

MASTER

Tweedimensionale ladderstructuur

Claasen, T.A.C.M.

Award date:
1969

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

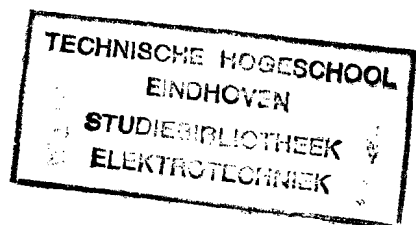
Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK
Groep Theoretische Elektrotechniek B

Tweedimensionale ladderstructuur

door: T.A.C.M. Claasen



Verslag van het afstudeerwerk verricht
in de groep Theoretische Elektrotechniek B
bij Prof.Dr.-Ing. H.J. Butterweck

oktober 1969.

ETB-26-1969

310816

Inhoudsopgave.

Samenvatting	1
1. Inleiding	2
2. De toestandsvergelijking	4
2.1. Gelijke L's en C's, rechthoekige vorm	6
2.1.1. Staandegolf oplossing	7
2.1.2. Lopendegolf oplossing	9
2.2. Niet-gelijke L's en C's	10
2.3. gelijke Z-Y-schakeling	10
3. Orthogonaliteit en volledigheid van het stelsel eigen functies	12
3.1. Orthogonaliteitsstelling	12
3.2. Volledigheid van het stelsel eigenfuncties	13
3.3. De eigenwaarden	14
4. Functie van Green	16
4.1. Het begrip greensefunctie	16
4.2. De impedantie als greensefunctie	17
5. De impedantiefunctie $Z(p)$	19
5.1. $Z_{AA}(p)$ is een reaktantiefunctie	19
5.2. Residuenstelling	20
5.3. Impedantiefunctie van de Z-Y-schakeling	20
5.4. Enige eigenschappen van de overdrachtsimpedantie	21
6. Ontaarding; het aantal eigenfrequenties	24
7. Limietovergang	27
Appendix A.	
Differenties en differentievergelijkingen	30
A.1. Definities en eigenschappen	30
A.2. Differentievergelijkingen	32
A.3. Partiële differentie vergelijkingen	34
Appendix B.	
Bewijs van de orthogonaliteitsstelling uit 3.1.	35
Notaties en gebruikte symbolen	39
Litteratuurlijst	41

Samenvatting

In dit rapport worden een aantal eigenschappen afgeleid en besproken van een tweedimensionale ladderstructuur. Hieronder wordt verstaan de structuur die is weergegeven in figuur 1, en die is op te vatten als een uitbreiding in twee dimensies van de uit de netwerktheorie bekende ladderschakeling.

Na een inleiding waarin de structuur nader wordt toegelicht volgt een hoofdstuk waarin de systeemvergelijkingen worden opgesteld.

Het systeem wordt daarbij beschreven door een differentievergelijking en een stelsel randvoorwaarden voor de spanningen op de diverse knooppunten.

Voor een aantal speciale vormen van een tweedimensionaal laddernetwerk worden met behulp van deze systeemvergelijkingen de eigenfrequenties en de bijbehorende eigenfuncties (de spanningsverdelingen over de knooppunten) bepaald.

In hoofdstuk 3 wordt aangenomen dat voor een bepaald netwerk alle eigenfuncties en eigenfrequenties bekend zijn. Daarvan uitgaande wordt bewezen dat:

- 1/ alle eigenfuncties onderling orthogonaal zijn,
- 2/ het stelsel eigenfuncties een volledig stelsel vormt.

Op grond hiervan worden een aantal eigenschappen van de eigenwaarden van het beschouwde systeem afgeleid.

In hoofdstuk 4 wordt het begrip greense functie geïntroduceerd en toegelicht en wordt de greense functie voor het systeem bepaald, uitgedrukt in de eigenwaarden en eigenfuncties. Tevens wordt een verband gelegd tussen de greense functie en de overdrachts- respektievelijk ingangs-impedantie van het overdrachtssysteem dat als ingangsklemmen een willekeurig knooppunt en aarde en als uitgangsklemmen een ander willekeurig knooppunt en aarde heeft.

Door deze samenhang is het mogelijk voor de overdrachts- en ingangs-impedantie een formule te geven waarbij ze worden uitgedrukt in de eigenfuncties en eigenfrequenties van het netwerk.

Dat de zo gevonden ingangsimpedantie voldoet aan een aantal algemeen geldende voorwaarden (reaktieve functie, residuen stelling) wordt aangetoond in hoofdstuk 5. Daar wordt tevens aangegeven hoe de formules voor de overdrachts- en ingangs-impedanties eruit zien voor het geval de schakeling niet wordt opgebouwd uit gelijke L's en C's, doch uit onderling gelijke maar verder willekeurige impedanties.

In hoofdstuk 6 wordt nader ingegaan op het geval dat er ontarding optreedt, dat wil zeggen dat er twee of meer eigenfrequenties samenvallen. Tevens wordt een beschouwing gewijd aan het aantal eigenfrequenties, waaruit blijkt dat door de beschrijving van het systeem door een differentievergelijking met randvoorwaarden alle eigenfrequenties gevonden worden.

Ten slotte wordt nog nagegaan wat er gebeurt met het spectrum van eigenfrequenties voor het geval dat het aantal elementen van de schakeling toeneemt, maar de elementwaarden evenredig kleiner worden.

Dit geeft een indruk van de mate waarin het beschouwde diskrete netwerk een benadering vormt van het continue analogon, de vlakke plaatkondensator.

1. Inleiding.

In dit rapport wordt een begin gemaakt met een studie over de eigenschappen van een elektrisch netwerk met een speciale structuur, die wordt aangeduid met de term "twee-dimensionale ladderstructuur".

Hiermee wordt bedoeld een structuur zoals die is weergegeven in figuur 1. De bekende ladderschakeling, zoals die frekvent wordt toegepast voor de synthese van filters, is gekarakteriseerd door een kaskade-schakeling van sekties met een uitbreidings mogelijkheid in een dimensie.

De twee dimensionale ladder ontleent zijn naam aan het feit dat uitbreiding van de structuur op elk punt kan plaats hebben in twee dimensies.

De een-dimensionale ladder is een bijzonder geval van de twee-dimensionale, en alles wat voor deze laatste in dit rapport wordt afgeleid is dus ook geldig voor de gewone ladder.

Van vele typen (een dimensionale) laddernetwerken zijn de eigenschappen bestudeerd en synthese-methoden voor gebruik als filter bekend. (/1.1/,/1.2/, /1.3/,/1.7/,/1.8/).

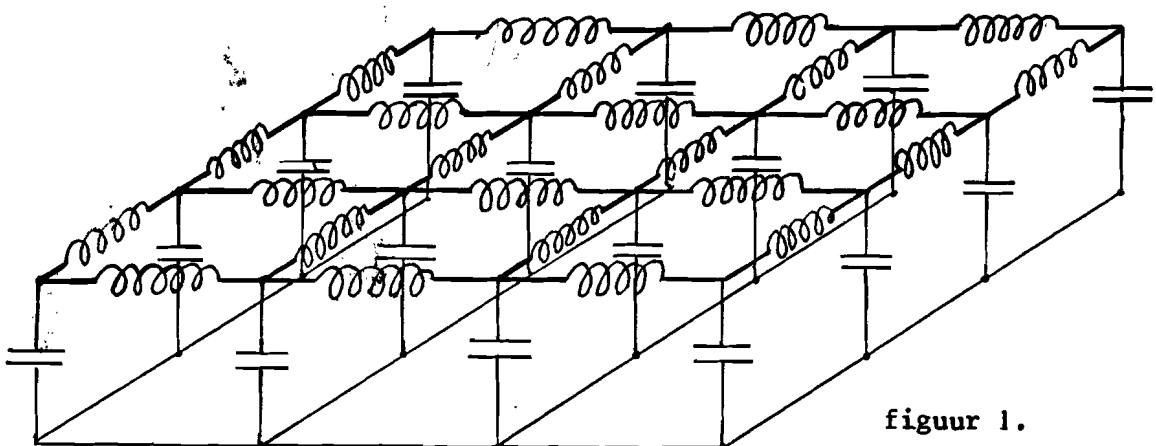
Bij de tweedimensionale ladder is dit niet het geval.

Onderzoek van deze ladderstructuur kan van belang zijn, in verband met de mogelijkheid van realisering van netwerken door middel van opgedampte circuits, waarbij bij voorkeur in twee dimensies gewerkt wordt en waarbij afstanden een rol spelen. Voorts daar waar fysische vervangingsmiddelen gebruikt worden voor de bekende netwerkelementen, zoals bijvoorbeeld in de mikrogolftechniek (golfpipen).

De twee-dimensionale ladderstructuur heeft een symetrische opbouw. Het is daardoor mogelijk gebleken gebruik te maken van differentie-vergelijkingen. Hierdoor wordt aansluiting verkregen met een klasse van problemen uit de fysica zoals bijvoorbeeld golfverschijnselen in kristallen (/4.3/) en problemen met diskrete massaverdelingen (geladen membraan /4.2/), waaraan reeds enige studie is verricht.

Voorts blijken de toestands vergelijkingen beschreven door de differentie vergelijkingen een grote overeenkomst te vertonen met de differentiaal-vergelijkingen voor de continue systemen zoals membranen, golfpip, lange lijnen enz. (/3.4/).

Deze laatste systemen zijn zeer uitvoerig onderzocht, en het is, door de genoemde analogie, mogelijk van de resultaten hiervan gebruik te maken bij de bestudering van het onderhavige netwerk.



figuur 1.

Zo blijkt bijvoorbeeld dat de een-dimensionale ladder met spoelen en condensatoren als elementen, beschreven met de differentie-vergelijking en randvoorwaarden het analogon vormt van het Sturm-Liouville eigenwaarden probleem uit de fysica, waarover een groot aantal stellingen bekend zijn. (/3.4/,/4.2/).

Er is zo een koppeling tot stand gebracht tussen de eigenwaarden problemen uit de fysica en die uit de netwerktheorie.

In dit rapport wordt voornamelijk gewerkt met een twee-dimensionale ladder structuur met een spoel als impedantie tussen twee knooppunten en een condensator tussen elk knooppunt en aarde.

Het netwerk wordt beschreven door middel van de spanningen van de knooppunten ten opzichte van aarde.

De knooppunten worden ingedeeld in rijen en kolommen en gekarakteriseerd door een tweetal diskrete plaatscoördinaten x en y in een aangelegd assenstelsel.

2. De toestands vergelijkingen.

Zij nu gegeven een twee dimensionale ladderschakeling als in figuur 1. Op een willekeurig knooppunt (x,y) dat geen randpunt is luiden de Kirchhoff stroom en spannings vergelijkingen voor het bronloze netwerk:

$$i(\underline{x-1}, y, t) - i(\underline{x}, y, t) + i(x, \underline{y-1}, t) - i(x, \underline{y}, t) - i(x, y, t) = 0 \quad 2-1.$$

$$\frac{d}{dt} i(\underline{x}, y, t) = \frac{1}{L(\underline{x}, y)} (V(x, y, t) - V(x+1, y, t)) \quad 2-2.$$

$$\frac{d}{dt} i(x, \underline{y}, t) = \frac{1}{L(x, \underline{y})} (V(x, y, t) - V(x, y+1, t)) \quad 2-3.$$

$$i(x, y, t) = C(x, y) \frac{d}{dt} V(x, y, t) \quad 2-4.$$

Door eliminatie van de stromen in vergelijking 2-1 ontstaat de vergelijking:

$$\begin{aligned} & \frac{V(x-1, y, t) - V(x, y, t)}{L(x-1, y)} - \frac{V(x, y, t) - V(x+1, y, t)}{L(x, y)} + \frac{V(x, y-1, t) - V(x, y, t)}{L(x, y-1)} + \\ & - \frac{V(x, y, t) - V(x, y+1, t)}{L(x, y)} - C(x, y) \frac{d^2}{dt^2} V(x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad 2-5.$$

Bij overgang op differentie notaties (zie appendix A) krijgt deze vergelijking de vorm:

$$\begin{aligned} & E^{-1} \Delta_x (a(x, y) \Delta_x V(x, y, t)) + F^{-1} \Delta_y (b(x, y) \Delta_y V(x, y, t)) + \\ & - c(x, y) L_0 C_0 \frac{d^2}{dt^2} V(x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad 2-6.$$

L_0 en C_0 zijn normerings konstanten.

