voor de groei van de grenslaag, daar deze de verandering van de hoeveelheid massa binnen de grenslaag voorstelt bij een stap  $\Delta x$  voorwaarts. De groei van de grenslaag is echter niet bekend, zodat voor deze grootheid een schatting moet worden genomen. Wanneer voor  $d\psi_E/dx$  de exact juiste waarde zou worden gekozen, dan zou dit tot gevolg hebben dat de rand van het uitdijende rooster precies zou samenvallen met de werkelijke rand van de grenslaag. Wanneer  $d\psi_E/dx$  te groot wordt genomen, zal de E-grens buiten de grenslaag lopen (fig. 2.9a), zodat een aantal roosterpunten buiten de grenslaag terecht komt, wat echter geen foutieve berekening tot gevolg zal hebben. Wanneer echter  $d\psi_E/dx$  te klein wordt genomen, zal de E-grens van het rooster binnen de grenslaag liggen (fig. 2.9b) en wordt de randvoorwaarde  $U=U_0$  voor een te kleine  $y$ -waarde opgelegd, hetgeen wél een foutieve berekening tot gevolg heeft.

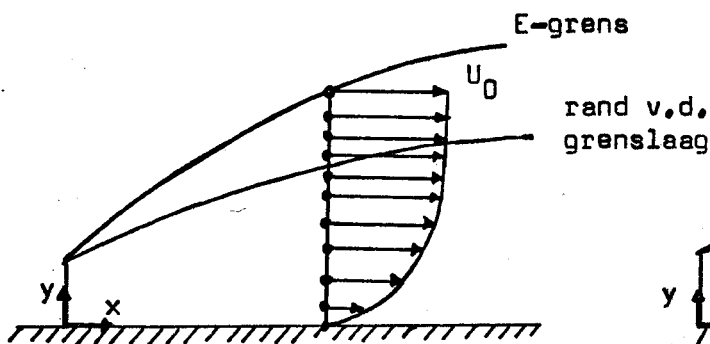


fig. 2.9a: Een te sterke groei van het rooster.

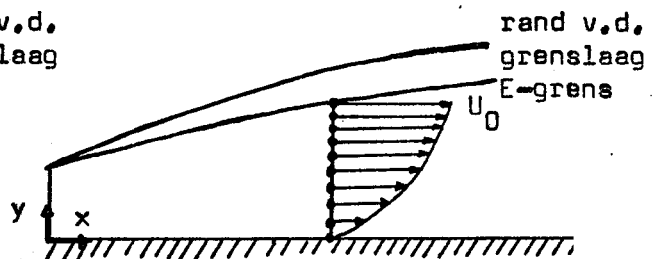


fig. 2.9b: Een te zwakke groei van het rooster.

In de praktijk van het computerprogramma wordt voor  $d\psi_E/dx$  een constante waarde genomen waaraan het criterium is verbonden, dat deze waarde met een constante factor ( $>1$ ) wordt vermenigvuldigd, zodra  $(U_N - U_{NM1})/U_N$  een bepaalde waarde overschrijdt. Fysisch betekent dit, dat de snelheidsgradiënt aan de rand van de grenslaag een zeer kleine, maximale waarde krijgt. Op deze manier zal de groei van het rooster nooit te zwak zijn.

Nu ook  $d\psi_E/dx$  een bekende grootte is, kunnen  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  en  $D_i$  worden bepaald volgens 2.27 t/m 2.34, en kan 2.16 worden opgelost.

### 2.3 Organisatie van het computerprogramma.

In deze paragraaf worden aan de hand van een blokschema (fig. 2.11) de berekeningen toegelicht, welke bij een stap voorwaarts in de marching-procedure worden verricht.

De in dit programma voorkomende integralen worden volgens de in de numerieke wiskunde als "trapezium-regel" bekend staande methode berekend. Dit wil zeggen dat de integraal wordt gevormd door de sommatie van oppervlakken ter grootte  $\Delta x \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$  (fig. 2.10).

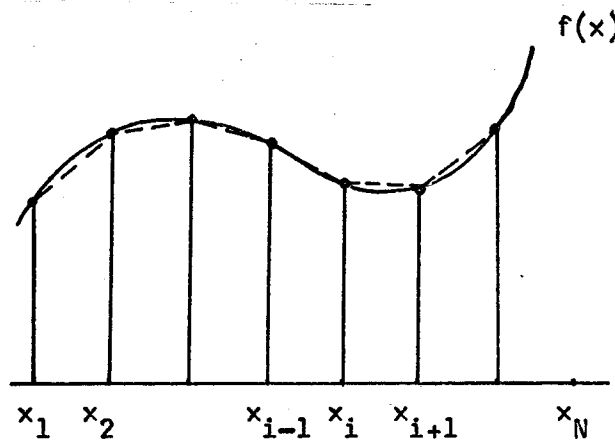


fig. 2.10: Numerieke integratie volgens de trapezium-regel.

In het algemene geval, wanneer de x-intervallen niet even groot zijn, wordt de numerieke formulering voor een integraal:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \dots 2.35$$

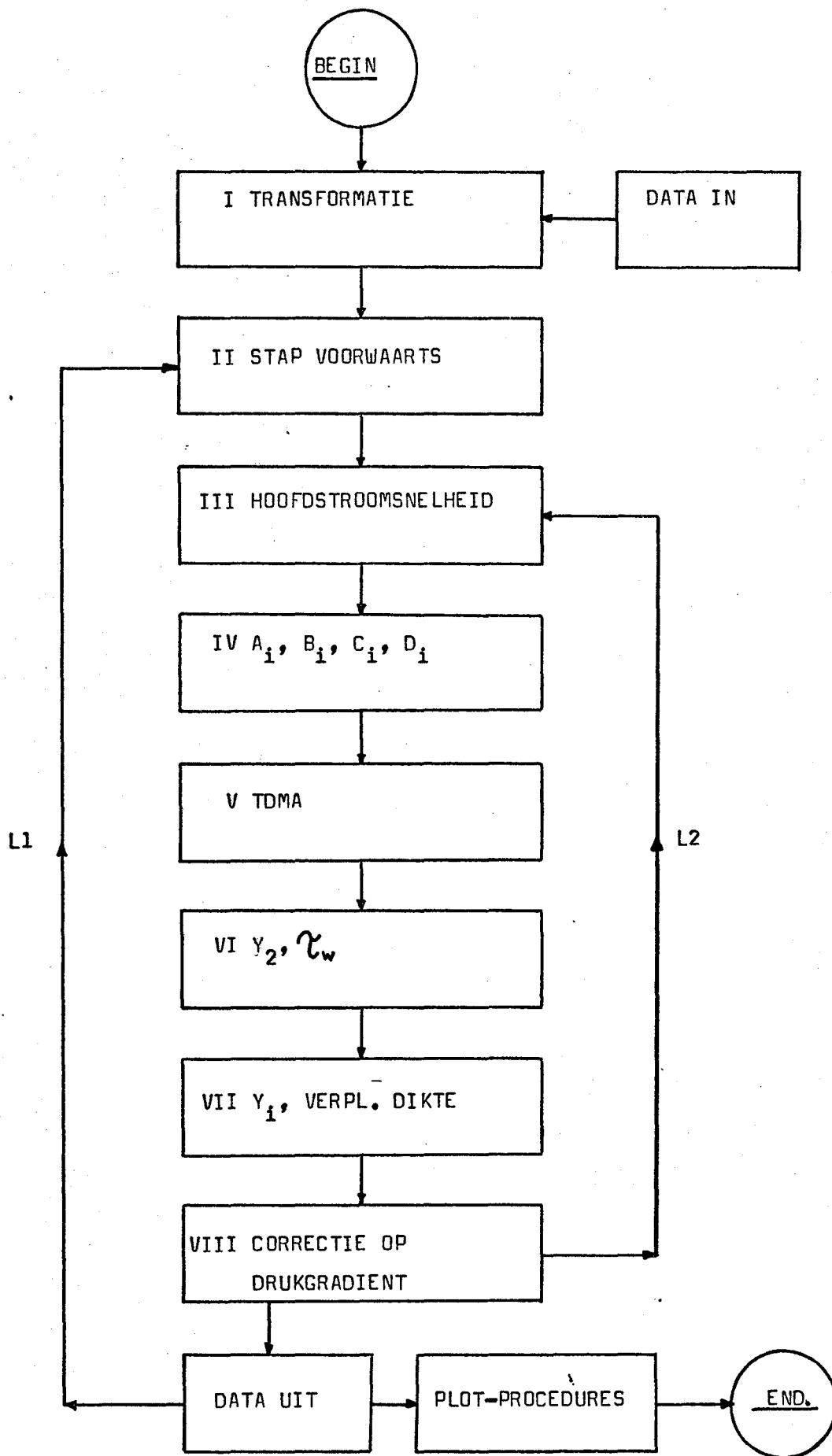


fig. 2.11: Blokschema van het programma "MEETSECTIE WINDTUNNEL".

### I. TRANSFORMATIE.

In dit gedeelte worden achtereenvolgens ingelezen (DATA IN):

- het gemeten beginprofiel ( $U_i, y_i, 1 \leq i \leq N$ )
- de x-waarde van dit profiel
- de schuifspanning aan de wand voor deze x-waarde
- de drukgradiënt voor deze x-waarde

Daarna wordt het  $U(y)$ -profiel getransformeerd naar het  $U(\omega)$ -profiel. Daartoe wordt eerst  $\Psi_E$  berekend volgens

$$\Psi_E = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} \rho (U_i + U_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \dots 2.36$$

waarna de bij de N roosterpunten behorende  $\omega$ -waarden worden berekend:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_N = 1$$

$$\omega_i = \sum_{j=2}^{i=c} \frac{1}{\Psi_E} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho (U_j + U_{j-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \quad \dots 2.37$$

Deze  $\omega$ -waarden blijven gedurende de gehele berekening van de grenslaag onveranderd.

### II. STAP VOORWAARTS.

In dit gedeelte wordt eerst de grenslaagdikte  $\delta$  berekend, welke wordt gedefinieerd als die afstand tot de wand waar de snelheid  $U$  99% bedraagt van de hoofdstroomsnelheid  $U_0$ .

Daarna wordt de stapgrootte  $\Delta x$  een waarde toegekend en wordt de nieuwe x-waarde berekend volgens  $x_D = x_U + \Delta x$ . Bij de berekeningen is  $\Delta x = 0,02m$  genomen.

Bovendien wordt de  $\Psi_E$ -waarde voor de volgende roosterlijn berekend volgens

$$\Psi_{E,D} = \Psi_{E,U} + \Delta x \cdot d\Psi_E/dx.$$

III. HOOFDSTROOMSNELHEID.

Met behulp van de wet van Bernoulli wordt de hoofdstroomsnelheid  $U_{0,D}$  berekend:

Bernoulli:  $\frac{d\frac{1}{2}\rho U_0^2}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0$

ofwel  $\frac{\frac{1}{2}\rho (U_{0,D}^2 - U_{0,u}^2)}{\Delta x} + \frac{dP}{dx} = 0$

zodat  $U_{0,D} = \left( \frac{-2}{\rho} \left( \frac{dP}{dx} \right) \cdot \Delta x + U_{0,u}^2 \right)^{1/2}$  ...2.38

IV.  $A_i, B_i, C_i, D_i$ .

Nu zijn alle grootheden, nodig om de coëfficiënten van 2.15 te berekenen, bekend. Wanneer de stroming turbulent is moet  $\eta_{eff}$  door een turbulentie-model zijn gegeven. Dit komt verderop aan de orde.

V. TDMA.

De tridiagonale matrixvergelijking (2.16) wordt nu opgelost met het tridiagonale matrix-algoritme. Dit algoritme reduceert de matrix m.b.v. "vegen" tot een driehoeksmatrix (in dit geval een bidiagonale matrix), zodat met succesieve substitutie  $U_i$  kan worden opgelost ( $U_1=0, U_N=U_0$ ).

VI.  $\gamma_2$  en  $\zeta_w$

In dit stadium zijn voor het tweede roosterpunt van de stroomafwaartse roosterlijn slechts  $U$  en  $\omega$  bekend. Om nu de  $y$ -waarde van dit roosterpunt te kunnen berekenen, wordt er tussen de wand en dit roosterpunt een parallel-stroming verondersteld. Deze wordt verkregen door in dit gebied de convectieve afgeleiden in de  $x$ -richting te verwaarlozen. Deze stroming wordt in het vervolg een Couette-stroming genoemd. De grenslaagvergelijkingen in de gemiddelde grootheden voor dit gebied worden dan

$\rho U_2 \frac{dU_2}{dx_2} = \frac{d\tau}{dx_2} - \frac{dP}{dx_1}$  ;  $\frac{dU_2}{dx_2} = 0$  ...2.39



Wanneer 2.39 wordt geïntegreerd krijgen we

$$\rho U_2 U_1 = \tau - \tau_w - x_2 \frac{dP}{dx_1} \quad \dots 2.40$$

Uit de continuïteitsvergelijking volgt dat  $U_2$  constant is in dit gebied, zodat  $\rho U_2$  de massastroom door de wand voorstelt. Deze is in dit geval gelijk aan nul. Nu komt  $U$  dus overeen met  $U_1$ ,  $x$  met  $x_1$  en  $y$  met  $x_2$ .

In het laminaire geval ( $\eta_{\text{eff}} = \eta$ ) vinden we met

$$\tau = \eta \frac{dU}{dy} \quad \dots 2.41$$

$$\eta \frac{dU}{dy} = \tau_w + \gamma \frac{dP}{dx} \quad \dots 2.42$$

Wanneer we 2.42 nu weer integreren krijgen we

$$U = \frac{1}{\eta} \left\{ \tau_w y + \frac{1}{2} y^2 \frac{dP}{dx} \right\} \quad \dots 2.43$$

of

$$\tau_w = \eta \frac{U}{y} - \frac{1}{2} \gamma \frac{dP}{dx} \quad \dots 2.44$$

Omdat  $\Psi = \int_0^y \rho U dy$ , volgt hieruit met substitutie van achtereenvolgens 2.43 en 2.44 voor het Couette-gebied de volgende uitdrukking voor  $\Psi$ :

$$\Psi = \rho U y \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\gamma}{U} \cdot \frac{dP}{dx} \right\} \quad \dots 2.45$$

Uit  $\Psi = \omega \cdot \Psi_E$  volgt dan de niet volledig expliciete uitdrukking voor  $y$

$$y = \frac{\omega \Psi_E}{\rho U \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{12 \eta U} \cdot \frac{dP}{dx} \right\}} \quad \dots 2.46$$

Deur  $y_{2,D}$  in de Couette-stroming verondersteld wordt, kan de volgende uitdrukking worden gegeven:

$$y_{2,D} = \frac{\omega_2 \Psi_E}{\rho U_{2,0} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{y_{2,U}^2}{12 \eta U_{2,0}} \cdot \frac{dP}{dx} \right\}} \quad \dots 2.47$$

Een saillant detail in deze uitdrukking is, dat er in de noemer van het rechterlid gebruik is gemaakt van  $y_{2,U}$ . Nadat  $y_{2,D}$  is berekend, kan  $\alpha_{wD}$  worden berekend volgens

$$\alpha_{wD} = \eta \frac{U_{2,D}}{y_{2,D}} - \frac{1}{2} y_{2,D} \frac{dP}{dx} \quad \dots 2.48$$

Met 2.47 en 2.48 kunnen  $y_{2,D}$  en  $\alpha_{wD}$  iteratief worden berekend. Wanneer de stroming turbulent is, kan bovenstaande methode alleen worden gebruikt wanneer het tweede roosterpunt binnen de visceuze sublaag ligt! Verderop zal voor turbulente stromingen nog een andere methode worden besproken.

VII.  $y_i$  en de VERPLAATSINGSDIKTE.

Nadat  $y_2$  is berekend, kunnen  $y_i$  ( $3 \leq i \leq N$ ) worden berekend. Uit  $dy = \frac{\Psi_E}{\rho U} d\omega$  volgt voor  $y_i$ :

$$y_{i,D} = \sum_{i=3}^{i=N} \left[ \Psi_E \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho U_{i,D}} + \frac{1}{\rho U_{i-1,D}} \right) (\omega_i - \omega_{i-1}) \right\} \right] + y_{2,D} \quad \dots 2.49$$

De verplaatsingsdikte wordt gedefiniëerd door

$$d_i = \frac{1}{U_0} \int_0^{y_N} (U_0 - U) dy \quad \dots 2.50$$

ofwel

$$d_i = y_N - \frac{1}{U_0} \int_0^{y_N} U dy$$

zodat

$$d_i = y_N - \frac{\Psi_E}{\rho U_0} \quad \dots 2.51$$

VIII. CORRECTIE OP DE DRUKGRADIËNT.

In dit gedeelte wordt de correctie op de drukgradiënt berekend, om deze te laten overeenkomen met de drukgradiënt in het kanaal. Deze correctie wordt met de iteratie-loop L2 verderop besproken.

DATA UIT en PLOT-PROCEDURES.

Nu het hele volgende snelheidsprofiel berekend is, kunnen de resultaten eventueel in tabelvorm worden geprint (DATA UIT) of in grafische vorm worden gegeven. Voor het tekenen van de grafieken zijn de tekenprocedures gebruikt welke geschreven zijn door R.J.J. v. Ommen (lit. (7)).

De volgende stap voorwaarts kan nu worden genomen, waarbij weer alle berekeningen opnieuw worden uitgevoerd. Dit wordt in fig. 2.11 uitgeteekend door de "stappen-loop" L1.

2.4 Test van het computerprogramma (laminair).

De totstandkoming van het programma is in verschillende fasen verlopen, waarbij in elke fase de moeilijkheidsgraad van het te berekenen probleem is verhoogd:

- a. laminaire stroming met  $dp/dx = 0$
- b. laminaire stroming met  $dp/dx \neq 0$
- c. turbulente stroming met constante drukgradiënt
- d. turbulente stroming met drukgradiënt welke moet overeenkomen met de drukgradiënt in het kanaal

In elke fase is getoetst, of de resultaten van het programma overeenkomen met de werkelijkheid. In deze paragraaf wordt de test beschreven van fasen a en b.

ad a.

Dit probleem komt overeen met de stroming langs een dunne vlakke plaat, welke in een uniforme hoofdstroming ( $U=U_0$ ) is geplaatst (fig. 2.12). De snelheid van de hoofdstroming ver van de plaat zal niet veranderen, ofwel  $dp/dx_1 = 0$ . De grenslaagvergelijkingen van dit probleem luiden in de notatie van fig. i.2:

$$\mu_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_2^2} ; \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} = 0 \quad \dots 2.52$$

$$x_2 = 0 : \mu_1 = \mu_2 = 0 ; x_2 = \infty : \mu_1 = \mu_0$$

We stellen nu  $U_1 = \partial \Psi / \partial x_2$  en  $U_2 = -\partial \Psi / \partial x_1$ , waardoor automatisch aan de continuïteitsvergelijking wordt voldaan, en we voeren vervolgens de dimensie-loze functies  $x_2^*$  en  $f$  in met

$$x_2^* = x_2 (U_0 / 2 \nu x_1)^{1/2} \quad f(x_2^*) = \Psi / (2 \nu U_0 x_1)^{1/2} \quad \dots 2.53$$

Deze speciale functies komen tevoorschijn uit beschouwingen over de groei van de grenslaag als functie van  $x_1$ , waaruit bovendien blijkt dat  $f$  uitsluitend een functie is van  $x_2^*$ .

Met deze wetenschap volgt uit

$$df = (\partial f / \partial x_2) dx_2 + (\partial f / \partial x_1) dx_1 = f' dx_2^*$$

$$dx_2^* = (U_0 / 2 \nu x_1)^{1/2} dx_2 - (x_2^* / 2 x_1) dx_1$$

$$(\partial f / \partial x_2) = U_1 / (2 \nu U_0 x_1)^{1/2}, \quad (\partial f / \partial x_1) = -U_2 / (2 \nu U_0 x_1)^{1/2} - f / 2 x_1$$

dat

$$U_1 = U_0 f', \quad U_2 = (\nu U_0 / 2 x_1)^{1/2} \cdot (x_2^* f' - f)$$

$$(\partial U_1 / \partial x_1) = -(U_0 x_2^* / 2 x_1) f''$$

$$(\partial U_1 / \partial x_2) = U_0 (U_0 / 2 \nu x_1)^{1/2} f''$$

$$(\partial^2 U_1 / \partial x_2^2) = (U_0^2 / 2 \nu x_1) f'''$$

Hiermee reduceert 2.52 tot een gewone differentiaalvergelijking:

$$f'''' + f f'' = 0$$

...2.54

$$f(0) = f'(0) = 0 ; f'(\infty) = 1$$

Deze differentiaalvergelijking is voor grote en kleine waarden van  $x_2^*$  benaderd door Blasius. De numerieke oplossing van 2.54 is in tabelvorm beschikbaar (lit.(8)).

De test van het programma is nu als volgt verlopen: als beginprofiel is het (Blasius)-snelheidsprofiel op  $x_1=1\text{m}$  genomen bij een hoofdstroomsnelheid  $U_0=6\text{m/s}$ , waarna de profielen op  $x_1=2\text{m}$ ,  $x_1=3\text{m}$  enz. t/m  $x_1=7\text{m}$  zijn berekend. In tabel 2.1 worden de schuifspanningen aan de wand voor elk station gegeven.

TABEL 2.1

$x_1$ (m)	$\tau_{w,\text{exact}}$ (Pa)	$\tau_{w,\text{num.}}$ (Pa)	fout %
2	0,016196	0,016138	-0,355
3	0,013224	0,013184	-0,298
4	0,011452	0,011422	-0,264
5	0,010243	0,010218	-0,244
6	0,009351	0,009329	-0,231
7	0,008657	0,008638	-0,223

Fig. 2.13 laat het exacte snelheidsprofiel en het berekende snelheidsprofiel zien voor  $x_1=7\text{m}$ . Uit deze resultaten mogen we concluderen dat het programma dit probleem goed oplost.

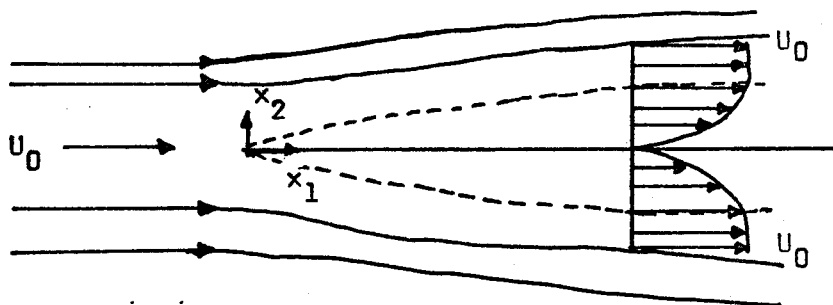


fig. 2.12: Laminaire stroming langs een vlakke plaat.

ad b.

Wanneer de drukgradiënt ongelijk aan nul is, gaat de grenslaagvergelijking 2.52 over in:

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = U_0 \frac{dU_0}{dx_1} + \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \quad \dots 2.55$$

In dit geval is de hoofdstroomsnelheid een functie van  $x_1$ . Dit zal over het algemeen niet leiden tot gelijkvormigheidsoplossingen zoals bij a het geval was.

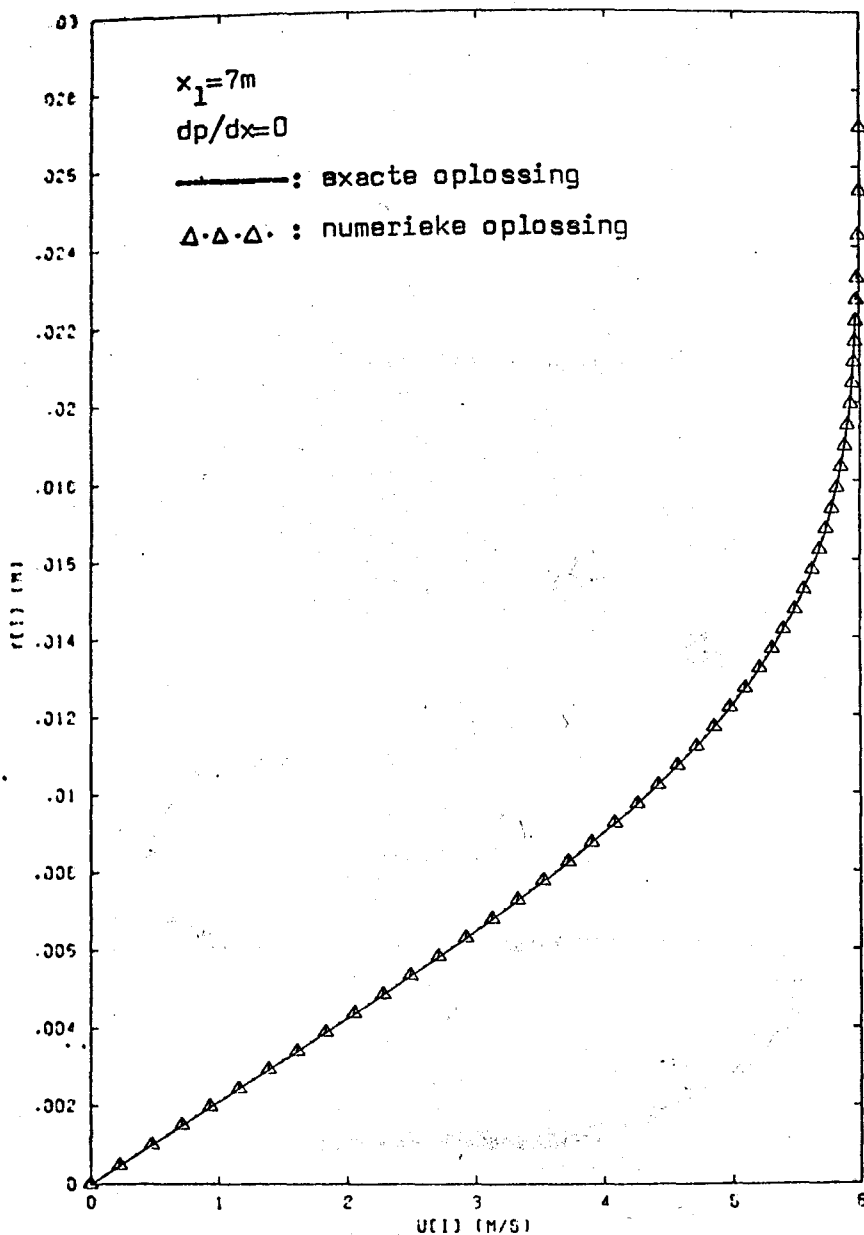


fig. 2.13: Het snelheidsprofiel voor  $x_1 = 7\text{m}$ .  
 Elk driehoekje is een roosterpunt.

