

MASTER

Toepassing Sensitivityanalyse

Tercic, E.J.

Award date:
1967

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

4689

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN.

Afdeling Elektrotechniek.

Groep Meet en Regeltechniek.

Toepassing Sensitivityanalyse.

door E.J.Tercic.



Verslag van afstudeerwerk

verricht bij Prof. P. Rykboff.

oktober '67.

Toepassing Sensitivity Analyse.

Inhoud.

	Inleiding.	1
I.	<u>Sensitivity analyse</u>	2
	1.1. Basis definities	3
	1.2. Analyse van de supplementaire beweging	3
	1.3. De sensitivity vergelijkingen	4
II.	<u>Sensitivity methoden in lineaire constante parameter systemen</u>	7
	2.1. Sensitivity methode volgens Neissinger	7
	2.2. Strukturele methode : Het verkrijgen van de één-parameter sensitivity-vektor in multivariabele systemen.	8
	2.3. Sensitivity punten-methode. Het verkrijgen van de multi-parameter sensitivity-gradient vektor.	11
	2.4. Analytisch bewijs voor de sensitivity punten	14
III.	<u>Toepassing van de sensitivity analyse op de systeemidentificatie</u>	15
	3.1. Probleemstelling	16
	3.2. Wiskundige formulering	17
	3.3. De output - error methode	20
	3.4. Nadere beschouwing performance index	24
	3.5. Bestudering van een 1 ^o orde model.	27
	3.6. Bestudering van een multi-parameter systeem	30
	3.7. De sensitivity-matrix	35
	3.8. Praktische resultaten	37
	3.9. Polen en residuen	39
	3.10. De " open loop " extrapolatie benadering.	41
IV.	Appendix	45
V.	Bijlagen	

Samenvatting.

Gebruikmakend van de "sensitivity theorie", welke het gedrag van een systeem beschrijft, in afhankelijkheid van parametervariaties, worden de sensitivity coëfficiënten bepaald.

De sensitivity coëfficiënten worden samen met een kwadratisch foutkriterium gebruikt om de sensitivity theorie toe te passen op de parameterschatting.

Als systeemparameters worden genomen, coëfficiënten van de D.V. of pelen met de daarbij behorende residuen.

Het is gelukt een afregelschema aan te geven, waarmee vier parameters simultaan bepaald kunnen worden.

Interactie, convergentie, stabiliteitsproblemen welke bij deze afregeling optreden worden besproken.

Inleiding:

Het probleem van de gevoeligheid van dynamische en speciaal van automatische regelssystemen met betrekking tot variaties in de parameters speelt een grote rol in de moderne regeltechniek. Om een inzicht in de sensitivity analyse te krijgen kan een tweevoudige reden hebben.

Bij de realisatie van fysische systemen zullen de parameters doorgaans afwijken van de berekende parameterwaarden, of door veroudering veranderen.

Van de andere kant bestaat er tegenwoordig een toenemend belangstelling om automatisch regelssystemen te bouwen met variabele structuur. Bij deze systemen bestaat de mogelijkheid om de parameters te veranderen ten einde adaptieve eigenschappen te krijgen. Dit aspect van de sensitivity analyse vindt zijn toepassing in optimale en zelfafregelende systemen.

In deze en in andere gevallen is de eerste vraag "waarin we geïnteresseerd zijn, hoe het gedrag van het systeem zal veranderen indien een of meerdere van zijn parameters veranderen. Met andere woorden, wat zal de "sensitivity" van het systeem zijn met betrekking tot parameter veranderingen?. De reeks ideeën en methode welke zijn ontwikkeld voor het oplossen van problemen, verbonden aan parameter variaties, maakt het op het ogenblik mogelijk om deze ideeën en methoden samen te brengen onder één hoofdstuk in de regeltechniek: de sensitivity analyse.

I. Sensitivity analyse

1.1. Basis defenities.

Bij de bestudering van de sensitivity analyse zullen we ons beperken tot infinitesimale parameter variaties.

De parameter variaties welke op kunnen treden zijn te onderscheiden in :

α - variaties : variaties van b.v. versterkingsfactoren en coëfficiënten van de D.V. ; pool-varianties.

δ - variaties : variaties in parameters, welke leiden tot een verhoging van de orde van het systeem (b.v. parasitaire koppeling).

β - variaties : variaties in de beginvoorwaarden.

Tenslotte kunnen we onderscheid maken tussen absolute variaties en relatieve variaties, waarvan de laatste, in de Oost-Europese litteratuur wordt gebruikt.

De methoden welke de sensitivity theorie behandelen zijn in 3 groepen onder te brengen :

- a) analyse van de supplementaire beweging.
- b) synthese van systemen, met betrekking tot de supplementaire beweging.
- c) ontwikkeling van methoden welke leiden tot een inwerking op de parameters van een systeem; dit gebied bestrijkt de optimaliserende en de adaptieve systemen.

1.2. Analyse van de supplementaire beweging.

In de moderne regeltechniek beschrijft men een dynamisch systeem n.b.v. zijn toestandsvariabelen. Dit zal ook ons uitgangspunt zijn.

Beschouw het dynamisch systeem, dat door de volgende d.v. beschreven wordt

$$\dot{y}_i = F_i (y_1 \dots y_n ; t ; \alpha_1 \dots \alpha_n) \quad (1)$$

$i=1 \dots \dots n.$

met α_j ($j=1 \dots \dots n$) de systeemparameters.

Beginvoorwaarden: $y_i(0) = y_i^0$

Stel de parameterwaarden veranderen met $\Delta\alpha_j$, dan wordt de gevarieerde beweging beschreven door:

$$\dot{\hat{y}}_i = F_i (\hat{y}_1 \dots \hat{y}_n ; t, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots \alpha_n + \Delta\alpha_n) \quad (2)$$

De supplementaire beweging is gedefinieerd als het verschil:

$$\Delta y_i (t) = \hat{y}_i (t) - y_i (t) \quad i=1 \dots n \quad (3)$$

Indien de oplossing van (1) en (2) differentieerbaar zijn naar de parameter α_j , kan de supplementaire beweging in een Taylor reeks ontwikkeld worden. Verwaarlozing van de hogere machten in de ontwikkeling leidt tot:

$$\Delta y_i (t, \Delta\alpha_1, \dots \Delta\alpha_n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j} \right) \Delta\alpha_j + \dots \quad (4)$$

$\Delta\alpha_1 = 0$
 \vdots
 $\Delta\alpha_n = 0$

1.3. De sensitivity vergelijkingen.

Willen we iets zeggen omtrent de grootte van de supplementaire beweging, dan is kennis vereist van de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_j} = u_{1j}(t) \quad \text{wanneer } \Delta \alpha_1 = 0 \dots \Delta \alpha_n = 0 \quad (5)$$

De functie $u_{1j}(t)$, wordt de sensitivity coefficient van de parameter α_j m.b.t. de coördinaat y_1 genoemd en geeft inzicht in de variaties van de coördinaten van het systeem.

De mathematische basis voor de bestudering van deze sensitivity coefficienten, is de analytische afhankelijkheid van de parameters in de oplossingen van (2).

De oplossing van deze functie verkrijgt men door het differentieren van vergelijking (2) naar de parameter α_j ; met $\Delta \alpha_j = 0$.

Onder gebruikmaking van (5) leidt dit tot een systeem van n-differentiaal vergelijkingen.

$$\dot{u}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial y_i} u_{ij} + \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_j} \quad (6)$$

$$u_{kj}(0) = 0 \quad \begin{matrix} i, k = 1 \dots \dots \dots n \\ j = 1 \dots \dots \dots n \end{matrix}$$

In het geval van λ -variaties worden de beginvoorwaarden $u_{1j}(0) = 1$ zoals eenvoudig te zien is:

$$\text{stel } y_1(0) = b_1$$

$$\hat{y}_1(0) = b_1 + \Delta b_1$$

We kunnen schrijven $y_1(t) = b_1 + \int_0^t f_1(y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dt$

differentieren naar de beginvoorwaarden b_1 geeft

$$\frac{\partial y_1(t)}{\partial b_1} = 1$$

De λ -variaties worden in de appendix behandeld.

Uit de vergelijking (6) zijn de volgende eigenschappen voor de sensitivity vergelijking af te leiden.

- 1). De D.V. voor de sensitivity coëfficiënten zijn lineair.
- 2). De orde van de D.V. is gelijk aan de orde van de D.V. welke het systeem beschrijft.
- 3). De homogene delen van de vergelijkingen van (6) zijn voor elke parameter α_1 t/m α_m gelijk. Alleen de inhomogene termen $\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_j}$ verschillen.

De algemene methode om de sensitivity vergelijkingen door simulatie op te lossen op de analoge rekenmachine is de volgende (zie fig. I.7)

Het originele systeem blok O.S. en de sensitivity vergelijkingen worden samen op de computer geprogrammeerd. De oplossingen van het originele systeem worden gebruikt om de variabele coëfficiënten te vormen: blok (VC) en de functies $\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_j}$ blokken $S_1 \dots S_m$.