De homogene differentie- differentiaalvergelijking 2-6 is lineair, en heeft een oplossing $V(x, y, t) = V(x, y) T(t)$, waarbij $V(x, y)$ en $T(t)$ moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$E^{-1} \Delta_x (a(x, y) \Delta_x V(x, y)) + F^{-1} \Delta_y (b(x, y) \Delta_y V(x, y)) - c(x, y) L_0 C_0 p^2 V(x, y) = 0 \quad 2-7.$$

respektievelijk:

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) - p^2 T(t) = 0 \quad 2-8.$$

waarin p^2 een willekeurige complexe konstante is.

Op de diverse randpunten gelden voor de spanningsfunctie $V(x,y)$ analoge vergelijkingen als 2-7. afhankelijk van de kondities die aan de rand worden opgelegd.

Deze vergelijkingen worden aangeduid met de term randvoorwaarden.

De algemene oplossing van vergelijking 2-8. is:

$$T(t) = A e^{pt} + B e^{-pt} \quad 2-9.$$

(als $p \neq 0$), waarbij de konstanten A en B worden bepaald door de beginvoorwaarden van het netwerk.

De homogene differentie vergelijking 2-7. met de bijbehorende randvoorwaarden (bij afwezigheid van brontermen in de vergelijkingen voor de randpunten wordt gesproken van homogene randvoorwaarden) heeft slechts oplossingen voor bepaalde waarden van p^2 : $p^2 = p_\mu^2$ $\mu = 1,2,..$ en vormt daardoor een eigenwaarden probleem.

Bij elk van deze waarden p_μ^2 behoort een vergelijking van het type 2-8. voor $T(t)$, met een oplossing van de vorm 2-9, zodat de p_μ 's de frekwenties zijn van de mogelijke trillingen van het bronloze netwerk: de eigenfrekwenties.

opmerkingen:

Meestal worden de termen eigenwaarde en eigenfrekwentie door elkaar gebruikt. Hier wordt met eigenwaarde bedoeld die waarde van $\lambda = -p^2 L C$ waarvoor de homogene differentie vergelijking met randvoorwaarden een oplossing $V \neq 0$ heeft, en onder eigenfrekwenties de bij elk van deze λ 's behorende waarden van p .

De vergelijkingen 2-7 en 2-8 vertonen veel overeenkomst met de differentiaalvergelijkingen die de toestand van een trillend, inhomogeen membraan beschrijven, en is gelijk aan het stelsel vergelijkingen dat geldig is voor een met massapunten belast membraan. (/4.2/).

2.1 Gelijke L's en C's, rechthoekige vorm.

Voor het geval dat alle L's en alle C's van het netwerk gelijk zijn:

$L(\underline{x},y) = L(x,\underline{y}) = L_0$; $C(x,y) = C_0$, krijgt vergelijking 2-7 de eenvoudige vorm:

$$E^{-1} \Delta_x^2 V(x,y) + F^{-1} \Delta_y^2 V(x,y) + \lambda V(x,y) = 0 \quad 2.1-1.$$

met $\lambda = -p^2 L_0 C_0$.

In deze paragraaf zullen de eigenfrequenties en eigenfuncties bepaald worden voor een dergelijk netwerk, dat de vorm heeft van een rechthoek, met m knooppunten in de x-richting en n knooppunten in de y-richting.

Er zullen daarbij drie mogelijke randtoestanden beschouwd worden, enwel:

- I. kortgesloten rand; alle randknooppunten zijn met aarde verbonden.
- II. open rand; gelijke L's en C's op de rand als in het netwerk.
- III. open rand, celstructuur. Het netwerk kan opgebouwd gedacht worden uit elementaire cellen (figuur 2) die als bouwstenen voor het netwerk dienen. Inwendig ontstaat dan hetzelfde netwerk, maar de randvoorwaarden zijn anders.

In alle gevallen zijn de randvoorwaarden en de differentie vergelijking te splitsen in een deel dat alleen afhankelijk is van x en een deel dat alleen afhankelijk is van y. Dus wordt een oplossing gevonden van de vorm:

$$V(x,y) = X(x).Y(y)$$

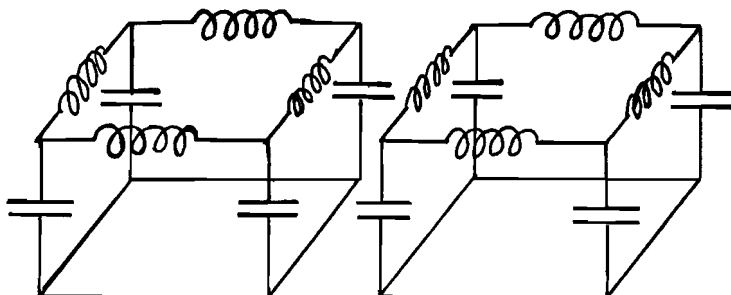
Uit vergelijking 2.1-1 volgt dat dan moet gelden:

$$E^{-1} \Delta_x^2 X(x) + 2\alpha X(x) = 0 \quad 2.1-2a.$$

$$F^{-1} \Delta_y^2 Y(y) + 2\beta Y(y) = 0 \quad 2.1-2b.$$

$$2\alpha + 2\beta = \lambda \quad 2.1-2c.$$

waarin 2α en 2β komplexe konstanten zijn.



figuur 2.

2.1.1. Staande golf oplossing.

Als oplossing voor $X(x)$ wordt gesteld: $X(x) = A \mu^x$.

Uit 2.1-2a volgt dan dat $\mu - 2 + \mu^{-1} + 2\alpha = 0$;

ofwel:
$$\mu_{1,2} = 1 - \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha} \quad 2.1.1-1a.$$

zodat $\mu_2 = \mu_1^{-1}$.

De algemene oplossing van vergelijking 2.1-2a is dan:

$X(x) = A \mu_1^x + B \mu_1^{-x}$ (indien $\mu_1 \neq \mu_2$)

$X(x) = (A + Bx) \mu_1^x$ (indien $\mu_1 = \mu_2$) 2.1.1-1b.

Als oplossing voor $Y(y)$ wordt gevonden:

$$v_{1,2} = 1 - \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2\beta} \quad 2.1.1-2a$$

$Y(y) = A' v_1^y + B' v_1^{-y}$ (indien $v_1 \neq v_2$)

$Y(y) = (A' + B'y) v_1^y$ (indien $v_1 = v_2$) 2.1.1-2b.

I. Kortgesloten rand.

In dit geval is $V(x,y) = 0$ op de rand S , zodat voor $X(x)$ respectievelijk $Y(y)$ de randvoorwaarden zijn:

$X(1) = X(m) = 0$

$Y(1) = Y(n) = 0.$

Dus, indien $\mu_1 \neq \mu_2$,

$A \mu_1 + B \mu_1^{-1} = 0$

$A \mu_1^m + B \mu_1^{-m} = 0.$

Dit stelsel homogene vergelijkingen in A en B heeft slechts dan een niet triviale oplossing indien:

$\mu_1^{2(m-1)} = 1$; dus als $\mu_1 = \exp(j\eta \frac{\pi}{m-1})$ $\eta = 1, 2, \dots, m-2.$

($\eta = 0$ en $\eta = m-1$ zijn niet toegelaten omdat dan $\mu_1 = \mu_1^{-1}$)

Uit vergelijking 2.1.1-1a volgt:

$2\alpha = 4 \sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2(m-1)}\right)$

De oplossing is dan:

$$X(x) = A \sin(\eta\pi \frac{x-1}{m-1}) \quad 2.1.1-3a.$$

$$Y(y) = A' \sin(\zeta\pi \frac{y-1}{n-1}) \quad 2.1.1-3b.$$

$$\lambda = 2\alpha + 2\beta = 4 \left\{ \sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2(m-1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\zeta\pi}{2(n-1)}\right) \right\} \quad 2.1.1-3c.$$

De tweede vergelijking van 2.1.1-1b en 2.1.1-2b geeft bij de gegeven randvoorwaarden alleen de triviale oplossing $X = Y = 0$.

De eigenfuncties zijn in dit geval dus: (zie /4.2/ §401 ev.)

$$V_{\eta\zeta}(x,y) = A. \sin(\eta\pi \frac{x-1}{m-1}) . \sin(\zeta\pi \frac{y-1}{n-1}) \quad 2.1.1-4a.$$

en de bijbehorende eigenfrequenties:

$$k_{\omega_{\eta\zeta}}^2 = \frac{4}{L_o C_o} \left\{ \sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2(m-1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\zeta\pi}{2(n-1)}\right) \right\} \quad 2.1.1-4b$$

$$\eta = 1, 2, \dots, m-2.$$

$$\zeta = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$A = A(\eta, \zeta).$$

II. Open rand, gelijke L's en C's.

De randvoorwaarden luiden in dit geval:

$$\Delta_x X(x) + 2\alpha X(x) = 0 \quad \text{als } x=1$$

$$E^{-1} \Delta_x X(x) + 2\alpha X(x) = 0 \quad \text{als } x=m.$$

en analoge vergelijkingen voor $Y(y)$.

Op dezelfde wijze als onder I worden nu de eigenfuncties en eigenfrequenties bepaald:

$$V_{\eta\zeta}(x,y) = B. \cos(\eta\pi \frac{x-1}{m}) . \cos(\zeta\pi \frac{y-1}{n}) \quad 2.1.1-5a.$$

$$\omega_{\eta\zeta}^2 = \frac{4}{L_o C_o} \left\{ \sin^2 \frac{\eta\pi}{2m} + \sin^2 \frac{\zeta\pi}{2n} \right\} \quad 2.1.1-5b$$

$$\eta = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$\zeta = 0, 1, \dots, n-1.$$

III. Open rand, celstructuur.

De randvoorwaarden hiervoor zijn:

$$\Delta_x X(x) + \alpha X(x) = 0 \quad \text{als } x=1$$

$$E^{-1} \Delta_x X(x) + \alpha X(x) = 0 \quad \text{als } x=m$$

en analoge vergelijkingen voor $Y(y)$.

Dit geeft de eigenfuncties en eigenfrequenties:

$$V_{\eta\zeta}(x,y) = D \cdot \cos(\eta\pi \frac{x-1}{m-1}) \cdot \cos(\zeta\pi \frac{y-1}{n-1}) \quad 2.1.1-6a$$

$$c_{\omega_{\eta\zeta}}^2 = \frac{4}{L_o C_o} \left\{ \sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2(m-1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\zeta\pi}{2(n-1)}\right) \right\} \quad 2.1.1-6b.$$

$$\eta = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$\zeta = 0, 1, \dots, n-1.$$

In dit geval treden dezelfde eigenfrequenties op als bij de kortgesloten rand, zodat dit netwerk meer overeenkomst vertoont met een trillend membraan. Dit heeft immers dezelfde eigenfrequenties bij ingeklemde rand als bij open rand, met uitzondering van $\omega = 0$.

2.1.2. Lopende golf oplossing.

De oplossing van de vergelijking 2-6 is te schrijven in de vorm:

$$V(x,y,t) = A(\phi,\psi) \exp j(\omega t + \phi x + \psi y) + B(\phi,\psi) \exp j(-\omega t + \phi x + \psi y). \quad 2.1.2-1.$$

waarbij

$$\omega^2 = \omega^2(\phi,\psi) = \frac{4}{L_o C_o} (\sin^2 \phi/2 + \sin^2 \psi/2) \quad (\text{dispersie relatie}).$$

Dit zijn twee vlakke golven die zich voortplanten in een richting $\vec{g} = (\phi, \psi)$ respektievelijk $-\vec{g}$, met een snelheid \vec{v} waarvoor geldt:

$$|\vec{v}| = \frac{\omega}{|\vec{g}|} = \frac{2}{\sqrt{L_o C_o}} \left\{ \frac{\sin^2 \phi/2 + \sin^2 \psi/2}{\phi^2 + \psi^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

De amplitudes en de fase van de spanningen op alle knooppunten (x,y) die liggen op een lijn $\phi x + \psi y = \text{konstant}$ zijn aan elkaar gelijk op elk moment. De algemene oplossing is te schrijven als een som van alle mogelijke vlakke golven:

$$V(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \{ A(\phi,\psi) \exp j(\omega t + \phi x + \psi y) + B(\phi,\psi) \exp j(-\omega t + \phi x + \psi y) \}$$

De golven planten zich niet met gelijke snelheid voort, zodat dispersie optreedt. Golven met een frequentie groter dan $4/\sqrt{L_o C_o}$ worden niet meer voortgeplant.