Wanneer echter de potentiaalstroming  $U_0(x_1)$  een zeer speciale functie is van  $x_1$ , dan leidt ook 2.55 tot gelijkvormigheidsoplossingen (lit. (8)).

Wanneer

$$U_0(x_1) = U_0(0) \cdot x_1^m \quad \dots 2.56$$

en

$$f(x_2^*) = \psi / (2 U_0(x_1) \cdot \nu \cdot x_1 / (m+1))^{1/2} \quad \dots 2.57$$

met

$$x_2^* = x_2 \cdot ((m+1) U_0(x_1) / 2 \nu x_1)^{1/2} \quad \dots 2.58$$

dan reduceert 2.55 tot de gewone differentiaalvergelijking

$$f'''' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad \dots 2.59$$
$$f(0) = f'(0) = 0 \quad ; \quad f'(\infty) = 1$$

waarin

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad \text{ofwel} \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}$$

Vergelijking 2.59 is voor verschillende waarden van  $\beta$  benaderd door Falkner en Skan, en ook hier zijn de numerieke oplossingen in tabelvorm beschikbaar. Het programma is op dezelfde manier getest als onder a. Bij deze test is  $\beta=1$  genomen.

Tabel 2.2 geeft de schuifspanningen aan de wand voor de verschillende stations en fig. 2.14 geeft in één figuur de snelheidsprofielen op die stations weer.

TABEL 2.2

$x_1$ (m)	$\tau_{w, \text{exact}}$ (Pa)	$\tau_{w, \text{num.}}$ (Pa)	fout %
2	0,170068	0,171336	0,746
3	0,255102	0,257099	0,783
4	0,340136	0,342837	0,794
5	0,425170	0,428567	0,799
6	0,510205	0,514293	0,801
7	0,595239	0,600017	0,803

Gezien de resultaten van test a en test b mogen we concluderen dat laminaire grenslagen goed door het programma worden berekend.

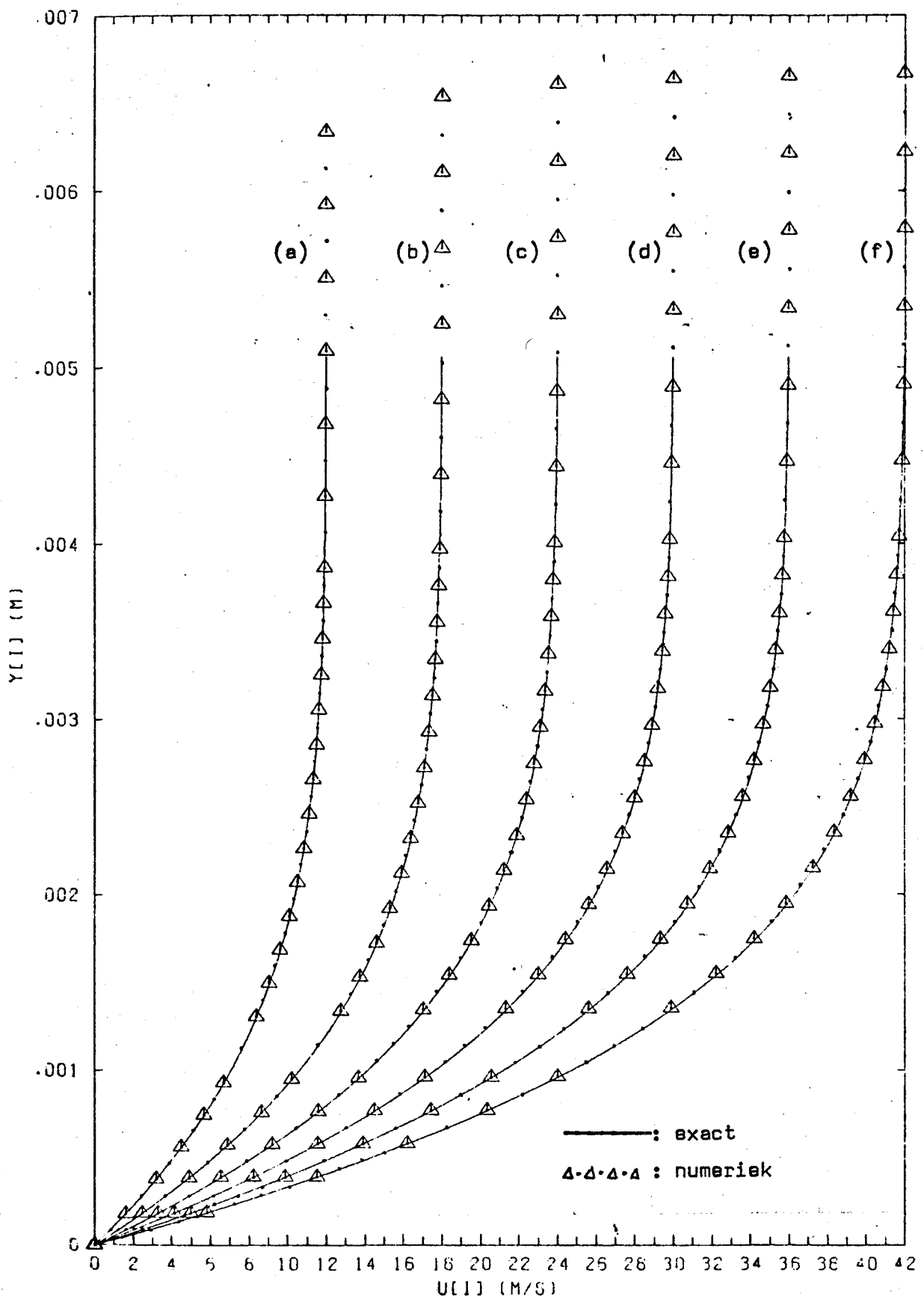


fig. 2.14: Snelheidsprofielen met  $dp/dx \neq 0$  bij  $x_1=2m$ (a),  $x_1=3m$ (b),  $x_1=4m$ (c),  $x_1=5m$ (d),  $x_1=6m$ (e),  $x_1=7m$ (f).



### 2.5 Het turbulentiemodel.

Alvorens over te gaan tot de bespreking van het turbulentiemodel volgt eerst de definitie van de met de wandwrijvingsspanning dimensieloos gemaakte snelheid  $U^+$  en afstand tot de plaat  $y^+$  :

$$U^+ = U/U_* \quad \text{en} \quad y^+ = y \cdot U_*/\nu \quad \dots 2.60$$

waarin 
$$U_* = (\tau_w/\rho)^{1/2} \quad \dots 2.61$$

Wanneer er tot nu toe sprake is geweest van  $\eta_{eff}$ , is er verwezen naar een turbulentiemodel. Dit is noodzakelijk omdat  $\eta_{eff}$  een eigenschap is van de stroming zelf. Dat er een model nodig is, wil zeggen dat een fysische theorie ter berekening van  $\eta_{eff}$  nog ontbreekt. Een beschouwing over de diverse modellen die er bestaan, kan de lezer o.a. vinden in lit. (9). Voor een turbulente grenslaag op een vlakke plaat voldoet de welbekende mengweg-hypothese van Prandtl:

$$\eta_{eff} = \eta + \eta_t$$

Prandtl:

$$\eta_{eff} = \eta + \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad \dots 2.62$$

waarin  $l_m$  de mengweg voorstelt.

In het programma "Meetsectie/Windtunnel" is de Van Driest-formulering voor de mengweg gebruikt:

$$l_m = ky [1 - \exp(-y^+/A)] \quad \dots 2.63$$

Hierin zijn

- $l_m$  : de mengweg
- $k$  : de constante van Von Kármán ( $k=0,4$ )
- $A$  : een dimensieloze grootte welke afhangt van de drukgradiënt en de ruwheid van de wand. Voor een gladde wand en zwakke drukgradiënt mag  $A = 26$  genomen worden.

Voor grote waarden van  $y$  ( $y^+ > 100$ ) wordt het argument van de e-macht sterk negatief en wordt  $\eta$  klein t.o.v.  $\eta_t$ . Vergelijking 2.63 en vergelijking 2.62 reduceren dan tot

$$l_m = ky$$

...2.64

en

$$\eta_{eff} = (ky)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

...2.65

Voor nog grotere waarden van  $y$  gaan 2.64 en 2.65 niet meer op en neemt de mengweg een constante waarde aan:

$$l_m = c_i \cdot \delta$$

...2.66

waarin  $c_i$  een constante is.

Figuur 2.15 geeft de dimensieloze mengwegverdeling weer voor het buitengebied van de grenslaag.

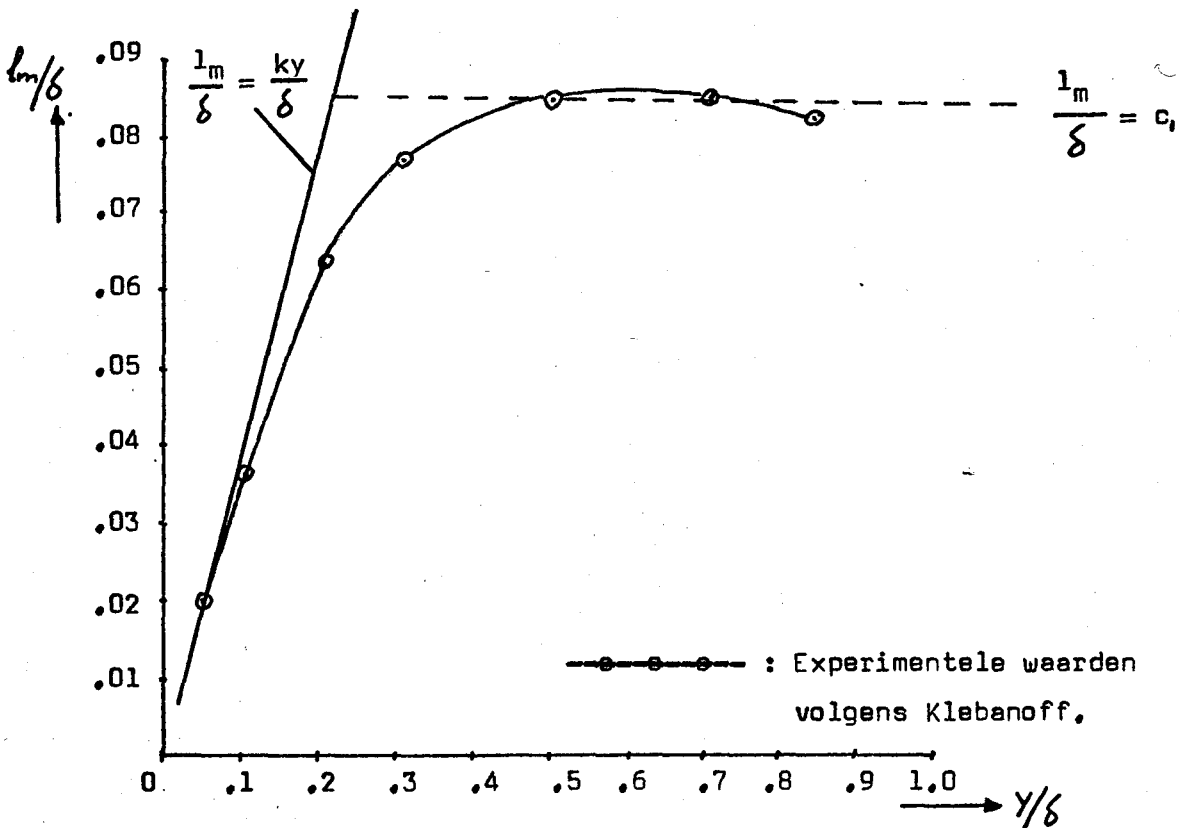


Fig. 2.15: Dimensieloze mengwegverdeling over een turbulente grenslaag bij  $dp/dx = 0$  (lit. (10)).

De grootte van de constante  $c$ , uit 2.66 is niet voor alle problemen bekend. Bovendien hangt deze ook nog af van de manier waarop  $\delta$  is gedefiniëerd en de waarde die voor de constante van Von Kármán is gekozen.

Voor het computerprogramma heb ik de constante  $c$ , zodanig gekozen dat het profiel van het buitengebied in dimensieloze vorm zo goed mogelijk voldoet aan een 1/7-machtprofiel (bij  $dp/dx = 0$ ):

$$U/U_0 = (\gamma/\delta)^{1/7} \quad \dots 2.67$$

Dit is getest m.b.v. een bekend gemeten snelheidsprofiel (lit. (11)) als beginprofiel. Dicht bij de wand zijn bij dit beginprofiel 88 extra roosterpunten gegenereerd welke voldoen aan het Spalding-profiel:

$$\gamma^+ = U^+ + 0,12295 \left[ e^{kU^+} - 1 - kU^+ - \frac{(kU^+)^2}{2!} - \frac{(kU^+)^3}{3!} - \frac{(kU^+)^4}{4!} \right] \quad \dots 2.68$$

Dit is gedaan om het oplossend vermogen van het rooster in het gebied waar grote gradiënten optreden te verhogen. Het resultaat van deze test is de volgende verdeling van de mengweg in het buitengebied

$$\text{voor } \gamma/\delta > 0,3 \quad : \quad l_m = 0,12 \delta \quad \dots 2.69$$

Figuur 2.16 geeft de, in het computerprogramma gebruikte, mengwegverdeling volgens 2.69 weer.

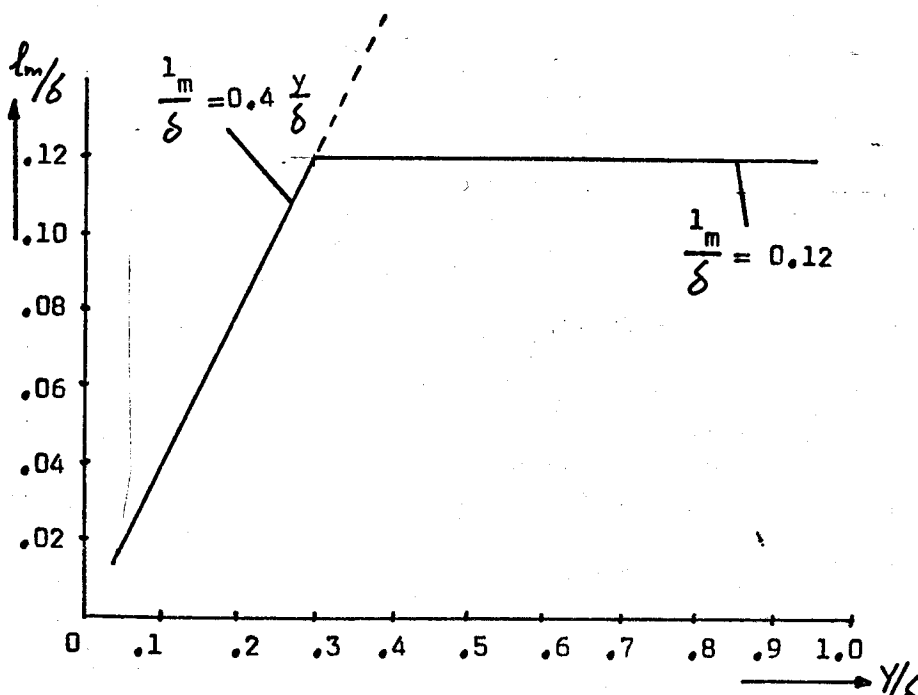


Fig. 2.16: De in het computerprogramma gebruikte mengwegverdeling.

Figuur 2.17 en figuur 2.18 geven de dimensieloze profielen in het buitengebied resp. het binnengebied van de grenslaag op 1m stroomafwaarts van het beginprofiel weer. Deze profielen zijn berekend bij  $dp/dx = 0$  en met de in fig. 2.16 weergegeven mengwegverdeling voor het buitengebied en met de Van Driest-mengwegverdeling voor het binnengebied.

Uitgaande van de Van Driest-formulering van de mengweg (2.63) met  $A = 26$  en  $k = 0,4$  kunnen er voor het binnengebied van de grenslaag twee asymptoten voor het dimensieloze snelheidsprofiel worden berekend :

1.  $U^+ = y^+$  ...2.70

11.  $U^+ = 2,51 \ln y^+ + 5,24$  ...2.71

Figuur 2.18 laat zien dat het berekende snelheidsprofiel inderdaad hieraan voldoet. In fig. 2.17 wordt het berekende profiel in het buitengebied vergeleken met het 1/7-machtsprofiel. De overeenkomst is bevredigend.

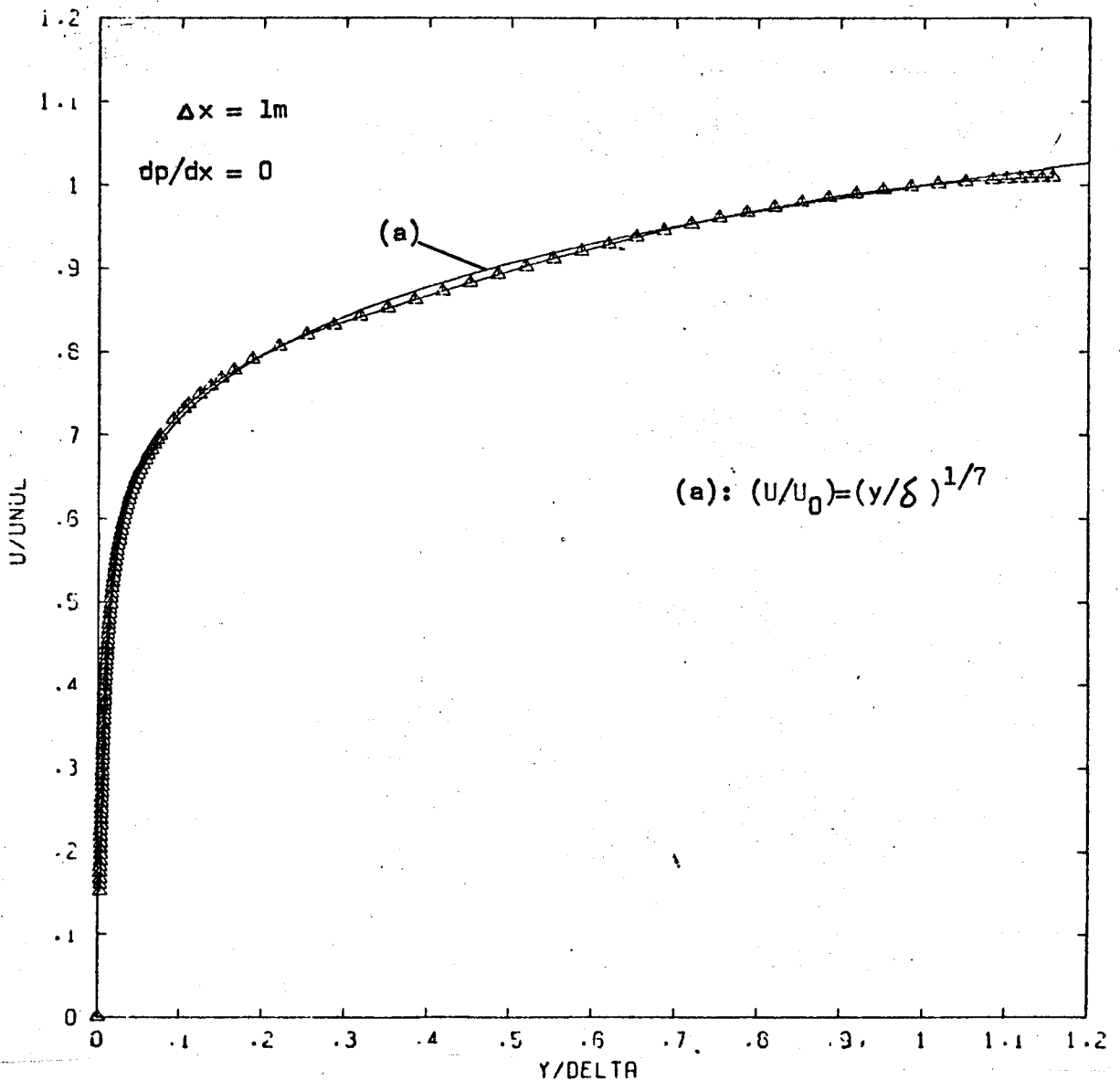


fig. 2.17: Dimensieloos snelheidsprofiel in het buitengebied.

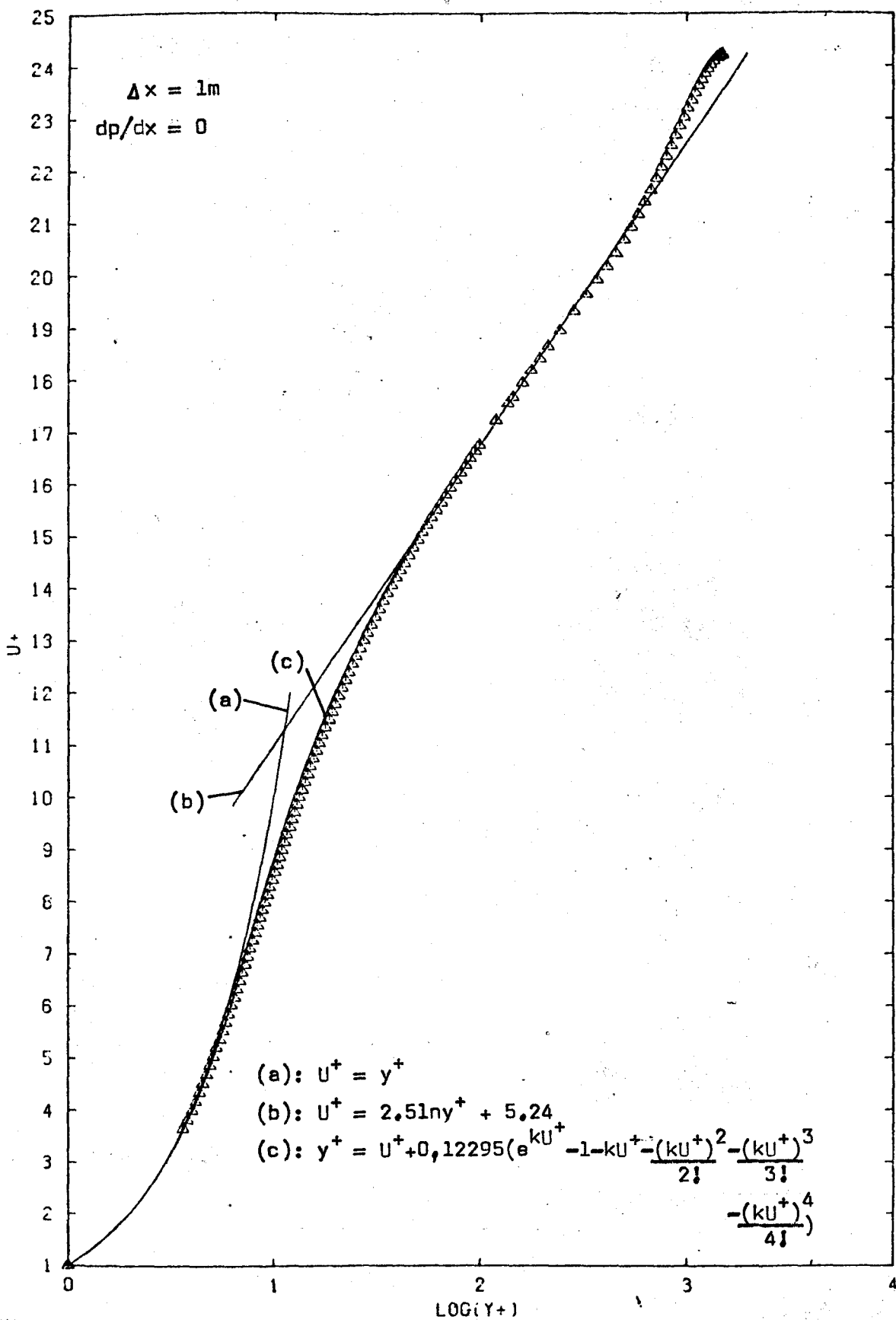


Fig.2.18: Dimensieloos snelheidsprofiel in het binnengebied.

Figuur 2,18 laat zien, dat na de berekeningen het Spalding-profiel (curve c) iets boven het berekende profiel loopt. D.w.z. dat dit Spalding-profiel niet precies in overeenstemming is met de Van Driest-mengwegverdeling.

2.6 "De truc aan de wand".

Zoals reeds is gezegd, zijn voor turbulente grensleggen de vergelijkingen 2.47 en 2.48 voor de berekening van resp.  $y_2$  en  $\tau_w$  alleen bruikbaar, wanneer het tweede roosterpunt binnen de visceuze sublaag ( $y^+ < 7$ ) is gelegen. Daar er echter zo dicht bij de wand grote gradiënten optreden, moeten er ten behoeve van het oplossend vermogen van het rooster zeer veel roosterpunten (ca. 80, zie fig. 2.18) in het wandgebied worden genomen. Dit vergt echter enorm veel rekentijd. Daarom is voor de nu volgende alternatieve oplossing gekozen.

Ook bij deze oplossing wordt er tussen de wand en het tweede roosterpunt een Couette-stroming verondersteld. Het tweede roosterpunt ligt nu niet binnen de visceuze sublaag, maar wordt nu juist in het gebied waar de log-wet 2.71 geldt ( $y^+ \approx 90$ ), geplaatst. Voor deze Couette-stroming geldt nu (zie vgl. 2.42)

$$\tau = \eta_{\text{eff}} \frac{dU}{dy} = \tau_w + \gamma \frac{dP}{dx} \quad \dots 2.72$$

Hieraan is te zien dat de lokale schuifspanning  $\tau$  geen constante grootheid is. Wanneer  $\eta_{\text{eff}}$  m.b.v. de Van Driest-formulering wordt verkregen, dan is vergelijking 2.72 analytisch moeilijk of misschien in het geheel niet oplosbaar. Daarom wordt de door Spalding voorgestelde surrogaat-oplossing gebruikt (lit. (1)). Er wordt n.l. voor het wandgebied een constante gemiddelde schuifspanning  $\bar{\tau}$  ingevoerd volgens:

$$\bar{\tau} = \tau_w + \frac{1}{2} \gamma \frac{dP}{dx} \quad \dots 2.73$$

waarin  $y_2$  de  $y$ -waarde van het tweede roosterpunt voorstelt. Wanneer nu de snelheid  $U$  en de afstand tot de wand  $y$  niet dimensieloos worden gemaakt met de wandschuifspanning (zie vgl. 2.60), maar met de gemiddelde schuifspanning volgens 2.73 zodat

$$\bar{U}^+ = U/\bar{U}_* \quad \text{en} \quad \bar{y}^+ = y\bar{U}_*/\nu \quad \dots 2.74$$

met 
$$\bar{U}_* = (\bar{\tau}/\rho)^{1/2} \quad \dots 2.75$$

volgt uit 2.71:

$$\bar{U}^+ = \frac{U_*}{\bar{U}_*} \left[ 2.5 \ln \bar{y}^+ + 5.24 + 2.5 \ln \frac{\bar{U}_*}{U_*} \right] \quad \dots 2.76$$

Uit 2.61, 2.74 en 2.73 volgt

$$\frac{\bar{U}^*}{U_*} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_2}{\tau_w} \cdot \frac{dP}{dx} + \dots$$

waarbij de tweede term in het rechterlid van de orde 0,005 is, zodat er vanuit mag worden gegaan dat voor de Couette-stroming met  $dp/dx \neq 0$

$$\bar{U}^+ = 2,5 \ln \bar{y}^+ + 5,24 \quad \dots 2.77$$

een goede benadering is van de werkelijkheid.