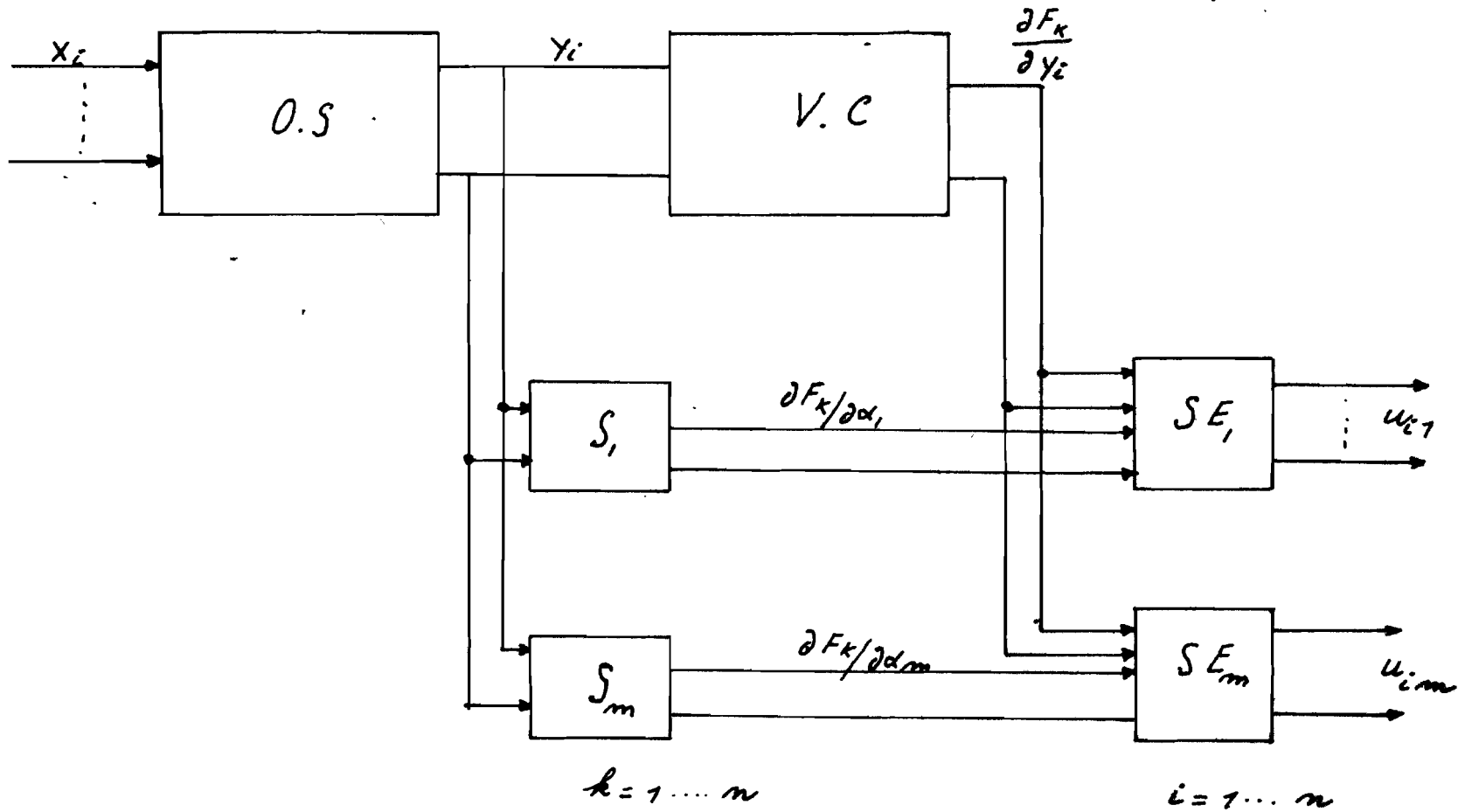
Om alle sensitivity functies simultaan te berekenen, is het noodzakelijk om voor elke parameter m-homogene sensitivity vergelijkingen beschikbaar hebben.

Volgens (4) vinden we de supplementaire beweging $\Delta y_i (i=1 \dots m)$, door de sensitivity functies met de corresponderende parameter variaties te vermenigvuldigen. Het grote voordeel van de methode is de mogelijkheid om de supplementaire beweging te berekenen met een nauwkeurigheid waarmee de fundamentele beweging berekend is. Van dit gegeven maakt men gebruik bij de error-analyse, waarmee fouten bestudeerd worden waarmee de oplossingen van de D.V. op de analoge rekenmachine verkregen, behept zijn. Voor een verband van de error-analyse en de sensitivity-analyse kan verwezen worden naar 2.

Fig.I.1 kan vereenvoudigd worden indien de sensitivity functies ombeurten berekend worden. Het is dan voldoende om een model SE te hebben, waarin om beurten de functies $\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_j}$ gestuurd wordt corresponderend met de parameter α_j .

2 A mathematical basis for an error analysis of differential analyzers.

K.S. Miller and F.J. Murray. M.I.T. journal of mathematics and physics. no.2 and 3. 1953.



Simulatiediagram voor de sensitivity functies.

Fig. I.1

II.

Sensitivity methoden in lineaire constante parameter systemen.

2.1. Sensitivity methode volgens Meissinger.

Uitgangspunt van deze methode is, dat de D.V. welke het systeem beschrijft bekend verondersteld wordt.

Stel D.V. $\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = x(t)$

Differentieren naar de parameters α en β geeft de sensitivity vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \alpha \dot{u} + \beta u &= -\dot{y} \\ \ddot{v} + \alpha \dot{v} + \beta v &= -y \end{aligned}$$

Waarin $u = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ en $v = \frac{\partial y}{\partial \beta}$

In onderstaande figuur wordt de oplossing voor de sensitivity coefficient in een simulatieschema weergegeven.

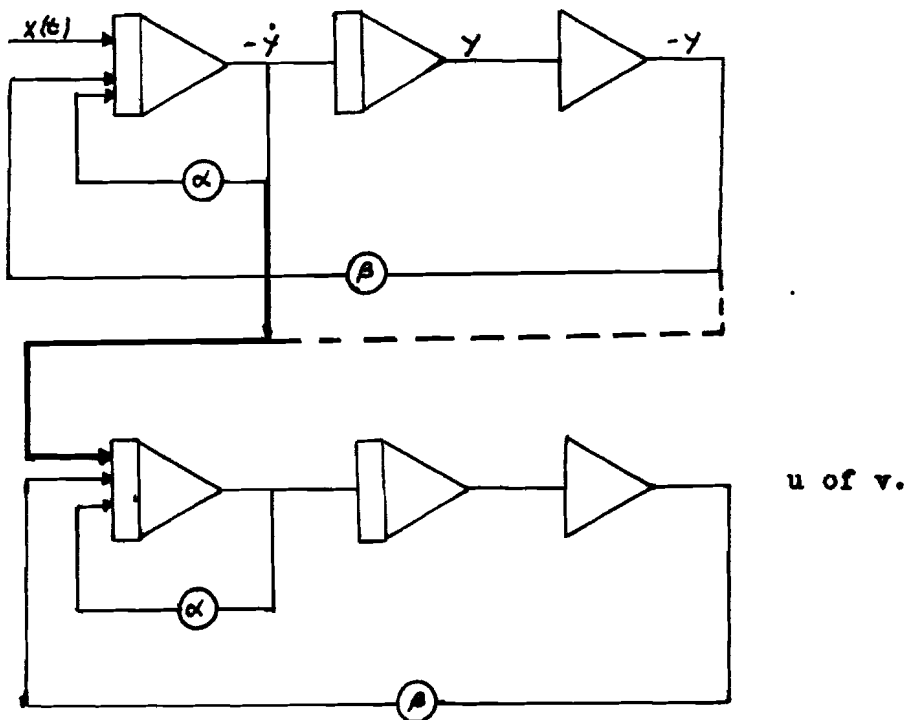


Fig.(II.1)

2.2. Strukturele methode: Het verkrijgen van de één-parameter vector in multivariabele systemen.

Het oplossen van de sensitivity vergelijkingen is een algemene, maar niet altijd gemakkelijkste manier, om de sensitivity functies te verkrijgen.

De structurele methode om deze functies te krijgen is gebaseerd op het werk van Bykhovski.

Bykhovski's methode wordt het eerst beschreven in samenhang met het onderzoek naar de nauwkeurigheid van elektrische netwerken in netwerkanalysers. Het principe zal nu geformuleerd worden. Als origineel systeem nemen we een systeem met

constante parameter en input $x(t)$ en output $y(t)$. Fig. II 2 (a). Stel dat de overdrachtsfunctie $W(s)$ van een bepaalde component in dit systeem, met input V en output Z een variatie $\Delta W(s)$ ondergaat.

Hierdoor zullen de coördinaten in het systeem een verandering ondergaan.

(b). We kunnen diagram (b) transformeren naar (c), met de uitwendige storing $\delta z(s) = V(s) + \Delta V(s) \Delta W(s)$.

Indien 2^o orde termen verwaarloosd worden kunnen we schrijven:

$$\delta z(s) \approx V(s) \Delta W(s)$$

Met behulp van het superpositiebeginsel is in te zien dat de supplementaire beweging een gevolg is van deze uitwendige storing. (d)

Het signaal v kan van een model van het originele systeem worden genomen en zodoende komt men tot structurele representatie van de supplementaire beweging Δy , veroorzaakt door Δw . (e)

De sensitivity functie $u(t)$ m.b.t. de parameter welke een variatie in W veroorzaakt, wordt gevonden door $\frac{\Delta y(t)}{\Delta \alpha}$ met $\Delta \alpha \rightarrow 0$

Het uiteindelijke diagram wordt gegeven in fig. (f).

Structurele representatie van de sensitivity coefficient volgens Bykhovski.