Het gebruik van deze oplossing kan soms voordelen hebben boven de staande golf oplossing. Bijvoorbeeld bij de eendimensionale ladder, waarbij slechts twee mogelijke voortplantings richtingen zijn kan deze beschouwingswijze nieuwe inzichten opleveren.

Bij gelijke LC waarden is een bepaling van polen en nulpunten mogelijk die volledig analoog is aan de afleiding bij lange leidingen.

2.2. Niet gelijke L's en C's.

Indien niet alle L's en C's gelijk zijn is het niet meer mogelijk voor de differentievergelijking een algemene oplossing te geven, waaruit dan met de randvoorwaarden de eigenfrequenties en de eigenfuncties bepaald kunnen worden. Onder bepaalde omstandigheden is het soms toch mogelijk een expliciete uitdrukking voor de eigenfrequenties af te leiden.

Als voorbeeld zal voor een speciaal geval hieronder de oplossing van de eigenfrequenties gegeven worden.

Voor dit geval geldt dat op elk punt (x,y):

$$\frac{a(x,y)}{c(x,y)} = a_1 ; \quad \frac{a(x-1,y)}{c(x,y)} = b_1 ; \quad \frac{b(x,y)}{c(x,y)} = a_2 ; \quad \frac{b(x,y-1)}{c(x,y)} = b_2 . \quad 2.2-1.$$

De differentievergelijking krijgt dan de eenvoudige vorm:

$$a_1 V(x+1,y) + b_1 V(x-1,y) + a_2 V(x,y+1) + b_2 V(x,y-1) - (a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + p^2 L_0 C_0) V(x,y) = 0.$$

Op gelijke wijze als in 2.1.1. worden dan bij opengelaten rand als eigenfrequenties gevonden:

$$\omega_{\eta\zeta}^2 = \frac{\sqrt{a_1 b_1}}{L_0 C_0} \{ \exp j(\eta\pi/m) + \exp -j(\eta\pi/m) - \sqrt{a_1/b_1} - \sqrt{b_1/a_1} \} +$$

$$+ \frac{\sqrt{a_2 b_2}}{L_0 C_0} \{ \exp j(\zeta\pi/n) + \exp -j(\zeta\pi/n) - \sqrt{a_2/b_2} - \sqrt{b_2/a_2} \}.$$

$$\eta = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$\zeta = 0, 1, \dots, n-1.$$

2.3. Gelijke Z-Y schakeling.

In het voorgaande bestonden de impedanties van het bovenvlak steeds uit zelf-indukties en van de takken naar aarde uit capaciteiten.

Nu worden in het bovenvlak onderling gelijke maar overigens willekeurige impedanties Z(p) en in de takken naar aarde admittanties Y(p) geplaatst.

Omdat de tijdafhankelijkheid van V(x,y,t) op elk knooppunt gelijk is, is eenvoudig in te zien dat nu weer een oplossing gevonden wordt in de vorm V(x,y)T(t). V(x,y) moet voldoen aan dezelfde differentievergelijking 2-7 als in het geval van gelijke L's en C's.

Bij dezelfde randvoorwaarden worden ook dezelfde eigenwaarden $\lambda_{\eta\zeta}$ gevonden als in 2.1.1.

De differentiaalvergelijking voor T(t) is niet meer gelijk aan 2-8.

Bij elke $\lambda_{\eta\zeta}$ worden de eigenfrequenties gevonden als de wortels van de karakteristieke vergelijking van de differentiaalvergelijking voor $T(t)$, die luidt:

$$Z(p).Y(p) + \lambda_{\eta\zeta} = 0 \quad \begin{array}{l} \eta = 0, 1, \dots, m-1 \\ \zeta = 0, 1, \dots, n-1. \end{array} \quad 2.3-1.$$

Deze wortels zijn: $p = p_{\eta\zeta}^{\mu}$, $\mu = 0, 1, \dots, k$. waarbij k de orde van de vergelijking 2.3-1 is.

Dus:

$$T_{\eta\zeta}(t) = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \exp(p_{\eta\zeta}^{\mu} t) \quad 2.3-2.$$

indien $p_{\eta\zeta}^{\mu} \neq p_{\eta\zeta}^{\nu}$. $\mu \neq \nu$.

3. Orthogonaliteit en volledigheid van het stelsel eigenfuncties.

In het vorige hoofdstuk zijn de eigenfrequenties en eigenfuncties bepaald voor een aantal speciale gevallen.

In dit hoofdstuk zullen een aantal eigenschappen besproken worden van de eigenfuncties van een tweedimensionale ladderstructuur met willekeurige L's en C's en willekeurige rand.

3.1. Orthogonaliteitsstelling.

Op alle knooppunten behalve op de rand geldt de differentie vergelijking:

$$E^{-1} \Delta_x (a(x,y) \Delta_x V(x,y)) + F^{-1} \Delta_y (b(x,y) \Delta_y V(x,y)) + \lambda c(x,y) V(x,y) = 0 \quad 3.1-1.$$

De knooppunten op de rand zijn of opengelaten, of kortgesloten.

Stel dat van dit eigenwaardenprobleem zowel de eigenfuncties $V_\mu(x,y)$ als de eigenwaarden λ_μ bekend zijn.

Dan geldt voor elk tweetal eigenfuncties $V_\mu(x,y)$ en $V_\nu(x,y)$ die behoren bij twee eigenwaarden λ_μ en λ_ν ($\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$) dat:

$$\sum_G c(x,y) V_\mu(x,y) V_\nu(x,y) = 0 \quad 3.1-2.$$

waarbij met \sum_G een sommatie over alle knooppunten van het netwerk wordt aangeduid.

Het bewijs hiervan wordt gegeven in appendix B.

Men spreekt nu van orthogonaliteit van het stelsel eigenfuncties met gewichtsfunctie $c(x,y)$, op het gebied G.

Daar de eigenfuncties slechts bepaald zijn op een multiplikatieve konstante na, is het altijd mogelijk deze konstante zo te kiezen dat:

$$\sum_G c(x,y) V_\mu^2(x,y) = 1 \quad 3.1-3.$$

Bij ontarding, dat wil zeggen als er twee (of algemeen n) eigenwaarden gelijk zijn terwijl toch twee (resp. n) verschillende eigenfuncties V_μ, V_ν gevonden worden, is het altijd mogelijk twee (resp n) eigenfuncties te vinden waarvoor geldt dat ze orthogonaal zijn.

Immers, normeer V_μ en V_ν zodanig dat $\sum_G c(x,y) V_\mu^2(x,y) = \sum_G c(x,y) V_\nu^2(x,y)$

Omdat V_μ en V_ν eigenfuncties zijn met gelijke eigenwaarde en dus oplossingen van dezelfde differentievergelijking zijn ook de functies $V_\mu + V_\nu$ en $V_\mu - V_\nu$ eigenfuncties bij dezelfde eigenwaarde. Daarvoor geldt dat:

$$\sum_G c(x,y) \{V_\mu + V_\nu\} \{V_\mu - V_\nu\} = \sum_G c(x,y) \{V_\mu^2 - V_\nu^2\} = 0$$

dus dat ze orthogonaal zijn.

De orthogonaliteit waarvan hier sprake is, is een bijzondere vorm van een meer algemeen geldende stelling over orthogonaliteit bij elektrische netwerken. (/1.5/)

Voor een willekeurig RLC-netwerk is af te leiden dat geldt:

$$\sum C(i) V_{\mu}(i) V_{\nu}(i) - \sum L(i) I_{\mu}(i) I_{\nu}(i) = 0 \quad 3.1-4.$$

waarbij de sommatie plaats vindt over alle condensatoren bij de eerste term en over alle spoelen bij de tweede term van deze vergelijking.

In het onderhavige geval is elk van de twee somtermen blijkbaar gelijk aan nul.

3.2. Volledigheid van het stelsel eigenfuncties.

Voor elk knooppunt van de schakeling dat niet is kortgesloten bestaat een vergelijking waardoor het verband tussen de spanning op dit knooppunt en de spanningen op de naburige knooppunten wordt vastgelegd.

Indien er N van zulke knooppunten in het netwerk zijn vormen deze vergelijkingen een stelsel van N homogene lineaire vergelijkingen in de N onbekende spanningen $V(x,y)$.

De oplossingen hiervan zijn de eigenfuncties V_{μ} , zodat er N eigenfuncties te vinden zijn, waarvan bewezen is dat ze allen onderling orthogonaal zijn. Er wordt nu aangenomen dat ze genormeerd zijn volgens vergelijking 3.1-3. Nu kan tevens worden bewezen dat het stelsel van de eigenfuncties een volledig stelsel vormt op het gebied G.

Hieronder wordt verstaan dat elke functie $f(x,y)$ gedefinieerd op G, die voldoet aan de randvoorwaarden, te schrijven is als een lineaire combinatie van de eigenfuncties.

Dit houdt in dat de eigenfuncties een basis vormen voor de functie ruimte van alle functies die gedefinieerd zijn op G en aan de randvoorwaarden voldoen.

Zij gegeven een zo'n functie $f(x,y)$.

Definieer de functie $g(x,y)$ door de vergelijking:

$$g(x,y) = \sum_{\mu=1}^N a_{\mu} V_{\mu}(x,y) \quad 3.2-1a.$$

$$\text{waarin } a_{\mu} = \int_G f(x,y) c(x,y) V_{\mu}(x,y) \quad 3.2-1b.$$

Dan is:

$$\int_G c(x,y) g(x,y) V_{\nu}(x,y) = \sum_{\mu} a_{\mu} \int_G c(x,y) V_{\mu}(x,y) V_{\nu}(x,y) = a_{\nu} \quad 3.2-2.$$

Uit 3.2-1b en 3.2-2 volgt dat:

$$\sum_G c(x,y) V_\mu(x,y) \{f(x,y) - g(x,y)\} = 0 \quad \mu = 1,2,\dots,N. \quad 3.2-3.$$

Het stelsel vergelijkingen 3.2-3. vormt een stelsel van N vergelijkingen voor de onbekende funktiewaarden $\{f(x,y) - g(x,y)\} c(x,y)$.

Daar de rijen van de koëfficiënten matrix de eigenfuncties zijn, zijn alle rijen onderling onafhankelijk, en het stelsel heeft slechts de oplossing $f(x,y) - g(x,y) = 0$.

Dus elke $f(x,y)$ is te schrijven als $\sum_\mu a_\mu V_\mu$, waarbij de a_μ 's gevonden worden uit de vergelijking 3.2-1b.

Op dezelfde manier is te bewijzen dat $f(x,y)$ ook te schrijven is als:

$$\sum_\mu b_\mu V_\mu(x,y) c(x,y) \quad 3.2-4a.$$

waarin

$$b_\mu = \sum_G f(x,y) V_\mu(x,y) \quad 3.2-4b.$$

Indien deze stelling wordt toegepast voor de funktie:

$$f(x,y) = 1 \quad x,y = x_0,y_0 \\ 0 \quad \text{op alle andere punten,}$$

dan is voor deze funktie $a_\mu = c(x_0,y_0) V_\mu(x_0,y_0)$

Uit 3.2-1a volgt dan dat:

$$\sum_\mu V_\mu(x,y) V_\mu(x_0,y_0) = 0 \quad (x,y) \neq (x_0,y_0) \quad 3.2-5a.$$

$$c(x_0,y_0) \sum_\mu V_\mu^2(x_0,y_0) = 1 \quad 3.2-5b.$$

3.3. De eigenwaarden.

Voor de eigenwaarden λ_μ van dit eigenwaarden probleem zal worden aangetoond dat ze allen reëel en ≥ 0 zijn.