Uit 2.77 volgt

$$\tau = \rho U^2 / (2,5 \ln \bar{y}^+ + 5,24)^2 \quad \dots 2.78$$

De schuifspanning aan de wand wordt in het programma berekend direct nadat het  $U(\omega)$ -profiel voor het stroomafwaartse station is verkregen. Figuur 2.19 laat zien welke grootheden er op dat moment bekend en welke onbekend zijn.

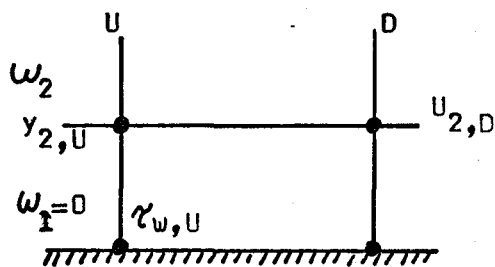


Fig. 2.19 .

Bekend :  $U_{2,U}, y_{2,U}, \omega_2, \bar{\tau}_U$  .  
 Onbekend :  $y_{2,D}, \tau_{w,D}, \bar{\tau}_D$  .

De volgende uitdrukking voor de berekening van  $\bar{\tau}_D$  wordt nu gebruikt:

$$\bar{\tau}_D = \rho U_{2,D}^2 / \left\{ 2,5 \ln \left[ (\bar{\tau}_U / \rho)^{1/2} \cdot y_{2,U} / \nu \right] + 5,24 \right\}^2 \quad \dots 2.79$$

De schuifspanning aan de wand wordt dan verkregen volgens

$$\tau_{w,D} = \bar{\tau}_D - \frac{1}{2} y_{2,U} \cdot \frac{dP}{dx} \quad \dots 2.80$$

Na de berekening van  $\zeta_{w,D}$  moet  $y_{2,D}$  worden berekend.  
Er geldt:

$$\omega_2 = \int_0^{y_2} -\frac{\rho U}{\psi_E} dy \quad \dots 2.81$$

ofwel

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{\rho}{\psi_E} \left\{ U y \Big|_0^{y_2} - \int_0^{U_2} y du \right\} \\ &= -\frac{\rho}{\psi_E} \left\{ U_2 y_2 - \frac{2}{\rho} \int_0^{\bar{U}_2^+} \bar{y}^+ d\bar{U}^+ \right\} \quad \dots 2.82 \end{aligned}$$

Wanneer we tussen het eerste en het tweede roosterpunt het Spalding-profiel 2.68 veronderstellen, vinden we de volgende uitdrukking voor  $y_{2,D}$ :

$$y_{2,D} = (\omega_2 \cdot \psi_E + \rho \cdot S) / \rho U_{2,D} \quad \dots 2.83$$

waarin

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \bar{U}_2^{+2} + \frac{0,12295}{k} \left[ e^{k\bar{U}_2^+} - k\bar{U}_2^+ - \frac{(k\bar{U}_2^+)^2}{2} - \frac{(k\bar{U}_2^+)^3}{6} - \frac{(k\bar{U}_2^+)^4}{24} - \frac{(k\bar{U}_2^+)^5}{120} \right] \right\} \quad \dots 2.84$$

Nu  $\zeta_{w,D}$  en  $y_{2,D}$  bekend zijn, kan de hele berekening vanaf 2.79 herhaald worden, d.w.z.  $\zeta_{w,D}$  en  $y_{2,D}$  worden iteratief opgelost. Het is gebleken dat zes iteraties tot voldoende convergentie leiden. Na deze iteratie worden de  $y_i$  berekend volgens vgl. 2.49.

Tabellen 2.3 en 2.4 laten resultaten zien van de berekening van eenzelfde turbulente grenslaag met  $dp/dx = -5\text{Pa/m}$  met

- a) 129 roosterpunten, waarvan 80 in het wandgebied; totale rekentijd 81 seconden.
- b) 42 roosterpunten; totale rekentijd 45 seconden.

In deze tabellen zijn de volgende resultaten voor elk x-station weergegeven:

- $U_0$  : hoofdstroomsnelheid
- $\delta$  : grenslaagdikte
- $d_1$  : verplaatsingsdikte
- $d_2$  : impulsverliesdikte
- H :  $d_1/d_2$ , shape factor



-  $\zeta_w$ , L&T :  $\zeta_w$  volgens de empirische relatie van Ludwig en Tillmann:

$$\zeta_w = \rho U_0^2 \cdot 0,123 \cdot 10^{-0,678 H} \cdot \left( \frac{U_0 \cdot d_2}{\nu} \right)^{-0,260} \quad \dots 2.85$$

-  $\zeta_w$ , Rotta:  $\zeta_w$  volgens de empirische relatie van Rotta:

$$\zeta_w = \rho U_0^2 / \left\{ 5,75 \log(U_0 \cdot d_1 / \nu) + 3,7 \right\}^2 \quad \dots 2.86$$

TABEL 2.3:

Het beginprofiel van deze berekening is gekozen op  $x=1m$ ,  
129 roosterpunten;  $dp/dx = -5 \text{ Pa/m}$

x (m)	$\zeta_w$ , num. (Pa)	$\zeta_w$ , L&T (Pa)	$\zeta_w$ , Rotta (Pa)	$d_1$ (mm)	$d_2$ (mm)	H	$\delta$ (mm)	$U_0$ (m/s)
1,5	0,258	0,264	0,243	4,91	3,71	1,326	35	10,793
2.	0,258	0,266	0,243	5,77	4,40	1,311	42	10,982
2,5	0,261	0,270	0,244	6,50	5,00	1,299	49	11,168
3.	0,263	0,273	0,246	7,23	5,60	1,291	55	11,352
3,5	0,266	0,277	0,249	7,83	6,10	1,283	62	11,532
4	0,270	0,281	0,255	8,42	6,59	1,277	68	11,709

TABEL 2.4:

42 roosterpunten;  $dp/dx = -5 \text{ Pa/m}$

x (m)	$\zeta_w$ , num. (Pa)	$\zeta_w$ , L&T (Pa)	$\zeta_w$ , Rotta (Pa)	$d_1$ (mm)	$d_2$ (mm)	H	$\delta$ (mm)	$U_0$ (m/s)
1,5	0,261	0,225	0,243	4,87	3,37	1,445	35	10,793
2.	0,261	0,223	0,243	5,77	4,00	1,441	42	10,982
2,5	0,265	0,223	0,244	6,51	4,52	1,438	49	11,168
3.	0,269	0,227	0,246	7,19	5,04	1,426	55	11,352
3,5	0,273	0,231	0,249	7,85	5,54	1,417	62	11,532
4	0,277	0,235	0,252	8,51	6,04	1,409	66	11,709

De verschillen tussen de beide tabellen worden voornamelijk veroorzaakt door het feit dat in het programma waar de "wandtruc" wordt gebruikt, bij de berekening van  $d_1$  en  $d_2$  tussen het eerste en het tweede roosterpunt het Spalding-profiel 2.68 wordt verondersteld. Het niet helemaal overeenstemmen hiervan met de Van Driest-mengwegverdeling (zie fig. 2.18), leidt tot de verschillen bij de berekening van  $d_1$  en  $d_2$ . Dit werkt weer door in H en  $\gamma_{L&T}$ . De verschillen tussen beide tabellen zijn echter zodanig dat zij, gezien de experimentele nauwkeurigheid welke in het laboratorium haalbaar is, acceptabel zijn. De wandtruc is daarom in het programma opgenomen.

### 2.7 De drukgradiënt in het kanaal.

A Het programma "Meetsectie/Windtunnel" berekent een turbulente grenslaag langs een vlakke plaat met een drukgradiënt welke overeenkomt met de drukgradiënt die in het kanaal heerst. De drukgradiënt in het kanaal is echter niet van tevoren bekend, zodat er, bij de berekening van een snelheidsprofiel uit een volledig bekend voorgaand profiel (marching procedure), gebruik moet worden gemaakt van een schatting van de drukgradiënt  $(dp/dx)^*$ . Nadat het nieuwe profiel is berekend moet er wel worden gecontroleerd of de schatting van  $dp/dx$  juist is geweest en zo niet dan moet er worden gecorrigeerd. Volgens de wet van behoud van massa moet de massastroom door de doorsnede van het kanaal voor elke x-waarde dezelfde zijn. Dit is nu het middel met behulp waarvan de drukgradiëntcorrectie kan worden uitgevoerd. De massastroom door een doorsnede wordt gegeven door

$$M_0 = \rho A_{eff} U_0 \quad \dots 2.87$$

en de effectieve doorsnede van het kanaal wordt gegeven door

$$A_{eff} = (h_0 - 2d_1)(b_0 - 2d_1) \quad \dots 2.88$$

waarin  $h_0$  en  $b_0$  respectievelijk de hoogte en de breedte van het kanaal voorstellen (zie fig. i.3.c).

Wanneer met behulp van  $(dp/dx)^*$  het volgende, geschatte profiel  $U(y)^*$  is berekend, dan kan de schatting van de hoofdstroomsnelheid worden gecorrigeerd volgens

$$\rho A_{eff}^* (U_{0,D}^* + \Delta U_{0,D}) = M_0 \quad \dots 2.89$$

waarin  $M_0$  de massastroom door het kanaal is, berekend met het beginprofiel, en  $\Delta U_{0,D}$  de correctie op de hoofdstroomsnelheid. Bij 2.89 is verondersteld dat bij een eventuele correctie  $d_1^*$  c.q.  $A_{eff}^*$  niet of nauwelijks zal veranderen. Uit 2.89 volgt voor de gecorrigeerde hoofdstroomsnelheid  $U_{0,D}$  :

$$U_{0,D} = U_{0,D}^* + \Delta U_{0,D} = M_0 / \rho A_{eff}^* \quad \dots 2.90$$

en met behulp van de wet van Bernoulli vinden we voor de gecorrigeerde drukgradiënt:

$$dp/dx = -\rho(U_{0,D}^2 - U_{0,U}^2) / 2 \cdot \Delta x \quad \dots 2.91$$

opm.: Daar de soortelijke massa constant wordt verondersteld, is in het computerprogramma niet gerekend met de massastroom  $M_0$ , maar met de volumestroom  $C_0$ . Dan geldt  $U_{0,D} = C_0 / A_{eff}^*$ .

Nu de gecorrigeerde drukgradiënt is berekend, kan de berekening van de grenslaag op twee manieren worden voortgezet:

- a) De gecorrigeerde  $dp/dx$  wordt gebruikt als schatting van  $dp/dx$  voor de berekening van het volgende profiel. Dit betekent in feite dat bij elke stap voorwaarts de drukgradiënt corrigerend optreedt om te voldoen aan de wet van behoud van massa. Dit heeft tot gevolg dat  $dp/dx$  in de lengterichting een sterk slingerend gedrag vertoont.
- b) De gecorrigeerde  $dp/dx$  wordt gebruikt om een herberekening van het geschatte profiel  $U(y)^*$  te maken. Daarna kunnen eventueel nog enkele van zulke iteraties worden uitgevoerd om dan daarna pas een nieuwe stap voorwaarts te doen, waarbij de laatst berekende  $dp/dx$  als schatting voor het volgende profiel wordt gebruikt. Bij deze methode zal  $dp/dx$  niet slingeren.

Het is gebleken dat de snelheidsprofielen, berekend volgens beide methoden geen verschillen vertonen en dat alleen het gedrag van de drukgradiënt anders is.

B In het voorgaande is beschreven hoe bij constante afmetingen van het kanaal de drukgradiënt binnen het kanaal kan worden berekend. Het is echter ook mogelijk om te berekenen hoe de afmetingen moeten veranderen om binnen het kanaal een bepaalde constante drukgradiënt te verkrijgen. Daartoe wordt de

breedte van het kanaal variabel gemaakt,

De grenslaag wordt nu m.b.v. de gewenste drukgradiënt berekend, waarbij bij elke stap voorwaarts de effectieve doorsnede wordt berekend volgens

$$A_{\text{eff}} = M_0 / \rho U_0 \quad \dots 2.92$$

De bij deze effectieve doorsnede behorende breedte wordt m.b.v. 2.88 berekend:

$$b_0(x) = 2d_1 + A_{\text{eff}}(x) / (h_0 - 2d_1) \quad \dots 2.93$$

De op deze manier berekende breedte correspondeert met de gewenste drukgradiënt, d.w.z. wanneer het kanaal deze breedte heeft, zal precies de gewenste drukgradiënt hierin ontstaan.

### Hoofdstuk 3 METINGEN AAN EEN RECHTHOEKIG KANAAL.

#### 3.1 Algemeen.

Om te kunnen testen of de numerieke kanaalberekeningen overeenkomen met de werkelijke kanaalstroming én voor gebruik bij onderzoek binnen de werkgroep "Turbulentie" is er tijdens dit afstuderen een meetsectie met bijbehorend verplaatsingsmechanisme voor de hittedraad ontworpen.

In dit kanaal is het gemiddelde snelheidsprofiel van de grenslaag op de bodem gemeten op  $x = 0,84\text{m}$  en gebruikt als beginprofiel voor de berekeningen met het computerprogramma. Bovendien is het gemiddelde snelheidsprofiel op  $x = 4,84\text{m}$  gemeten en zijn er hoofdstroomsnelheidsmetingen gedaan voor diverse  $x$ -waarden. Alle metingen zijn verricht bij  $U_0(x=0,84) = 10,52\text{ m/s}$ .

Naast het snelheidsprofiel is bij  $x = 0,84\text{m}$  en  $x = 4,84\text{m}$  de schuifspanning aan de wand gemeten m.b.v. een "Preston-buis".

De meetmethoden en de meetsituatie worden beschreven in de paragrafen 3.2 en 3.3. In paragraaf 3.4 worden de meetresultaten vergeleken met de numerieke berekeningen.

#### 3.2 C.T.A.-methode en Preston-buis.

Bij het bepalen van de snelheidsprofielen is er gebruik gemaakt van de welbekende hete draad-anemometrie. Hierbij wordt een dunne metaaldraad (diameter ca.  $5\mu\text{m}$ ) elektrisch verwarmd (100 tot 200K boven omgevingstemperatuur) en loodrecht op de luchtstroming geplaatst. Deze luchtstroom koelt de draad af. In het door ons gebruikte type anemometer, de z.g. constante-temperatuur anemometer, wordt de aan de draad toegevoerde elektrische energie zodanig gestuurd dat de elektrische weerstand van de draad, en dus de temperatuur, constant wordt gehouden. De elektrische spanning  $E$  over de draad is dan een maat voor de afkoeling en dus voor de luchtsnelheid  $U$ .

Het verband tussen deze anemometerspanning en de afkoelende windsnelheid moet door ijking worden bepaald. Er wordt verondersteld dat de relatie tussen  $E$  en  $U$  kan worden weergegeven door

$$\frac{E^2}{R_w(R_w - R_g)} = A_{ij} + B_{ij}U^\delta \quad \dots 3.1$$

waarin  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $\delta$  : experimenteel te bepalen, zwak-temperatuurafhankelijke coëfficiënten zijn.

$R_w$  : draadweerstand bij draadtemperatuur.

$R_g$  : draadweerstand bij gastemperatuur.

De oververhitting van de draad wordt bepaald door de verhouding  $R_w/R_g$ . Hoe groter de oververhitting, des te groter worden de spanningsfluctuaties die de snelheidsfluctuaties weergeven. Tijdens de metingen is steeds  $R_w/R_g = 1,6$  genomen.

De gebruikte methode om de gemiddelde snelheid te bepalen is de volgende:

Een turbulente stroming leidt tot een fluctuerende snelheid  $U = \bar{U} + u'$  en een corresponderend fluctuerend spanningssignaal  $E = \bar{E} + e$ , waarin  $u'$  en  $e$  de fluctuaties op de gemiddelde waarden  $\bar{U}$  en  $\bar{E}$  voorstellen. De relatie tussen  $U$  en  $E$

$$U = \left[ \frac{E'^2 - A_{ij}}{B_{ij}} \right]^{1/\gamma} = g(E') \quad \dots 3.2$$

met  $E'^2 = E^2/R_w(R_w - R_g)$  ...3.3

wordt ontwikkeld in een Taylorreeks rond de gemiddelde waarde van  $E$ :

$$\bar{U} + u' = g(\bar{E}) + \left[ \frac{dg(\bar{E})}{dE} \right]_{\bar{E}} \cdot e + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2g(\bar{E})}{dE^2} \right]_{\bar{E}} \cdot e^2 + \dots \quad \dots 3.4$$

waarin  $g(\bar{E}) = \left[ \frac{\bar{E}'^2 - A_{ij}}{B_{ij}} \right]^{1/\gamma}$  ...3.5

De tweede en hogere orde termen in 3.4 worden verwaarloosd, zodat na middelen volgt:

$$\bar{U} = g(\bar{E}') \quad \dots 3.6$$

Er is een nauwkeuriger methode bekend voor het bepalen van de gemiddelde snelheid (lit. (11)), maar gezien het gestelde doel n.l. het verkrijgen van een indicatie of het computerprogramma juist is, wordt met bovenstaande eenvoudige methode volstaan.

De snelheid is gemeten met een, aan de uiteinden verkoperde, wolfram draad met een dikte van  $2,5 \cdot 10^{-6}$  m (zie fig. 3.1a). De draad is op de punten van de naalden van een, door de precisie-instrumentmakerij van de T.H. vervaardigde, houder gesoldeerd. Deze houder heeft een zodanige vorm dat de stroming

zo weinig mogelijk wordt beïnvloed (zie fig. 3.1b).

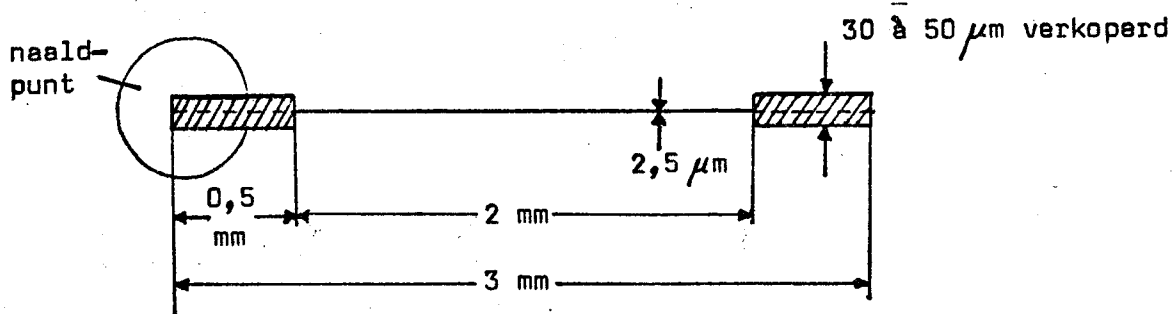
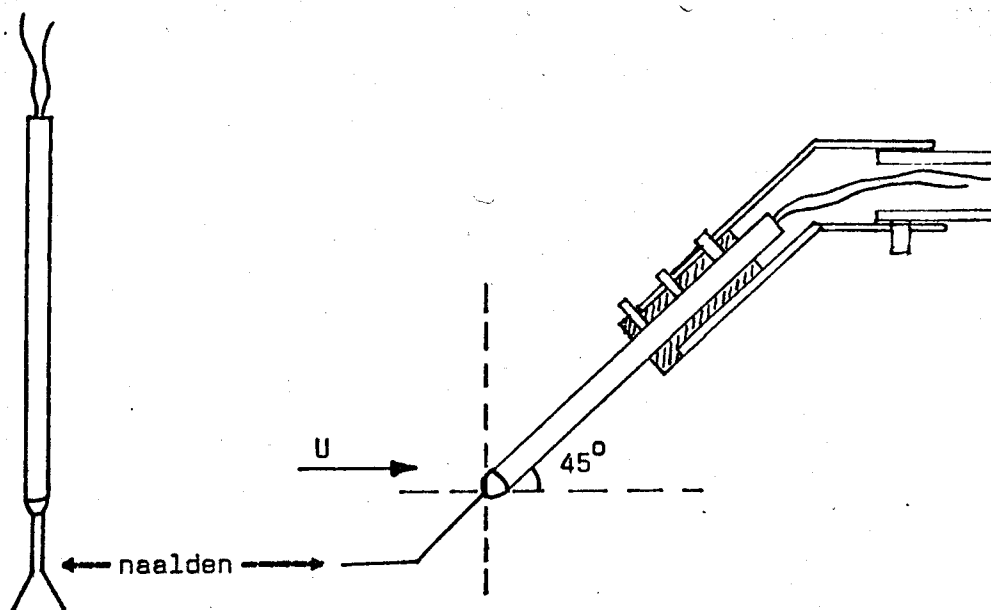


fig. 3.1a : De hittedraad.



Ffig. 3.1b : De houder voor de hittedraad.

Een eenvoudige methode om de schuifspanning aan de wand te bepalen wordt gegeven door Preston (lit. (12)). Hierbij wordt gebruik gemaakt van een dun Pitot-buisje dat op het oppervlak van de wand wordt geplaatst (fig. 3.2). Deze methode is gebaseerd op de aanname dat er een universele wet van de wand geldt voor de snelheidsverdeling in de turbulente grensleggen. Er bestaat dan een dimensieloze relatie tussen  $\tau_w$  en het verschil tussen de totale

druk en de statische druk bij de wand,  $\Delta p$  :

$$\frac{\zeta_w d^2}{4\rho v^2} = F\left(\frac{\Delta p d^2}{4\rho v^2}\right) \quad \dots 3.7$$

waarin  $d$  de buitendiameter van de buis is.

Er is gebruik gemaakt van de empirische relatie tussen de dimensieloze grootheden in 3.7 (lit. (13)):

$$P = 0,8287 - 0,1381R + 0,1437R^2 - 0,0060R^3 \quad \dots 3.8$$

waarin

$$P = {}^{10}\log\left(\frac{\zeta_w d^2}{4\rho v^2}\right) \quad , \quad R = {}^{10}\log\left(\frac{\Delta p d^2}{4\rho v^2}\right)$$

De bij dit onderzoek gebruikte Preston-buis heeft een buitendiameter van 1,01mm. Het drukverschil is gemeten met een gevoelige capacitieve drukmeter (Barocel).

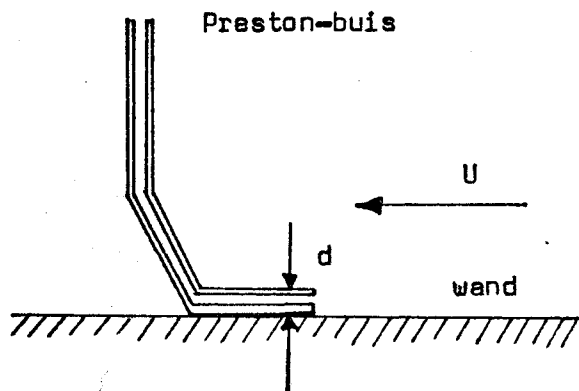


fig. 3.2 : Meting van  $\zeta_w$  m.b.v. Preston buis.

### 3.3 Het kanaal en het verplaatsingsmechanisme.

Het ontworpen kanaal bestaat uit houten segmenten van verschillende lengte (1m en 2m) welke uitwisselbaar zijn (fig. 3.3). Een van de segmenten, met een lengte van 1m, is uitgevoerd met uitneembare, perspex zijwanden. Bij de constructie van de segmenten is er voor gezorgd dat de overgangen tussen de segmenten aan de binnenkant zo glad mogelijk verlopen. Dit is ge-



daan om te voorkomen dat drempels in de dwarsrichting ontstaan, die de gladheid van het kanaal verstoren en extra turbulente grenslagen induceren.

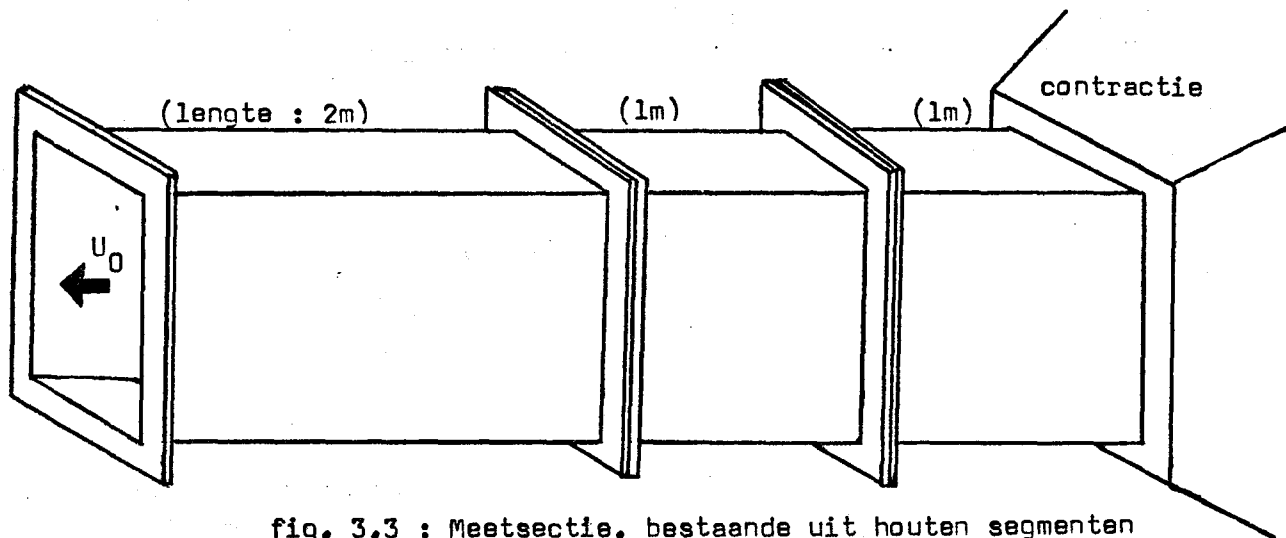


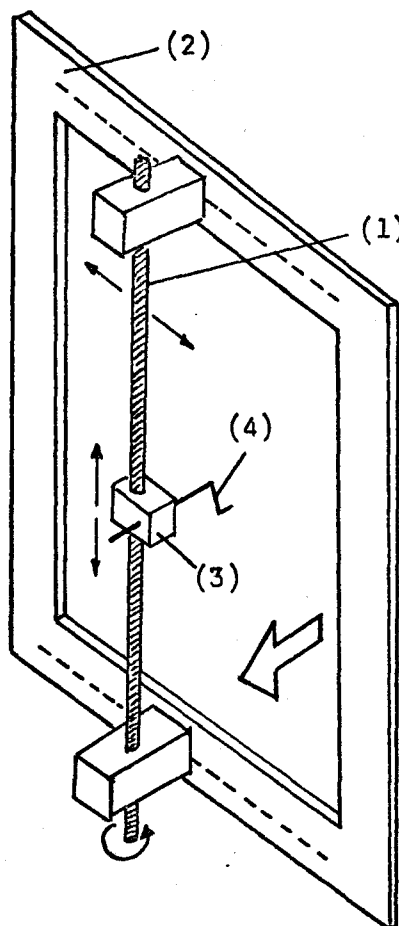
fig. 3.3 : Meetsectie, bestaande uit houten segmenten van verschillende lengte. De totale lengte van deze meetsectie is 4m.