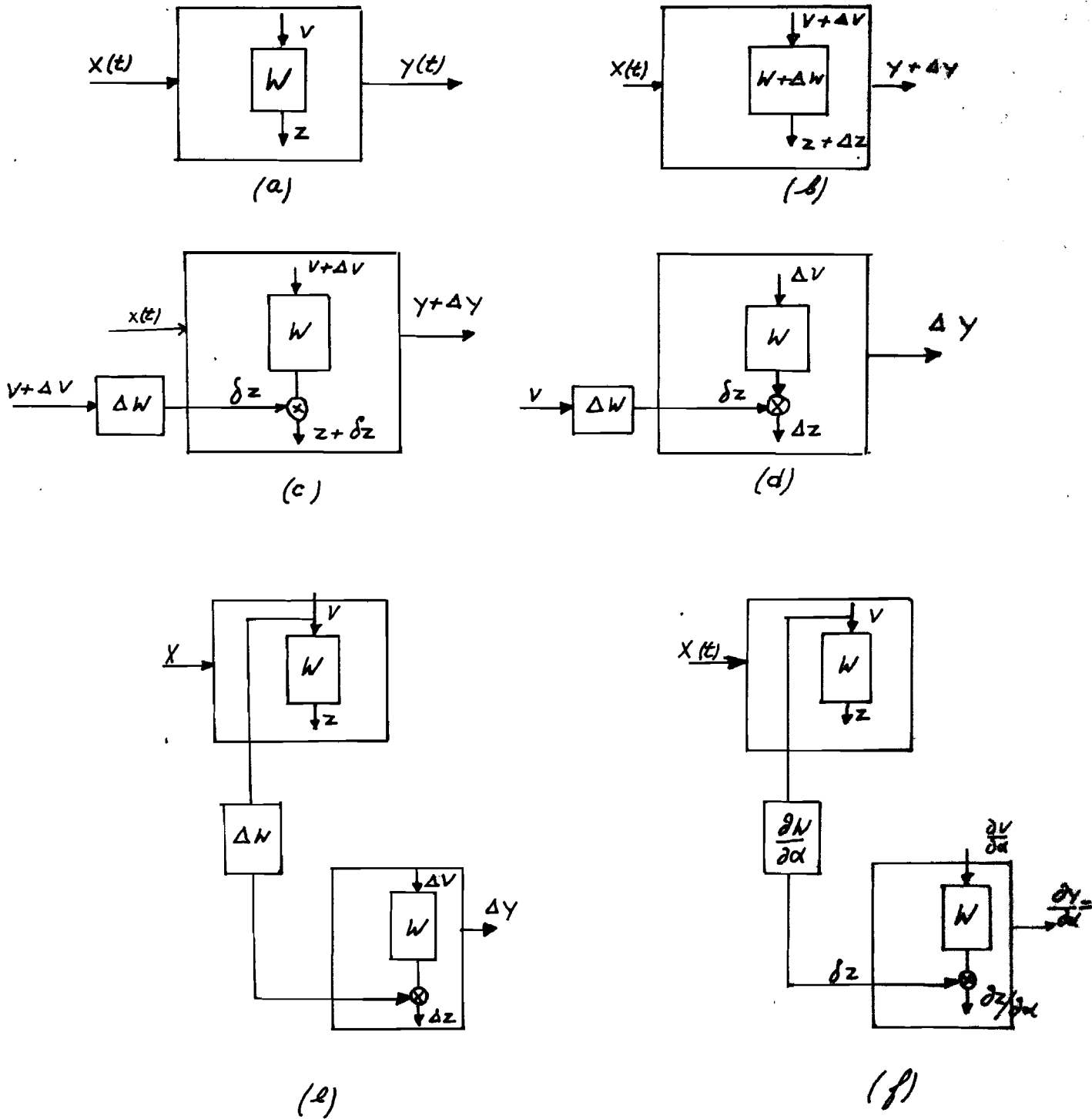


Fig.II 2.

Bij vergelijking van deze methode met de eerder behandelde manier (fig. 1.1), kunnen we opmerken, dat het grote voordeel bij de structurele methode het feit is, dat men niet de afhankelijkheid van de parameter, die varieert, op de systeem functie hoeft te kennen.

Het is slechts noodzaak om een model van het te onderzoeken systeem te hebben en een model welke de afhankelijkheid geeft van de variabele parameter m.b.t. de component waarvan de eerder genoemde parameter deel uit maakt.

De analytische uitdrukking voor de sensitivity functie is:

$$U(s) = X(s) \cdot K(s) \cdot K(s) \cdot \frac{\delta W(s)}{\delta \alpha}$$

x, v $\delta z, u$

waarin $K(s)$ de overdrachtsfunctie van x naar y
 x, v

en $K(s)$ de overdrachtsfunctie van δz naar y representeert.
 $\delta z, u$

2.3. Sensitivity punten methode.

Beschouw nogmaals de vergelijkingen voor de sensitivity functies (6).

Om voor elke parameter de daarbij behorende sensitivity functie te vinden, moeten we dus om beurten deze vergelijkingen voor elke parameter oplossen.

Het homogene deel van de vergelijking blijft gedurende de berekening onveranderd, maar elke keer moet een nieuwe onafhankelijke term geïntroduceerd worden.

Alle bestaande methoden om de sensitivity coëfficiënten te berekenen zijn op dit sequentiële principe gebaseerd.

We gaan nu over tot het behandelen van een methode welke ons de sensitivity functies simultaan geeft: de "sensitivity point" methode. Het fundamentele werk in deze richting werd verricht door P.Kokotovic (zie Tomovic; Sensitivity analysis blz. 56 e.v.).

Principe:

Stel een overdrachtsfunctie $H(s, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ systeem parameters.

Ingangssignaal $X(s)$.

Uitgangssignaal $Y(s, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = X(s) H(s, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

De complexe sensitivity coëfficiënt $U_r(s)$ kan gedefinieerd worden m.b.t. de relatieve variatie in de parameter α_r als:

$$U_r(s) = \frac{\partial Y(s, \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \ln \alpha_r}$$

De reële sensitivity coëfficiënt wordt gegeven door:

$$u_r(t) = \frac{\partial y(t, \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \ln \alpha_r}$$

Beschouw het volgende teruggekoppelde systeem

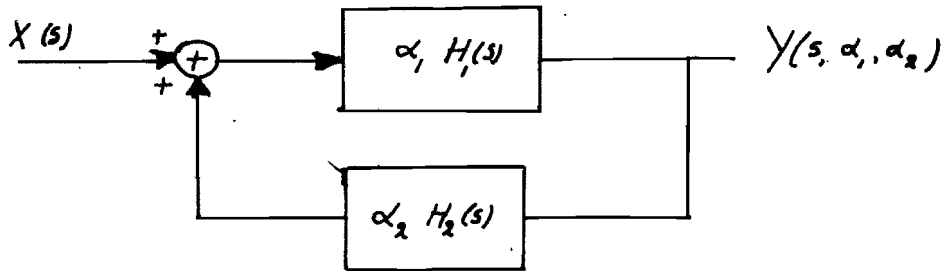


Fig. II 3.

De parameters α_1 en α_2 zijn versterkingsfactoren in voorwaarts-richting en in de terugkoppeling.

De totale systeemfunctie van bovenstaand blokdiagram is:

$$H(s; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 H_1(s)}{1 + \alpha_1 H_1(s) \alpha_2 H_2(s)}$$

Door differentieren naar respectievelijk parameters, wordt gevonden:

$$U_1(s) = Y(s) \frac{1}{1 + \alpha_1 H_1(s) \alpha_2 H_2(s)}$$

$$U_2(s) = -Y(s) \frac{\alpha_1 H_1(s) \alpha_2 H_2(s)}{1 + \alpha_1 H_1(s) \alpha_2 H_2(s)}$$

Bovenstaande vergelijkingen zijn in het volgende blokdiagram gerealiseerd.

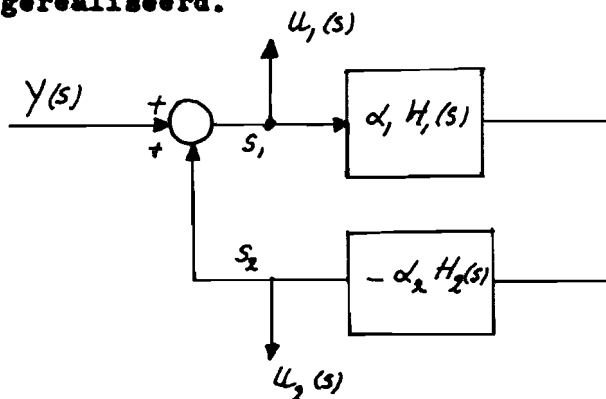


Fig. II 4.

Aan het voorgaande kunnen we de volgende conclusie verbinden: Indien de responsie $y(t)$ van het oorspronkelijk systeem genomen wordt alsingangssignaal voor een model van het systeem, dan zijn er punten aan te geven in dit model (het sensitivity model) waarop de functies $U(s)$ en $U_1(s)$ simultaan beschikbaar zijn.

De genoemde punten zijn de sensitivity punten.

Zijn sensitivity coëfficiënten van hogere orden verlangd, dan kan men met een 2^o sensitivity model met alsingangssignaal de 1^o orde sensitivity coëfficiënt, analoog aan het voorgaande sensitivity punten van de 2^o orde creëren.

Een handige toepassing van de "sensitivity punten methode" krijgt men bij lineaire systemen waarvan de overdrachtsfunctie de vorm heeft:

$$H(s) = \frac{s^n \dots \dots \dots a_0}{s^m + s^{m-1} b_{m-1} \dots \dots \dots b_0}$$

Stel we zijn geïnteresseerd in de sensitivity functies van de noemer coëfficiënten:

Differentieren naar de parameter b_r geeft:

$$\frac{\partial Y(s)}{\partial b_r} = \frac{-X(s) (s^n \dots \dots \dots a_0) s^r}{(s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots \dots \dots b_0)^2} = -Y(s) \frac{s^r}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots \dots \dots b_0}$$

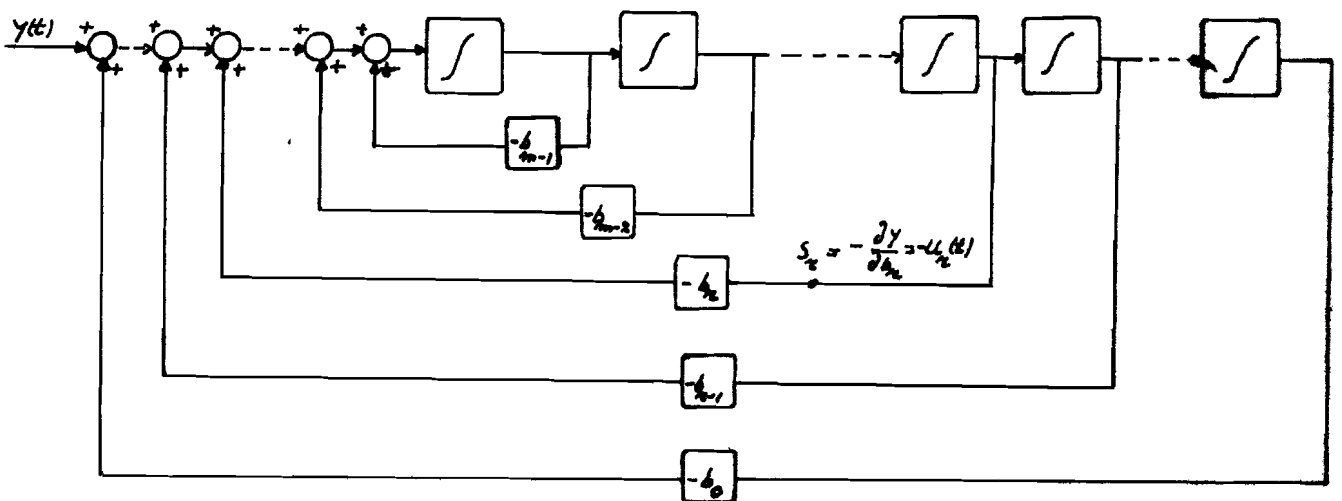


Fig. II 5.

In het blokdiagram is het punt S_x te vinden waar $U_x(s)$ beschikbaar is.

Men kan dus met één model volstaan om de sensitivity coëfficiënten $\frac{\delta y}{\delta b_x}$ $r = 0 \dots \dots \dots m-1$

simultaan te verkrijgen.

Op een praktische toepassing hiervan wordt nog teruggekomen.