Voor elke eigenfunctie V_μ geldt de differentievergelijking 3.1-1 waarbij $\lambda = \lambda_\mu$. Daar deze vergelijking lineair is, en $a(x,y)$, $b(x,y)$ en $c(x,y)$ reëel zijn geldt voor V_μ^* de vergelijking 3.1-1 met $\lambda = \lambda_\mu^*$. (Met een * wordt aangegeven de complex-toegevoegde waarde.)

Door de vergelijking voor V_μ te vermenigvuldigen met V_μ^* en die voor V_μ^* met V_μ en daarna aftrekken ontstaat de vergelijking:

$$V_\mu^* \Delta^2 V_\mu - V_\mu \Delta^2 V_\mu^* = (\lambda_\mu^* - \lambda_\mu) c(x,y) V_\mu V_\mu^*. \quad 3.3-1.$$

Hierbij is $\Delta^2 V_\mu$ een verkorte schrijfwijze voor:

$$E^{-1} \Delta_x (a(x,y) \Delta_x V_\mu(x,y)) + F^{-1} \Delta_y (b(x,y) \Delta_y V_\mu(x,y)).$$

Vergelijking 3.3-1 vertoont veel overeenkomst met vergelijking B-5 uit appendix B. Op de randpunten is $\Delta^2 V_\mu$ niet gedefinieerd. Nu kan worden overgegaan op nieuwe functies U_μ en U_μ^* zoals in appendix B is gedaan. Na sommatie over G is dan analoog als in appendix B aan te tonen dat het linkerlid van de vergelijking nul wordt. Daar $\sum_G V_\mu V_\mu^* c(x,y) > 0$ kan aan deze vergelijking alleen worden voldaan doordat $\lambda_\mu - \lambda_\mu^* = 0$.

Dus is λ_μ reëel.

Voor V_μ zijn er twee mogelijkheden:

1/ als λ_μ niet ontaard is is V_μ reëel.

Dit is als volgt in te zien:

Uit $\sum_G V_\mu^2(x,y) c(x,y) = 1$ volgt dat

$$\sum_G \{(\operatorname{Re} V_\mu)^2 - (\operatorname{Im} V_\mu)^2\} c(x,y) = 1 \quad 3.3-2a.$$

$$\sum_G \operatorname{Re} V_\mu \cdot \operatorname{Im} V_\mu \cdot c(x,y) = 0 \quad 3.3-2b.$$

Daar zowel $\operatorname{Re} V_\mu$ als $\operatorname{Im} V_\mu$ oplossing zijn van de differentievergelijking zijn ze afhankelijk als er geen ontaarding is, zodat uit 3.3-2b volgt dat $\operatorname{Re} V_\mu = 0$ of $\operatorname{Im} V_\mu = 0$.

Uit 3.3-2a volgt dan dat $\operatorname{Im} V_\mu = 0$ moet zijn.

2/ als λ_μ ontaard is is de keuze van de eigenfuncties die behoren bij deze eigenwaarde niet eenduidig.

Ze zijn echter altijd zo te kiezen dat ze reëel zijn.

Met behulp van de differentievergelijking en de vergelijkingen 3.1-3 en 3.2-5 is te bewijzen dat:

$$\lambda_\mu = \sum_i L(i) I_\mu^2(i) \quad 3.3-3.$$

waarmee bedoeld wordt een sommatie over alle spoelen van het netwerk.

Daar V_μ reëel is is ook $I_\mu = \Delta_x V_\mu$ of $\Delta_y V_\mu$ reëel.

Dus volgt uit 3.3-3 dat $\lambda_\mu \geq 0$.

4. Functie van Green.

4.1. Het begrip Greense functie.

Tot nu toe werden alleen de eigentrillingen van het netwerk beschouwd.

In dit hoofdstuk zal de responsie van het netwerk bepaald worden voor het geval dat ook bronnen in het netwerk aanwezig zijn.

De spanningstoestand op de knooppunten wordt nu beschreven door de vergelijking:

$$E^{-1} \Delta_x (a(x,y) \Delta_x V(x,y,t)) + F^{-1} \Delta_y (b(x,y) \Delta_y V(x,y,t)) + L_0 C_0 c(x,y) \frac{d^2}{dt^2} V(x,y,t) = B(x,y,t) \quad 4.1-1.$$

Hierin is $B(x,y,t)$ de bronfunctie die op een of andere wijze samenhangt met de bronnen in (of parallel met) de takken die op het knooppunt (x,y) uitkomen.

Nu is algemeen:

$$B(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{\xi} \sum_{\eta} B(\xi,\eta,\tau) \frac{\sin\pi(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} \frac{\sin\pi(y-\eta)}{\pi(y-\eta)} \delta(t-\tau) \quad 4.1-2.$$

Indien de responsie $F(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ van het netwerk op de exitatie

$\frac{\sin\pi(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} \frac{\sin\pi(y-\eta)}{\pi(y-\eta)} \delta(t-\tau)$ bekend is, is de responsie op elke willekeurige

exitatie $B(x,y,t)$ bekend, en gelijk aan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{\xi} \sum_{\eta} B(\xi,\eta,\tau) F(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \quad 4.1-3.$$

hetgeen volgt uit de lineariteit van vergelijking 4.1-1.

$F(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ is de greense functie behorende bij de vergelijking 4.1-1.

De functie F is in vele gevallen te vinden door gebruik te maken van operatoren rekening. (/4.1/).

In de meeste gevallen is men alleen geïnteresseerd in de kwasi-stationaire toestand bij periodieke exitatie $B(x,y,t) = B(x,y) e^{pt}$.

Daar in dit geval $V(x,y,t)$ te schrijven is als $V(x,y) e^{pt}$ kan nu ook gebruik gemaakt worden van de tijdonafhankelijke functie van Green $F(x,y,\xi,\eta)$ die de (tijdonafhankelijke) responsie beschrijft op de exitatie:

$$g(x,y,\xi,\eta) = \frac{\sin\pi(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} \frac{\sin\pi(y-\eta)}{\pi(y-\eta)}$$

Zowel F als g worden nu ontwikkeld naar eigenfuncties:

$$F(x,y,\xi,\eta) = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y) \quad 4.1-4.$$

$$g(x,y,\xi,\eta) = \sum_{\mu} \beta_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y) c(x,y) \quad 4.1-5.$$

waarin:

$$\alpha_{\mu}(\xi,\eta) = \sum_{G(x,y)} F(x,y,\xi,\eta) c(x,y) V_{\mu}(x,y) \quad 4.1-6.$$

$$\beta_{\mu}(\xi,\eta) = \sum_{G(x,y)} g(x,y,\xi,\eta) V_{\mu}(x,y) = V_{\mu}(\xi,\eta) \quad 4.1-7.$$

Substitutie van 4.1-4 en 4.1-5 in de differentievergelijking, daarbij bedenkend dat:

$$E^{-1} \Delta_x (a(x,y) \Delta_x V_{\mu}(x,y)) + F^{-1} \Delta_y (b(x,y) \Delta_y V_{\mu}(x,y)) = - \lambda_{\mu} c(x,y) V_{\mu}(x,y),$$

geeft de betrekking:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y) (\lambda - \lambda_{\mu}) c(x,y) &= \sum_{\mu} V_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y) c(x,y) \\ &= c(\xi,\eta) \end{aligned} \quad 4.1-8.$$

waaruit volgt dat:

$$\alpha_{\mu} = \frac{V_{\mu}(\xi,\eta)}{\lambda - \lambda_{\mu}}$$

Uit 4.1-4 volgt dan dat:

$$F(x,y,\xi,\eta) = \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y)}{\lambda - \lambda_{\mu}} \quad 4.1-9.$$

en:

$$V(x,y) = \sum_{G(\xi,\eta)} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y)}{\lambda - \lambda_{\mu}} B(\xi,\eta) \quad 4.1-10.$$

4.2. De impedantie als greense funktie.

Indien parallel aan de condensator $C(\xi,\eta)$ een stroombron $j(t) = J(\xi,\eta) e^{pt}$ wordt aangesloten dan is de bronterm in vergelijking 4.1-1 gelijk aan:

$$B(x,y,t) = B(x,y) e^{pt} = -pL_0 J(\xi,\eta) \frac{\sin\pi(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} \frac{\sin\pi(y-\eta)}{\pi(y-\eta)} e^{pt}$$

Dit is dus een speciale vorm van de in het voorgaande behandelde puntexcitatie.

Uit vergelijking 4.1-10 volgt dan de spanningsverdeling op de knooppunten in de kwasi stationaire toestand:

$$V(x,y,t) = V(x,y) e^{pt} = \sum_{\mu} \left\{ -pL_0 J(\xi,\eta) \frac{V_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y)}{\lambda - \lambda_{\mu}} \right\} e^{pt} \quad 4.2-1.$$

De overdrachts-impedantie van het overdrachtssysteem met als ingangsklemmen knooppunt (ξ,η) en aarde en als uitgangsklemmen knooppunt (x,y) en aarde, is gedefinieerd door de vergelijking:

$$Z(x,y,\xi,\eta) = \frac{V(x,y)}{J(\xi,\eta)}$$

en is dus voor het beschouwde systeem gelijk aan:

$$Z(x,y,\xi,\eta) = -pL_0 \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y)}{\lambda - \lambda_{\mu}} = \frac{p}{C_0} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(\xi,\eta) V_{\mu}(x,y)}{p^2 - p_{\mu}^2} \quad 4.2-2.$$

De ingangsimpedantie op de ingangsklemmen van dit systeem is $Z(x,y,x,y)$:

$$Z(x,y,x,y) = -pL_0 \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}^2(x,y)}{\lambda - \lambda_{\mu}} = \frac{p}{C_0} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}^2(x,y)}{p^2 - p_{\mu}^2}$$

Het is nu duidelijk dat $Z(x,y,\xi,\eta)$ is op te vatten als een speciale vorm van een greense functie. Indien namelijk meerdere stroombronnen parallel aan de diverse condensatoren worden geplaatst is de algemene oplossing voor de kwasi-stationaire toestand:

$$V(x,y) = \sum_{G(\xi,\eta)} Z(x,y,\xi,\eta) J(\xi,\eta) \quad 4.2-3.$$

5. De impedatiefunctie Z(p).

In hoofdstuk 4 is een formule afgeleid voor de algemene overdrachts- (ingangs-) impedantie tussen twee punten A: (x,y) en B: (ξ,η) van de tweedimensionale ladderschakeling.

Een aantal van de eigenschappen van deze impedatiefunctie zullen in dit hoofdstuk aan de orde worden gesteld.

Er wordt daarbij gebruik gemaakt van de verkorte schrijfwijze:

$$Z(x,y,\xi,\eta,p) = Z_{AB}(p) = -pL_o \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)}{\lambda - \lambda_{\mu}} = \frac{p}{C_o} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)}{p^2 - p_{\mu}^2} \quad 5-1.$$

5.1. Z_{AA}(p) is een reaktantiefunctie.

De tweedimensionale LC-ladder bestaat uit louter reaktieve elementen.

De ingangsimpedantie tussen elk punt van de schakeling en aarde moet daarom een reaktantiefunctie zijn (/1.1/,/1.2/,/1.3/).

Nodig en voldoende daartoe is dat:

$$\operatorname{Re}(Z_{AA}(p)) \geq 0 \quad \text{als} \quad \operatorname{Re}(p) \geq 0$$

$$\operatorname{Re}(Z_{AA}(j\omega)) = 0$$

De formule die in hoofdstuk 4 voor de ingangsimpedantie is afgeleid moet hieraan natuurlijk voldoen.

Dat dit zo is is eenvoudig in te zien.

$$\begin{aligned} Z_{AA}(\sigma + j\omega) &= \frac{\sigma + j\omega}{C_o} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}^2(A)}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_{\mu}^2} && \text{waarin } j\omega_{\mu} = p_{\mu} \\ &= \frac{\sigma}{C_o} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}^2(A) (\sigma^2 + \omega^2 + \omega_{\mu}^2)}{(\sigma^2 - \omega^2 + \omega_{\mu}^2)^2 + 4\sigma^2 \omega^2} && = \frac{j\omega}{C_o} \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}^2(A) (\sigma^2 + \omega^2 - \omega_{\mu}^2)}{(\sigma^2 - \omega^2 + \omega_{\mu}^2)^2 + 4\sigma^2 \omega^2} \end{aligned}$$

5.1-1.