Het voor deze metingen ontworpen verplaatsingsmechanisme bestaat uit een 120cm lange as met schroefdraad welke verticaal voor het uiteinde van een segment wordt geplaatst. Deze as is horizontaal verplaatsbaar gemonteerd in een aluminium reamwerk, dat kan worden bevestigd aan de flens van het segment (fig. 3.4). De as wordt aangedreven door een servo-motor waarvan het toerental continu regelbaar is. Op deze as is een moer zodanig gemonteerd, dat een rotatie van de as wordt omgezet in een verticale verplaatsing van de moer. De houder van de hittedraad is aan deze moer bevestigd. De plaatsbepaling van de hittedraad boven de benedenwand wordt uitgevoerd m.b.v. een potentiometer, welke aan de as is bevestigd. De lineaire relatie tussen de potentiometerspanning en de afstand van de hittedraad tot de plaat wordt door ijking verkregen. Met dit verplaatsingsmechanisme kan de afstand tot de wand worden bepaald met een onnauwkeurigheid van 0,05mm.

De metingen zijn verricht aan het open uiteinde van het kanaal, d.w.z. dat het profiel op  $x = 4,84m$  is gemeten aan een kanaal met een lengte van 5m, waarbij de hittedraad 16cm in het kanaal is geschoven.

fig. 3.4 : Schematische weergave van het verplaatsingsmechanisme.

- (1) : As met schroefdraad
- (2) : Aluminium raamwerk
- (3) : Moer
- (4) : Houder voor hittedraad



### 3.4 Resultaten en numerieke berekeningen.

Met behulp van het beginprofiel dat gemeten is op  $x = 0,84\text{m}$  (zie appendix B), heeft het programma "Meetsectie/Windtunnel" de kanaalstroming met deze beginvoorwaarde berekend.\*) Tabel 3.1 laat de berekende en gemeten hoofdstroomsnelheden voor verschillende x-waarden zien.

TABEL 3.1:

$x$ (m)	$U_{0,num.}$ (m/s)	$U_{0,exp.}$ (m/s)
0,84	-	10,52
1,84	10,63	10,63
3,84	10,82	10,79
5,84	10,99	11,00

De goede overeenkomst in hoofdstroomsnelheden die tabel 3.1 laat zien, betekent tevens dat de drukgradiënt in de lengterichting van het kanaal (fig. 3.5) goed is berekend.

\*) voor de numerieke resultaten zie ook de bijlage Handleiding, par. 6

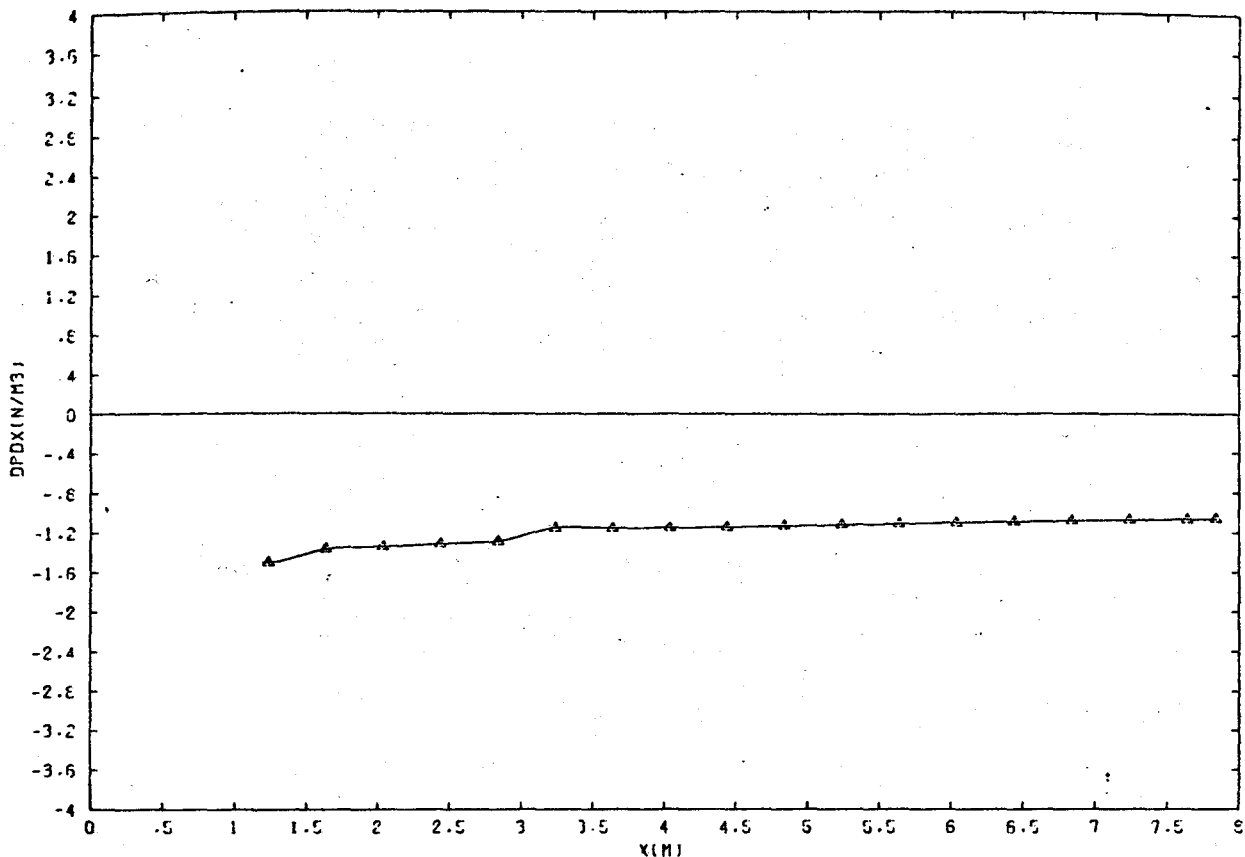


fig. 3.5 : De drukgradiënt in de lengterichting van het kanaal bij  $U_0(x=0,84) = 10,52$  m/s.

Tabel 3.2 laat voor  $x = 4,84$ m de gemeten en de berekende schuifspanning aan de wand zien.

Tabel 3.3 laat de schuifspanning aan de wand zien volgens vgl. 2.85 (Ludwig en Tillmann) en vgl. 2.86 (Rotta), welke zijn bepaald m.b.v. de numeriek berekende profielen.

TABEL 3.2:

x (m)	$\tau_{w,exp.}$ (Pa)	$\tau_{w,num.}$ (Pa)
0,84	0,273	-
4,84	0,239	0,221

TABEL 3,3:

x (m)	$\zeta_{w,num.}$ (Pa)	$\zeta_{w,L\&T}$ (Pa) vgl. 2.85	$\zeta_{w,Rotta}$ (Pa) vgl. 2.86
1,84	0,235	0,200	0,226
2,84	0,226	0,194	0,217
3,84	0,223	0,191	0,213
4,84	0,221	0,188	0,209
5,84	0,219	0,186	0,207
6,84	0,218	0,184	0,206
7,84	0,218	0,182	0,205

Net zoals in tabel 2,4 is ook hier  $\zeta_w$  volgens vgl. 2.85 (Ludwieg en Tillmann) steeds te laag. Dit komt doordat de wandtruc bij deze berekening is toegepast.

Figuur 3,6 laat voor  $x = 4,84m$  het berekende en het gemeten snelheidsprofiel zien. Het grootste verschil tussen de numerieke waarde van de snelheid en de experimentele waarde bedraagt ca. 3 % van de numerieke waarde. Dit is, gezien de onnauwkeurigheid in de metingen (ca. 2 %), een redelijk goed resultaat.

Figuur 3,7 laat de numeriek berekende grenslaagdikte en verplaatsingsdikte als functie van  $x$  zien. Daar m.b.v. de verplaatsingsdikte de drukgradiënt in het kanaal wordt berekend, mag worden aangenomen dat ook de berekende verplaatsingsdikte goed overeenkomt met de werkelijke.

De grenslaagdikte vertoont in de eerste twee meters een ietwat onregelmatige groei, hetgeen correspondeert met de lichte slingeringen in de drukgradiënt (fig. 3,5). Hier zal in het volgende hoofdstuk nader op in worden gegaan.

Figuren 3,8a en 3,8b laten voor  $x = 4,84m$  de numeriek berekende dimensieloze snelheidsprofielen in het buitengebied resp. het binnengebied zien. De overeenkomst met de theoretische profielen is goed.

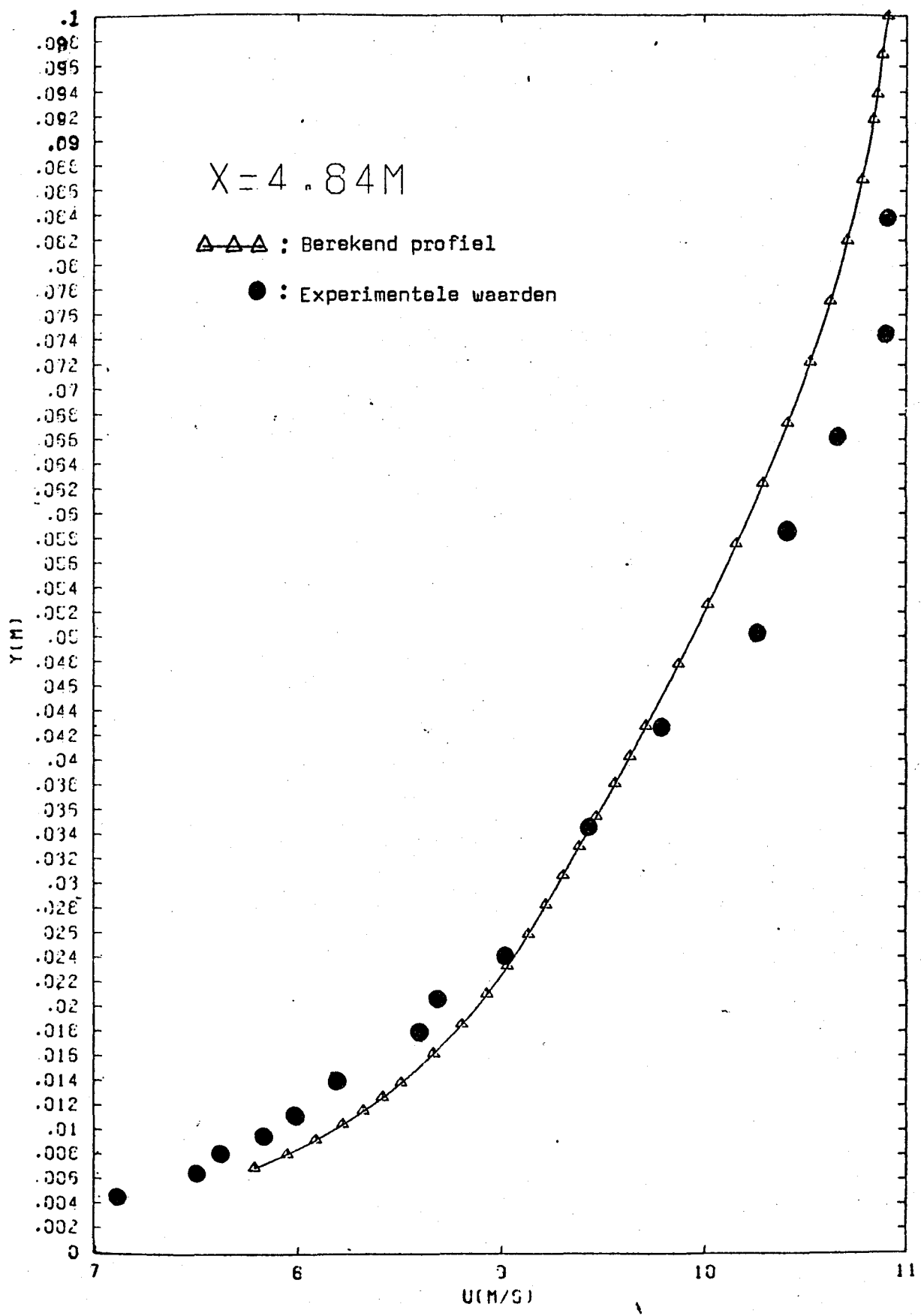


fig. 3.6 : Berekend en gemeten snelheidsprofiel op x = 4,84m.

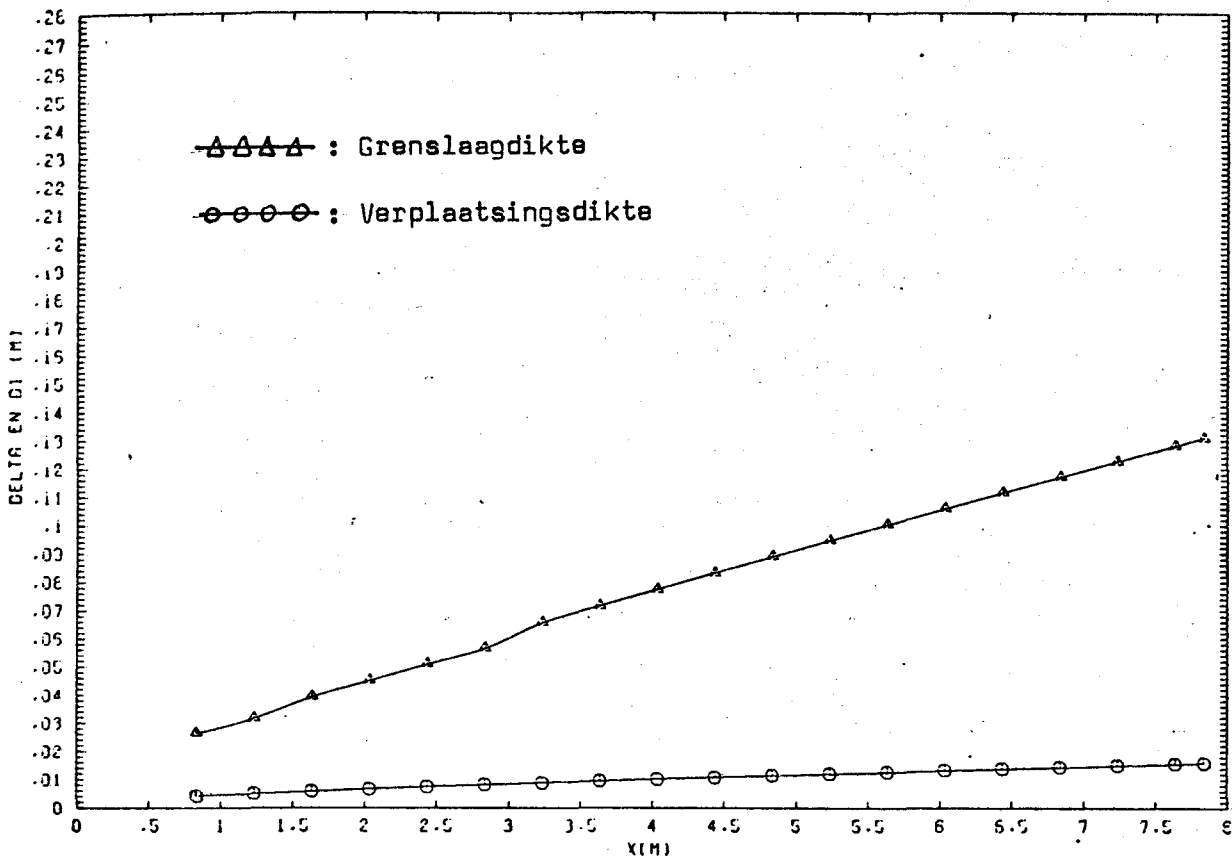
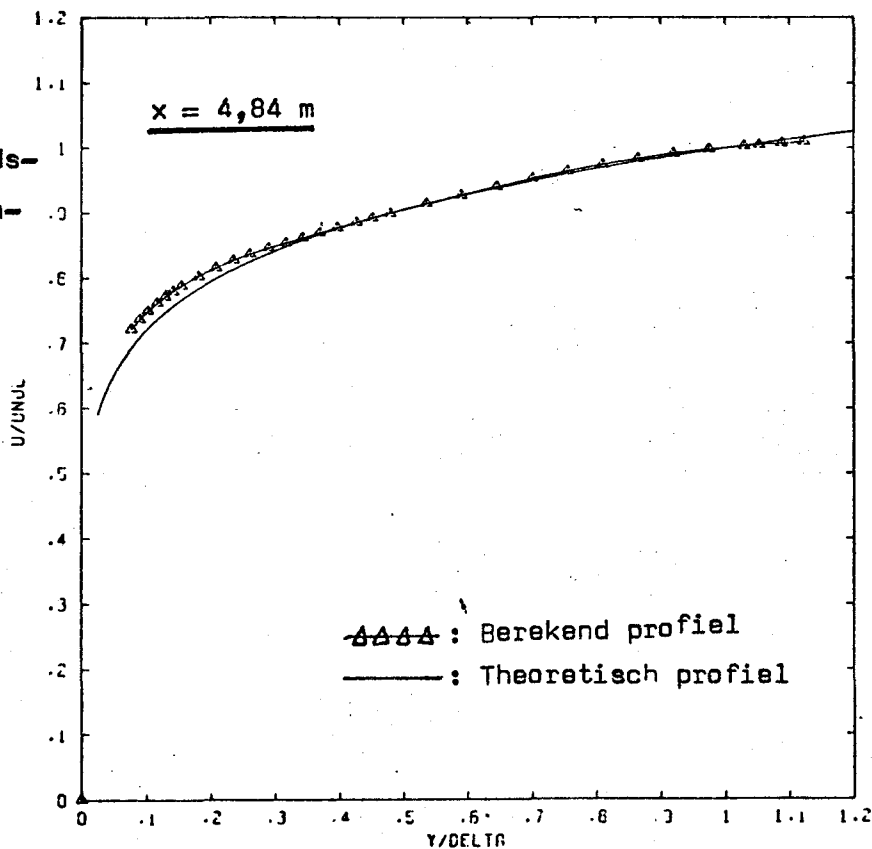


fig. 3.7 : De grenslaagdikte en de verplaatsingsdikte in de lengterichting van het kanaal bij  $U_0(x=0,84) = 10,52$  m/s.

fig. 3.8a :  
Dimensieloos snelheidsprofiel in het buitengebied.



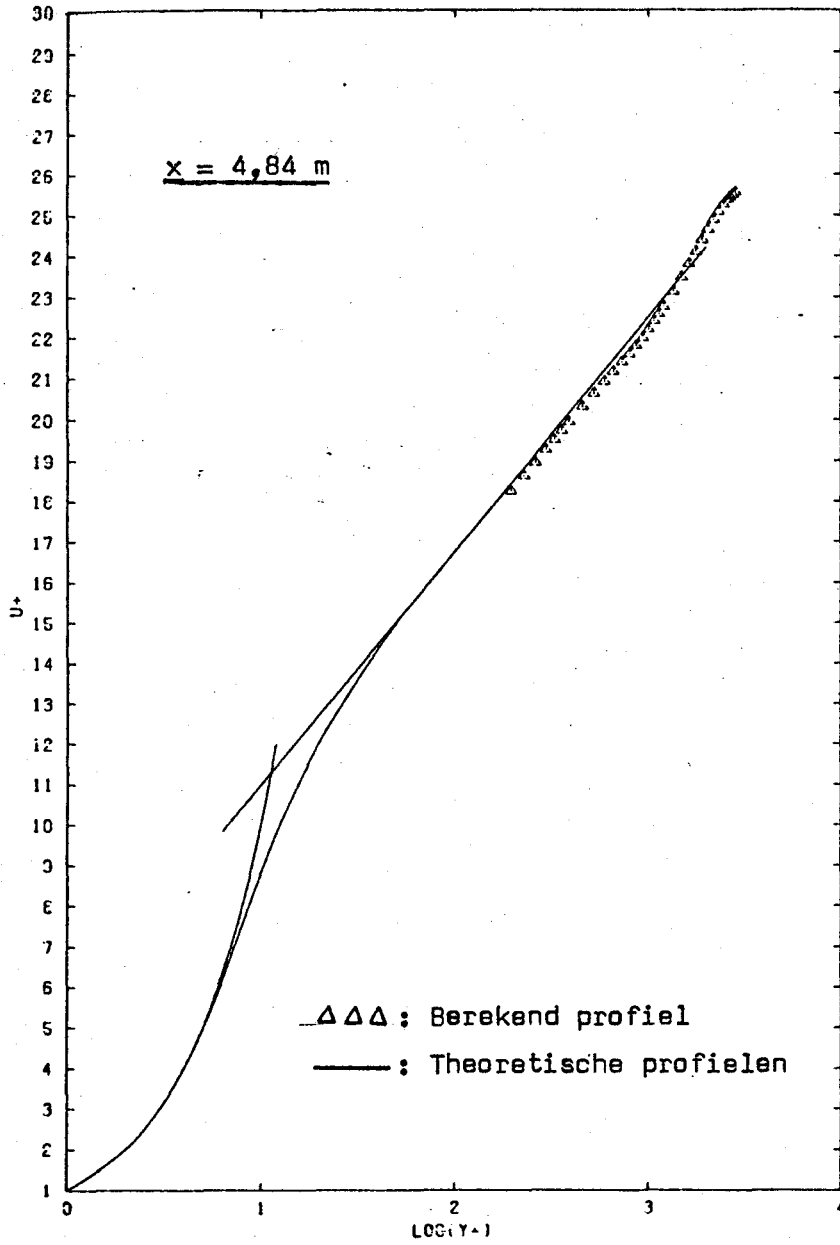


fig. 3.8b : Dimensieloos snelheidsprofiel in het binnengebied.

## Hoofdstuk 4 VOORSPELLINGEN.

### 4.1 Voorspellingen.

Naast de gewone kanaalberekeningen, zoals die in de voorgaande hoofdstukken besproken zijn, zijn er met het programma twee soorten berekeningen met een voorspellend karakter uitgevoerd. Enerzijds is de drukgradiënt in de lengterichting van het kanaal berekend, wanneer beide verticale zijwanden vanaf  $x = 0,84\text{m}$  ieder met een hoek  $\alpha$  divergeren. Anderzijds is de breedte als functie van  $x$  berekend, die het kanaal vanaf  $x = 0,84\text{m}$  moet hebben, om een bepaalde, gewenste, constante waarde van  $dp/dx$  te verkrijgen.

Met behulp van de numerieke resultaten uit het vorige hoofdstuk is een schatting gemaakt van de divergentiehoek die beide zijwanden moeten hebben om  $dp/dx = 0$  op te leveren. Bij deze divergentiehoek ( $\alpha = 0,195^\circ = 0,0034 \text{ rad.}$ ) is de drukgradiënt van het kanaal berekend (fig. 4.1).

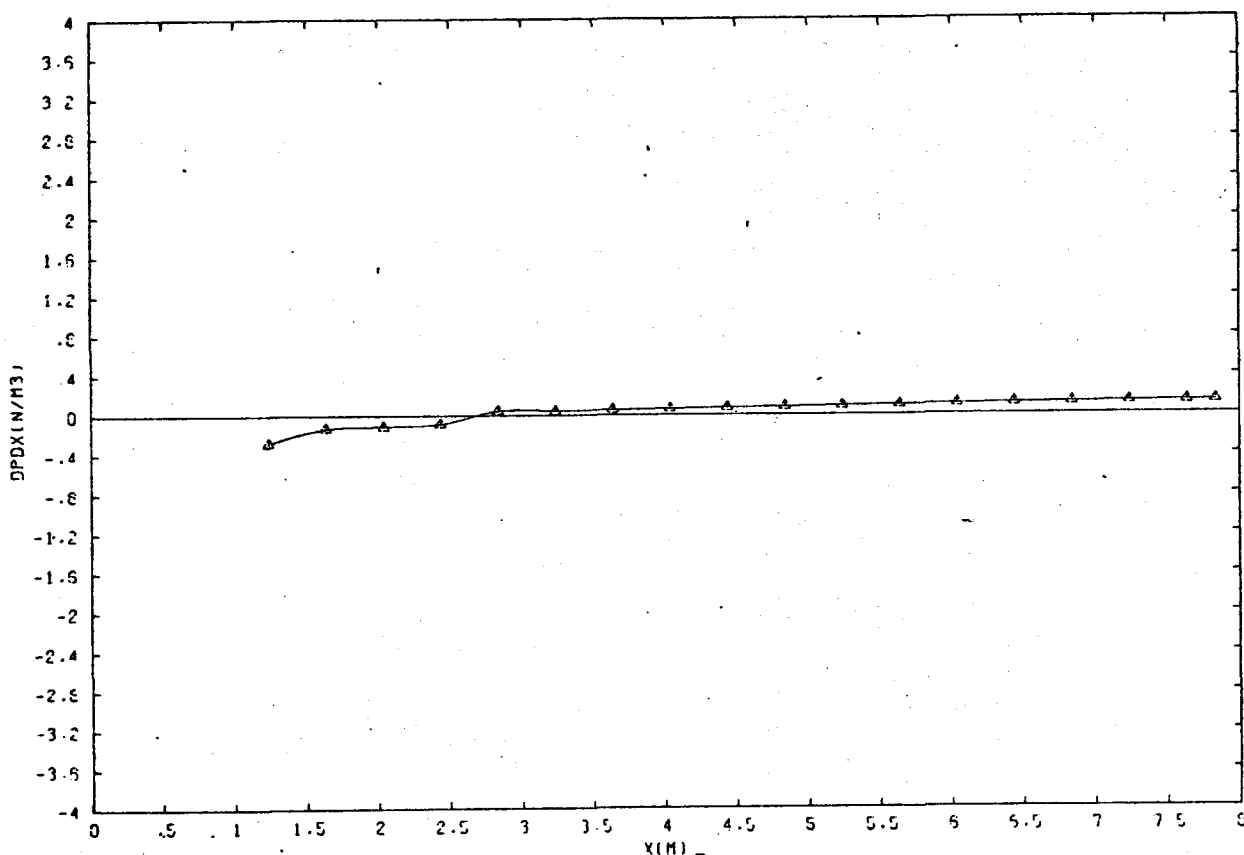


fig. 4.1: Drukgradiënt bij  $\alpha = 0,195^\circ$ .