2.4. Analytisch bewijs voor het simultaan verkrijgen van de sensitivity coëfficiënten.

De beschrijving m.b.v. sensitivity methode laat zien, dat het mogelijk is, door gebruikmaking van structurele diagrammen en overdrachtsfuncties de multi-parameter sensitivity gradient vector te verkrijgen. Deze mogelijkheid ligt niet opgesloten in de algemene sensitivity vergelijkingen.

We zullen deze mogelijkheid m.b.v. een differentiaal vergelijking laten zien.

$$\text{Gegeven D.V. } y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) \dots a_0 y = x(t) \quad (\text{II 1.})$$

differentieren naar a_r geeft:

$$v_r^{(m)}(t) \dots a_0 v_r(t) = -y^{(r)}(t) \quad (\text{II 2.})$$

$$\text{waarin: } \frac{\delta y}{\delta a_r} = v_r(t)$$

Beschouw nu een andere D.V. van dezelfde vorm als (II 1), maar met de afhankelijke variabele z en inhomogene deel $y(t)$.

$$z^{(m)}(t) + a_{m-1} z^{(m-1)}(t) \dots a_0 z = y(t) \quad (\text{II 3.})$$

Differentieer deze D.V. r maal naar t , dit leidt tot:

$$z^{(m+r)}(t) + a_{m-1} z^{(m-1+r)}(t) \dots a_0 z^{(r)}(t) = y^{(r)}(t) \quad (\text{II 4.})$$

Substitueer $u_r(t) = -z^{(r)}(t)$ in vergl. (II 4.)

$$u_r^{(m)}(t) + a_{m-1}u_r^{(m-1)}(t) \dots\dots\dots a_0u_r(t) = -y^{(r)}(t) \quad (II 5.)$$

Vergelijking van (II 2.) met (II 5.) zegt dat :

$$u_r(t) = v_r(t)$$

dus:

$$v_r(t) = -z^{(r)}(t)$$

M.a.w., dat in de punten $S_1 \dots\dots\dots S_{m-1}$

de sensitivity coefficienten $v_1(t) \dots\dots\dots v_{m-1}(t)$
simultaan beschikbaar zijn.

Een uitbreiding van de sensitivity punt-methode tot multiloop systemen
is door Kokotovic gegeven. ■

■ Method of sensitivity points in the investigation
and optimization of linear control systems.

P. Kokotovich. Translated from Avtomatika i Telemekhanika,

Vol. 25, No. 12.

III. Toepassing van de sensitivity analyse op de systeemidentificatie.

3.1 Probleemstelling.

Een belangrijk probleem bij de detectie en tracking van ruimtevaartuigen is de identificatie van vergelijkingen door meting tijdens de vlucht.

Identificatie methoden vinden ook een belangrijke toepassing bij het bepalen van mathematische modellen voor regel processen. In de meeste gevallen is enige kennis van de proceskarakteristieken aanwezig. Indien deze a priori kennis gebruikt wordt om een model te formeren, dan is het identificatieprobleem gereduceerd tot het vinden van de coëfficiënten van het model zodat een van te voren gespecificeerde performance index (functie) geminimaliseerd wordt. In dit hoofdstuk zal de continue parameter identificatie techniek, van dynamische systemen besproken worden, waarbij gebruik wordt gemaakt van de analoge rekenmachine.

Bij deze optimaliseringsprocedure kunnen we handig gebruik maken van de eerder genoemde "sensitivity punten methode". Het gebruik van de analoge rekenmachine geeft de mogelijkheid tot on-line optimalisatie. Hoewel de techniek niet nieuw is, is de analytische basis, convergentie en zijn stabiliteits eigenschappen nog niet in extenso bestudeerd.

Het probleem van de interactie van de verlangde parameters wordt m.b.v. de "sensitivity" matrix besproken.

3.2 Wiskundige formulering.

Het parameter schattingsprobleem kan als volgt geformuleerd worden.

Stel een dynamisch systeem wordt beschreven door:

$$\dot{\bar{y}} = \bar{F}(\bar{y}, t, \bar{a}) \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \quad (\text{III 1.})$$

\bar{y} is een $n \times 1$ vektor: de state-vektor van het systeem.

\bar{a} is een $m \times 1$ vektor: de onbekende parametervektor.

De vorm van de vektorfunctie \bar{F} , wordt bekend verondersteld.

Aan de hand van (1) kunnen we tot een mathematisch model van het systeem komen gegeven door:

$$\dot{\bar{z}} = \bar{F}(\bar{z}, t, \bar{\alpha}) \quad \bar{z}(0) = \bar{z}_0 \quad (\text{III 2.})$$

waarin $\bar{z} = n \times 1$ vektor, de state vektor van het model.

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (\text{III 3.})$$

Stellen de parameters van het model voor.

Het doel van het parameterschattingsproces is $\bar{\alpha}$ zo bij te regelen dat geldt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\alpha}(t) = \bar{a} \quad (\text{III 4.})$$

$$t \rightarrow \infty$$

Daar de systeemparameters onbekende zijn, is de afregeling gebaseerd op het minimaliseren van een geschikte functionaal.

Zulk een functionaal is bijv:

$$J = \int_{t_0}^{t_0+T} |\bar{z} - \bar{y}|^2 dt \quad (III 5.)$$

De afregeling is goed indien J een minimum heeft onder de voorwaarde (4).

In de praktijk is echter één component van de state vector aanwezig (de output) zodat voor het criterium de volgende uitdrukking geschreven kan worden:

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_0+T} [z_1 (t, \bar{\alpha}) - y_1 (t)]^2 dt \quad (III 6.)$$

Φ is een gewone functie van de parameters en een functie welke een minimum heeft voor $\Phi(\bar{\alpha})$ indien geldt.

$$\nabla \Phi(\bar{\alpha}) = \bar{0} \quad (III 7.)$$

Dit criterium kan een basis zijn voor een afregelproces waarbij de parameters in de richting van de lokale gradientvector worden bijgesteld.

De gradientmethode kan als volgt uitgedrukt worden:

$$\Delta \bar{\alpha} = - K \overline{\nabla \Phi(\bar{\alpha})} \quad (III 8.)$$

$\Delta \bar{\alpha}$ is een kleine verandering in de m - parameters.

K is een positief defeniete matrix.

Elke component van (8) kan dan verkregen worden als:

$$\Delta \alpha_i = - \alpha K_i \int_{t_0}^{t_0+T} e_1 \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_i} dt \quad (III 9.)$$

met $e_1 = z_1 - y_1$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha_i} \quad i = 1 \dots \dots m \text{ zijn} \quad (III 10.)$$

de sensitivity coëfficiënten welke verkregen kunnen worden als oplossing van de sensitivity vergelijkingen.

Vergelijking (9) leidt tot een iteratief proces.

Afregelchema's volgens (III 9.) zijn bestudeerd o.a. door Mc. Ghee.

Beschouw nu het geval waarbij een continue identificatie wordt toegepast.

Het is duidelijk, dat vergelijking (III 9.) niet gebruikt kan worden; daar dit tot een iteratief afregel mechanisme leidt.

We gaan daarom over tot een andere performance index.

$$f_1 = \int z_1 (t, \alpha (t) - y_1(t))^2 \quad (\text{III } 11.)$$

Uit (III 11.) zien we, dat f_1 geen gewone functie van de parameter alleen is, maar ook een functie van de tijd.

Het gevolg is, dat de definitie van de gradient $\nabla f (\bar{\alpha})$ in wiskundige zin, alleen zinvol is indien $\bar{\alpha} (t)$ een constante vector is.

Maar dit is in tegenspraak met het doel om $\bar{\alpha} (t)$ continue bij te regelen, teneinde de performance index te minimaliseren.

Vier benaderingen kunnen aangegeven worden om tot een mathematische formulering van een continue proces te komen.

- 1). Equation error.methode
- 2). Output error.methode
- 3). Extra polatie technieken

Onze aandacht zal op (2) en (3) betrekking hebben waarbij de sensitivity vergelijkingen een belangrijke rol spelen.

3.3. De output error-methode.

Stel de foutvector tussen de toestand van het model (\bar{z}) en de toestand van het systeem \bar{y} gelijk aan \bar{e}_o .

$$\bar{e}_o = \bar{z} - \bar{y} \quad (\text{III } 12.)$$

Een maat welke het gedrag beschrijft tussen model en systeem in de parameterruimte kan de norm $|\bar{e}_o|$ dienen.

Een typisch foutkriterium zou kunnen zijn:

$$f_o = (e_{o0} + q_1 e_{o1} \dots)^2 \quad (\text{III } 13.)$$

$$\text{met } e_{ci} = \frac{d^{(i)}z}{dt^{(i)}} - \frac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}} \quad (\text{III } 14.)$$

Een bezwaar is, dat complete kennis vereist is van de toestandsvariabelen.

We zullen $q = 0$ kiezen.

De grootheid e_{o0} noemen we de "output error".

Parameter identificatie gebaseerd op e_o noemt men "parametertracking" of "continuus model matching".

Om echter de gradient techniek toe te passen op dynamische systeem identificatie, onder gebruikmaking van een functie van e_o , leidt tot analytische moeilijkheden; daar de gradient f_o niet gedefinieerd is, tenzij de parameters constant zijn.

Anders is f_o een functionaal van $\bar{z}(t)$ en afhankelijk van de hele voorgeschiedenis van de af te regelen parameters.

In de literatuur worden afregelingen beschouwd welke langzaam zijn in vergelijking tot de input frequenties; zodat we van een benaderde gradient kunnen spreken.

Veronderstel, dat de parameters constant zijn en de criteriumfunctie gegeven word door:

$$f_o = (z_1 - y_1)^2 = e_o^2 \quad (\text{III } 15.)$$

De componenten van de gradientvektor worden gegeven door:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \alpha_i} = -2 e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \alpha_i} = -2 e_0 \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_i} \quad (\text{III 16.})$$

$$i = 1 \dots \dots m.$$

De sensitivity coëfficiënten $u_{ij} = \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_j}$ (III 17.)

Kunnen we verkrijgen m.b.v. sensitivity model.

In analytische vorm worden ze geven door:

$$\dot{u}_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial z_k} u_{kj} \quad (\text{III 18.})$$

$$i = 1 \dots \dots n$$

$$j = 1 \dots \dots m$$

Om echter de sensitivity coëfficiënten in de gradient methode te gebruiken b.v.:

$$\dot{\alpha}_i = -2 K e_0 U_{1i} \quad (\text{III 19.})$$

$$i = 1 \dots \dots m$$

leidt tot een tegenspraak; omdat de gradient slechts voor constante parameters gedefinieerd is, terwijl de voorgaande formule een verandering van de parameters inhoudt.