In hoofdstuk 3 is reeds aangetoond dat alle V_{μ} 's reëel zijn.

Dus volgt uit vergelijking 5.1-1 dat

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}Z_{aa}(\sigma+j\omega) &> 0 && \text{als } \sigma > 0 \\ &= 0 && \text{als } \sigma = 0 \end{aligned}$$

5.2. Residuen stelling.

Beschouw de impedantie matrix van het in hoofdstuk 4 beschreven overdrachts-systeem:

$$\begin{pmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} \\ Z_{BA} & Z_{BB} \end{pmatrix}$$

Indien D_{μ}^{11} , D_{μ}^{22} en D_{μ}^{12} de residuen zijn bij de pool $p=p_{\mu}$ van respectievelijk Z_{AA} , Z_{BB} , en $Z_{AB}=Z_{BA}$, dan geldt dat:

$$D_{\mu}^{11} \text{ reëel en } \geq 0$$

$$D_{\mu}^{22} \text{ reëel en } \geq 0$$

$$D_{\mu}^{12} \text{ reëel en } D_{\mu}^{11} D_{\mu}^{22} - (D_{\mu}^{12})^2 \geq 0$$

5.2-3.

(/1.1/).

Uit vergelijking 5-1 volgt dat als er geen ontarding is:

$$D_{\mu}^{11} = \frac{1}{2} V_{\mu}^2(A)/C_0$$

$$D_{\mu}^{22} = \frac{1}{2} V_{\mu}^2(B)/C_0$$

$$D_{\mu}^{12} = \frac{1}{2} V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)/C_0$$

In dit geval geldt dus het gelijkteken in vergelijking 5.2-3.

Bij ontarding: $p_{\mu}=p_{\nu}$

$$D_{\mu}^{11} = \frac{1}{2C_0} \{V_{\mu}^2(A) + V_{\nu}^2(A)\}$$

$$D_{\mu}^{22} = \frac{1}{2C_0} \{V_{\mu}^2(B) + V_{\nu}^2(B)\}$$

$$D_{\mu}^{12} = \frac{1}{2C_0} \{V_{\mu}(A)V_{\mu}(B) + V_{\nu}(A)V_{\nu}(B)\}$$

zodat:

$$D_{\mu}^{11} D_{\mu}^{22} - (D_{\mu}^{12})^2 = \frac{1}{4C_0^2} \{V_{\mu}(A)V_{\nu}(B) - V_{\nu}(A)V_{\mu}(B)\}^2 \geq 0$$

5.3. Impedantiefunctie van de Z-Y schakeling.

In hoofdstuk 2.3. is aangeduid dat ook indien de spoelen en condensatoren van het netwerk worden vervangen door onderling gelijke, doch willekeurige impedanties $Z(p)$ respectievelijk $Y(p)$, de spanningstoestand op de knoop-

punten beschreven wordt door dezelfde differentievergelijking, waarin $\lambda = -Z(p)Y(p)$.

Voor dit geval wordt daarom voor de impedantiefunctie gevonden:

$$Z_{AB}(p) = Z(p) \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)}{Z(p)Y(p) + \lambda_{\mu}} \quad 5.3-1.$$

De eigenfrequenties p_{μ}^{σ} zijn de wortels van de vergelijking:

$$Z(p)Y(p) + \lambda_{\mu} = 0$$

Dus is:

$$Z(p)Y(p) + \lambda_{\mu} = 1/K \cdot \prod_{\sigma} (p - p_{\mu}^{\sigma}) \quad 5.3-2.$$

waarin $1/K$ een konstante is. Hieruit volgt dat:

$$Z_{AB}(p) = K \cdot Z(p) \sum_{\mu} \frac{V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)}{\prod_{\sigma} (p - p_{\mu}^{\sigma})} \quad 5.3-3.$$

Indien geen der λ_{μ} 's ontaard is, en bovendien geen der wortels p_{μ}^{σ} gelijk is aan een wortel p_{ν}^{τ} met $\mu \neq \nu$ dan geldt voor de impedantie matrix weer dat

$$D_{\mu}^{11} D_{\mu}^{22} - (D_{\mu}^{12})^2 = 0.$$

Immers: Res. Z_{AB} voor $p = p_{\mu}^{\tau}$ is:

$$\frac{KZ(p_{\mu}^{\tau})}{\prod_{\substack{\sigma \\ \sigma \neq \tau}} (p_{\mu}^{\tau} - p_{\mu}^{\sigma})} \cdot \{V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)\} = \gamma V_{\mu}(A)V_{\mu}(B)$$

$$\text{Res } Z_{AA} = \gamma V_{\mu}^2(A) ; \text{ Res } Z_{BB} = \gamma V_{\mu}^2(B).$$

Indien bij dezelfde λ_{μ} twee of meer samenvallende wortels $p_{\mu}^{\sigma} = p_{\mu}^{\tau}$ gevonden worden blijft deze stelling geldig.

Op de verschillende mogelijkheden van ontaarding bij deze schakeling wordt in hoofdstuk 6 nader ingegaan.

5.4. Enige eigenschappen van de overdrachtsimpedantie.

De algemene formule voor de overdrachtsimpedantie 5-1. is ook te schrijven als het kwotient van twee polynomen, door het onder een noemer brengen van de termen uit de sommatie.

De polynomen $T(p)$ en $N(p)$ van de teller respectievelijk de noemer hebben de volgende eigenschappen.

Alle koëfficiënten van $N(p)$ en $T(p)$ zijn positief of nul.

Voor de noemer is dit eenvoudig in te zien. Alle termen $p^2 - p_\mu^2 = p^2 + \omega_\mu^2$ geven bij vermenigvuldiging een positieve bijdrage tot de coëfficiënten van $N(p)$. Bovendien zijn alle coëfficiënten met oneven macht van p nul, zodat $N(p)$ een polynoom in p^2 is.

Voor $T(p)$ kan dit bewezen worden met een topologische beschouwing, waaruit blijkt dat bij alle geaarde netwerken zonder transformatoren de coëfficiënten van het tellerpolynoom altijd positief zijn. (Een geaard netwerk is een netwerk met een gemeenschappelijke ingangs en uitgangsklem.) /1.3/.

In $T(p)$ komen alleen termen met oneven macht van p voor.

Beschouw nu $T'(p) = T(p)/p$:

$$T'(p) = A_{N-1}(p^2)^{N-1} + A_{N-2}(p^2)^{N-2} + \dots + A_0$$

Voor de overdrachtsimpedantie tussen twee punten (x,y) en (ξ,η) waarvoor geldt dat:

$$|x - \xi| + |y - \eta| = M$$

zijn alle coëfficiënten $A_{N-1}, A_{N-2}, \dots, A_{N-M}$ gelijk aan 0.

Dit is in te zien door de orde van de pool $p = \infty$ te beschouwen.

Voor twee punten die M stappen van elkaar verwijderd zijn is dat $2M-1$ (gevormd door de ladderschakeling van M condensatoren en $M-1$ spoelen).

$$\text{Dus } \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{AB}(p) = K/p^{2M-1} = A_{N-M-1} p/p^{2M}$$

Dit is ook formeel te bewijzen door de coëfficiënten A_k expliciet te bepalen uitgedrukt in de eigenfrequenties en eigenfuncties.

De eigenwaarde λ_μ en dus p_μ^2 zijn door middel van de differentievergelijking uit te drukken in de V_μ 's.

Door gebruik te maken van formule 3.2-5. volgt dan dat alle A_{N-1}, \dots, A_{N-M} nul zijn, en dat $A_{N-M-1} \neq 0$.

Op deze wijze is het ook mogelijk alle A_k 's uit te drukken in de elementwaarden van de schakeling, doch daar dit een zeer omslachtig proces is wordt het hier slechts terloops opgemerkt.

Bij de eendimensionale ladder met gelijke elementen zijn alle coëfficiënten van het teller en noemer polynoom van de ingangsimpedantie en de overdrachtsimpedantie bekend, en op een eenvoudige manier in een formule weer te geven. (/1.7/,/1.8/)

Ook de nulpunten zijn in dit geval expliciet te bepalen.

Er is een rekenprogramma geschreven waarmee voor een groot aantal schakelingen met gelijke L 's en C 's de coëfficiënten van het teller- en het

noemer polynoom en de nulpunten bepaald zijn,

Daarbij is gebruik gemaakt van de in hoofdstuk 2 gevonden formules voor

$p_{\eta\zeta}^2 = -\omega_{\eta\zeta}^2$ en de bijbehorende eigenfuncties:

$$V_{\eta\zeta} = A_{\eta\zeta} \cos\left(\eta\pi\frac{x-\frac{1}{2}}{m}\right) \cdot \cos\left(\zeta\pi\frac{y-\frac{1}{2}}{n}\right)$$

$A_{\eta\zeta}$ kan worden bepaald uit de normeringsvoorwaarde:

$$A_{\eta\zeta}^2 = \frac{1}{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \cos^2\left(\eta\pi\frac{x-\frac{1}{2}}{m}\right) \cdot \cos^2\left(\zeta\pi\frac{y-\frac{1}{2}}{n}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{m \cdot n} & \eta = 0 \text{ én } \zeta = 0 \\ \frac{2}{m \cdot n} & \eta = 0 \text{ óf } \zeta = 0 \\ \frac{4}{m \cdot n} & \eta \neq 0 \text{ en } \zeta \neq 0 \end{cases}$$

Het is echter niet mogelijk gebleken de gevonden resultaten in een expliciete vorm te brengen,

6. Ontaarding; het aantal eigenfrequenties.

Zoals reeds eerder werd opgemerkt spreekt men van ontaarding in het geval dat twee of meer eigenfrequenties gelijk zijn.

In het algemeen zijn daarbij twee mogelijkheden (/1.4/ hfdst 2.33).

a/ In de impedantiefunctie komt een pool van de tweede (of hogere) orde voor, hetgeen aanleiding geeft tot eigentrillingen van de vorm:

$$V(x,y,t) = V_{\mu}(x,y) \exp(p_{\mu} t) \cdot (A + Bt)$$

Er is dan maar een vrijheidsgraad in de eigenfunctie $V_{\mu}(x,y)$.

Dit treedt alleen op indien bij een waarde van λ_{μ} twee gelijke eigenfrequenties p_{μ}^{σ} optreden.

Bij een schakeling bestaande uit L's en C's kan dit alleen voorkomen bij $\lambda_{\mu} = 0$ daar de eigenfrequenties gevonden worden uit $p_{\mu}^2 L_{00} C_{00} = -\lambda_{\mu}$. (Op de eigenfrequentie $p = 0$ wordt nog teruggekomen).

Daar alle eigenfrequenties in dit geval op de imaginaire as liggen zouden gelijke wortels aanleiding geven tot instabiele oplossingen, hetgeen natuurlijk niet kan bij een passief netwerk.

Wel is het mogelijk dat twee eigenfrequenties samenvallen in het geval van de behandelde Z-Y-schakeling, als namelijk twee wortels van de vergelijking:

$$Z(p)Y(p) + \lambda_{\mu} = 0$$

samen vallen. Deze wortels hoeven ook niet meer algemeen op de imaginaire as te liggen.

b/ De impedantiefunctie heeft slechts polen van eerste orde, die echter meervoudig voorkomen.

Dit treedt op indien twee (of meer) waarden van λ_{μ} gelijk zijn, of indien twee (of meer) van het stelsel vergelijkingen:

$$Z(p)Y(p) + \lambda_{\mu} = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, N$$

gelijke wortels $p_{\mu}^{\sigma} = p_{\nu}^{\tau}$ opleveren.

Zoals reeds werd aangetoond worden in dit geval juist zoveel onafhankelijke eigenfuncties gevonden als er samenvallende waarden van λ zijn.