Deze berekeningen worden op dezelfde manier uitgevoerd als de gewone kanaalberekeningen, d.w.z. met iteraties voor de drukcorrectie en m.b.v. het gemeten beginprofiel op  $x = 0,84\text{m}$ . Bij deze divergentiehoek wordt de drukgradiënt positief, maar blijft zeer klein.

Wanneer het kanaal zo sterk divergeert dat er loslating optreedt, zal het programma de berekeningen staken. In dat geval wordt  $\bar{z}$  negatief, waardoor het argument van de wortelvorm in vgl. 2.75 ( $\bar{U}_* = (\bar{z}/\rho)^{\frac{1}{2}}$ ) negatief wordt. Door het kanaal te laten convergeren ( $\alpha < 0$ ) kan een grotere negatieve drukgradiënt worden verkregen.

Figuur 4.2 laat de berekening van de breedte van het kanaal zien (vanaf  $x = 0,84\text{m}$ ) voor drie verschillende gewenste drukgradiënten. Bij deze berekeningen hoeven er geen iteraties voor de drukgradiëntcorrectie te worden uitgevoerd, omdat de drukgradiënt wordt opgelegd.

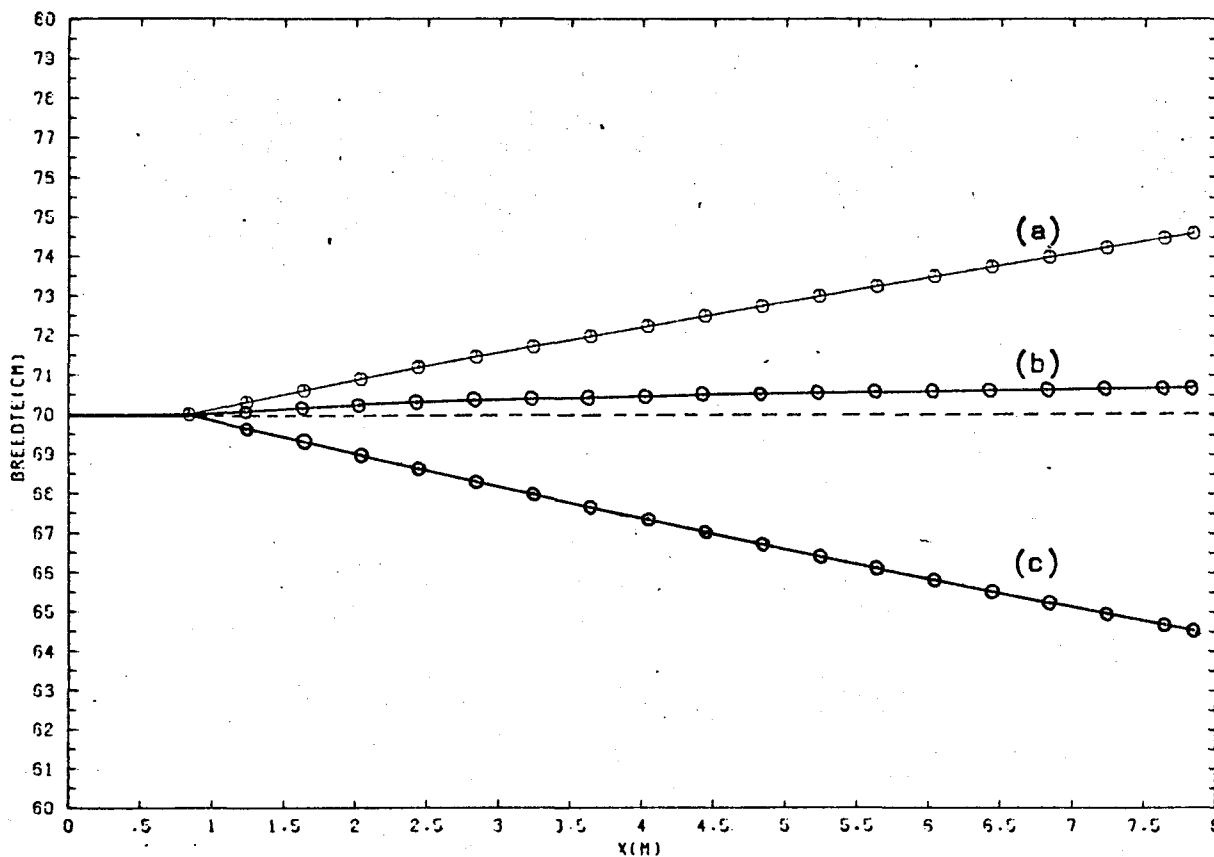


fig. 4.2: Breedte van het kanaal voor  $dp/dx = 0$  (a)

$dp/dx = -1$  Pa/m (b)

$dp/dx = -3$  Pa/m (c)

## 4.2 Discussie.

Het programma "Meetsectie/Windtunnel" berekent een luchtstroming door een kanaal met niet doorlaatbare wanden, waarbij de stofparameters van de lucht constant worden verondersteld. De laatstgenoemde eigenschappen zijn geen beperking van de theorie zoals die in hoofdstuk 2 wordt gegeven. Met behulp van deze theorie kunnen ook stromingen met temperatuurafhankelijke stofparameters langs doorlaatbare wanden worden berekend, mits deze problemen tweedimensionaal en parabolisch zijn. Bij deze problemen moeten dan ook, naast de impulsvergelijking, de energievergelijking en thermodynamische vergelijkingen worden opgelost (lit. (1)).

De oplossing die het programma geeft, wordt voornamelijk bepaald door het beginprofiel. De beginwaarde van  $\chi_w$  en  $dp/dx$  blijken geen grote invloed te hebben op het stroomafwaartse stromingsbeeld. Deze twee grootheden worden gebruikt bij de berekening van het volumedebiet door het kanaal m.b.v. het beginprofiel. Hierbij wordt weer een Spalding-profiel tussen het eerste en het tweede roosterpunt verondersteld. Via dit volumedebiet, dat wordt gebruikt bij de drukgradiëntcorrectie, hebben de beginwaarde van  $\chi_w$  en  $dp/dx$  invloed op de oplossing. Een verandering van ca. 20 % in deze beginwaarden heeft een verandering van slechts enkele promillen in de stroomafwaartse snelheidsprofielen tot gevolg. De numerieke resultaten vertonen echter lichte "inslingerverschijnselen", welke waarschijnlijk worden veroorzaakt door het feit dat het beginprofiel een experimenteel profiel is, waarvan is gebleken dat het niet precies aan het, in het programma gebruikte, turbulentiemodel voldoet. De lichte slingeren in  $dp/dx$  die te zien zijn in fig. 3.5, zijn hier een voorbeeld van. Op deze slingeren hebben de beginwaarde van  $dp/dx$  en  $\chi_w$  slechts een zeer zwakke invloed.

De manier waarop  $\delta$  is gedefinieerd ( $U(\delta) = 0,99U_0$ ) heeft tot gevolg dat  $\delta$  gevoelig is voor kleine verstoringen. Daarom corresponderen de slingeren in  $\delta$  (fig. 3.7) met de slingeren in de drukgradiënt.

Bij het schrijven van het programma zijn geen uitgebreide numerieke foutenanalyse en stabiliteitsanalyse uitgevoerd. Het goed overeenkomen van de numerieke oplossingen met de te verwachten resultaten, is als criterium voor de juistheid van het programma gebruikt. Uit de verkregen numerieke resultaten mag worden geconcludeerd dat het gestelde mathematische probleem door het programma wordt opgelost, zonder dat er cumulatie van fouten optreedt.

In hoeverre dit mathematische probleem een juiste beschrijving geeft van de werkelijkheid, hangt helemaal af van de juistheid van de gemaakte aannamen (o.a. het turbulentiemodel).

Op de Van Driest-formulering voor de mengweg in het binnengebied bestaan diverse variaties (lit. (9)). Ook zou de mengwegverdeling voor het buitengebied anders kunnen worden geformuleerd, b.v. met een intermittentiefunctie, zodat een nog betere overeenstemming met de experimentele waarden wordt verkregen. Dit wil zeggen dat de mengweg in het buitengebied gecorrigeerd wordt voor de niet-turbulente perioden, hetgeen neerkomt op een kleiner worden van de mengweg.

In hoeverre de secundaire stromingen verwaarloosbaar zijn, is nog niet onderzocht. Dit zou kunnen worden gedaan door in de hoeken van het beschouwde kanaal de vorm van de isotachen dicht bij de wand te meten.

De berekeningen van de breedte van het kanaal, nodig om een bepaalde gewenste drukgradiënt te verkrijgen, zijn gebaseerd op de aanname dat de divergentiehoek van de zijwanden kan worden veranderd. Het bij de berekeningen gebruikte principe hiervoor is natuurlijk ook van toepassing wanneer de hoogte zou variëren met  $x$ . Naar mijn idee stuit dit echter op moeilijkheden bij de praktische uitvoering van zo'n kanaal, daar op het kanaal een verplaatsingsmechanisme voor de hittedraden moet worden geplaatst.

Door in het programma de hoogte en de breedte van het kanaal te verwisselen (d.w.z. hoogte = 0,7m en breedte = 1,05m), zal het programma de variabele hoogte berekenen. Daarbij moet wel de verticale as in fig. 4.2 worden aangepast.

Door de in het probleem toegepaste vereenvoudigingen is het ontwikkelde programma een doorzichtig programma geworden, waarin niet veel iteraties noodzakelijk zijn. Het gebruik van de marching-procedure, de wandtruc en het uitdijende rooster hebben ertoe bijgedragen dat het programma snel en goedkoop rekent, waarbij moet worden opgemerkt dat dit de enige opzet is geweest van het gebruiken van de wandtruc.

Gezien de goede resultaten bij de berekening van een luchtstroming door een rechthoekig kanaal, mag worden verwacht dat, wanneer met het programma voorspellingen worden gedaan omtrent divergerende of convergerende kanalen, deze goed in overeenstemming zullen zijn met de werkelijkheid.

#### 4.3 Conclusies.

Gezien de numerieke resultaten, verkregen met het computerprogramma "Meetsectie/Windtunnel" en de vergelijking hiervan met de experimentele resultaten, mogen de volgende conclusies worden getrokken:

- De beschouwde rechthoekige-kanaelstroming wordt redelijk goed door het programma "Meetsectie/Windtunnel" voorspeld. De fout in de voorspelling ligt in de orde van de experimentele onnauwkeurigheid.
- De Van Driest-formulering van Prandtl's mengweghypothese is voor de berekening van een turbulente grenslaag langs een vlakke plaat een geschikt turbulentiemodel. De mengwegverdeling in het buitengebied zoals die in het programma gebruikt wordt, is voor verbetering vatbaar (b.v. via toepassing van een intermittentiefunctie).
- De "truc aan de wand" geeft een goede benadering van het wandgebied van een turbulente grenslaag en spaart bij numerieke berekeningen rekentijd en geheugenruimte.
- Het vervangen van de turbulente grenslagen in het kanaal door de verplaatsingsdiktes is acceptabel, maar leidt bij nauwkeurige berekening van de drukgradiënt tot de noodzaak om bij elke stap in de x-richting te itereren.

tenslotte:

- Het uitwerken en toetsen van een goede numerieke procedure ter berekening van een stroming, vraagt veel theoretisch, numeriek en experimenteel werk. Is deze numerieke procedure eenmaal beschikbaar, dan kan met een minimum aan tijd een goede, kwantitatieve indruk van de te onderzoeken stromingen worden verkregen.

#### 4.4 Nabeschuwing.

In deze nabeschuwing wordt in het kort toegelicht op welke manier het programma "Meetsectie/Windtunnel" tot stand is gekomen.

Na een studie van oplosmethoden voor driedimensionale parabolische problemen en na gesprekken met deskundigen op het gebied van numerieke berekeningen van stromingen, is het mij duidelijk geworden dat het jaren werk zou vergen om het gestelde driedimensionale probleem numeriek op te lossen. Daarom heb ik naar vereenvoudiging van het probleem gestreefd. Uit literatuurstudie heb ik kunnen afleiden dat de secundaire stromingen in eerste instantie mogen worden verwaarloosd. Door dit te veronderstellen is het probleem gereduceerd tot een tweedimensionaal parabolisch probleem.

Ir. Paauw van de T.H. Delft heeft mij toen het computerprogramma "Genmix" van D.B. Spalding ter beschikking gesteld. Dit programma kan door zijn algemeen karakter een groot aantal verschillende tweedimensionale parabolische problemen numeriek oplossen. De handleiding van dit programma bevat de theorie waarop het is gebaseerd. Ik heb toen geprobeerd om het, in Fortran geschreven, programma zodanig te wijzigen, dat het gestelde probleem hiermee kon worden opgelost.

Door het algemene karakter van Genmix is dit programma echter ondoorzichtig en van grote omvang (ca. 2200 kaarten). Het wijzigen ging dan ook met diverse moeilijkheden gepaard, zodat ik tenslotte besloten heb om zelf een programma te schrijven, dat gebaseerd is op de theorie van Spalding. Daarbij heb ik de basisideeën van Spalding kunnen overnemen, maar deze zelf mathematisch moeten aanpassen aan het gestelde probleem. Daar waar de theorie van Spalding te kort schoot, heb ik nieuwe oplossingen moeten zoeken.

Ik ben begonnen met het schrijven van een eenvoudig programma dat een laminaire grenslaag langs een vlakke plaat met  $dp/dx = 0$  berekent. Dit programma heb ik daarna systematisch uitgebouwd (zie par. 2.4) tot het programma zoals het in dit afstudeerverslag is gepresenteerd.

SYMBOLENLIJST.

		eenheid
A	Constante in Van Driest-mengwegverdeling	-
$A_{eff}$	Effectieve doorsnede van het kanaal	$m^2$
$A_{eff}^{**}$	Schatting van $A_{eff}$	$m^2$
$A_i, B_i, D_i, E_i$	Coëfficiënten uit de lineaire vergelijking 2.13	kg/s
$A_{ij}$	Ykconstante van de hittedraad	$A^2$
$B_{ij}$	Ykconstante van de hittedraad	$A^2 s^{\delta} / m^{\gamma}$
$F_i, G_i$	Coëfficiënten uit de lineaire vergelijking 2.13	kg/s
$H_i, C_i$	Coëfficiënten uit de lineaire vergelijking 2.13	kg m/s <sup>2</sup>
$C_0$	Volumedebiet door kanaal	$m^3/s$
E	Anemometerspanning	V
H	Shape factor (vorm factor)	-
$M_0$	Massastroom door het kanaal	kg/s
N	Aantal roosterpunten	-
NM1	N-1	-
NM2	N-2	-
P	Variabele uit de empirische relatie 3.8	-
R	Variabele uit de empirische relatie 3.8	-
$R_w$	Draadweerstand bij gastemperatuur	
$R_g$	Draadweerstand bij draadtemperatuur	
S	Constante in lineaire uitdrukking 2.24	$s^{-1}$
$S'$	Constante in lineaire uitdrukking 2.24	$m^{-1}$
$\underline{U}(U_1, U_2, U_3)$	Snelheidsvector van de lucht	m/s
$U_0$	Hoofdstroomsnelheid in de x-richting	m/s
$U_0^{**}$	Schatting van $U_0$	m/s
$U_{**}$	Wandschuifspanningssnelheid	m/s
$U^+$	Dimensieloze snelheid ( $=U/U_{**}$ )	-
$\bar{U}_{**}$	Gemiddelde schuifspanningssnelheid	m/s
$\bar{U}^+$	Gemiddelde dimensieloze snelheid	m/s
$b_0$	Breedte van het kanaal	m
$c_1$	Evenredigheidsconstante ( $1_m/\delta$ )	-
d	Buitendiameter van Preston-buis	m
$d_1$	Verplaatsingsdikte	m
$d_2$	Impulsverliesdikte	m

		eenheid
$e$	Fluctuatie op de anemometerspanning	V
$f(x_2^*)$	Dimensieloze stroomfunctie	-
$g(E)$	Ykrelatie van de hittedraad	-
$h_0$	Hoogte van het kanaal	m
$k$	Constante van Von Kármán	-
$l_m$	Mengweg	m
$p$	Statische druk	Pa
$u'(u_1', u_2', u_2')$	Snelheidsfluctuaties	m/s
$x(x, y, z)$	Coördinaten	m
$x(x_1, x_2, x_3)$	Coördinaten	m
$x_2^*$	Dimensieloze coördinaat	-
$y^+$	Dimensieloze coördinaat ( $yU^*/\nu$ )	-
$\bar{y}^+$	Dimensieloze coördinaat ( $y\bar{U}^*/\nu$ )	-
$\psi$	Stroomfunctie	kg/(ms)
$\psi_E$	Stroomfunctiewaarde op de rand van de grenslaag	kg/(ms)
$\alpha$	Divergentiehoek van de zijwanden van het kanaal	-
$\beta$	Constante in de Falkner-Skan-vergelijking	-
$\gamma$	Ykconstante van de hittedraad	-
$\delta$	Grenslaagdikte	m
$\eta$	Dynamische viscositeit	kg/(ms)
$\eta_t$	Turbulente dynamische viscositeit	kg/(ms)
$\eta_{eff}$	Effectieve dynamische viscositeit	kg/(ms)
$\nu$	Kinematische viscositeit	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Dichtheid	kg/m <sup>3</sup>
$\xi, \varphi$ en $\zeta$	Componenten van rot( $\underline{U}$ )	s <sup>-1</sup>
$\tau$	Locale schuifspanning	Pa
$\tau_w$	Schuifspanning aan de wand	Pa
$\tau_{w,L\&T}$	Wandschuifspanning volgens de empirische relatie van Ludwig en Tillmann	Pa
$\tau_{w,Rotta}$	Wandschuifspanning volgens de empirische relatie van Rotta	Pa
$\bar{\tau}$	Gemiddelde schuifspanning voor het wandgebied	Pa
$\omega$	Dimensieloze stroomfunctie	-

LITERATUURLIJST.

- (1) : "Genmix: A general computer program for two-dimensional parabolic phenoma", D.B. Spalding, Emperial College London, 1975, HTS/75/17, (300 pp.).
- (2) : "Studies in Convection", volume 1, B.E. Launder, Academic Press, 1975, Part 1: "Numerical prediction of three-dimensional flows", S.V. Patankar, p. 1-78, (40 refs.).
- (3) : "A preliminary study of turbulence characteristics of flow along a corner", F.B. Gessner, J.B. Jones, J. Basic Engineering, december 1961, p. 657-662, (12 refs.).
- (4) : "The formation of streamwise vorticity in turbulent flow", H.J. Perkins, J. Fluid Mech., 1970, volume 44, part 4, p. 721-740, (20 refs.).
- (5) : "A Reynolds Stress Model for Turbulent Corner Flows", F.B. Gessner, J.K. Po, J. Fluids Engineering, june 1976, p. 261-277, (78 refs.).
- (6) : "The Turbulent Boundary Layer Near a Corner", M. Shafir, S.G. Rubin, J. Applied Mech., december 1976, p. 567-570, (13 refs.).
- (7) : "Handleiding voor Plotprocedures", R.J.J. van Ommen, intern rapport n<sup>o</sup> , Vakgroep Transportfysica, T.H.E., 1977.
- (8) : "Laminar Boundary Layers", L. Rosenhead, Oxford University Press, 1963, p. 222-237.
- (9) : "Lectures in Mathematical Models of Turbulence", B.E. Launder, D.B. Spalding, Academic Press, 1972, pp. 170.
- (10) : "Analysis of turbulent boundary layers", T. Cebeci en A.M. Smith, Academic Press, 1974.
- (11) : "Bepaling van gemiddelde snelheidsprofielen en schuifspanningen aan de wand in een turbulente grenslaag", H.P.J. Kessels, stage-verslag n<sup>o</sup> R 265 S, oktober 1976, Vakgroep Transportfysica T.H.E.
- (12) : "The determination of turbulent skin friction by means of Pitot-tubes", J.H. Preston, J. Royal Aeronautical Society, volume 58.
- (13) : "Calibration of the Preston tube and limitations on its use in pressure gradients", V.C. Patel, J. Fluid Mech., volume 23.



Voor driedimensionale parabolische problemen is aan te bevelen:

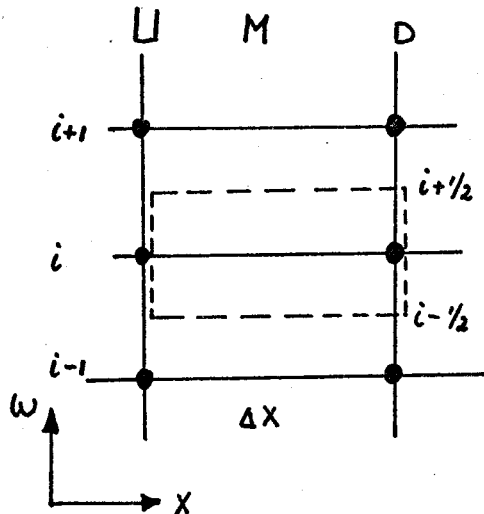
- (14) : "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", S.V. Patanker, D.B. Spalding, Int. J. Heat Mass Transfer, volume 15, pp. 1787-1806, (20 refs.).

Appendix A.

In deze appendix wordt de p.d.v. 2.12 door integratie over een volume-elementje herleid tot de lineaire uitdrukking 2.15 voor  $U_{i,D}$

I Algemeen.

Bij deze herleiding worden de in §2.2 beschreven, vereenvoudigende aannamen gebruikt.



Integratie van 2.12 levert de volgende vergelijking (zie §2.2) :

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta x} \int_{i-1/2}^{i+1/2} (U_D - U_U) dw}_{A} - \underbrace{b \left[ \int_{i-1/2}^{i+1/2} U dw \right]_M}_{B} + \underbrace{\left[ (bwL)_{i+1/2} - (bwL)_{i-1/2} \right]_M}_{C} =$$

$$\underbrace{\left[ \left( c \frac{\partial U}{\partial w} \right)_{i+1/2} - \left( c \frac{\partial U}{\partial w} \right)_{i-1/2} \right]_M}_{D} + \underbrace{\left[ \frac{-1}{\rho L} \frac{dP}{dx} dw \right]_M}_{E}$$

TERM A :  $\frac{1}{\Delta x} (U_{i,D} - U_{i,U}) (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})$

TERM B :  $\frac{1}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} \int_{i-1/2}^{i+1/2} U dw = \frac{1}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} U_{i,M} (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})$

en met  $U_{i,M} = U_{i,D}$  :

$$= \frac{1}{\Psi_E} \frac{d\Psi_E}{dx} U_{i,D} (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})$$

$$= \frac{1}{\Psi_{E,D}} \frac{(\Psi_{E,D} - \Psi_{E,U})}{\Delta x} U_{i,D} \cdot (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})$$

Samenvoegen van term A en B :

$$\begin{aligned} \text{TERM}(A+B) &: \frac{1}{\Delta x} (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \left\{ U_{i,D} - U_{i,u} + \frac{1}{\Psi_{E,D}} (\Psi_{E,D} - \Psi_{E,u}) U_{i,D} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \left\{ U_{i,D} \left( 1 + 1 - \frac{\Psi_{E,u}}{\Psi_{E,D}} \right) - U_{i,u} \right\} \\ &= U_{i,D} \left\{ \frac{(\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) (2 - \Psi_{E,u}/\Psi_{E,D})}{\Delta x} \right\} - U_{i,u} \left\{ \frac{(\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2})}{\Delta x} \right\} \end{aligned}$$

TERM C :  $\left[ (b\omega U)_{i+1/2} - (b\omega U)_{i-1/2} \right]_M$  wordt met  $m = -\omega \frac{d\Psi_E}{dx}$

$$= \frac{1}{\Psi_{E,D}} \left[ (m U_D)_{i+1/2} - (m U_D)_{i-1/2} \right]$$

$$= \frac{1}{\Psi_{E,D}} \cdot \frac{1}{2} \left[ m_{i+1/2} (U_{i,D} + U_{i+1,D}) - m_{i-1/2} (U_{i,D} + U_{i-1,D}) \right]$$

TERM D :  $\left[ \left( c \frac{\partial u}{\partial \omega} \right)_{i+1/2} - \left( c \frac{\partial u}{\partial \omega} \right)_{i-1/2} \right]_M =$

$$\left[ \frac{1}{\Psi_{E,D}} \left( \eta_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1/2} - \left( \eta_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1/2} \cdot \frac{1}{\Psi_{E,D}} \right]_D =$$

$$\frac{1}{\Psi_{E,D}} \left[ \eta_{\text{eff}, i+1/2} \frac{(U_{i+1,D} - U_{i,D})}{(y_{i+1,u} - y_{i,u})} - \eta_{\text{eff}, i-1/2} \frac{(U_{i,D} - U_{i-1,D})}{(y_{i,u} - y_{i-1,u})} \right]$$

$$\text{TERM E: } -\frac{1}{\rho U} \frac{dP}{dx} (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \equiv S_i + S_i' U_{i,D}$$

(zie vgl. 2.24 & m 2.26)

Nu moeten de coëfficiënten  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  en  $D_i$  worden gevonden uit bovenstaande uitdrukkingen om te komen tot

$$D_i U_{i,D} = A_i U_{i+1,D} + B_i U_{i-1,D} + C_i$$

Dit geeft, nadat alle vier de coëfficiënten zijn vermenigvuldigd met  $\psi_{E,D}$ :

$$A_i = -\frac{1}{2} m_{i+1/2} + \frac{\tau_{\text{eff},i+1/2}}{(y_{i+1} - y_i)u}$$

$$B_i = \frac{1}{2} m_{i-1/2} + \frac{\tau_{\text{eff},i-1/2}}{(y_i - y_{i-1})u}$$

$$C_i = U_{i,u} \cdot (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \frac{\psi_{E,D}}{\Delta x} + \psi_{E,D} \cdot S_i$$

$$D_i = \frac{1}{\Delta x} (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) (2\psi_{E,D} - \psi_{E,u}) + \frac{1}{2} m_{i+1/2} - \frac{1}{2} m_{i-1/2}$$

$$+ \frac{\tau_{\text{eff},i+1/2}}{(y_{i+1} - y_i)u} + \frac{\tau_{\text{eff},i-1/2}}{(y_{i+1} - y_{i-1})u} - S_i' \psi_{E,D}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) (2\psi_{E,D} - \psi_{E,u}) + \frac{1}{2} m_{i+1/2} - \frac{1}{2} m_{i-1/2}$$

$$+ A_i + \frac{1}{2} m_{i+1/2} + B_i - \frac{1}{2} m_{i-1/2} - S_i' \psi_{E,D}$$

$$= A_i + B_i + (w_{i+1/2} - w_{i-1/2}) \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot (2\psi_{E,D} - \psi_{E,U}) + m_{i+1/2} - m_{i-1/2}$$