Zijn de veranderingen echter klein in een gegeven oplossingsinterval dan kunnen we van een benaderde gradient spreken en het continue afregelproces kan dan beschreven worden door de steepest - descent vergelijking. \square

$$\dot{\alpha} = -2 K e_0 \nabla_1 \quad (\text{III 20.})$$

Tompkins, C.B. , " Methods of Steep Descent", in: Modern Mathematics for the Engineer. (blz. 448 - 479). E.F.Beckenbach. Editor; McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.

Met \bar{v}_1 een n-vector met componenten welke verkregen worden uit de oplossing van

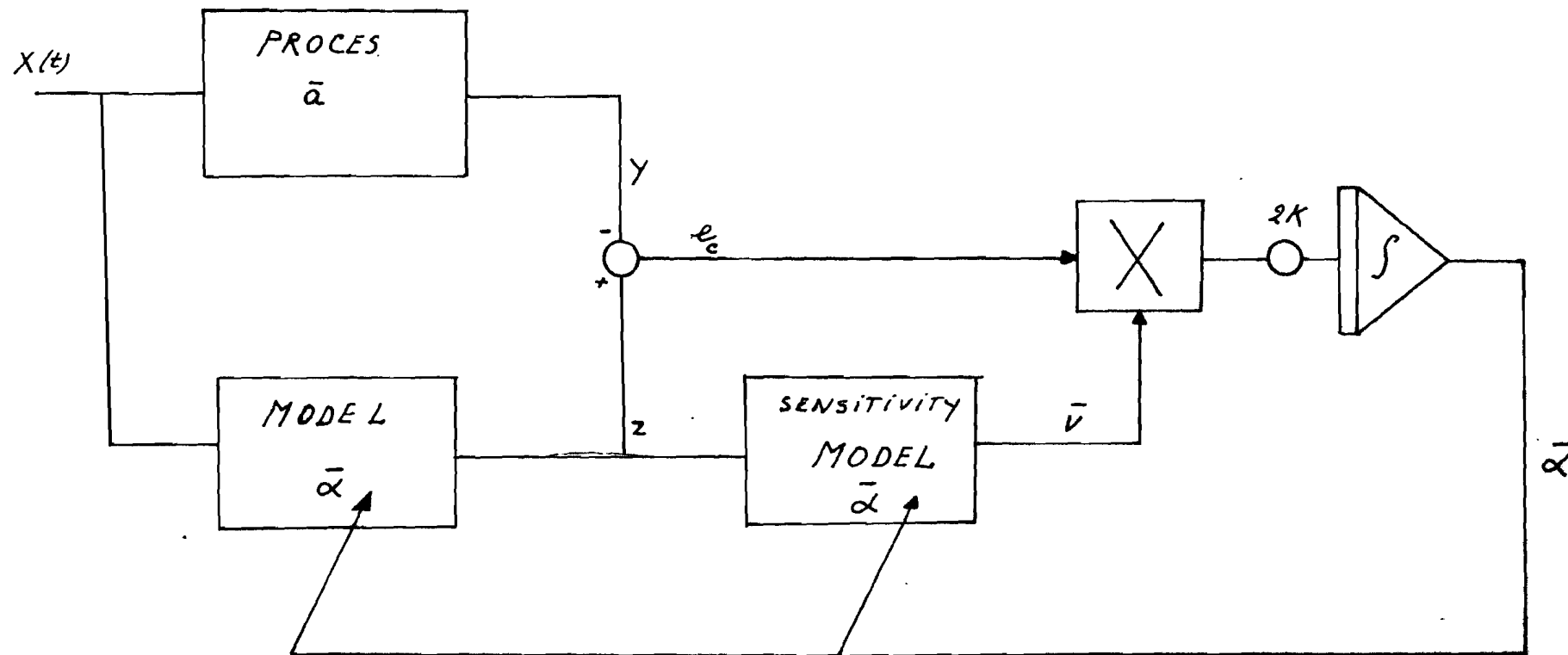
$$v_{1j} = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial z_k} v_{kj} \quad (\text{III 21.})$$

$$j = 1 \dots \dots m$$

Waarbij v_{1j} opgevat kunnen worden als variabelen, welke de sensitivity coefficienten benaderen, indien de verandering \bar{z} naar nul gaat.

Fig. III 1. geeft een blokschema, welke een continu identificatieproces weergeeft.

Op punten in het sensitivity model zijn de sensitivity punten simultaan voorhanden.



Continu identificatie proces.

Fig. III 1.

3.4. Nadere beschouwing performance index.

Beschouw het blokschema voor het identificatie proces. Stel de terugkoppellus voor $\bar{\alpha}$ is onderbroken.

Dan is $\dot{\bar{\alpha}} = 0$ en de gradient ∇f_c is gedefinieerd.

We gaan deze gradient van de foutenkromme nader onderzoeken.

Veronderstel: $f_c = e^2 = (y - z)^2$ (III 23.)

Stel dat het model zich in de buurt van het optimale punt bevindt.

Definieer afwijking tussen model en proces parameter door:

$$\Delta \alpha_i = \alpha_i - a_i \quad (\text{ III 23. })$$

$$i = 1 \dots n$$

Indien de lus open is kunnen we f_c als volgt ontwikkelen:

$$f_c = \left[e(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_c}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right]^2 \quad (\text{ III 24. })$$

Waarbij tweede en hogere orde termen verwaarloosd zijn.

Indien de topologie van systeem en model gelijk zijn dan is

$$e(0) = 0$$

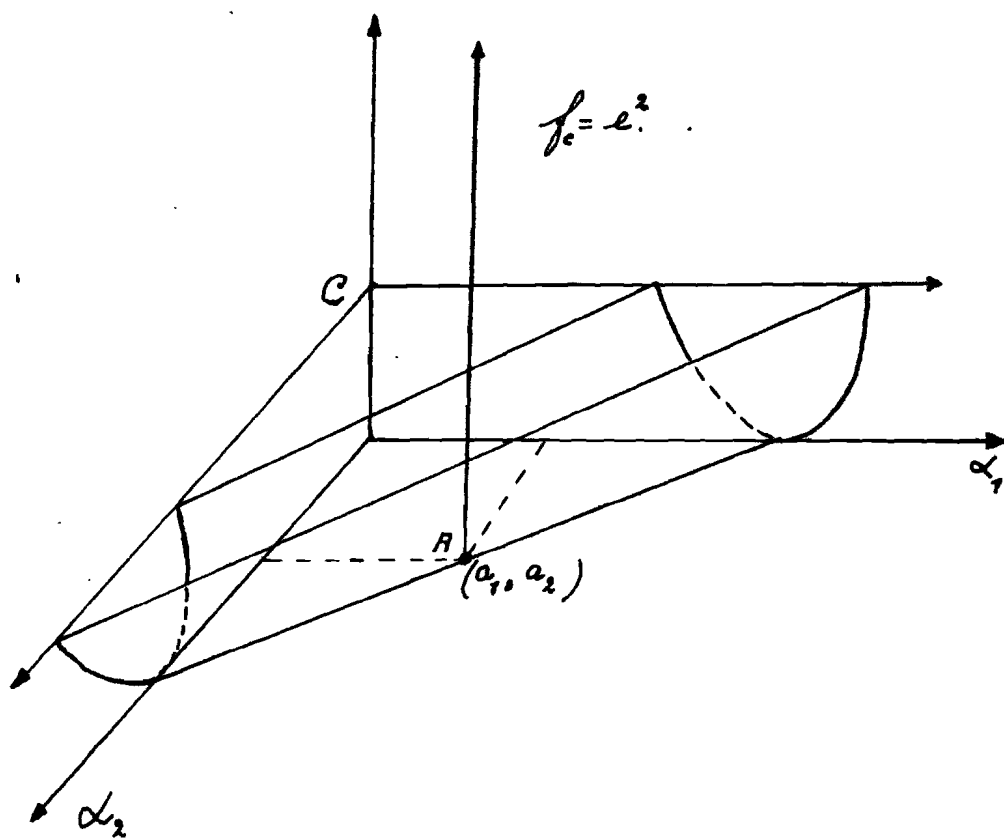
Zodat (III 24.) overgaat in:

$$f_c = \left[\sum_{i=1}^n u_{1i} \Delta \alpha_i \right]^2 \quad (\text{ III 25. })$$

Lijnen waarvoor geldt $f_c = 0$ kunnen op elk tijdstip gevonden worden uit de vergelijking:

$$\pm c^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n u_{1i} \Delta \alpha_i \quad (\text{ III 26. })$$

De vergelijking (26) geeft 2 parrallel lijnen in de $n + 1$ dimensionale ruimte, opgebouwd uit de criteriumfunctie en de parameters. Indien slechts 2 parameters voorhanden zijn, kunnen we bovenstaande formule in een geometrische figuur weergeven (zie fig. 3.2.)



Foutenoppervlak bij continu identificatie proces.

Fig. III 2.

In de ruimte vormen deze rechten een parabolische oppervlakte. De contourlijnen in het $\alpha_1 - \alpha_2$ vlak zijn rechte lijnen, terwijl de doorsnede van het foutenoppervlak met het $f_0 - \alpha$ vlak in een kwadratische gedaante resulteert.

Indien de terugkoppeling van de afregeling onderbroken is, zijn de parameter afwijkingen $\Delta \alpha_1$ en $\Delta \alpha_2$ constant.

De sensitivity functies $u_1 \dots u_2$ worden bepaald door het ingangssignaal en zijn dus een functie van de tijd.

Evenals het foutkriterium een functie van de tijd is.

Stel een sinusoidale input, dan zijn de sensitivity coëfficiënten ook periodiek, evenals e^2 (lineair).

De periodiciteit van de sensitivity functies heeft tengevolg, dat het foutenoppervlak roteert om de verticale as door $A (a_1 , a_2)$ (korrekte parameters).

Vanwege de periodiciteit van e^2 zal het cylindervlak verticale bewegingen maken.

3.5. Bestudering van een 1^o orde model $H(s) = \frac{1}{s+a}$

Op de analoge rekenmachine wordt een eerste orde proces gesimuleerd.

Samen met het model, het sensitivity model waarmee de gradientvector verkregen wordt.

Dit afregelsysteem wordt voor sinusoidale ingangsignalen onderzocht.

Een belangrijk aspect in deze is de vraag naar de stabiliteit van de afregeling.

Uit waarnemingen blijkt de afregeling niet alleen gevoelig te zijn voor de amplitude maar ook voor de frequentie van het ingangssignaal.