Bij gelijke waarden van λ is de keuze van de eigenfuncties niet eenduidig.

De oplossing heeft de vorm:

$$V(x,y,t) = (A V_{\mu}(x,y) + B V_{\nu}(x,y)) e^{p_{\mu} t}$$

Dit treedt meestal op indien er bepaalde symmetriën in het netwerk zijn.

In het geval van gelijke elementen en een rechthoekige schakeling met $m \cdot n$ knooppunten treedt dit altijd op indien m/n of n/m gelijk aan een geheel getal is, doch ook indien dit niet het geval is kan ontaarding optreden.

Als $m=n$ zijn de eigenwaarden bij open rand:

$$\lambda_{\eta\zeta} = 4 \left\{ \sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2m}\right) + \sin^2\left(\frac{\zeta\pi}{2n}\right) \right\} \quad \begin{array}{l} \eta = 0, 1, \dots, m-1 \\ \zeta = 0, 1, \dots, n-1. \end{array}$$

Elke eigenwaarde $\lambda_{\eta_0 \zeta_0}$ is ontaard behalve indien $\eta_0 = \zeta_0$.

Het aantal eigenfrequenties; de pool $p=0$.

Indien $\lambda = 0$ een eigenwaarde van het eigenwaardenprobleem is worden in het geval van een netwerk bestaande uit spoelen en condensatoren twee samenvallende wortels $p=0$ gevonden. Daar $p=0$ een punt op de imaginaire as is zou dit aanleiding geven tot instabiliteit, hetgeen niet mogelijk is. In de impedantiefunctie $Z_{AB}(p)$ treedt bij $p=0$ tevens een nulpunt op. Een pool $p=0$ kan daarom worden weggedeeld.

Er blijkt bij $p=0$ echter wel een ontaarding van het type b te zijn.

Dit zal nu nader worden bekeken.

Daartoe wordt een inventarisatie gemaakt van het aantal eigenfrequenties.

Voor elk (bronloos) netwerk geldt dat het aantal eigenfrequenties gelijk is aan de som van het aantal onafhankelijke spoelstromen en het aantal onafhankelijke condensatorspanningen, met andere woorden aan het aantal beschikbare energie reservoirs.

Afhankelijk van elkaar zij de spanningen over condensatoren die een gesloten lus vormen, en de stromen door die spoelen die op een (super-)knooppunt samenkomen waarop geen andere impedantie uitkomt. De spanningen op alle andere condensatoren en de stromen door alle andere spoelen zij onafhankelijk.

In de beschouwde schakeling zijn alle condensatorspanningen onafhankelijk, en zijn ook alle spoelstromen onafhankelijk.

Indien er N knooppunten (en dus N condensatoren) zijn, die onderling verbonden zijn door M spoelen ($M > N-1$), dan zijn er dus $M + N$ eigenfrequenties.

Door het oplossen van de differentievergelijking worden N eigenwaarden λ_{μ} gevonden, waaruit $2N$ eigenfrequenties (eventueel samenvallend) volgen.

Indien geen der knooppunten is kortgesloten is er een eigenwaarde $\lambda = 0$, zodat dan $2(N - 1)$ eigenfrequenties $\neq 0$ gevonden worden. Voor $p = 0$ vormen de condensatoren een isolatie en de spoelen een kortsluiting.

De multipliciteit van de pool $p = 0$ is gelijk aan het aantal onafhankelijke beginvoorwaarden dat bij deze frequentie kan worden opgelegd. De spanning op een der condensatoren is vrij te kiezen. Het aantal vrij te kiezen stromen bij $p = 0$ volgt uit een topologische beschouwing.

De N knooppunten van het netwerk zijn via $N - 1$ spoelen met elkaar te verbinden, zodanig dat geen gesloten lus ontstaat. (Elementaire boom). De stromen door de overige $M - (N - 1)$ spoelen zijn dus vrij te kiezen. Hieruit volgt dat de multipliciteit van de pool $p = 0$ gelijk is aan $M - N + 1 + 1 = M - N + 2$.

Samen met de $2(N - 1)$ polen $\neq 0$ is dit juist gelijk aan $M + N$.

Door het $(M + N)^e$ orde systeem te beschrijven met slechts N grootheden (de spanningen op de condensatoren) worden wel alle eigenfrequenties gevonden, doch de multipliciteit van de pool $p = 0$ en de daarbij behorende mogelijke eigentoestanden worden niet gevonden.

7. Limietovergang.

In dit hoofdstuk zal worden nagegaan wat er gebeurt met de eigenfuncties en de eigenfrequenties van het netwerk bestaande uit gelijke L's en C's en met een rechthoekige begrenzing (m x n knooppunten) voor het geval dat:

$$m \rightarrow \infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m_0}{n_0} = \text{konstant}$$

$$mL = m_0 L_0 = \text{konstant}$$

$$nC = m_0 C_0 = \text{konstant.}$$

Onder deze voorwaarden wordt het beschouwde netwerk de vervanging van een vlakke plaatkondensator (zonder verliezen of straling).

De eigenfrequenties bij open rand zijn:

$$\begin{aligned} \omega_{\eta\zeta}^2 &= \frac{4}{LC} \left[\sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2m}\right) + \sin^2\left(\frac{\zeta\pi}{2n}\right) \right] \\ &= \frac{4m^2}{m_0^2 L_0 C_0} \left[\sin^2\left(\frac{\eta\pi}{2m}\right) + \sin^2\left(\frac{\zeta\pi}{2m} \frac{m_0}{n_0}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{\eta\zeta}^2(m) = \frac{1}{L_0 C_0} \left[\frac{\eta^2 \pi^2}{m_0^2} + \frac{\zeta^2 \pi^2}{n_0^2} \right]$$

Dit komt overeen met het eigenfrequentie spectrum van het fysische probleem dat wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} - p^2 L_0 C_0 \right) V(x,y) = 0$$

waarin $V(x,y)$ nu een functie van continue variabelen is.

In het voorafgaande is voor de knooppuntsafstand altijd een (dimensieloze) eenheidsafstand genomen, waarvan de grootte volkomen arbitrair is.

(De invoering van een knooppuntsafstand houdt niet in dat aan de spoelen een lengte wordt toegekend.)

Wordt nu de eenheidsafstand evenredig kleiner gemaakt als m groter wordt, dan sluit deze limietprocedure aan bij het fysische voorstellingsvermogen.

De afstand tussen de twee uiterste punten blijft in dit geval gelijk bij toenemende m , en deze is in het limiet geval op te vatten als een genormeerde lengte (afmeting van de condensatorplaat).

Bij deze limietovergang gaat het gekoncentreerde netwerk over in een verdeeld netwerk.

Beschouw nu de eigenfunctie $V_{\eta\zeta}(x,y)$ op het punt:

$$x = \frac{m}{m_0} x_0$$

$$y = \frac{n}{n_0} y_0$$

Bij verkleining van de eenheidsafstand blijft dit punt op zijn plaats als m en n toenemen. Opdat x en y geheel blijven moet m de waarden $m_0, 2m_0, \dots, km_0, \dots$ doorlopen.

Gaat m op deze wijze naar oneindig dan is:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_{\eta\zeta}(x,y) = A_{\eta\zeta} \cos(\eta\pi \frac{x_0}{m_0}) \cdot \cos(\zeta\pi \frac{y_0}{n_0})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{\eta\zeta}^2 = \Omega_{\eta\zeta}^2$$

Zolang m nog eindig is, is het aantal eigenfrequenties nog eindig.

De grootheid:

$$\delta_{\eta\zeta}(m) = L_0 C_0 \{ \Omega_{\eta\zeta}^2 - \omega_{\eta\zeta}^2(m) \}$$

geeft aan in hoeverre een eigenfrequentie de limietwaarde benadert.

$$\delta_{\eta\zeta}(m) = - \left[\frac{\sin^2(\frac{\eta\pi}{2m})}{\frac{m_0^2}{4m^2}} - \frac{\eta^2 \pi^2}{m_0^2} + \frac{\sin^2(\frac{\zeta\pi \frac{m_0}{n_0}}{2m})}{\frac{m_0^2}{4m^2}} - \frac{\zeta^2 \pi^2}{n_0^2} \right]$$

Voor grote waarden van m is:

$$\delta_{\eta\zeta}(m) = \frac{1}{12} \frac{m_0^2}{m^2} \left\{ \frac{\eta^4 \pi^4}{m_0^4} + \frac{\zeta^4 \pi^4}{n_0^4} \right\}$$

De eigenfrequenties waarvoor geldt dat $\eta^2 \ll m$; $\zeta^2 \ll n$, zijn een goede benadering voor de limietwaarde.

Een relatief goede benadering :

$\frac{\delta_{\eta\zeta}(m)}{L_o C_o \Omega^2 \eta\zeta} \ll 1$ wordt verkregen voor de eigenfrequenties waarvoor geldt

dat $\eta \ll m$, $\zeta \ll n$.

APPENDIX A.

Differenties en differentie vergelijkingen.

In deze appendix wordt in het kort ingegaan op de theorie der differentievergelijkingen.

Daarbij zal slechts ter sprake komen dat gene uit de omvangrijke theorie die over differentievergelijkingen beschikbaar is, dat van direkt of indirect belang is voor het behandelde in dit rapport.

Voor een uitvoerigere bespreking van differentievergelijkingen wordt verwezen naar de litteratuur. (b.v. /2.1/, /2.2/, /2.3/, /3.2/, /4.1/)

A 1. Definities en eigenschappen.

De symbolen die gebruikt worden bij de differentie rekening worden niet overal in de litteratuur gelijk gedefinieerd. Meestal hangt de gekozen definitie samen met het gebruik dat van de differenties gemaakt wordt. (bijvoorbeeld toepassing bij numerieke oplossings methoden, bij reeksen etcetera.)

In dit rapport wordt de differentie rekening toegepast op functies van diskrete variabelen. Daarom is gekozen voor de onderstaande definitie.

Zij gegeven een functie u van een diskrete variabele x , waarbij het definitiegebied van x de verzameling der gehele getallen is.

Als de differentie van $u(x)$ wordt gedefinieerd ') :

$$\Delta u(x) = u(x+1) - u(x)$$

Voor de differentie gelden de volgende eigenschappen:

1. $\Delta(u(x) + v(x)) = \Delta u(x) + \Delta v(x)$
2. $\Delta(\alpha u(x)) = \alpha \Delta u(x)$
3. $\Delta(u(x) \cdot v(x)) = u(x+1) \Delta v(x) + v(x) \Delta u(x)$
 $= v(x+1) \Delta u(x) + u(x) \Delta v(x)$

') Vaak wordt $\Delta u(x)$ aangeduid als de voorwaartse differentie, en zijn tevens gedefinieerd $\nabla u(x) = u(x) - u(x-1)$ als achterwaartse differentie en $\delta u(x) = u(x+\frac{1}{2}) - u(x-\frac{1}{2})$ als centrale differentie. Hiervan zal in dit rapport geen gebruik gemaakt worden.

$$4. \quad \Delta\left\{\frac{u(x)}{v(x)}\right\} = \frac{v(x) \cdot \Delta u(x) - u(x) \cdot \Delta v(x)}{v(x) \cdot v(x+1)}$$

Omdat de differentie van een functie van x opnieuw een functie van x is, is het zinvol differenties van hogere orde te definiëren.

Dit geschiedt door middel van de volgende betrekking:

$$\Delta^n u(x) = \Delta^{n-1}(\Delta u(x))$$

$\Delta^n u(x)$ is de n^e orde differentie. (alleen gedefinieerd voor n geheel >0)

5. Voor een som van differenties geldt:

$$\sum_{x=x_1}^{x_2} \Delta u(x) = u(x_2+1) - u(x_1)$$

6. Voor de differentie van een som:

$$\Delta\left\{\sum_{y=x_0}^x u(y)\right\} = u(x+1)$$

Behalve de differentie wordt ook nog gedefinieerd de operator E enwel door de betrekking:

$$Eu(x) = u(x+1)$$

$$E^k u(x) = u(x+k) \quad k \text{ geheel.}$$

Nu is $\Delta u(x) = u(x+1) - u(x) = (E-1)u(x)$.