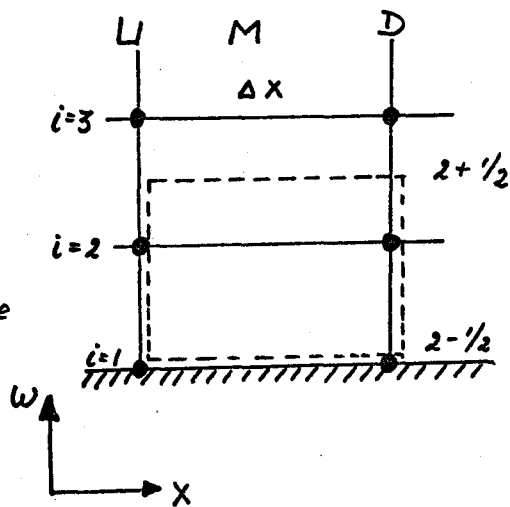
dit geeft met  $m = -w \frac{d\psi_E}{dx} = -w \cdot \frac{(\psi_{E,D} - \psi_{E,U})}{\Delta x}$

$$D_i = A_i + B_i + \frac{1}{\Delta x} (w_{i+1/2} - w_{i-1/2}) \cdot \psi_{E,D} - S_i' \psi_{E,D}$$

## II De benedenrand

$$w_{2-1/2} = 0$$

De ondergrens van dit volume wordt gevormd door de wand.



$$\frac{1}{\Delta x} \int_{2-1/2}^{2+1/2} (U_D - U_U) dw - \left[ b \int_{2-1/2}^{2+1/2} U dw \right]_M + \left[ (bwU)_{2+1/2} - (bwU)_{2-1/2} \right]_M =$$

A                      B                      C

$$\left[ \left( c \frac{\partial u}{\partial w} \right)_{2+1/2} - \left( c \frac{\partial u}{\partial w} \right)_{2-1/2} \right] + \left[ \int_{2-1/2}^{2+1/2} -\frac{1}{\rho U} \frac{dp}{dx} dw \right]_M$$

D                      E

TERM A :  $\frac{1}{\Delta x} \cdot (w_{2+1/2} - w_{2-1/2}) \cdot (U_{2,D} - U_{2,U}) = \frac{1}{2\Delta x} (w_2 + w_3) (U_{2,D} - U_{2,U})$

$$\begin{aligned}
 \text{TERM B: } \frac{1}{\psi_E} \frac{d\psi_E}{dx} \int_{2^{-1/2}}^{2^{+1/2}} U d\omega &= \frac{1}{\psi_{E,D}} \frac{d\psi_E}{dx} \cdot U_{2,D} \cdot (\omega_{2^{+1/2}} - \omega_{2^{-1/2}}) \\
 &= \frac{1}{\psi_{E,D}} \frac{(\psi_{E,D} - \psi_{E,U})}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 + \omega_3) U_{2,D} \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} \cdot (\omega_2 + \omega_3) \left(1 - \frac{\psi_{E,U}}{\psi_{E,D}}\right) \cdot U_{2,D}
 \end{aligned}$$

TERM (A+B):

$$\left[ \frac{1}{2\Delta x} (\omega_2 + \omega_3) \left(2 - \frac{\psi_{E,U}}{\psi_{E,D}}\right) \right] U_{2,D} - \left[ \frac{1}{2\Delta x} (\omega_2 + \omega_3) \right] U_{2,U}$$

$$\begin{aligned}
 \text{TERM C: } \left[ (b\omega U)_{2^{+1/2}} - (b\omega U)_{2^{-1/2}} \right]_M &= \frac{1}{\psi_{E,D}} \left[ (m U)_{2^{+1/2}} - (m U)_{2^{-1/2}} \right] \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad 0 \\
 &= \frac{1}{\psi_{E,D}} \frac{d\psi_E}{dx} \cdot \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_3) \cdot \frac{1}{2} (U_{2,D} + U_{3,D})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{TERM D: } \left[ \left( \frac{c \partial u}{\partial \omega} \right)_{2^{+1/2}} - \left( \frac{c \partial u}{\partial \omega} \right)_{2^{-1/2}} \right]_M &= \left[ \left( \frac{\rho_{\text{eff}} \partial u}{\psi_E \partial y} \right)_{2^{+1/2}} - \left( \frac{\rho_{\text{eff}} \partial u}{\psi_E \partial y} \right)_{2^{-1/2}} \right]_D \\
 &= \frac{1}{\psi_{E,D}} \left[ \rho_{\text{eff},2^{+1/2}} \frac{(U_{3,D} - U_{2,D})}{(\psi_{3,U} - \psi_{2,U})} - \rho_{\text{eff},2^{-1/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{2^{-1/2},D} \right] \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_R
 \end{aligned}$$

In het laminaire geval mag voor R  $\eta \cdot \frac{U_{2,D}}{\psi_{2,U}}$  geschreven

worden. Dit mag ook voor een turbulente stroming, mits het tweede roosterpunt in de visceuze sublaag ligt. Wanneer de "wand-truc" wordt gebruikt (zie § 2.6), dan moet voor  $\eta_{eff}$  een geschikte gemiddelde waarde voor de Couette-stroming worden gekozen. Deze gemiddelde waarde moet voldoen aan (zie vgl. 2.63)

$$\bar{\eta}_{eff} \frac{dU}{dy} = \tau_w + y \frac{dP}{dx}$$

ofwel 
$$\bar{\eta}_{eff} = \frac{1}{U} \left\{ \tau_w y + \frac{1}{2} y^2 \frac{dP}{dx} \right\}$$

Voor  $\bar{\eta}_{eff}$  wordt, zoals bij alle andere  $\eta_{eff,i}$ , de stroom-opwaartse waarde genomen:

$$\bar{\eta}_{eff} = \frac{1}{U_{2,u}} \left\{ \tau_{w,u} y_{2,u} + \frac{1}{2} y_{2,u}^2 \left( \frac{dP}{dx} \right)_u \right\}$$

TERM E: 
$$-\frac{1}{\rho U} \cdot \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_3) \frac{dP}{dx} = S_2 + S_2' U_{2,0}$$

met 
$$S_2 = -\frac{1}{\rho U_{2,u}} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot (\omega_2 + \omega_3)$$

en 
$$S_2' = \frac{+1}{2\rho U_{2,u}^2} \frac{dP}{dx} (\omega_2 + \omega_3).$$

Groeperen tot

$$D_2 U_{2,0} = A_2 U_{3,0} + B_2 U_{1,0} + C_2$$

levert na vermenigvuldiging met  $U_{2,0}$ :

$$A_2 = \frac{\eta_{eff,2+1/2}}{(y_3 - y_2)_u} - \frac{1}{2} m_{2+1/2}$$

$$B_2 = 0$$

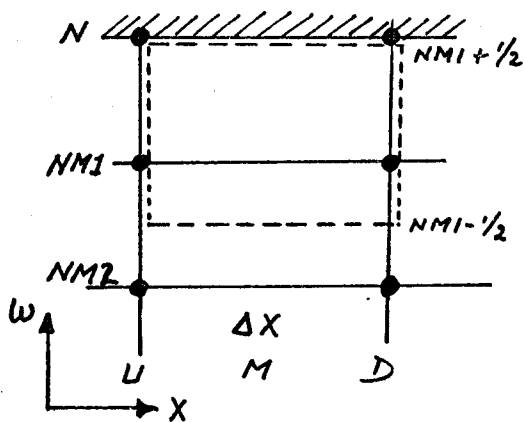
$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Psi_{E,D}}{\Delta X} (\omega_2 + \omega_3) U_{2,u} + S_2 \Psi_{E,D}$$

$$D_2 = A_2 + \frac{\Psi_{E,D}}{2 \cdot \Delta X} (\omega_2 + \omega_3) + \frac{Z_{eff,2-1/2}}{y_{2,u}} - S_2' \Psi_{E,D}$$

III De bovenrand.

$$\omega_N = 1 \quad \begin{matrix} NM1 = N-1 \\ NM2 = N-2 \end{matrix}$$

$$\omega_{NM1+1/2} = 1$$



$$\frac{1}{\Delta X} \int_{NM1-1/2}^{NM1+1/2} (U_D - U_u) d\omega - \left[ b \int_{NM1-1/2}^{NM1+1/2} U d\omega \right]_M + \left[ (b\omega U)_{NM1+1/2} - (b\omega U)_{NM1-1/2} \right]_M =$$

└── A ──┘ └── B ──┘ └── C ──┘

$$\left[ \left( c \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right)_{NM1+1/2} - \left( c \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right)_{NM1-1/2} \right]_M + \left[ \int_{NM1-1/2}^{NM1+1/2} \frac{-1}{\rho U} \frac{dP}{dx} d\omega \right]_M$$

└── D ──┘ └── E ──┘

TERM A:  $\frac{1}{\Delta X} (U_{NM1,D} - U_{NM1,u}) \cdot (1 - \frac{1}{2} (\omega_{NM1} + \omega_{NM2}))$

met  $\Delta \omega_N = (1 - \frac{1}{2} (\omega_{NM1} + \omega_{NM2}))$  wordt dit

$$\frac{1}{\Delta X} \cdot (U_{NM1,D} - U_{NM2,D}) \cdot \Delta \omega$$



$$\text{TERM B: } \frac{1}{\psi_E} \frac{d\psi_E}{dx} \int_{NM1-1/2}^{NM1+1/2} U d\omega = \frac{1}{\Delta x} \left( 1 - \frac{\psi_{E,U}}{\psi_{E,D}} \right) \cdot U_{NM1,D} \cdot \Delta\omega$$

$$\text{TERM (A+B): } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} \left( 2 - \frac{\psi_{E,U}}{\psi_{E,D}} \right) \cdot U_{NM1,D} - \frac{\Delta\omega}{\Delta x} U_{NM1,U}$$

$$\text{TERM C: } \frac{1}{\psi_{E,D}} \left[ (mLI)_{NM1+1/2} - (mLI)_{NM1-1/2} \right]_M$$

$$= \frac{1}{\psi_{E,D}} \left[ m_{NM1+1/2} U_{N,D} - \frac{1}{2} m_{NM1-1/2} (U_{NM1,D} + U_{NM2,D}) \right]$$

$$\text{TERM D: } \left[ \underbrace{\left( c \frac{\partial u}{\partial \omega} \right)}_0 \right]_{NM1+1/2} - \left( c \frac{\partial u}{\partial \omega} \right)_{NM1-1/2} \Big|_M = \frac{-\rho_{eff, NM1-1/2} \cdot (U_{NM1} - U_{NM2})_D}{\psi_{E,D} \cdot (\gamma_{NM1} - \gamma_{NM2})_U}$$

$$\text{TERM E: } \frac{-1}{\rho U} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{dP}{dx} = S_{NM1} + S'_{NM1} U_{NM1,D}$$

met  $S_{NM1} = \frac{-2}{\rho} \frac{dP}{dx} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{1}{U_{NM1,U}}$

en  $S'_{NM1} = \frac{-1}{\rho} \frac{dP}{dx} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{1}{U_{NM1,U}^2}$

Groeperen tot

$$D_{NM1} U_{NM1,D} = A_{NM1} U_{H_2,D} + B_{NM1} U_{NM2,D} + C_{NM1}$$

levert na vermenigvuldiging met  $\psi_{E,D}$ :

$$A_{NMI} = -m_{NMI+1/2} = w_{NMI+1/2} \frac{d\psi_{E,D}}{dx} = \frac{d\psi_{E,D}}{dx}$$

$$B_{NMI} = \frac{1}{2} m_{NMI-1/2} + \frac{\rho_{eff, NMI-1/2, U}}{(y_{NMI} - y_{NM2})^4}$$

$$C_{NMI} = \frac{\Delta w}{\Delta x} \cdot \psi_{E,D} L_{NMI, U} + S'_{NMI} \cdot \psi_{E,D}$$

$$D_{NMI} = B_{NMI} + \frac{d\psi_E}{dx} + \psi_{E,D} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} - S'_{NMI} \psi_{E,D}$$

APPENDIX B.

De experimenteel bepaalde profielen:

TABEL B1: Het beginprofiel ( $x = 0,84\text{m}$ )

TABEL B2: Het profiel op  $x = 4,84\text{m}$

TABEL B1

y(mm)	U(m/s)
1,20	6,32
1,72	6,82
2,26	7,06
2,59	7,15
2,99	7,31
3,38	7,47
3,81	7,49
4,19	7,70
4,57	7,79
4,97	7,94
5,76	8,20
6,55	8,28
7,38	8,43
8,14	8,63
8,98	8,73
9,77	8,84
10,55	9,04
11,31	9,07
12,10	9,23
12,97	9,34
13,69	9,42
14,48	9,56
16,10	9,69
17,65	9,89
19,23	9,97
20,82	10,06
22,40	10,12
23,99	10,29
25,57	10,38
27,16	10,46
28,74	10,52
30,33	10,52

TABEL B2

y(mm)	U(m/s)
1,31	5,90
3,09	6,72
4,70	7,11
6,29	7,49
8,10	7,63
9,43	7,82
11,01	8,01
14,23	8,20
18,06	8,60
20,52	8,71
24,13	8,99
26,92	9,04
34,83	9,47
42,77	9,83
50,66	10,29
58,68	10,43
66,56	10,70
74,47	10,94
84,43	10,94

HANDLEIDING VOOR HET COMPUTERPROGRAMMA  
"MEETSECTIE/WINDTUNNEL"

Bijlage van het afstudeerverslag van  
H.P.J. Kessels, december 1977.

Inhoud:

	Pagina:
1. Algemeen	1
2. Handleiding	2
3. Programmatekst	5
4. Verklaring van de belangrijkste symbolen	14
5. Verklaring van de tekst van het programma	16
6. Voorbeeld van een programma-uitvoer	17

## 1. Algemeen

Het programma "Meetsectie/Windtunnel" is een programma met behulp waarvan luchtstromingen door rechthoekige, divergerende of convergerende kanalen kunnen worden berekend.

De berekening komt in feite neer op de berekening van een turbulente grenslaag langs een vlakke wand met een drukgradiënt welke overeen moet komen met de drukgradiënt welke in het kanaal heerst. Deze drukgradiënt wordt berekend met behulp van o.a. de afmetingen van het kanaal.

De grenslaag wordt berekend volgens de "marching-procedure", waarbij wordt uitgegaan van een volledig bekend beginprofiel. Bij het te bespreken voorbeeld (par. 6) wordt het experimenteel bepaalde beginprofiel op  $x = 0,84m$  gebruikt.

Met het programma kunnen twee soorten berekeningen worden uitgevoerd (bepaald door de boolean "Breedteberekening"):

- a. Bij gegeven afmetingen van het kanaal worden de gemiddelde snelheidsprofielen en de drukgradiënt berekend. Het divergeren of het convergeren van het kanaal wordt vastgelegd door de divergentiehoek  $\alpha$  (ALFA).  
(Breedteberekening := 'FALSE').
- b. Bij een gegeven drukgradiënt worden de gemiddelde snelheidsprofielen en de, bij deze drukgradiënt horende, breedte van het kanaal berekend.  
(Breedteberekening := 'TRUE').

## 2. Handleiding

### A. INPUT.

Om het programma te kunnen laten rekenen, zullen eerst enkele grootheden moeten worden ingevoerd:

- a. Het beginprofiel:  $y$ -waarden met bijbehorende  $U$ -waarden, met de volgende restricties
  - Het eerste paar :  $(y_1, U_1) = (0, 0)$
  - Het tweede paar  $(y_2, U_2)$  moet zodanig gekozen worden dat dit juist op het logaritmisch profiel ligt (zie afstudeerverslag = a.v.),
  - Het laatste paar  $(y_N, U_N)$  moet in de vrije stroming liggen
  - Het minimale aantal paren c.q. roosterpunten is ongeveer 25. Bij minder roosterpunten kan de berekening te onnauwkeurig worden.
- b. De wandschuifspanning van het beginprofiel.
- c. De drukgradiënt, of een schatting hiervan, ter plaatse van het beginprofiel.
- d. De  $x$ -waarde van het beginprofiel.
- e. Enkele grootheden die de uitvoer regelen (zie B).
- f. Het aantal roosterpunten ( $N$ ).

### B. OUTPUT.

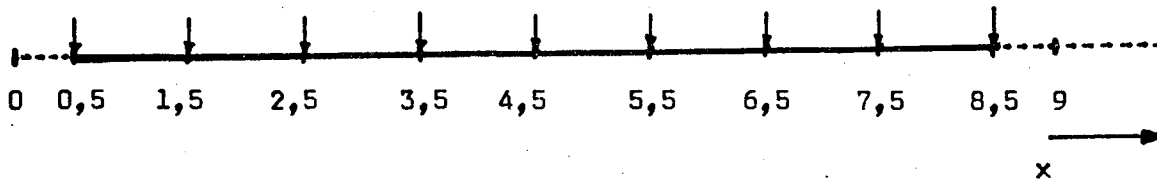
De uitvoer kan op twee manieren worden verkregen, n.l. in tabelvorm of in tabelvorm én grafische vorm. De plaatsen in het kanaal waarvoor de numerieke resultaten in tabelvorm of in grafische vorm worden gegeven, worden vastgelegd door de variabelen STEPMAX, PRINTDIF en FIN.

- STEPMAX geeft het maximale aantal stappen voorwaarts aan (de stapgrootte is 2cm); STEPMAX moet een veelvoud van 20 zijn.
- PRINTDIF geeft aan, om de hoeveel stappen de numerieke resultaten worden geprint (printstations).
- FIN geeft een maximale waarde van  $x$  aan, waar nog mag worden gerekend en waarop resultaten worden geprint.

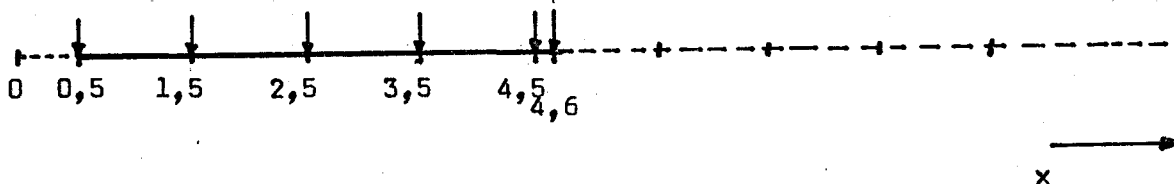
Hieronder volgen enkele voorbeelden, om het gebruik van de drie bovengenoemde grootheden te verduidelijken:

i) STEPMAX = 400 ; PRINTDIF = 50 ; FIN = 9 .

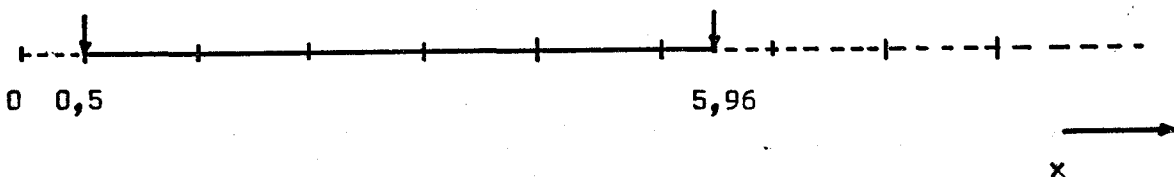
Wanneer de  $x$ -waarde van het beginprofiel bijv. 0,5m is, dan zal op de volgende stations uitvoer worden gegenereerd (aangegeven door een pijl):



ii) STEPPMAX = 400 ; PRINTDIF = 50 ; FIN = 4,60.



iii) STEPPMAX = 400 ; PRINTDIF = 400 ; FIN = 5,96.



De grafische uitvoer wordt geregeld door de booleans PLAATJEL, PLAATJE2, PLAATJE3 en PLAATJE4.

- PLAATJEL levert de dimensieloze profielen van binnen- en buitengebied voor het beginstation en het laatste printstation (zie fig. 3.8a en 3.8b a.v.).
- PLAATJE2 levert de gewone snelheidsprofielen voor alle printstations en een figuur waarin al deze profielen zijn opgenomen (zie fig. 3.6 a.v.).
- PLAATJE3 levert een grafiek van de drukgradiënt als functie van x en een grafiek van de grenslaagdikte en de verplaatsingsdikte als functie van x (zie fig. 3.5 en 3.7 a.v.).
- PLAATJE4 levert een grafiek van de breedte van het kanaal voor een gewenste drukgradiënt (alleen in combinatie met de boolean Breedteberekening) (zie fig. 3.10 a.v.).

De numerieke resultaten van alle printstations worden opgeslagen in de plotarrays c,q, plotmatrices. Na afloop van de berekeningen worden met behulp van deze arrays de grafieken getekend. Hieronder volgt de schematische weergave van de manier waarop de plotarrays zijn gevuld:

met STAS = aantal printstations

NP = STEPMAX/20 + 1

PLOTY :

$$\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots & y_{1,STAS} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{N,1} & y_{N,2} & \dots & y_{N,STAS} \end{pmatrix}$$

PLOTU :

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & U_{1,STAS} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{N,1} & U_{N,2} & \dots & U_{N,STAS} \end{pmatrix}$$

PLOTTAUW :  $(z_{w,1} \ z_{w,2} \ \dots \ z_{w,STAS})$

PLOTREST :

$$\begin{pmatrix} x_1 & (dp/dx)_1 & DELTA_1 & D_{1,1} & BREEDTE_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{NP} & (dp/dx)_{NP} & DELTA_{NP} & D_{1,NP} & BREEDTE_{NP} \end{pmatrix}$$

← (beginprofiel)

← (om de 20 stappen)

Wanneer nauwkeurig wordt bestudeerd waar de variabelen zijn opgeslagen, kunnen eventueel ook andere grafieken worden getekend.

C. DATA IN.

Het invoeren van de gewenste gegevens moet als volgt geschieden:

na de "DATA IN"-kaart moeten de volgende kaarten worden geplaatst:

- N, STEPMAX, PRINTDIF, FIN, kaart 1
- $x_0, z_w, dp/dx,$  kaart 2
- $y_1$  (in mm!!),  $U_1,$  kaart 3
- $\vdots$   $\vdots$
- $\vdots$   $\vdots$
- $y_N, U_N,$  kaart N + 2
- PLAATJEL, PLAATJE2, PLAATJE3, PLAATJE4, kaart N + 3

Op kaart N + 3 moet staan 'TRUE' of 'FALSE'.