Daar er geen algemene theorema's bestaan om asymptotische stabiliteit te garanderen voor een begrensde input $x(t)$, zullen we onze aandacht vestigen op een sinusvorming ingangssignaal.

De vergelijkingen welke het totaal identificatieproces beschrijven zijn de volgende:

$\dot{y} + ay = x(t)$	proces	
$\dot{z} + \alpha z = x(t)$	model	(III 27)
$\dot{u} + \alpha u = -z$	sensitivity vergelijking	
$\dot{\alpha} = -k(z-y)^2 u$	steepest descent vergelijking.	

Stel $x(t) = A \sin \omega t$.

In bijlage (1) en (2) zijn simulatie resultaten weergegeven, bij een sinusvormig ingangssignaal en variabele versterkingsfactor k . Voor $k = 12,5$ zien we dat, de waarde van de geschatte parameter instabiel wordt.

Verhogen we de versterkingsfactor tot een bepaalde waarde ≈ 40 , dan wordt de model-parameter weer stabiel.

Verdere verhoging van de steepest-descent factor leidt weer tot instabiliteit.

Het feit, dat de schakeling voor een bepaalde grotere waarde van de versterkingsfactor stabiel is, wekt verbazing.

Wij zullen de vergelijkingen gaan onderzoeken voor het geval dat $\alpha \approx a$ is.

$$\begin{aligned} \text{Stel: } y &= x_1 \\ z &= x_2 \\ u &= x_3 \\ \alpha &= a + x_4 \end{aligned}$$

Substitutie in vergelijking (27) geeft met $x(t) = A \sin \omega t$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + A \sin \omega t \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - x_2 x_4 + A \sin \omega t \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - ax_3 - x_3 x_4 \\ \dot{x}_4 &= 2kx_1 x_3 - 2kx_2 x_3 \end{aligned} \quad (\text{III } 28)$$

Het stelsel differentiaalvergelijkingen moet voor x_4 opgelost worden. Dit leidt tot:

$$\ddot{x}_4 + 2a\dot{x}_4 + x_4 \dot{x}_4 - 2kx_2 x_3 x_4 = 2kx_2 (x_2 - x_1) \quad (\text{III } 29)$$

De stabiliteit moet onderzocht worden rond het punt $\alpha = a$ of $x_4 = 0$.

Dit rechtvaardigt het feit, dat 2^o orde termen verwaarloosd kunnen worden.

Zodat de vergelijking (29) wordt :

$$\ddot{x}_4 + 2a\dot{x}_4 - 2kx_2 x_3 x_4 = 2kx_2 (x_2 - x_1). \quad (\text{III } 30)$$

Indien x_4 tot nul nadert zal $x_2 = x_1$ worden, zodat het rechterlid van (30) zeer klein is.

x_2 en x_3 kunnen dan opgevat worden als tijdvarierende grootheden.

(e-machten in de oplossingen reeds uitgedempt).

Met $x(t) = A \sin \omega t$. wordt,

$$x_2(t) = \frac{A}{(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \psi)$$

$$\text{met } \psi = \arctan \frac{\omega}{a}$$

$$x_3(t) = -\frac{A}{(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - 2\psi).$$

Met bovenstaande volgt:

$$\begin{aligned} x_2 x_3 &= -\frac{A^2}{(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \psi) \cdot \sin(\omega t - 2\psi). \\ &= \frac{A^2}{2(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -\cos \psi + \cos(2\omega t - 3\psi) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{met } \cos \psi = \frac{a}{(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x_2 x_3 = -\frac{aA^2}{2(a^2 + \omega^2)^2} + \frac{A^2}{2(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(2\omega t - 3\psi).$$

Hiermee wordt vergelijking (30):

$$\ddot{x}_4 + 2a\dot{x}_4 + \left\{ \frac{akA^2}{(a^2 + \omega^2)^2} - \frac{kA^2}{(a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(2\omega t - 3\psi) \right\} x_4 = 0$$

(III 31).

Vergelijking (31) is de D.V. van Mathieu.

Door een transformatie toe te passen kunnen we de bovenstaande vergelijking tot de standaardvorm terug brengen.

$$\begin{aligned} \text{Stel: } z &= \omega t \\ x_4 &= e^{-\frac{(a/\omega)z}{y}} \end{aligned} \quad (\text{ III 32 })$$

Met (32) gaat (31) over in de vorm:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[a_1 - 2q_1 \cos (2z - \psi) \right] y = 0 \quad (\text{ III 33 })$$

waarin: $a_1 = \frac{akA^2}{\omega^2(a^2 + \omega^2)^2} - \frac{a^2}{\omega^2}$

$$q_1 = \frac{kA^2}{2\omega^2(a^2 + \omega^2)^{3/2}} \quad (\text{ III 34 })$$

De oplossing van de D.V. in afhankelijkheid van de parameters a_1 en q_1 wordt gegeven door Mc. Lachlan. *

Op de wiskundige achtergrond van deze oplossingen wordt hier niet verder op ingegaan.

We maken gebruik van de stabiliteitskaarten welke de oplossingen grafisch weergeven.

Zie bijlagen 3. 4.

* Theory and Application of Mathieu Functions.
McLachlan, Oxford University Press 1947.

De bij de simulatie gebruikte waarden zijn:

$$A = 0,29.$$

$$\omega = 0,79 \text{ rad/sec. } a = 0,5.$$

k	a_1	q_1	
5	0,05	0,41	stabiel
8,5	0,37	0,70	stabiel
10	0,50	0,83	instabiel
12,5	0,73	1,03	instabiel
15	0,95	1,24	instabiel
40	3,20	3,30	stabiel
50	4,12	4,12	instabiel

Aan de hand van de stabiliteitskaart voor de oplossingen van de Mathieu-vergelijking kunnen we zien in welk gebied, de a_1 en q_1 waarden liggen van een bepaalde versterkingsfactor.

Bij opvoering van de versterkingsfactor zal de oplossing van een stabiel gebied, overgaan naar 1^o instabiele gebied van hieruit weer naar een stabiel gebied ($k = 40$) en van hieruit naar het 2^o instabiele gebied.

Hiermee is de vraag opgelost hoe het mogelijk is dat bij verdere opvoering van de versterkingsfactor de stabiliteit kan toenemen. En er is aangetoond, dat de convergentie (stabiliteit) eng verbonden is met zowel de frequentie en de amplitude van het ingangssignaal.

De theoretische voorspelde waarden blijken aardig te kloppen met de op de computer gerealiseerde afregeling.

Voor stapvormige ingangssignalen kan men bewijzen met behulp van theorema's gegeven door Bellmann, dat de oplossing stabiel is onafhankelijk van k . zie *

In bijlage 5 wordt gedemonstreerd hoe het afregelproces als volgsysteem werkt. De proces-parameter a wordt gevarieerd $a = a_0 + \Delta a$. De model-parameter α blijkt de proces-parameter te volgen. Voor $k = 5$ is de fout tussen model en proces-parameter kleiner dan 10%.

* A parameter tracking servo for adaptive control systems.

M. Margolis en C.T. Leondes. I.R.E. Trans. vol. AG-4. nov. 1959.

3.6. Bestudering van een multi-parameter systeem.

Zoals eerder vermeld kunnen we m.b.v. de sensitivity analyse, komen tot de multi-gradient-vektor bij meer parameter systemen. Bij de identificatie van processen, kunnen we met een sensitivity model, de sensitivity coëfficiënten simultaan bepalen.

Veronderstel, dat het proces beschreven wordt door de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{a_1 s + a_2}{s^2 + a_3 s + a_4} \quad (\text{III } 35)$$

Het mathematisch model van het proces wordt gegeven door:

$$H^1(s) = \frac{z(s)}{x(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \quad (\text{III } 36)$$

De sensitivity functies worden in Laplace vorm gegeven door:

$$u_1(s) = x(s) \frac{s}{s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \quad (\text{III } 37)$$

$$u_2(s) = x(s) \frac{1}{s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \quad (\text{III } 38)$$

$$u_3(s) = -z(s) \frac{s}{s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \quad (\text{III } 39)$$

$$u_4(s) = -z(s) \frac{1}{s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \quad (\text{III } 40)$$

m.a.v. De sensitivity functies zijn m.b.v. een sensitivity model simultaan te verkrijgen, welk als ingangssignaal het uitgangssignaal van het identificatie model heeft.

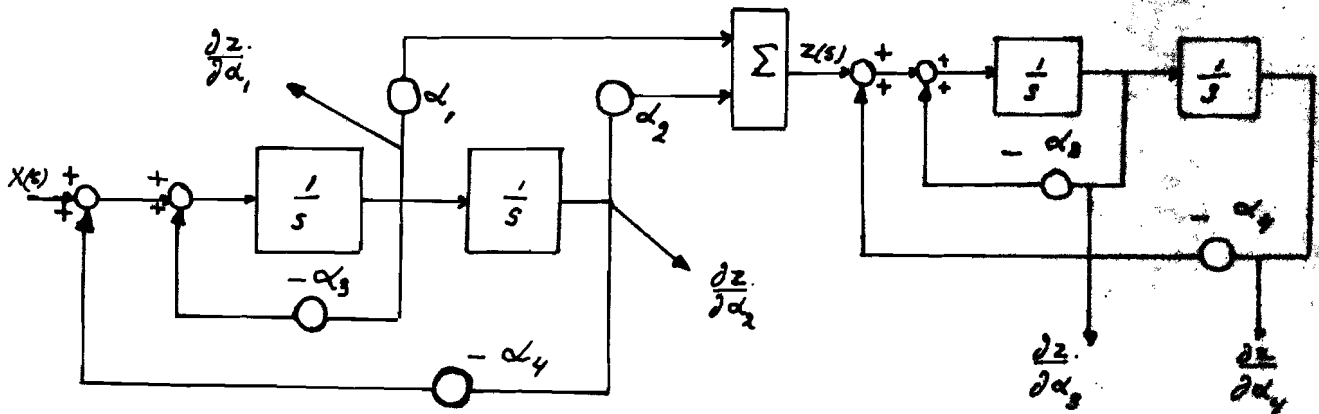


Fig. III 3v

Dit probleem is op de analoge rekenmachine geprogrammeerd en werden schattingen voor de proces-parameters gekregen, onder gebruikmaking van het foutkriterium $f_0 = e^2$ en de steepst descent methode.

Alvorens op de resultaten in te gaan wordt eerst een beschouwing gegeven voor het ingangssignaal en de interactie welke op zal treden.