Symbolisch wordt dit weergegeven met:

$$\Delta = E-1$$

$$\begin{aligned} \text{Zo is ook: } \Delta^2 u(x) &= \Delta(\Delta u(x)) = u(x+2) - 2u(x+1) + u(x) \\ &= (E^2 - 2E + 1)u(x) = (E-1)^2 u(x). \end{aligned}$$

Voor de E operator geldt:

$$E(u(x) + v(x)) = Eu(x) + Ev(x)$$

$$E(u(x) \cdot v(x)) = Eu(x) \cdot Ev(x)$$

$$E(u(x)/v(x)) = Eu(x)/Ev(x)$$

$$E(\Delta u(x)) = \Delta(Eu(x))$$

A 2. Differentievergelijkingen.

Een differentievergelijking van de orde r is een vergelijking van de vorm:

$$F(x, u(x), Eu(x), \dots, E^r u(x)) = 0$$

De algemene lineaire differentievergelijking van de orde r heeft de vorm:

$$\{a_r(x)E^r + a_{r-1}(x)E^{r-1} + \dots + a_0(x)\}u(x) = f(x)$$

De oplossing hiervan bestaat uit:

1. de volledige oplossing van de homogene vergelijking.
2. een particuliere oplossing.

De volledige oplossing van de homogene vergelijking bestaat uit een lineaire combinatie van r onderling onafhankelijke functies.

Deze oplossing is daardoor bepaald op r konstanten na, die worden bepaald door het opleggen van even zovele randvoorwaarden.

Het bewijs dat elke r^e orde differentievergelijking die homogeen is ten hoogste r lineair onafhankelijke oplossingen u_1, u_2, \dots, u_r kan bezitten, dus dat elke andere oplossing te schrijven is als een lineaire combinatie van u_1, \dots, u_r is analoog aan het overeenkomstige bewijs bij lineaire differentiaalvergelijkingen. Inplaats van de determinant van Wronski wordt daarbij gebruik gemaakt van de determinant van Casorati:

$$C(u_1, \dots, u_r) = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_r \\ Eu_1 & \dots & Eu_r \\ \dots & \dots & \dots \\ E^{r-1}u_1 & \dots & E^{r-1}u_r \end{vmatrix}$$

(/3.1/ hfst. 5; /3.2/ hfst. 5.5)

Er is een tamelijk grote overeenkomst tussen de determinant van Wronski en de determinant van Casorati. Dit moge ondermeer uit het volgende blijken.

Voor de tweede orde differentievergelijking:

$$E^{-1} \Delta(a(x) \Delta u(x)) + \lambda b(x) u(x) = 0 \tag{A2-1}$$

$$\text{geldt dat de determinant } C(u_1, u_2) = C(x) = K/a(x) \tag{A2-2}$$

Immers door uitschrijven van de vergelijking A2-1 volgt dat:

$$E^{-1} \Delta^2 u(x) = -\{ E^{-1} (\Delta u(x) \cdot \Delta a(x)) + \lambda b(x)u(x) \} / a(x) \quad A2-3.$$

Nu is $C(x) = u_1(x)Eu_2(x) - u_2(x)Eu_1(x)$, dus is

$$\Delta C(x) = Eu_1(x)\Delta^2 u_2(x) - Eu_2(x)\Delta^2 u_1(x) \quad A2-4.$$

Uit A2-3 en A2-4 volgt dat:

$$\Delta C(x) = -\frac{\Delta a(x)}{Ea(x)} \cdot C(x)$$

dus is $Ea(x) \cdot \Delta C(x) + C(x) \cdot \Delta a(x) = \Delta(C(x) \cdot a(x)) = 0$

waaruit volgt dat $C(x) \cdot a(x) = K(\text{onstant})$ q.e.d.

Indien van de differentievergelijking A2-1 een oplossing u_1 bekend is, is de tweede (en daarmee de algemene) oplossing onmiddellijk te vinden.

Immers stel

$$g(x) = \frac{u_2(x)}{u_1(x)} \quad A2-5.$$

Dan is:

$$\Delta g(x) = \frac{u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1}{u_1 Eu_1} = \frac{C(x)}{u_1(x)Eu_1(x)}$$

Zodat:

$$g(x) = \sum_{y=0}^{x-1} \frac{C(y)}{u_1(y)Eu_1(y)} + \text{konstante.} \quad A2-6.$$

Uit A2-2, A2-5 en A2-6 volgt dat de algemene oplossing van de homogene differentie vergelijking te schrijven is in de vorm:

$$u(x) = K_1 u_1(x) + K_2 u_1(x) \sum_{y=0}^{x-1} \frac{1}{a(y)u_1(y)Eu_1(y)} \quad A2-7.$$

Voor het geval dat de coëfficiënten van de differentievergelijking konstant zijn is de oplossing van de homogene vergelijking eenvoudig te bepalen.

Indien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de wortels zijn van de vergelijking:

$$a_r \lambda^r + a_{r-1} \lambda^{r-1} + \dots + a_0 = 0$$

dan is de algemene oplossing:

$$u(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^x \quad \text{indien alle } \lambda_i \text{ verschillend zijn,}$$

$$u(x) = (\alpha_1 + x\alpha_2 + x^{s-1}\alpha_s) \lambda_1^s + \sum_{i=s+1}^r \alpha_i \lambda_i^x \quad \text{bij een s-voudige ontgaarding van de wortel } \lambda_1$$

In het geval van twee toegevoegd complexe wortels is de oplossing ook te schrijven in de vorm:

$$u(x) = |\lambda_1|^x (A \cos \phi x + B \sin \phi x) + \sum_i a_i \lambda_i^x \quad \text{waarin } \phi = \arctan(\text{Im} \lambda_1 / \text{Re} \lambda_1)$$

A 3. Partiële differentievergelijkingen.

Zij gegeven een gebied G bestaande uit de set van punten (x,y) waarbij x en y de rij der gehele getallen doorlopen.

Zij voorts een functie van twee diskrete variabelen u(x,y) gedefinieerd op G.

Dan zijn de partiële differenties gedefinieerd door de betrekkingen:

$$\Delta_x u(x,y) = u(x+1,y) - u(x,y)$$

$$\Delta_y u(x,y) = u(x,y+1) - u(x,y)$$

en de operatoren E en F door de betrekkingen:

$$Eu(x,y) = u(x+1,y)$$

$$Fu(x,y) = u(x,y+1)$$

Zodat $\Delta_x \div E-1$ en $\Delta_y \div F-1$.

De eigenschappen van Δ_x en Δ_y zijn gelijk aan die van Δ .

Voorts geldt dat:

$$\Delta_x (\Delta_y u(x,y)) = \Delta_y (\Delta_x u(x,y))$$

Een partiële differentievergelijking is een vergelijking van de vorm:

$$F(x,y,u(x,y), Eu, Fu, \dots, E^I u, F^S u) = 0$$

Appendix B.

Bewijs van de orthogonaliteitsstelling uit 3.1.

In hoofdstuk 3.1. wordt gezegd dat:

$$\sum_G V_{\mu}(x,y)V_{\nu}(x,y)c(x,y) = 0$$

voor elk tweetal eigenfuncties V_{μ} en V_{ν} behorende bij ongelijke eigenwaarden

Dit zal in deze appendix worden bewezen.

Daarbij wordt uitgegaan van de differentievergelijking 3.1-1. waaraan de eigenfuncties voldoen overal op G behalve op de rand S.

De vergelijkingen voor V_{μ} en V_{ν} op de rand worden bepaald door de randvoorwaarden:

1. bij kortgesloten rand $V_{\mu}(x,y) = V_{\nu}(x,y) = 0$
2. bij open rand een vergelijking van de vorm

$$\begin{aligned} & \alpha(S_2)a(x,y)\Delta_x V_{\mu}(x,y) + \alpha(S_1)E^{-1}(a(x,y)\Delta_x V_{\mu}(x,y)) + \\ & \alpha(S_4)b(x,y)\Delta_y V_{\mu}(x,y) + \alpha(S_3)F^{-1}(b(x,y)\Delta_y V_{\mu}(x,y)) + \\ & \lambda_{\mu}c(x,y)V_{\mu}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

B-1.

waarin $\alpha(S_i) = 0$ als x,y een punt is op S_i
 $= 1$ als x,y geen punt is van S_i .

Omdat de differentievergelijking 3.1-1 niet geldig is op de rand S worden twee nieuwe funkties U_{μ} en U_{ν} gedefinieerd op een gebied G' dat bestaat uit G en alle direkt aan G grenzende punten, zodanig dat:

$$\begin{aligned} U_{\mu}(x,y) &= V_{\mu}(x,y) \\ U_{\nu}(x,y) &= V_{\nu}(x,y) \text{ overal op } G; \end{aligned}$$

en dat voorts overal op G geldt dat:

$$\begin{aligned} E^{-1}\Delta_x(a'(x,y)\Delta_x U_{\mu,\nu}(x,y)) + F^{-1}\Delta_y(b'(x,y)\Delta_y U_{\mu,\nu}(x,y)) + \\ + \lambda_{\mu,\nu}c(x,y)U_{\mu,\nu}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

B-2.

waarin:

$a'(x,y) = a(x,y)$ overal waar $a(x,y)$ gedefinieerd is
willekeurig doch $\neq 0$ elders.

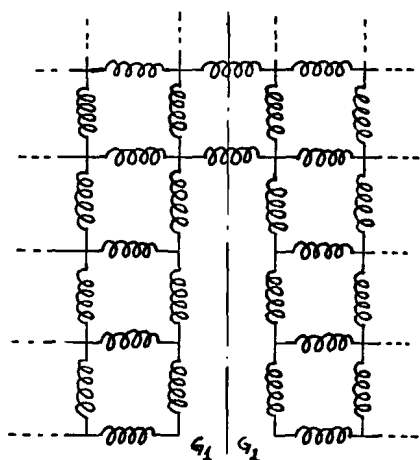
$b'(x,y) = b(x,y)$ overal waar $b(x,y)$ gedefinieerd is
willekeurig doch $\neq 0$ elders.

(De fysische betekenis hiervan is dat het netwerk aan de randen wordt uitgebreid met spoelen waarvan geeist wordt dat er geen stroom door gaat)

Terwijl $E^{-1}V_\mu$, EV_μ , $F^{-1}V_\mu$ en FV_μ op de diverse randpunten niet gedefinieerd zijn is dit wel het geval voor EU_μ etc.

De definitie van U_μ en U_ν is niet eenduidig. Elke keuze waarbij aan de definitievoorwaarden is voldaan is geschikt.

Het is echter niet altijd mogelijk overal aan deze voorwaarden te voldoen,



bijvoorbeeld indien het netwerk een structuur heeft als in figuur B1.

In zo'n geval is het altijd mogelijk het gebied G in twee delen G_1 en G_2 te splitsen zodanig dat U_μ en U_ν wel gedefinieerd kunnen worden.

Het bewijs voor de orthogonaliteit wordt daarvoor echter niet wezenlijk anders zodat deze gevallen hier buiten beschouwing blijven.

figuur B1.

Omdat op S geldt dat $U_\mu = V_\mu$ en $U_\nu = V_\nu$ moeten U_μ en U_ν voldoen aan de vergelijking B-1. Daarvoor voor U_μ en U_ν op S tevens de differentievergelijking 3.1-1 geldt zijn de randvoorwaarden voor U_μ en U_ν te schrijven in de eenvoudige vorm:

$$\Delta_n U_\mu = 0$$

$$\Delta_n U_\nu = 0$$

B-3.

in het geval van open rand.

Daarbij is Δ_n een symbolische aanduiding voor:

$$E^{-1} - 1 \text{ op } S_1$$

$$E - 1 \text{ op } S_2$$

$$F^{-1} - 1 \text{ op } S_3$$

$$F - 1 \text{ op } S_4.$$

Door vermenigvuldiging van de differentievergelijking voor U_μ met U_ν en die voor U_ν met U_μ en daarna aftrekken wordt verkregen:

$$U_{\nu} E^{-1} \Delta_x (a' \Delta_x U_{\mu}) - U_{\mu} E^{-1} \Delta_x (a' \Delta_x U_{\nu}) + U_{\nu} F^{-1} \Delta_y (b' \Delta_y U_{\mu}) - U_{\mu} F^{-1} \Delta_y (b' \Delta_y U_{\nu}) + (\lambda_{\mu} - \lambda_{\nu}) c U_{\mu} U_{\nu} = 0$$

B-4.