De boolean "Breedteberekening" moet in het programma worden gegeven (krt. 57).





```

*****
*-----
      HOOGTE:=1.05;
      BREEDTE:=0.7;
BREEDTEREREKENING:='TRUE';
      ALFA:=0;
      RHO:=1.212;
      ETA:=1.818e-5;
      NU:=1.5e-5;
      KA:=0.4;
*-----
*****
*      BEGIN-PROFIEL EN           Q
*      TRANSFORMATIE NAAR       *
*      X-OMEGA COORDINATEN     *
*****
*-----
      READ(IN,/,X,TAUW,DPDX);
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN'
      READ(IN,/,Y(I),U(I));
      Y(I):=Y(I)/1000;
'END';
      UREG:=U(N);
      DPDXREG:=DPDX;
      TAUW:=TAUW+0.5*Y(2)*DPDX;
*-----
      UP:=U(2)*SQRT(RHO/TAUW);
      INTEGR:=ETA*(0.5*UP**2+.12295*(EXP(KA*UP)/KA-UP-0.5*KA*
      (UP**2)-(KA**2)*(UP**3)/6-(KA**3)*(UP**4)/24-
      (KA**4)*(UP**5)/120));
      PSIE:=RHO*U(2)*Y(2)-INTEGR;
      PSIE2:=PSIE;
'FOR' I := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      PSIE:=PSIE + 0.5 * (U(I+1) + U(I))*(Y(I+1)-Y(I))*RHO;
      PSIEHEG:=PSIE;
*-----
      OM(1):=0.0;OM(N):=1.0;
      OM(2):=PSIE2/PSIE;
'FOR' I:=3 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      OM(I):=OM(I-1)+0.5*(U(I)+U(I-1))*(Y(I)-Y(I-1))*RHO/PSIE;
*-----
      DPSIDX:= 2*ETA/(Y(NM1)-Y(NM2));
      D1:=Y(N)-PSIE/(RHO*U(N));
      AEFF:=HOOGTE*BREEDTE-2*D1*(HOOGTE+BREEDTE)+4*D1**2;
      CNJL:=AEFF*U(N);
*-----
      PLOTREST(1,1):=X;
      PLOTREST(1,2):=UPDX;
      PLOTREST(1,3):=D1;
      PLOTREST(1,4):=BREEDTE;
      PLOTTAUW(1):=TAUW;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN'
      PLOTU(1,1):=U(I);
      PLOTY(1,1):=Y(I);
'END';
*-----

```

```

00052000
00053000
00054000
00055000
00056000
00057000
00058000
00059000
00060000
00061000
00062000
00063000
00064000
00065000
00066000
00067000
00068000
00069000
00070000
00071000
00072000
3 00073000
00074000
00075000
3 00076000
00077000
00078000
00079000
00080000
00081000
00082000
00083000
00084000
00085000
00086000
00087000
00088000
00089000
00090000
00091000
00092000
00093000
00094000
00095000
00096000
00097000
00098000
00099000
00100000
00101000
00102000
00103000
00104000
00105000
00106000
3 00107000
00108000
00109000
3 00110000

```

```

*****
* HOOFDPROGRAMMA
*****

```

```

*****
** HET HOOFDPROGRAMMA BESTAAT *
** UIT EEN LOOP VOOR DE "MARCHING- Q
** PROCEDURE", WAARIN EEN ITERATIE- Q
** LOOP VOOR DE DRUKCORRECTIE IS Q
** OPGENOMEN. Q
*****

```

```

'FOR' STEP:=1 'STEP' 1 'UNTIL' STEP MAX 'DO'
'BEGIN'

```

```

*==== HEREKENING V. GRENSLAAGDIKTE ====

```

```

I:=1;
'WHILE' U(I) < 0.99*U(N) 'DO' I:=I+1;
DELTA:=0.5*(Y(I)+Y(I-1));
'IF' STEP=1 'THEN' PLOTREST(1,3):=DELTA;

```

```

*==== HEREKENING V. X EN DX ====

```

```

DX:=0.02;
X:=X+DX;
'IF' X'GTR'FIN 'THEN'
'BEGIN' DX:=FIN-X+DX; X:=FIN 'END';

```

```

*==== BEREKENING V. DPSIDX ====

```

```

DPSIDX:=0.2;
'IF' (U(N)-U(NM1))/U(N) > 0.005 'THEN'
'BEGIN' DPSIDX:=1.3*DPSIDX; *WRITE(OJT,</,/,I3,X3,"GROTER ">,STEP
):'END';

```

```

*==== HEREKENING V. PSIE ====

```

```

PSIE:=PSIE+DPSIDX*DX;

```

```

BUFTAUX:=TAUX;
JNUL:=U(N);
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN'
BUFU(I):=U(I);
BUFY(I):=Y(I);
'END';

```

```

'IF' BREEDTEREKENING 'THEN' ITERATIE:=1 'ELSE' ITERATIE:=3;
'FOR' IT:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ITERATIE 'DO'
'BEGIN'

```

```

*==== HEREKENING V. HOOFDSTROOMSNELHEID ====

```

```

U(N):=SQRT((-2*DPDX*DX/RHO+J(N)**2);

```

```

*==== A'S, B'S, C'S EN D'S ====

```

```

Q:=PSIE/DX;
C2:=-DPDX*(OM(3)+OM(2))/(2*RHO);
CNM1:=-DPDX*(1-0.5*(OM(NM1)+OM(NM2)))/(1*RHO);

```

```

00111000
00112000
00113000
00114000
00115000
00116000
00117000
00118000
00119000
00120000
00121000
00122000
00123000
00124000
00125000
00126000
00127000
00128000
00129000
00130000
00131000
00132000
00133000
00134000
00135000
00136000
00137000
00138000
00139000
00140000
00141000
00142000
00143000
00144000
00145000
00146000
00147000
00148000
00149000
00150000
00151000
00152000
00153000
00154000
00155000
00156000
00157000
00158000
00159000
00160000
00161000
00162000
00163000
00164000
00165000
00166000
00167000
00168000
00169000

```

```

*----- LM=MENGWEG ALS FU. VAN Y ---
LM:=KA*.5*(Y[2]+Y[3])*(1-EXP((Y[2]+Y[3])*SQRT(TAUW*RHO)/
(-2*26*ETA)));
E2P:=ETA+RHO*(LM**2)*(U[3]-U[2])/(Y[3]-Y[2]);
A[2]:=E2P/(Y[3]-Y[2])+0.25*(OM[2]+OM[3])*DPSIDX;
B[2]:=0.0;
C[2]:=0.5*(OM[2]+OM[3])*Q*U[2]+2*PSIE*C2/U[2];
E2M:=(TAUW*Y[2]+0.5*DPOX*Y[2]**2)/U[2];
D[2]:=0.5*Q*(OM[2]+OM[3])+A[2]+E2M/Y[2]+PSIE*C2/(U[2]**2);

A[NM1]:=DPSIDX;
LM:=.120*DELTA;
ENM:=ETA+RHO*(LM**2)*(U[NM1]-U[NM2])/(Y[NM1]-Y[NM2]);
H[NM1]:=ENM/(Y[NM1]-Y[NM2])-0.25*(OM[NM1]+OM[NM2])*DPSIDX;
C[NM1]:=(1-.5*(OM[NM1]+OM[NM2]))*Q*U[NM1]+2*PSIE*CNM1/U[NM1];
D[NM1]:=H[NM1]+DPSIDX+(1-.5*(OM[NM1]+OM[NM2]))*Q+PSIE*CNM1/
(U[NM1]**2);

'FOR' I:=3'STEP'1'UNTIL'NM2'DO'
'BEGIN'
CI:=-DPOX*(OM[I+1]-OM[I-1])/(2*RHO);
LM:=.5*KA*(Y[I]+Y[I+1])*(1-EXP((Y[I]+Y[I+1])*SQRT(TAUW*RHO)/
(-2*26*ETA)));
'IF' Y[I]/DELTA >.3000'THEN'LM:=.120*DELTA;
ETP:=ETA+RHO*(LM**2)*(U[I+1]-U[I])/(Y[I+1]-Y[I]);
LM:=.5*KA*(Y[I]+Y[I-1])*(1-EXP((Y[I]+Y[I-1])*SQRT(TAUW*RHO)/
(-2*26*ETA)));
'IF' Y[I]/DELTA >.3000'THEN'LM:=.120*DELTA;
ETM:=ETA+RHO*(LM**2)*(U[I]-U[I-1])/(Y[I]-Y[I-1]);
IP:=ETP/(Y[I+1]-Y[I]);
IM:=ETM/(Y[I]-Y[I-1]);
MP:=-0.5*(OM[I]+OM[I+1])*DPSIDX;
MM:=-0.5*(OM[I]+OM[I-1])*DPSIDX;
A[I]:=IP-0.5*MP;
B[I]:=IM+0.5*MM;
C[I]:=U[I]*Q*.5*(OM[I+1]-OM[I-1])+2*PSIE*CI/U[I];
D[I]:=A[I]+B[I]+.5*(OM[I+1]-OM[I-1])*Q+PSIE*CI/(U[I]**2);
'END';

'FOR' I:=2'STEP'1'UNTIL'NM1'DO'
'BEGIN'
BUFA[I]:=A[I];
BUFB[I]:=B[I];
BUFC[I]:=C[I];
BUFD[I]:=D[I];
'END';

-----
'IF' STEP=1'AND' I=1'THEN'
'BEGIN'
WRITE(OUT,(SKIP(1)),<x5,"REGIN-PROFIEL_:"/,/,>);
WRITE(OUT,<x7,"I",x6,"Y[I]",x7,"U[I]",x6,"A[I]",x6,"B[I]",x6,
"C[I]",x5,"D[I]",x7,"OM[I]">);
WRITE(OUT,</,/,x5,i3,x3,f9.6,x3,f6.3,x44,f9.6>,1,Y[1],U[1],OM[1]
);
'FOR' I := 2'STEP'1'UNTIL'NM1'DO'
WRITE(OUT,</,x5,i3,x3,f9.6,x3,f6.3,x3,f7.3,x3,f7.3,
x3,f7.3,x3,f7.3,x4,f9.6>,1,Y[I],U[I],A[I],B[I],C[I],
D[I],OM[I]);

```

```

00170000
00171000
00172000
00173000
00174000
00175000
00176000
00177000
00178000
00179000
00180000
00181000
00182000
00183000
00184000
00185000
00186000
00187000
00188000
00189000
00190000
5 00191000
00192000
00193000
00194000
00195000
00195000
00197000
00198000
00199000
00199000
00200000
00201000
00202000
00203000
00204000
00205000
00205000
00207000
00209000
5 00209000
00210000
00211000
5 00212000
00213000
00214000
00215000
00216000
5 00217000
00218000
00219000
5 00220000
00221000
00222000
00223000
00224000
00225000
00226000
00227000
00228000

```

```

WRITE(OUT,< /,X5,I3,X3,F9.5,X3,F6.3,X44,F9.6>,N,Y(N),UBEG,
OM(N) );
WRITE(OUT,< /,/,X5,"UNUL =",F6.3/,X5,"PSIE =",F9.6/,X3,
"DP SIDX =",F9.6/,X7,"DX =",F9.6/,X5,"DPDX =",F9.3/,
X4,"DELTA =",F9.6>,
UBEG,PSIEBEG,DP SIDX,DX,DPDXBEG,DELTA);
WRITE(OUT,< /,X1,"VERPL.D.=",F9.6>,D1);
WRITE(OUT,< /,X3,"DEBIET =",F9.5,X10,"A-EFFECTIEF =",F9.5>,
CNJL,AEFF);
'END';
*===== TDMA OPLOSSING VOOR U[I] ===== 5
C(2):=C(2)+B(2)*U(1);
C(NM1):=C(NM1)+A(NM1)*U(N);
'FOR' I:=NM1'STEP'1'UNTIL'3'DO'
'REGIN'
B(I):=B(I)/D(I);
C(I):=C(I)/D(I);
D(I-1):=D(I-1)-B(I)*A(I-1);
C(I-1):=C(I-1)+C(I)*A(I-1);
'END' ;
C(2):=C(2)/D(2);
U(2):=C(2);
'FOR' I:=3'STEP'1'UNTIL'NM1'DO'
U(I):=C(I)+B(I)*U(I-1);
*===== HEREKENING V. Y(2) EN TAUW =====
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL' 6'DO'
'REGIN'
TAUG:=TAUW+0.5*Y(2)*DPDX;
TAUG:=RHO*(KA*U(2)/LN(SQRT(RHO*TAUG)*Y(2)*8.13357/ETA))**2;
UP:=U(2)*SQRT(RHO/TAUG);
INTEGR:=ETA*(0.5*UP**2+.12245*(EXP(KA*UP)/KA-UP-0.5*KA*
(JP**2)-(KA**2)*(JP**3)/6-(KA**3)*(JP**4)/24-
(KA**4)*(JP**5)/120));
Y(2):=(OM(2)*PSIE+INTEGR)/(RHO*U(2));
'END';
TAUW:=TAUG-0.5*Y(2)*DPDX;
*===== HEREKENING V. Y(I) =====
'FOR' I:=2'STEP'1'UNTIL' NM1'DO'
Y(I+1):= Y(I)+0.5*(OM(I+1) -OM(I))*(1/(RHO*U(I)) +1/(RHO*
U(I+1)))*PSIE;
*===== HEREKENING V. VERPL. DIKTE=====
D1:=Y(N)-PSIE/(RHO*U(N));
*===== CORRECTIE OP DRUKGRADIENT =====
'IF'BREEDTEBEREKENING'THEN'
'REGIN'
DEBIET:=CNJL;
AEFF:=CNJL/U(N);
BREEDTE:=(AEFF-4*D1**2+2*D1*HOOGTE)/(HOOGTE-2*D1);
'END'
'ELSE'
'REGIN'
BREEDTE:=BREEDTE+2*D1*TAN(ALFA);
AEFF:=HOOGTE*BREEDTE-2*D1*(HOOGTE+BREEDTE)+4*D1**2;
DEBIET:=AEFF*U(N);
UNUL:=CNJL/AEFF-U(N);
J(N):=J(N)+DJNJL;
DPDX:=-0.5*RHO*(U(N)**2-UNUL**2)/DX;
U(N):=U(N)-DJNJL;

```

00229000  
00230000  
00231000  
00232000  
00233000  
00234000  
00235000  
00236000  
00237000  
00238000  
5 00239000  
00240000  
00241000  
00242000  
00243000  
5 00244000  
00245000  
00246000  
00247000  
00248000  
5 00249000  
00250000  
00251000  
00252000  
00253000  
00254000  
00255000  
5 00256000  
00257000  
00258000  
00259000  
00260000  
00261000  
00262000  
00263000  
5 00264000  
00265000  
00266000  
00267000  
00268000  
00269000  
00270000  
00271000  
00272000  
00273000  
00274000  
5 00275000  
00276000  
00277000  
00278000  
5 00279000  
00280000  
5 00281000  
00282000  
00283000  
00284000  
00285000  
00285000  
00287000

```

'IF'IT'NEQ'ITERATIE'THEN'                                00288000
'BEGIN'                                                    00289000
  'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'                               6 00290000
  'BEGIN'                                                    00291000
    U(I):=HJFU(I);                                           7 00292000
    Y(I):=HJFY(I);                                           7 00293000
  'END';                                                    00294000
  TAUW:=BUFTAJW;                                           7 00295000
  BREEDTE:=BREEDTE-2*DX*TAN(ALFA);                          00296000
'END';                                                    00297000
'END';                                                    00299000
*****" " " " " *****                                  00300000
'END';                                                    00301000
*****" " " " " *****                                  00302000
%=== VULLEN VAN GEHEUGEN-ARRAYS T.B.V. PLOTPLAATJES ===== 00303000
'IF'STEP/PRINTDIF=STEP'DIV'PRINTDIF'OR' X=FIN'THEN'      00304000
'BEGIN'                                                    00305000
  Z:=(STEP'DIV'PRINTDIF)+1;                                  4 00306000
  'IF'X=FIN'THEN'Z:=Z+1;                                     00307000
  'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'                               00308000
  'BEGIN'                                                    00309000
    PLOTU(I,Z):=U(I);                                        5 00310000
    PLOTY(I,Z):=Y(I);                                        00311000
  'END';                                                    00312000
  PLOTTAUW(Z):=TAUW;                                        5 00313000
'END';                                                    00314000
'IF'STEP/20=STEP'DIV'20'OR'X=FIN'THEN'                    4 00315000
'BEGIN'                                                    00316000
  K:=(STEP'DIV'20)+1;                                       4 00317000
  'IF'X=FIN'THEN'K:=K+1;                                     00318000
  PLOTREST(K,1):=X;                                         00319000
  PLOTREST(K,2):=DPDX;                                     00320000
  PLOTREST(K,3):=DELTA;                                    00321000
  PLOTREST(K,4):=D1;                                       00322000
  PLOTREST(K,5):=BREEDTE;                                  00323000
'END';                                                    00324000
*****" " " " " *****                                  4 00325000
===== ALLEEN VOOR OUTPUT-STATIONS : =====          00326000
'IF'STEP/PRINTJIF=STEP'DIV'PRINTDIF'OR'X=FIN'THEN'      00327000
'BEGIN'                                                    00328000
***** HEREKENING V. IMPULSVERLIESDIKTE =====      4 00329000
INT1:=PSIE/(RHO*U(N));                                     00330000
UP:=J(2)*SQRT(RHO/TAUW);                                   00331000
US:=SQRT(TAUW/RHO);                                       00332000
INT2:=((J(2)/U(N))**2)*Y(2)-2*NU*US*((UP**3)/3+
0.12295*((UP**2)/(-2)-KA*(UP**3)/3-(KA**2)*(UP**4)/8
-(KA**3)*(UP**5)/30-(KA**4)*(UP**6)/144
+UP*EXP(KA*UP)/KA-EXP(KA*UP)/(KA**2)+1/(KA**2)))/U(N)**2;
INT3:=0;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N*1'DO'                               00333000
INT3:=INT3+0.25*((U(I+1)+U(I))**2)*(Y(I+1)-Y(I));         00334000
INT3:=INT3/(J(N)**2);                                     00335000
D2:=INT1-INT2-INT3;                                       00336000

```

```

H:=D1/D2;
TLT:=RHO*(U[N]**2)*0.123*(10**(-0.678*H))*(U[N]*D2/NU)**(-.268);
TRT:=RHO*(5.75*LOG(U[N]*D)/NU)/U[N]+3.7/U[N]**(-2);
----- PRINTEN -----
Z:=STEP'DIV'PRINTDIF;
WRITE(OUT[SKIP(1)]);
WRITE(OUT,</,X5,"STATION",I2,"_.....STEP =",I4,
      "_.....X_=",F9.6,/>,Z,STEP,X);
WRITE(OUT,<X5,"=====",/,/,/>);
WRITE(OUT,<X7,"I",X6,"Y[I]",X7,"U[I]",X6,"A[I]",X6,"B[I]",X6,
      "C[I]",X6,"D[I]">);
WRITE(OUT,</,/,X5,I3,X3,F9.6,X3,F6.3>,I,Y[I],U[I]);
'FOR' I :=2 'STEP' 1 'UNTIL' NM1 'DO'
WRITE(OUT,</,X5,I3,X3,F9.6,X3,F6.3,X3,F7.3,X3,F7.3,
      X3,F7.3,X3,F7.3>,I,Y[I],U[I],BUFA[I],BUFB[I],BUFC[I],BUFD[
      ]);
WRITE(OUT,</,X5,I3,X3,F9.6,X3,F6.3>,N,Y[N],U[N]);
WRITE(OUT,</,/,X5,"UNUL_=",F6.3,X35,"NUMERIEK_:_TAUW=",
      F9.6>,J[N],TAUW);
WRITE(OUT,</,X5,"PSIE_=",F9.6,X21,"LUDWIEG_EN_TILLMANN_:_TAUW="
,F9.6>,PSIE,TLT);
WRITE(OUT,</,X3,"DPSIDX_=",F9.6,X35,"ROTTA_:_TAUW =",F9.6>,
DPSIDX,TRT);
WRITE(OUT,</,X7,"DX_=",F9.6,X22,"VERPLAATSINGSDIKTE_:_D1 =",
F9.6>,DX,D1);
WRITE(OUT,</,X5,"DPDX_=",F9.6,X22,"IMPULSVERLIESDIKTE_:_D2 =",
F9.6>,DPDX,D2);
WRITE(OUT,</,X4,"DELTA_=",F9.6,X28,"SHAPE_FACTOR_:_H =",F9.6
>,DELTA,H);
WRITE(OUT,</,X3,"DEBIET_=",F9.6,X29,"A-EFFECTIEF_:_AEFF =",F9.6
>,DEBIET,AEFF);

'END';
'IF' X=FIN'THEN'NP:=STEP'DIV'20+2;
'IF' X= FIN'THEN'STEP:=STEPMAX+1;

'END';
*****
***** END HOOFD-PROGRAMMA *****
*****

'IF' BREEDTEBEREKENING'THEN'
'BEGIN'
WRITE(OUT[SKIP(1)]);
WRITE(OUT,</,/,X3,"KANAALBREEDTE_VOOR_DP/DX_=",F6.3,/>,DPDX);
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'NP'DO'
WRITE(OUT,</,X3,"X=",F5.2,X3,"HREEDTE=",F7.4>,PLOTREST[I,1],
PLOTREST[I,5]);
'END';

-----
----- PLOTTEN -----
-----
READ(IN,/,PLAATJE1,PLAATJE2,PLAATJE3,PLAATJE4);

'IF' PLAATJE1'THEN'
-----DIMENSIELOZE SNELHIEDSPROFIELEN.

```

00347000  
00348000  
00349000  
00350000  
00351000  
00352000  
00353000  
00354000  
00355000  
00356000  
00357000  
00358000  
00359000  
00360000  
00361000  
00362000  
00363000  
00364000  
00365000  
00366000  
00367000  
00368000  
00369000  
00370000  
00371000  
00372000  
00373000  
00374000  
00375000  
00376000  
00377000  
00378000  
00379000  
00380000  
4 00381000  
00382000  
00383000  
00384000  
3 00385000  
00386000  
00387000  
00388000  
00389000  
00390000  
3 00391000  
00392000  
00393000  
00394000  
00395000  
00396000  
3 00397000  
00398000  
00399000  
00400000  
00401000  
00402000  
00403000  
00404000  
00405000

```

'FOR' I:=1 'STEP' (STAS-1) 'UNTIL' STAS 'DO'
'REGIN'
  US:=SORT (PLOTTAUW(I)/RH0);
  MINMAX(1):=0; MINMAX(2):=4; MINMAX(3):=1; MINMAX(4):=30;
  TEKAXIS2 (DRAW, MINMAX, 2, 4, 29,
    ('DIMENSIELOOS PROFIEL, BINNENGEBIED.'),
    ('LOG(Y+)', 'U+'));
  TEKCURVE (DRAW, J, 8, 33, J/10, .5755*J+5.24, MINMAX, 0, 2, 1);
  TEKCURVE (DRAW, J, 1, 12, LOG(J), J, MINMAX, 0, 2, 1);
  TEKCURVE (DRAW, J, 3, 15, LOG(J+.12295*(EXP(KA*J)-1-KA*J-
    ((KA*J)**2)/2-((KA*J)**3)/6-((KA*J)**4)/24)), J,
    MINMAX, 0, 2, 1);
  TEKMARKS (DRAW, J, 2, N, LOG(PLOTY[J, I]*US/NU), PLOTU[J, I]/US,
    MINMAX, 0, 2, 2, .21);
  SKIPPAPER (DRAW);
  'IF' I=1 'THEN' DELTA:=PLOTREST(1, 3);
  'IF' I=STAS 'THEN' DELTA:=PLOTREST(NP, 3);
  MINMAX(1):=0; MINMAX(2):=1.2; MINMAX(3):=0; MINMAX(4):=1.2;
  TEKAXIS2 (DRAW, MINMAX, 0, 12, 12,
    ('DIMENSIELOOS PROFIEL, BUITENGEBIED.'),
    ('Y/DELTA', 'U/UNUL'));
  TEKCURVE (DRAW, J, 1, 48, J/40, (J/40)**(1/7), MINMAX, 0, 0, 1);
  TEKCURVE (DRAW, J, 2, N, PLOTY[J, I]/DELTA, 1.01*PLOTU[J, I]/
    PLOTU[N, I], MINMAX, 0, 0, 1);
  TEKMARKS (DRAW, J, 1, N, PLOTY[J, I]/DELTA, 1.01*PLOTU[J, I]/
    PLOTU[N, I], MINMAX, 0, 0, 2, .21);
  SKIPPAPER (DRAW);
'END';

'IF' PLAATJE2 'THEN'
-----GEWONE SNELHEIDSPROFIELEN.
'REGIN'
  MINMAX(1):=ENTIER(PLOTU(2, 1)); MINMAX(2):=-ENTIER(-PLOTU(N, STAS));
  MINMAX(3):=0; MINMAX(4):=-ENTIER(-100*PLOTY(N, STAS))/100;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' STAS 'DO'
  'REGIN'
    X:=PLOTREST(1, 1)+(I-1)*PPINTDIF*DX;
    'IF' X>FIN 'THEN' X:=FIN;
    TEKAXIS2 (DRAW, MINMAX, 2, MINMAX(2)-MINMAX(1), MINMAX(4)*500,
      ('SNELHEIDSPROFIEL'), ('U(M/S)'), ('Y(M)'));
    TEKCURVE (DRAW, J, 2, N, PLOTU[J, I], PLOTY[J, I], MINMAX, 0, 2, 1);
    TEKMARKS (DRAW, J, 2, N, PLOTU[J, I], PLOTY[J, I], MINMAX, 0, 2, 2, .21);
    COMMENTEXT (IMA, 11, 21, 0, .5, 0, ('X= M'));
    NNUMBER (IMA, 12, 21, 14, 21, 0, ('F4.2'), X);
    DRAWIMAGE (DRAW, IMA, 0, 0, 33, 27);
    CLEARIMAGE (IMA);
    SKIPPAPER (DRAW);
  'END';
  TEKAXIS2 (DRAW, MINMAX, 2, MINMAX(2)-MINMAX(1), MINMAX(4)*500,
    ('SNELHEIDSPROFIEL'), ('U(M/S)'), ('Y(M)'));
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' STAS 'DO'
  'REGIN'
    TEKCURVE (DRAW, J, 2, N, PLOTU[J, I], PLOTY[J, I], MINMAX, 0, 2, 1);
    TEKMARKS (DRAW, J, 1, N, PLOTU[J, I], PLOTY[J, I], MINMAX, 0, 2, 2, .21);
  'END';
  SKIPPAPER (DRAW);
'END';

```



```

3 00465000
00466000
00467000
00468000
00469000
00470000
'IF'PLAATJE3'THEN'
*-----LONGITUDINALE PLOTS
'REGIN'
MINMAX[1]:=0;MINMAX[2]:=8;MINMAX[3]:=0;
MINMAX[4]:= -ENTIER(-PLOTREST(NP,3)*100)/50;
MINMAX[3]:=-4;
MINMAX[4]:=4;
TEKAXIS2(DRAW,MINMAX,1,16,20,('LONGITUDINAAL'),'
('X(M)'),'('DPDX(N/M3)')));
TEKMARKS(DRAW,J,2,NP,PLOTREST(J,1),PLOTREST(J,2),MINMAX,0,1,2,.21);
TEKCURVE(DRAW,J,2,NP,PLOTREST(J,1),PLOTREST(J,2),MINMAX,0,1,1);
TEKCURVE(DRAW,J,0,H,J,J*0,MINMAX,0,1,1);
'END';
SKIPPAPER(DRAW);
3 00471000
00472000
00473000
00474000
00475000
00476000
00477000
00478000
00479000
00480000
'IF'PLAATJE4'THEN'
*----- KANAALBREEDTE-PLOT
'REGIN'
MINMAX[1]:=0;MINMAX[2]:=8;MINMAX[3]:=60;MINMAX[4]:=80;
TEKAXIS2(DRAW,MINMAX,1,16,40,
('BREEDTEHERFKENING'),'('X(M)'),'('BREEDTE(CM)')));
TEKCURVE(DRAW,J,1,NP,PLOTREST(J,1),100*PLOTREST(J,5),MINMAX,0,
1,1);
TEKMARKS(DRAW,J,1,NP,PLOTREST(J,1),100*PLOTREST(J,5),MINMAX,0
.1,1,.21);
SKIPPAPER(DRAW);
3 00481000
00482000
00483000
00484000
00485000
00486000
00487000
00488000
00489000
00490000
00491000
00492000
00493000
00494000
00495000
'END';
'END';
3 00496000
*-----
2 00497000
*-----
00498000
*-----
00499000
'END';
00500000
=====
```

4. Verklaring van de belangrijkste symbolen.

a) type REAL.

AEFF	: $A_{eff}$ , de effectieve doorsnede van het kanaal
ALFA	: $\alpha$ , de divergentiehoek
BREEDTE	: $b_0$ , breedte van het kanaal
CNUL	: $C_0$ , volumestroom door het kanaal
DX	: $\Delta x$ , stapgrootte
DPSIDX	: $dY_E/dx$
DPDX	: $dp/dx$ , de drukgradiënt
DUNUL	: $\Delta U_0$ , correctie op de hoofdstroomsnelheid
DEBIET	: volumestroom op elke x-waarde
D1	: $d_1$ , verplaatsingsdikte
D2	: $d_2$ , impulsverliesdikte
ETA	: $\eta$ , dynamische viscositeit
ETM	: $\eta_{i-\frac{1}{2}}$
ETP	: $\eta_{i+\frac{1}{2}}$
E2M	: $\eta_{2-\frac{1}{2}}$
E2P	: $\eta_{2+\frac{1}{2}}$
ENM	: $\eta_{NM1-\frac{1}{2}}$
H	: H, shape factor
HOOGTE	: $h_0$ , hoogte van het kanaal
KA	: k, constante van Von Kármán
LM	: $l_m$ , de mengweg
NU	: $\nu$ , kinematische viscositeit
PSIE	: $Y_E$ , dimensieloze stroomfunctie
RHO	: $\rho$ , dichtheid
TAUW	: $\tau_w$ , wandschuifspanning
TAUG	: $\bar{\tau}$ , gemiddelde wandschuifspanning
TLT	: $\tau_{w,L\&T}$ , wandschuifspanning volgens Ludwig en Tillmann
TRT	: $\tau_{w,Rotta}$ , wandschuifspanning volgens Rotta
UNUL	: $U_0$ , hoofdstroomsnelheid ( $=U_N$ )
US	: $U_x$ , wandschuifspanningssnelheid
X	: x, coördinaat in de richting van de hoofdstroomsnelheid
YP	: $y^+$ , dimensieloze afstand tot de wand

b) type REAL ARRAY.