Het ingangssignaal

Vergelijking van het systeem en modelvergelijking

$$\ddot{z} + \alpha_3 \dot{z} + \alpha_4 z = \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 x$$

geeft de relatie

$$(\ddot{y} - \ddot{z}) + (a_3 \dot{y} - \alpha_3 \dot{z}) + (a_4 y - \alpha_4 z) - (a_1 - \alpha_1) \dot{x} - (a_2 - \alpha_2) x = 0$$

(III 41)

Voor het geval, dat de structuur van het model gelijk is aan, dat van het systeem wordt $e = z - y \cong 0$

Vergelijking (41) gaat dan over in een algebraïsche betrekking tussen de parameter afwijkingen $\Delta\alpha_i = a_i - \alpha_i$

$$\Delta\alpha_3 \dot{y} + \Delta\alpha_4 y - \Delta\alpha_1 \dot{x} - \Delta\alpha_2 x = 0 \quad (\text{III } 42)$$

Indien een sinusoidale input gebruikt wordt $x(t) = A \sin \omega t$, dan $y(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$

en vergelijking (42) kan gesplitst worden in

$$\Delta\alpha_3 \omega B \cos \varphi + \Delta\alpha_4 B \sin \varphi - \Delta\alpha_1 A \omega = 0 \quad (\text{III } 43)$$

$$-\Delta\alpha_3 \omega B \sin \varphi + B \cos \varphi \Delta\alpha_4 - \Delta\alpha_2 A = 0$$

Dit systeem van algebraïsche vergelijkingen, laat een oneindig aantal oplossingen toe waarvoor geldt $\Delta\alpha_1 \neq 0$

M.a.w. de parameters die we bepalen m.b.v. een sinusoidaal ingangssignaal zijn incorrect.

We kunnen concluderen, dat niet meer dan 2 parameters m.b.v. een enkelvoudige sinus bepaald kunnen worden.

Om meerdere parameters simultaan te bepalen, moeten we gebruik maken van een statistisch ingangssignaal.

3.7. De sensitivity - matrix

Om meer insicht in het continue afregel proces te verkrijgen, zal de methode geformuleerd worden op een manier, welke de parameter veranderingen demonstreert door een matrix van sensitivity coëfficiënten te beschouwen.

Stel dat de vorm van het model gelijk is aan, dat van het proces en er geen verstoringen zijn.

Het is dan mogelijk, dat $f_c (e_c)$ gelijk nul wordt.

De fout e_c kan dan in een Taylor ontwikkeling rond nul gegeven worden.

Onder gebruikmaking van de eerder gedefinieerde variabele \bar{v} , wordt deze ontwikkeling

$$e_c \approx \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k v_{1k} \quad (\text{III } 44)$$

Daar de afregel strategie gegeven was door

$$\dot{\bar{\alpha}} = - 2k e_c \bar{v} \quad (\text{III } 45)$$

leidt dit tot

$$\dot{\bar{\Delta \alpha}} = - 2 k \bar{S} \bar{\Delta \alpha} \quad (\text{III } 46)$$

Waarin de elementen van de matrix \bar{S} gegeven worden door de produkten

$$v_{1j} v_{1k} \quad j = 1 \dots n, \\ k = 1 \dots n.$$

In het algemeen zal de resulterende fout niet nul zijn, tengevolge van meetfouten, fouten tussen model en systeem enz.

Hierdoor zal de ontwikkeling de volgende vorm aannemen:

$$e_o(t) = e(o) + \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k v_{1k} \quad (\text{III } 47)$$

en de afregeling wordt:

$$\dot{\Delta \alpha} = - 2kS \bar{\Delta \alpha} - 2ke(o) \bar{v} \quad (\text{III } 48)$$

Voor het 4 parameter systeem wordt dit:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta \alpha}_1 \\ \dot{\Delta \alpha}_2 \\ \dot{\Delta \alpha}_3 \\ \dot{\Delta \alpha}_4 \end{bmatrix} = 2k \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 & v_1 v_4 \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 & v_2 v_4 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3^2 & v_3 v_4 \\ v_4 v_1 & v_4 v_2 & v_4 v_3 & v_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_1 \\ \Delta \alpha_2 \\ \Delta \alpha_3 \\ \Delta \alpha_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \cdot 2ke(o)$$

(III 49)

Uit de bovenstaande betrekkingen zijn de volgende conclusies te trekken:

- 1) De parameter afwijkingen $\Delta \alpha_i$ kunnen alleen maar nul convergeren indien het systeem homogeen is, met $e(o) \equiv 0$. Overblijvende fouten $e(o)$ tengevolge van een incompleet model, machine onnauwkeurigheid of additieve ruis in het model veroorzaken continue variaties in de eindwaarde van $\Delta \alpha_i$ en daarom ook van α_i .
- 2) De termen $v_{1i} v_{1j}$ welke niet op de diagonaal liggen, veroorzaken interactie in de parameter afregelingen. Zelfs indien alle parameters behalve één op hun goede waarde zijn, zal er interactie optreden. Afhankelijk van de graad van correlatie tussen v_i en v_j , kan de gemiddelde waarde $v_i v_j$ klein zijn in vergelijking tot v_i^2 . Toch moet de momentane interactie aan de kruisprodukten $v_i v_j$ toegeschreven worden.

3) Bij de gebruikte methode zal de foutterm $e(o)$, geïntroduceerd door onnauwkeurige metingen enz; in het optimale punt $f_{o_{\min}} = e_o^2(o) \neq 0$ niet gecompenseerd worden.

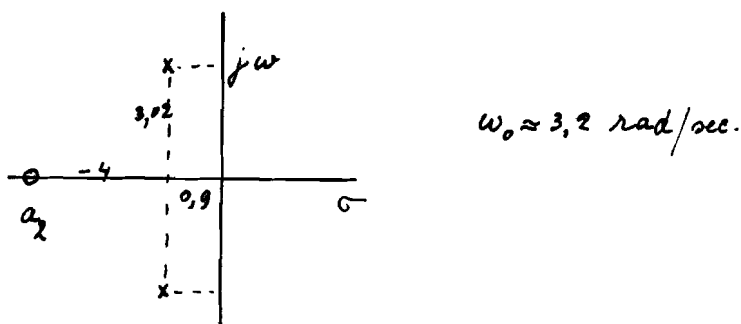
Het residu kan namelijk een graad zijn voor de waarde van het gebruikte model en de nauwkeurigheid van de metingen.

3.8. Praktische resultaten:

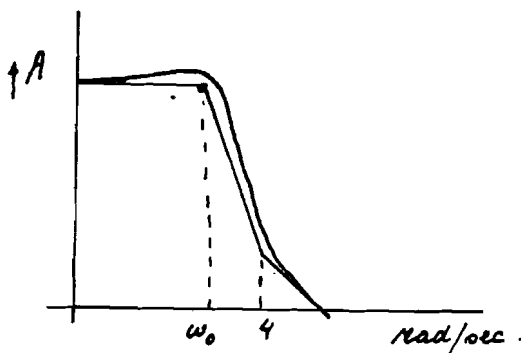
Stel de systeem parameters hebben de numerieke waarden.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 1,8 \quad a_4 = 9,9$$

Het polen -nulpunten beeld heeft de volgende gedaante:



Het Bode-diagram ziet er als volgt uit:



Hetingangssignaal $x(t)$ verkrijgen we van een ruisgenerator via een 2^o orde filter met afsnijfrequentie $\omega = 20 \text{ rad/sec}$. Dit signaal heeft een zodanige bandbreedte, dat alle systeemparameters aangestoten worden. Zouden we een signaal gebruiken met een frequentieband, welke valt buiten de bandbreedte van het systeem, dan zullen onnauwkeurige en foutieve waarden voor de geschatte parameters gevonden worden.

Bijlage 6 geeft de simultane afregeling van de vier parameters α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , waarbij de beginwaarden van de parameters zeer klein genomen ≈ 0 .

Uit de figuur is te zien, dat de stationaire waarden van de parameters bereikt wordt ≈ 100 sec.

Deze meting is gedaan met steepest-descent coëfficiënten

$$2k_1 = 2k_2 = 2k_3 = 2k_4 = 22,5.$$

Bijlage 7 laat de interactie zien van de parameters x_3 en x_4 , met een sinusoidaal ingangssignaal.

Hierbij hebben de parameters α_1 en α_2 al de juiste waarden. We zien, dat de parameters via een wijde boog naar de exacte parameters convergeren. Deze boog vindt zijn oorzaak in de momentane waarden van de kruisprodukten in de sensitivity matrix.

Bij verlaging van de steepest-descent coëfficiënten zal deze boog kleiner worden.

Figuur 8 laat de afregeling zien van de parameters α_3 en α_4 bij verschillende soort ingangssignaal.

We zien, dat in het geval waarbij een ruissignaal gebruikt wordt dat de afregeling beter is.

Figuur 9 laat de afregeling zien van α_1 , α_4 indien er al of niet een stoorsignaal aanwezig is.

Figuur 10 geeft de afregeling m.b.v. een blokspanning als ingangssignaal.

Figuur 11 geeft nog afregelingen waarbij de steepest-descent coëfficiënt veranderd is.

3.9. Polen en residuen.

Veronderstel, dat een proces beschreven wordt door een overdrachtsfunctie welke is opgebouwd uit reële polen en nulpunten.

Als mathematisch model van het proces kan een identificatie-model dienen waarbij de onbekende parameters de polen en de daarbij behorende residuen zijn.

Struktureel kan zo'n model als volgt voorgesteld worden.

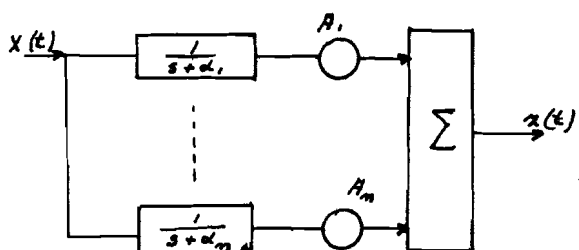


Fig. III 4.

De sensitivity van het uitgangssignaal naar de residuen en polen zijn met behulp van een sensitivity model gemakkelijk te realiseren.

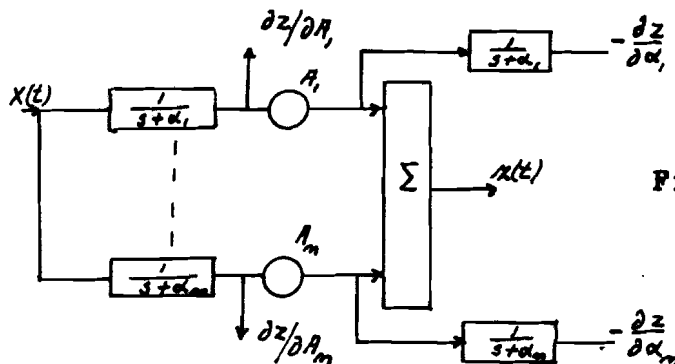


Fig. III 5.