Door uitschrijven van de differenties is in te zien dat dit gelijk is aan:

$$\Delta_x \{ (E^{-1} a') (U_{\mu} E^{-1} U_{\nu} - U_{\nu} E^{-1} U_{\mu}) \} + \Delta_y \{ (F^{-1} b') (U_{\mu} F^{-1} U_{\nu} - U_{\nu} F^{-1} U_{\mu}) \} + (\lambda_{\mu} - \lambda_{\nu}) c U_{\mu} U_{\nu} = 0$$

B-5.

Vergelijking B-5 geldt op elk punt (x,y) van G en kan daarom over G gesommeerd worden.

Sommeren over G kan geschieden door:

1. eerst sommeren over alle rijen in de x -richting en daarna de som van al deze deelsommen te nemen.
2. eerst sommeren over alle rijen in de y -richting en daarna de som van al deze deelsommen te nemen.

$$\Sigma_G f(x,y) = \Sigma_y \Sigma_x f(x,y) = \Sigma_x \Sigma_y f(x,y)$$

Nu is :

$$\Sigma_{x=x_1}^{x_2} \Delta_x f(x) = f(x_2+1) - f(x_1)$$

Sommeren van de eerste term van vergelijking B-5. geeft:

$$\sum_{y=y_1}^{y_2} \left[a'(x_2,y) \{ U_{\mu}(x_2+1,y) U_{\nu}(x_2,y) - U_{\nu}(x_2+1,y) U_{\mu}(x_2,y) \} + a'(x_1-1,y) \{ U_{\mu}(x_1,y) U_{\nu}(x_1-1,y) - U_{\nu}(x_1,y) U_{\mu}(x_1-1,y) \} \right]$$

B-6.

Bij een niet-rechthoekig netwerk is $x_2 = x_2(y)$ en $x_1 = x_1(y)$.

Nu is elk punt (x_2,y) een punt van S_2 en elk punt (x_1,y) een punt van S_1 , zodat bij open rand:

$$U_{\mu,\nu}(x_2+1,y) = U_{\mu,\nu}(x_2,y)$$

$$U_{\mu,\nu}(x_1-1,y) = U_{\mu,\nu}(x_1,y) \quad \text{volgens B-3.}$$

en bij kortgesloten rand is:

$$U_{\mu,\nu}(x_2,y) = U_{\mu,\nu}(x_1,y) = 0 .$$

In beide gevallen worden alle termen in de sommatie B-6 nul.

Door de tweede term uit vergelijking B-5. eerst naar y en daarna naar x te sommeren is eveneens te bewijzen dat bij sommatie over G deze term geen bijdrage levert.

Er blijft dan alleen over:

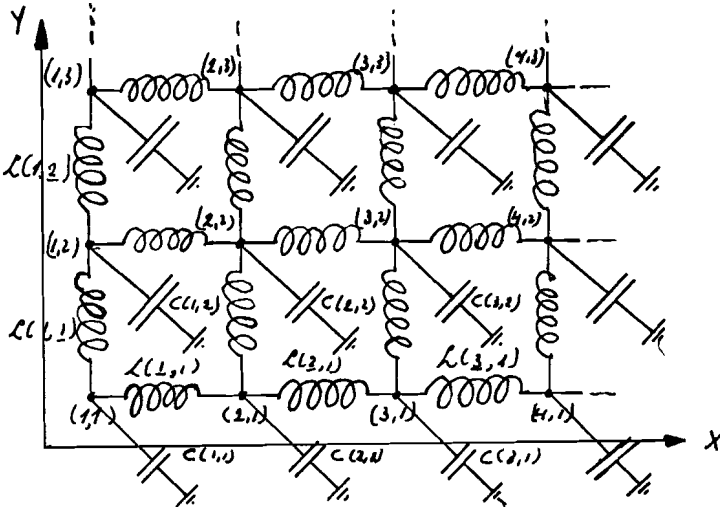
$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \sum_G U_\mu(x,y) U_\nu(x,y) c(x,y) = 0.$$

Daar was aangenomen dat $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ kan dit alleen doordat

$$\sum_G U_\mu U_\nu c = \sum_G V_\mu(x,y) V_\nu(x,y) c(x,y) = 0$$

waarmee het gestelde bewezen is.

N. Notaties en gebruikte symbolen.



figuur N.1.

N.1. Definities van begrippen.

KNOOPPUNT: elk punt van de beschouwde schakeling waar tenminste twee impedanties samenkomen, behalve het gemeenschappelijke aardpunt.

RANDPUNT of RANDKNOOPPUNT: elk knooppunt met slechts drie of minder impedanties in het bovenvlak, en een impedantie naar aarde.

GEBIED G: verzameling van alle knooppunten van het netwerk; wordt ook aangeduid als $G(x,y)$.

RAND S: verzameling van alle randpunten; wordt ook aangeduid als $S(x,y)$.

S_1 : verzameling van alle randpunten (x,y) die niet verbonden zijn met het knooppunt $(x-1,y)$; ofwel alle begin punten van de knooppuntenrij in de x-richting.

S_2 : verzameling van alle knooppunten (x,y) die niet verbonden zijn met het knooppunt $(x+1,y)$; ofwel alle eindpunten van de knooppuntenrij in de x-richting.

S_3 : verzameling van alle knooppunten (x,y) die niet verbonden zijn met het knooppunt $(x,y-1)$; ofwel alle beginpunten van de knooppuntenrij in de y-richting.

S_4 : verzameling van alle knooppunten (x,y) die niet verbonden zijn met het knooppunt $(x,y+1)$; ofwel alle eindpunten van de knooppuntenrij in de y-richting.

Daar een knooppunt element kan zijn van meerdere der S_i is de som der elementen van S_1, S_2, S_3 en S_4 groter dan het aantal elementen van S .

N.2. Symbolen die het netwerk karakteriseren.

(x,y) : de coördinaten van het knooppunt dat x eenheidsstappen in de x -richting, en y eenheidsstappen in de y -richting van de aangelegde oorsprong verwijderd is.

$C(x,y)$: capaciteit tussen het punt (x,y) en aarde.

$L(x,y)$: zelfinductie tussen de punten (x,y) en $(x+1,y)$.

$L(x,y)$: zelfinductie tussen de punten (x,y) en $(x,y+1)$.

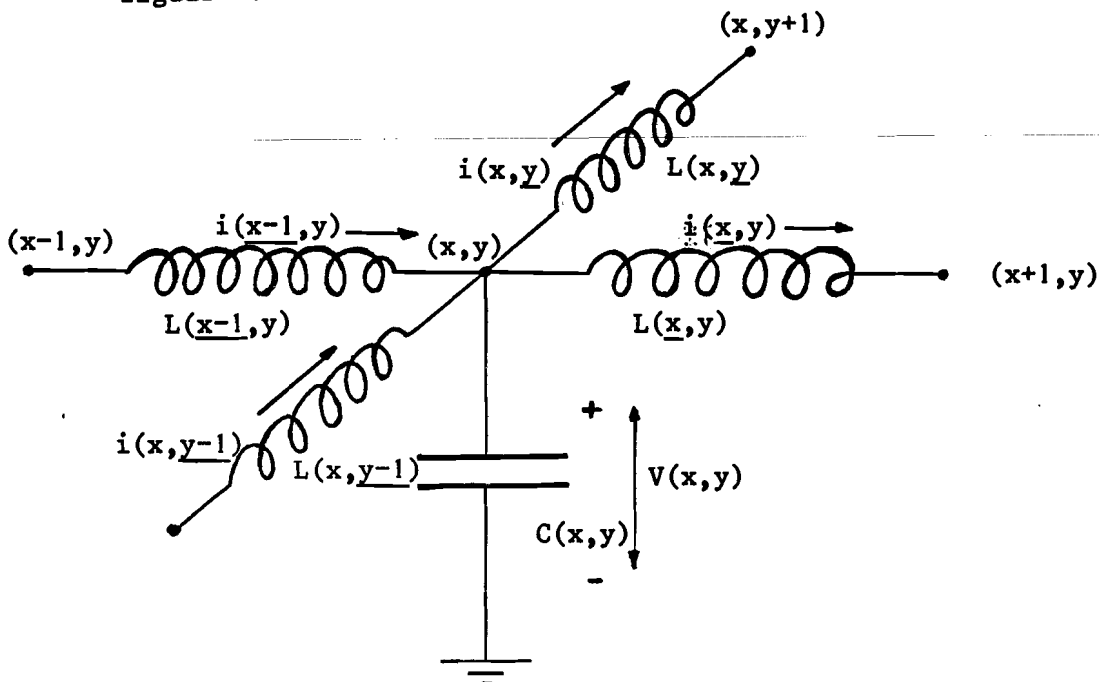
$V(x,y,t)$: spanningsverschil tussen knooppunt (x,y) en aarde.

$i(x,y,t)$: de stroom die loopt van knooppunt (x,y) naar knooppunt $(x+1,y)$.

$i(x,y,t)$: de stroom die loopt van knooppunt (x,y) naar knooppunt $(x,y+1)$.

$i(x,y,t)$: de stroom die loopt van knooppunt (x,y) naar aarde.

figuur N.2.



Litteratuurlijst.

1. Netwerktheorie.

/1.1/: W. Cauer;

Synthesis of linear communication networks (I & II)
2nd ed. by W. Klein and F.H. Pelz.
Mac Graw Hill, 1958.

/1.2/: D.F. Tuttle jr.;

Electric networks; analysis and synthesis.
Mac Graw Hill, 1958.

/1.3/: L. Weinberg;

Network analysis and synthesis.
Mac Graw Hill, 1962.

/1.4/: Elias en Tellegen;

Theorie der wisselstromen, deel III: Theorie der elec-
trische netwerken.
P. Noordhof, 1952.

/1.5/: R.R. Parker;

Normal modes in RLC-networks.
Proceedings of the IEEE, Vol. 57 No. 1. Jan. 1969.

/1.6/: C.A. Desoer;

Modes in linear circuits.
IRE-transactions on circuit theory, Vol. CT-7. Sept. 1960.

/1.7/: E.W. Tschudi;

Admittance and transfer functions for an n-mesh RC-
filter network.
Proceedings of the IRE. Vol. 38. March 1950.

/1.8/: L. Storch;

The multi-section RC filter network problem.
Proceedings of the IRE. Vol. 39. November 1951.

2. Theorie der differentievergelijkingen.

/2.1/: H. Levy, F Lessmann;

Finite difference equations.

Sir Isaac Pitman & Sons Ltd. London 1959.

/2.2/: Jordan;

Calculus of finite differences. 2nd ed.

Chelsea publishing company, 1950.

/2.3/: S. Goldberg;

Introduction to difference equations.

J. Wiley and Sons, 1958.

3. Wiskunde en fysica, algemeen.

/3.1/: L. Kuipers, R. Timman;

Handboek der wiskunde I. 2^e druk.

Scheltema en Holkema N.V. Amsterdam, 1966.

/3.2/: C.R. Wylie jr.;

Advanced engineering mathematics. 2nd. ed.

Mac Graw Hill, 1960.

/3.3/: G.A. Korn, T.M. Korn.

Mathematical handbook for scientists and engineers.

Mac Graw Hill, 1961.

/3.4/: L.J.F. Broer;

Theoretische natuurkunde I, inleiding tot de mathematische fysica.

Collegediktaat TH Eindhoven.

4. Overige werken.

/4.1/: B. van der Pol, H. Bremmer;

Operational Calculus, based on the two side Laplace integral.

Cambridge University Press, 1964.

/4.2/: E.J. Routh;

Dynamics of a system of rigid bodies. 6th. ed.
Part II: advanced part.
Dover publ. 1905. (reprinted 1955).

/4.3/: L. Brillouin;

Wave propagation in periodic structures.
Electric filters and crystal lattices.
Dover publ. 1953.