A, B, C, D : coëfficiënten van tridiagonale matrixvergelijking  
U : snelheid in de x-richting  
Y : afstand tot de wand  
OM :  $\omega$ , dimensieloze stroomfunctie  
MINMAX : array behorende bij plotprocedures (zie handleiding van R.J.J. van Ommen)

c) voorvoegsels.

voorvoegsel BUF : variabelen met dit voorvoegsel hebben een bufferfunctie  
voorvoegsel PLOT : arrays met dit voorvoegsel zijn geheugenarrays voor de plotprocedures

## 5. Verklaring van de tekst van het programma.

In deze paragraaf wordt de tekst van het programma verklaard door uitleg en/of door verwijzing naar de corresponderende paragrafen of formules uit het afstudeerverslag.

- krt. 16 (= kaart 16000) : begin van het programma.
- krt. 70 t/m 75: het inlezen van het beginprofiel.
- krt. 78 t/m 87: het berekenen van  $\Psi_E$  volgens vgl. 2.36, waarbij tussen het eerste en het tweede roosterpunt een Spalding-profiel (vgl. 2.68) wordt verondersteld.
- krt. 90 t/m 93: berekening van de  $\omega$ -waarden van elk roosterpunt volgens vgl. 2.37.
- krt. 125: begin van de "stappen-loop" L1.
- krt. 138 t/m 142: berekening van  $d\Psi_E/dx$  aan de hand van een criterium.
- krt. 144: berekening van  $\Psi_E$  van stroomafwaarts station.
- krt. 156 t/m 158: begin van de "iteratie-loop" L2. Als Breedteberekening := 'TRUE' wordt er niet geïtereerd. In het andere geval wordt het volgende profiel tweemaal herberekend.
- krt. 163: de hoofdstroomsnelheid van het stroomafwaartse station volgens vgl. 2.38.
- krt. 166 t/m 186: berekening van de coëfficiënten van vgl. 2.16 voor de randen van de grenslaag volgens de vergelijkingen uit appendix A.
- krt. 188 t/m 208: berekening van de rest van de coëfficiënten van vgl. 2.16 m.b.v. de vergelijkingen 2.27 t/m 2.34, 2.62, 2.63 en 2.69.
- krt. 239 t/m 252: oplossing van de matrixvergelijking 2.16.
- krt. 253 t/m 264: iteratieve oplossing van  $y_2$  en  $\zeta_w$  volgens de paragraaf 2.6.
- krt. 265 t/m 268: berekening van  $y_1$  volgens vgl. 2.49.
- krt. 270: verplaatsingsdikte volgens vgl. 2.51.
- krt. 272 t/m 286: correctie op de drukgradiënt volgens paragraaf 2.7.
- krt. 287 t/m 298: het regenereren van het stroomopwaartse profiel t.b.v. de iteratie.
- krt. 302: einde van de iteratie-loop L2.
- krt. 335 t/m 346: berekening van de impulsverliesdikte, waarbij tussen het eerste en het tweede roosterpunt een Spalding-profiel wordt verondersteld.
- krt. 348: wandschuifspanning, berekend volgens vgl. 2.85.
- krt. 349: wandschuifspanning, berekend volgens vgl. 2.86.
- krt. 386: einde van de stappen-loop L1.
- krt. 399 t/m 499: plotprocedures volgens de handleiding van R.J.J. v. Ommen.
- krt. 500: einde programma.

6. Voorbeeld van een programma-uitvoer.

In deze paragraaf wordt de uitvoer gegeven welke hoort bij de berekeningen die gedaan zijn met het experimenteel gemeten beginprofiel (zie afstudeerslag).

BEGIN-PROFIEL :

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)	DM(I)
1	0.000000	0.000					0.000000
2	0.002593	7.150	1.463	0.000	6.998	2.474	0.047585
3	0.002989	7.310	1.953	1.453	1.298	3.583	0.056965
4	0.003385	7.470	0.315	1.941	1.404	2.443	0.066552
5	0.003813	7.630	4.455	0.300	1.400	4.942	0.077040
6	0.004194	7.700	2.347	4.439	1.379	6.965	0.086520
7	0.004574	7.790	4.242	2.329	1.447	6.756	0.096161
8	0.004970	7.940	2.333	4.221	2.316	6.846	0.106365
9	0.005763	8.200	0.973	2.310	3.249	3.679	0.127330
10	0.006555	8.280	2.116	0.946	3.404	3.472	0.148709
11	0.007379	8.430	4.073	2.084	3.457	6.567	0.171263
12	0.008140	8.630	1.761	4.155	3.646	6.379	0.192529
13	0.008980	8.730	2.173	1.721	3.813	4.330	0.216415
14	0.009772	8.840	4.067	2.128	3.768	6.621	0.239209
15	0.010549	9.040	0.681	4.017	3.832	5.122	0.261965
16	0.011309	9.070	3.139	0.627	3.931	4.199	0.284510
17	0.012102	9.230	1.808	3.080	4.343	5.358	0.308291
18	0.012974	9.340	1.969	1.744	4.232	4.166	0.334805
19	0.013687	9.420	2.768	1.900	4.101	5.103	0.356715
20	0.014479	9.560	0.655	2.694	6.763	4.056	0.381338
21	0.016096	9.690	1.063	0.574	9.138	2.580	0.432325
22	0.017649	9.890	0.449	0.972	9.376	2.369	0.482133
23	0.019233	9.970	0.502	0.348	9.657	1.818	0.533662
24	0.020818	10.060	0.362	0.390	9.825	1.729	0.585665
25	0.022403	10.120	0.899	0.240	9.977	2.124	0.636058
26	0.023988	10.290	0.518	0.766	10.267	2.281	0.691047
27	0.025573	10.380	0.475	0.374	10.461	1.857	0.744712
28	0.027157	10.460	0.384	0.321	10.621	1.720	0.798784
29	0.028742	10.520	0.100	0.219	10.736	1.338	0.853253
30	0.030327	10.520	0.119	-0.077	7.658	0.770	0.907878
31	0.031000	10.520	0.113	-0.065	5.674	0.597	0.931072
32	0.032000	10.520	0.200	-0.077	10.175	1.090	0.965536
33	0.033000	10.520					1.000000

UNUL=10.520  
 PSIL= 0.369960  
 D<sup>2</sup>SIDA= 0.200000  
 DA= 0.020000  
 DPDA= -2.000  
 JELTA= 0.026365  
 VERPLD.= 0.003984  
 DEBIE.= 7.58617

A-EFFECTIEF= 0.72112

opm.: De kolommen A(I) t/m D(I) zijn de coëfficiënten van de matrixvergelijking 2.16, verkregen uit het er naast staand profiel, met behulp waarvan het volgende snelheidsprofiel wordt berekend.

STATION 1 .... STEP= 50 .... X = 1.840000  
 =====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.003669	7.420	1.436	0.000	11.959	2.958
3	0.004257	7.582	1.632	1.426	2.050	3.329
4	0.004846	7.723	1.750	1.620	2.210	3.656
5	0.005479	7.854	2.126	1.735	2.236	4.146
6	0.006043	7.960	2.384	2.110	2.169	4.767
7	0.006605	8.055	2.432	2.366	2.279	5.081
8	0.007202	8.146	1.362	2.411	3.619	4.217
9	0.008400	8.309	1.553	1.338	5.015	3.495
10	0.009600	8.448	1.682	1.525	5.291	3.833
11	0.010846	8.575	1.997	1.650	5.356	4.272
12	0.012006	8.679	1.974	1.961	5.586	4.578
13	0.013292	8.782	2.113	1.975	5.844	4.752
14	0.014506	8.878	2.114	2.067	5.765	4.830
15	0.015705	8.972	2.130	2.063	5.794	4.839
16	0.016881	9.063	2.012	2.075	5.984	4.747
17	0.018108	9.157	1.796	1.953	6.565	4.466
18	0.019463	9.253	2.150	1.732	6.392	4.572
19	0.020571	9.339	1.900	2.081	6.194	4.644
20	0.021805	9.428	0.921	1.826	10.161	3.824
21	0.024325	9.602	0.914	0.839	13.796	3.190
22	0.026745	9.761	0.851	0.822	14.100	3.118
23	0.029208	9.913	0.801	0.749	14.629	3.026
24	0.031658	10.052	0.746	0.689	14.958	2.923
25	0.034094	10.179	0.680	0.623	15.290	2.805
26	0.036529	10.292	0.607	0.547	15.646	2.674
27	0.038969	10.391	0.530	0.464	15.957	2.529
28	0.041406	10.475	0.446	0.376	16.205	2.368
29	0.043844	10.542	0.357	0.281	16.391	2.192
30	0.046275	10.590	0.549	0.181	11.746	1.839
31	0.047304	10.605	0.318	0.365	8.715	1.505
32	0.048831	10.621	0.200	0.128	15.651	1.801
33	0.050357	10.628				

UNUL = 10.628  
 PSIL = 0.569950  
 D\*SIDA = 0.200000  
 DA = 0.020000  
 OPDA = -1.367  
 DELTA = 0.042335  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW = 0.235372  
 LUDWIEG EN TILLMANN : TAUW = 0.200271  
 ROTTA : TAUW = 0.226061  
 VERPLAATSINGSDIKTE : D1 = 0.006111  
 IMPULSVERLIESDIKTE : D2 = 0.004165  
 SHAPE FACTOR : H = 1.467211  
 A-EFFECTIEF : AEFF = 0.713761

STATION 2 .... STEP= 100 .... X = 2.840000  
 =====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.004800	7.533	1.387	0.000	15.166	3.430
3	0.005583	7.693	1.587	1.377	2.310	3.329
4	0.006368	7.832	1.670	1.575	3.028	3.631
5	0.007212	7.962	2.084	1.656	3.062	4.124
6	0.007963	8.066	2.270	2.067	2.970	4.705
7	0.008718	8.161	2.358	2.251	3.119	4.992
8	0.009508	8.251	1.314	2.338	4.952	4.252
9	0.011107	8.411	1.499	1.290	6.858	3.605
10	0.012709	8.548	1.624	1.472	7.232	3.942
11	0.014373	8.673	1.930	1.552	7.318	4.366
12	0.015922	8.775	1.906	1.893	7.629	4.669
13	0.017641	8.876	2.068	1.933	7.978	4.899
14	0.019264	8.971	2.069	2.022	7.868	4.968
15	0.020867	9.063	2.082	2.019	7.906	4.973
16	0.022440	9.153	1.968	2.028	8.162	4.888
17	0.024031	9.244	1.756	1.909	8.952	4.633
18	0.025894	9.344	2.102	1.692	8.714	4.726
19	0.027378	9.424	1.857	2.033	8.443	4.786
20	0.029030	9.511	0.901	1.783	13.846	4.140
21	0.032405	9.683	0.895	0.819	18.792	3.655
22	0.035647	9.840	0.834	0.803	19.199	3.589
23	0.038949	9.990	0.788	0.733	19.913	3.514
24	0.042233	10.128	0.736	0.676	20.358	3.422
25	0.045500	10.254	0.675	0.614	20.806	3.318
26	0.048764	10.368	0.608	0.542	21.290	3.203
27	0.052037	10.468	0.537	0.464	21.714	3.075
28	0.055305	10.554	0.460	0.382	22.055	2.932
29	0.058573	10.624	0.378	0.295	22.315	2.773
30	0.061831	10.678	0.616	0.202	15.998	2.317
31	0.063210	10.695	0.370	0.432	11.372	1.912
32	0.065255	10.714	0.200	0.180	21.328	2.371
33	0.067297	10.731				

UNUL = 10.731  
 PSIC = 0.769960  
 O'SIDA = 0.200000  
 DA = 0.020000  
 DPDA = -1.297  
 DELTA = 0.056656  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW= 0.226450  
 LUDWIEG EN TILLMANN : TAUW= 0.194208  
 ROTTA : TAUW= 0.217420  
 VERPLAATSINGSOIKTE : O1= 0.008098  
 IMPULSVERLIESOIKTE : O2= 0.005597  
 SHAPE FACTOR : H= 1.44857  
 A-EFFECTIEF : A EFF= 0.706918

STATION 3 ..... STEP= 150 ..... X = 3.840000

=====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.005870	7.677	1.367	0.000	19.469	3.931
3	0.006837	7.838	1.565	1.356	3.606	3.381
4	0.007808	7.977	1.648	1.552	3.884	3.687
5	0.008851	8.108	2.059	1.633	3.927	4.177
6	0.009781	8.213	2.245	2.042	3.809	4.751
7	0.010715	8.308	2.335	2.226	3.999	5.043
8	0.011693	8.398	1.303	2.315	6.349	4.374
9	0.013672	8.559	1.490	1.279	8.791	3.796
10	0.015655	8.697	1.617	1.462	9.268	4.145
11	0.017716	8.822	1.925	1.585	9.377	4.573
12	0.019634	8.926	1.905	1.889	9.775	4.889
13	0.021763	9.028	2.196	1.864	10.221	5.192
14	0.023774	9.115	2.141	2.092	10.070	5.338
15	0.025763	9.200	2.157	2.091	10.109	5.347
16	0.027716	9.283	2.041	2.102	10.428	5.267
17	0.029756	9.368	1.823	1.982	11.427	5.025
18	0.032011	9.460	2.186	1.759	11.113	5.119
19	0.033857	9.535	1.934	2.117	10.761	5.179
20	0.035915	9.616	0.940	1.860	17.635	4.633
21	0.040123	9.778	0.937	0.858	23.905	4.240
22	0.044169	9.926	0.877	0.845	24.397	4.180
23	0.048294	10.069	0.832	0.776	25.284	4.119
24	0.052400	10.202	0.782	0.721	25.832	4.035
25	0.056486	10.324	0.723	0.660	26.388	3.939
26	0.060571	10.435	0.656	0.590	26.994	3.833
27	0.064667	10.535	0.586	0.512	27.527	3.711
28	0.068758	10.621	0.509	0.431	27.960	3.573
29	0.072849	10.693	0.428	0.344	28.293	3.418
30	0.076926	10.750	0.733	0.252	20.289	2.872
31	0.078652	10.769	0.447	0.549	15.060	2.395
32	0.081210	10.792	0.200	0.258	27.063	2.965
33	0.083762	10.821				

UNUL = 10.821  
 PSIC = 0.969960  
 D\*SIDA = 0.200000  
 DA = 0.020000  
 DPOA = -1.164  
 DELTA = 0.074596  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW = 0.223139  
 LUDWIG EN TILLMANN : TAUW = 0.191365  
 ROTTA : TAUW = 0.212623  
 VERPLAATSINGSDIKTE : D1 = 0.009803  
 IMPULSVERLIESDIKTE : D2 = 0.006851  
 SHAPE FACTOR : H = 1.430804  
 A-EFFECTIEF : A EFF = 0.701074



STATION 4 .... STEP= 200 .... X = 4.840000

=====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	O(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.006922	7.791	1.344	0.000	23.932	4.431
3	0.008073	7.951	1.539	1.334	4.413	3.427
4	0.009227	8.091	1.621	1.526	4.752	3.735
5	0.010468	8.222	2.025	1.607	4.803	4.216
6	0.011574	8.325	2.208	2.009	4.658	4.776
7	0.012636	8.420	2.297	2.189	4.889	5.067
8	0.013849	8.510	1.281	2.276	7.760	4.470
9	0.016206	8.670	1.465	1.258	10.741	3.961
10	0.018567	8.807	1.589	1.437	11.320	4.311
11	0.021022	8.931	1.891	1.557	11.450	4.730
12	0.023308	9.034	1.870	1.854	11.933	5.045
13	0.025846	9.135	2.154	1.829	12.475	5.349
14	0.028243	9.221	2.116	2.069	12.288	5.518
15	0.030615	9.305	2.130	2.066	12.332	5.522
16	0.032944	9.387	2.014	2.076	12.719	5.445
17	0.035377	9.471	1.798	1.955	13.935	5.224
18	0.038068	9.562	2.154	1.734	13.549	5.304
19	0.040271	9.636	1.904	2.085	13.117	5.350
20	0.042728	9.716	0.925	1.830	21.492	4.967
21	0.047753	9.876	0.921	0.843	29.121	4.713
22	0.052536	10.022	0.861	0.829	29.711	4.656
23	0.057514	10.163	0.817	0.760	30.780	4.606
24	0.062423	10.294	0.768	0.705	31.437	4.527
25	0.067307	10.414	0.709	0.645	32.105	4.437
26	0.072193	10.524	0.644	0.576	32.834	4.341
27	0.077093	10.622	0.576	0.501	33.476	4.228
28	0.081938	10.707	0.502	0.422	33.997	4.099
29	0.086833	10.773	0.424	0.337	34.398	3.953
30	0.091762	10.835	0.730	0.248	24.666	3.255
31	0.093826	10.854	0.449	0.547	18.308	2.682
32	0.096888	10.878	0.200	0.259	32.901	3.484
33	0.099942	10.908				

UNUL = 10.908  
 PSIC = 1.169960  
 OPSIDA = 0.200000  
 DA = 0.020000  
 OPDA = -1.137  
 DELTA = 0.089036  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW = 0.220640  
 LUDWIG EN TILLMANN : TAUW = 0.188217  
 ROTTA : TAUW = 0.209415  
 VERPLAATSINGSDIKTE : D1 = 0.011448  
 IMPULSVERLIESDIKTE : D2 = 0.008046  
 SHAPE FACTOR : H = 1.422757  
 A-EFFECTIEF : A EFF = 0.695457

STATION 5 .... STEP= 250 .... X = 5.840000  
 =====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.007954	7.893	1.328	0.000	28.273	4.937
3	0.009284	8.054	1.521	1.318	5.233	3.488
4	0.010618	8.193	1.602	1.508	5.635	3.798
5	0.012053	8.324	2.002	1.588	5.694	4.274
6	0.013333	8.427	2.183	1.986	5.521	4.824
7	0.014619	8.522	2.271	2.165	5.794	5.115
8	0.015965	8.612	1.267	2.251	9.195	4.585
9	0.018692	8.771	1.448	1.244	12.723	4.142
10	0.021426	8.908	1.571	1.421	13.407	4.496
11	0.024268	9.031	1.869	1.539	13.557	4.909
12	0.026915	9.133	1.848	1.832	14.127	5.227
13	0.029855	9.234	2.128	1.807	14.766	5.534
14	0.032633	9.319	2.102	2.057	14.542	5.720
15	0.035381	9.403	2.116	2.052	14.592	5.720
16	0.038079	9.484	2.000	2.061	15.047	5.647
17	0.040900	9.567	1.784	1.940	16.484	5.447
18	0.044019	9.658	2.137	1.720	16.025	5.516
19	0.046573	9.731	1.888	2.067	15.512	5.550
20	0.049422	9.811	0.916	1.814	25.412	5.321
21	0.055249	9.970	0.912	0.835	34.424	5.200
22	0.060855	10.115	0.853	0.821	35.112	5.145
23	0.066575	10.255	0.808	0.751	36.368	5.106
24	0.072271	10.385	0.759	0.696	37.136	5.031
25	0.077941	10.504	0.701	0.636	37.917	4.947
26	0.083614	10.613	0.636	0.568	38.772	4.857
27	0.089304	10.710	0.569	0.493	39.524	4.752
28	0.094989	10.794	0.496	0.414	40.132	4.628
29	0.100674	10.865	0.418	0.330	40.602	4.486
30	0.106342	10.921	0.719	0.242	29.112	3.627
31	0.108741	10.940	0.442	0.535	21.607	2.952
32	0.112298	10.963	0.200	0.252	38.827	3.594
33	0.115846	10.993				

UNUL = 10.993  
 PSIE = 1.369960  
 OPSIDA = 0.200000  
 DA = 0.020000  
 OPDA = -1.110  
 DELTA = 0.103227  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW = 0.218986  
 LUDWIG EN TILLMANN : TAUW = 0.185645  
 ROTTA : TAUW = 0.207256  
 VERPLAATSINGSOIKTE : O1 = 0.013022  
 IMPULSVERLIESOIKTE : O2 = 0.009187  
 SHAPE FACTOR : H = 1.417382  
 A-EFFECTIEF : A EFF = 0.690101

STATION 6 .... STEP= 300 .... X = 6.840000

=====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.008964	7.989	1.316	0.000	32.793	5.447
3	0.010470	8.150	1.508	1.306	6.069	3.558
4	0.011981	8.289	1.589	1.495	6.533	3.872
5	0.013607	8.420	1.985	1.574	6.601	4.343
6	0.015057	8.523	2.165	1.969	6.399	4.884
7	0.016514	8.618	2.252	2.146	6.714	5.177
8	0.018040	8.707	1.256	2.232	10.655	4.712
9	0.021131	8.866	1.436	1.233	14.739	4.332
10	0.024231	9.003	1.558	1.408	15.527	4.691
11	0.027454	9.126	1.853	1.526	15.699	5.099
12	0.030456	9.227	1.832	1.816	16.356	5.421
13	0.033791	9.328	2.109	1.791	17.093	5.733
14	0.036942	9.413	2.093	2.048	16.832	5.930
15	0.040060	9.496	2.106	2.043	16.888	5.928
16	0.043123	9.577	1.990	2.052	17.413	5.860
17	0.046324	9.660	1.775	1.931	19.073	5.680
18	0.049864	9.750	2.125	1.711	19.539	5.737
19	0.052764	9.823	1.877	2.056	17.944	5.759
20	0.055998	9.903	0.911	1.803	29.393	5.682
21	0.062615	10.061	0.906	0.829	39.808	5.692
22	0.068983	10.205	0.846	0.815	40.596	5.639
23	0.075480	10.344	0.802	0.745	42.039	5.611
24	0.081952	10.473	0.752	0.690	42.919	5.540
25	0.088396	10.592	0.694	0.630	43.816	5.461
26	0.094843	10.700	0.630	0.561	44.796	5.378
27	0.101311	10.796	0.562	0.486	45.658	5.278
28	0.107774	10.880	0.490	0.408	46.356	5.158
29	0.114239	10.950	0.413	0.324	46.892	5.020
30	0.120684	11.005	0.706	0.237	33.619	3.997
31	0.123412	11.024	0.434	0.522	24.951	3.219
32	0.127457	11.047	0.200	0.244	44.834	4.503
33	0.131493	11.075				

UNUL = 11.075  
 PSIC = 1.569960  
 DPSIDA = 0.200000  
 DA = 0.020000  
 DPA = -1.087  
 DELTA = 0.117185  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW = 0.218032  
 LUDWIEG EN TILLMANN : TAUW = 0.183609  
 ROTTA : TAUW = 0.205810  
 VERPLAATSINGSDIKTE : D1 = 0.014522  
 IMPULSVERLIESDIKTE : D2 = 0.010282  
 SHAPE FACTOR : H = 1.413384  
 A-EFFECTIEF : AEF = 0.684983

STATION 7 .... STEP= 350 .... X = 7.840000  
 =====

I	Y(I)	U(I)	A(I)	B(I)	C(I)	D(I)
1	0.000000	0.000				
2	0.009955	8.080	1.307	0.000	37.392	5.961
3	0.011634	8.241	1.498	1.297	6.918	3.634
4	0.013319	8.380	1.578	1.485	7.446	3.952
5	0.015132	8.511	1.973	1.564	7.522	4.420
6	0.016749	8.615	2.151	1.956	7.291	4.953
7	0.018375	8.709	2.238	2.133	7.649	5.249
8	0.020077	8.798	1.248	2.217	12.138	4.845
9	0.023526	8.957	1.427	1.225	16.787	4.526
10	0.026985	9.094	1.547	1.359	17.682	4.891
11	0.030583	9.216	1.840	1.515	17.875	5.295
12	0.033935	9.318	1.820	1.804	18.620	5.622
13	0.037658	9.418	2.095	1.779	19.457	5.939
14	0.041177	9.503	2.087	2.043	19.157	6.146
15	0.044659	9.586	2.099	2.037	19.219	6.141
16	0.048080	9.666	1.983	2.045	19.814	6.077
17	0.051656	9.749	1.768	1.923	21.701	5.917
18	0.055611	9.839	2.116	1.704	21.091	5.963
19	0.058851	9.912	1.869	2.047	20.412	5.975
20	0.062464	9.991	0.906	1.795	33.433	6.048
21	0.069859	10.148	0.901	0.825	45.270	6.187
22	0.076977	10.292	0.841	0.810	46.158	6.136
23	0.084240	10.430	0.796	0.740	47.791	6.118
24	0.091476	10.559	0.747	0.685	48.784	6.052
25	0.098682	10.677	0.689	0.624	49.795	5.977
26	0.105894	10.784	0.624	0.556	50.902	5.900
27	0.113129	10.880	0.557	0.481	51.876	5.806
28	0.120359	10.963	0.484	0.403	52.662	5.690
29	0.127592	11.033	0.407	0.319	53.266	5.554
30	0.134805	11.087	0.693	0.231	38.184	4.368
31	0.137857	11.106	0.425	0.509	28.339	3.486
32	0.142385	11.128	0.200	0.236	50.918	5.011
33	0.146902	11.155				

UMUL = 11.155  
 PSIC = 1.769960  
 DP SID A = 0.200000  
 DA = 0.200000  
 DP DA = -1.068  
 JELTA = 0.130926  
 DEBIE = 7.58617

NUMERIEK : TAUW= 0.217594  
 LUDWIEG EN TILLMANN : TAUW= 0.182000  
 ROTTA : TAUW= 0.204870  
 VERPLAATSINGSDIKTE : D1= 0.015986  
 IMPULSVERLIESDIKTE : D2= 0.011335  
 SHAPE FACTOR : H= 1.410257  
 A-EFFECTIEF : AEFF= 0.680071

KANAALBREEDTE VOOR DP/DX = -3.000

X= 0.84	BREEDTE= 0.7000
X= 1.24	BREEDTE= 0.6965
X= 1.64	BREEDTE= 0.6932
X= 2.04	BREEDTE= 0.6898
X= 2.44	BREEDTE= 0.6865
X= 2.84	BREEDTE= 0.6832
X= 3.24	BREEDTE= 0.6799
X= 3.64	BREEDTE= 0.6767
X= 4.04	BREEDTE= 0.6735
X= 4.44	BREEDTE= 0.6704
X= 4.84	BREEDTE= 0.6672
X= 5.24	BREEDTE= 0.6642
X= 5.64	BREEDTE= 0.6611
X= 6.04	BREEDTE= 0.6582
X= 6.44	BREEDTE= 0.6552
X= 6.84	BREEDTE= 0.6524
X= 7.24	BREEDTE= 0.6495
X= 7.64	BREEDTE= 0.6467
X= 7.84	BREEDTE= 0.6454