Gesimuleerd werd een proces van de volgende gedaante:

$$H(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)} \quad \text{waarin } k = \frac{1}{2}$$

$$a = 1 ; b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Model: } H_1(s) = \frac{A}{s+k} + \frac{B}{s+\beta}$$

Met een sinus als ingangssignaal wordt één pool met het daar bijhorend residu bepaald.

Bijlage² geeft de afregelingen van de pool en het residu waarbij de tweede pool met zijn residu op de exakte waarde zijn ingesteld.

Zoals te verwachten was zal er een sterke interactie tussen de parameters optreden.

Trachten we het aantal te schatten residuen en polen uit te breiden dan zal deze sterke interactie de oorzaak er van zijn dat de schakeling niet zal convergeren naar de juiste parameter waarde. Beschouwen we namelijk de wiskundige uitdrukking voor een residu dan zien we dat hierin alle polen vervat zijn.

Door deze sterke correlatie tussen de residuen zal de benadering van een proces door polen en residuen, zoals hier behandeld niet succesvol genoemd kunnen worden.

Conclusie

We kunnen de volgende opmerkingen over het continue parameter identificatie proces in het algemeen plaatsen.

Vanuit een wiskundig standpunt bekeken verkeert de methode nog in een onbevredigde toestand. Op het ogenblik bestaan er geen algemene bewijzen van convergentie en stabiliteit. Zelfs voor lineaire systemen ontbreken theorema's welke voor speciale klassen van ingangssignalen een stabiele afregeling garanderen. Een belangrijk probleem is de interactie tussen de parameters. Voor lineaire systemen kan dit probleem bestudeerd worden d.m.v. een sensitivity matrix.

Op het ogenblik is echter nog geen methode beschikbaar om deze matrix te orthogonaliseren en aldus een ontkoppeling van de parameters te verkrijgen. Dit punt dient in de toekomst nader onderzocht te worden. Een ander punt van onderzoek kan zijn het verband vast te leggen tussen de nauwkeurigheid van het sensitivity model en de nauwkeurigheid van de te bepalen parameters.

3.10 De " open loop " extrapolatie benadering.

Een modificatie van de output-fouten methode is door Meissinger gesuggereerd. *

Weer wordt de toestand van het systeem door \bar{y} en de toestand van het model door \bar{z} gegeven.

De criterium functie wordt gegeven door:

$$f_0(t) = e_0^2 = [z_1(t) - y_1(t)]^2 \quad (\text{III } 50)$$

De " open loop methode " is op het feit gebaseerd, dat de model parameters vastgehouden worden op een vaste referentie waarde $\bar{\alpha}_0$, waardoor een model output z_{10} verkregen wordt. Gebruikmaking van alleen nulde en eerste orde termen, leidt tot een Taylor ontwikkeling.

$$z_1(t, \bar{\alpha}_0, \Delta \bar{\alpha}(t)) = z_{10}(t) + \sum_{k=1}^n u_{1ko} \Delta \alpha_k(t) \quad (\text{III } 51)$$

$$k = 1, 2 \dots n$$

waarin de u_{1ko} de sensitivity coefficienten zijn bij constante parameters $\bar{\alpha}_0$

$$u_{1ko} = \frac{\partial z_{10}(t)}{\partial \alpha_k} \quad (\text{III } 52)$$

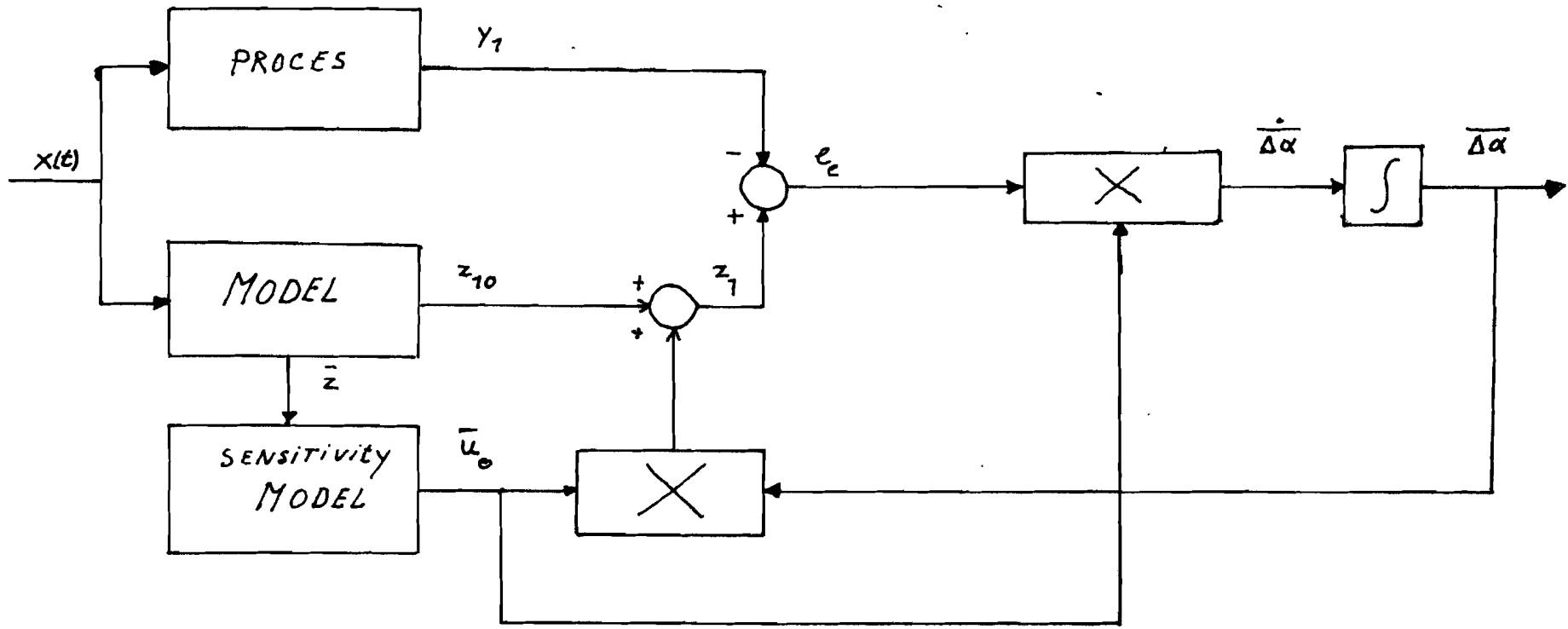
De parameter veranderingen $\overline{\Delta \alpha}(t)$ kan nu berekend worden, ondergebruikmaking van continue steepest descent, daar de tijd variërende gradient $\overline{\nabla f_0}(t, \bar{\alpha}_0)$ nu duidelijk gedefinieerd is.

De resulterende strategie wordt:

$$\dot{\overline{\Delta \alpha}} = -K \overline{\nabla f_0}(t, \bar{\alpha}_0) = -2K (z_1 - y_1) \bar{u}_{1ko} \quad (\text{III } 53)$$

z_1 wordt verkregen uit (51).

* H.F. Meissinger: Parameter optimization by an automatic open-loop computing method.



Blokschema van open-loop methode.

Fig III 6.

Voor de totale afregeling zie figuur III. 6

Het is evident, dat de nauwkeurigheid met welke de parameter veranderingen $\Delta\alpha$, berekend kunnen worden, afhangt van de referentie waarde α_0 . Indien de afwijkingen groot zijn, zullen verschillende iteraties nodig zijn.

Op de analoge rekenmachine is een eerste orde systeem gesimuleerd.

$$H(s) = \frac{1}{s+a} \quad a = 0,5$$

$$\alpha_0 = 0,3$$

Getracht werd om gedurende één berekeningsperiode $\Delta\alpha$ te berekenen.

Bijlage (73) , laat resultaten zien door verschillende steepest descent coëfficiënten.

Eindconclusie.

We kunnen besluiten, dat de sensitivity theorie, zoals in hoofdstuk I en II besproken, een praktische toepassing vindt in de systeem-identificatie. Een groot voordeel is, dat men met een enkel sensitivity model alle sensitivity coëfficiënten beschikbaar heeft. Resumerend kunnen enige punten aangehaald worden, die voor een verder onderzoek kunnen dienen.

- a) Stabiliteitsbeschouwingen voor de afregeling onder gebruikmaking van de methode van Lyapunov.
- b) Orthogonalisering van de sensitivity matrix.
- c) Onderzoek naar de nauwkeurigheid, waaraan het sensitivity model moet voldoen.

Appendix:

λ - variatie

De gevarieerde beweging in dit geval wordt beschreven door:

$$\dot{\hat{y}}_i = F_i (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n ; \hat{y}_{n+1}, \dots, \hat{y}_{n+r} ; t)$$

$i=1 \dots n.$

$$\lambda \dot{\hat{y}}_{n+u} = F_u (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n ; \hat{y}_{n+1}, \dots, \hat{y}_{n+r} ; t)$$

$u=1 \dots r.$

Hier wordt de beweging van het gedegeneerde systeem ($\lambda = 0$) als fundamentele beweging genomen.

De sensitivity vergelijkingen hebben de vorm:

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^{n+r} \frac{\partial F_k}{\partial y_i} u_i \quad (k = 1 \dots n)$$

$$\lambda \dot{u}_{n+u} = \sum_{i=1}^{n+r} \frac{\partial F_{n+u}}{\partial y_i} u_i - \frac{dy_{n+u}}{dt}$$

$u=1 \dots r.$

$$u_v(0) = 0 \quad v=1 \dots n+r.$$

Indien $\lambda = 0$, degenerereert dit systeem.

De afgeleide $\frac{dy_{n+u}}{dt}$ voor $t = 0$ heeft in het algemeen

een discontinuïteit.

Daarom, kan de sensitivity functie $u_k(t)$ voor $t=0$ een discontinuïteit hebben.

En om de oplossing $u_k(t)$ welke aan de voorwaarde $u_k(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_k(t, \lambda)$ voldoet, moeten we gespecificeerde beginvoorwaarden hebben.

Zie verder \equiv

\equiv P. Kokotovic. On the determination of sensitivity functions with respect to the change of system order. Radanovic: Sensitivity Methods in automatic control.

by LAFF-1

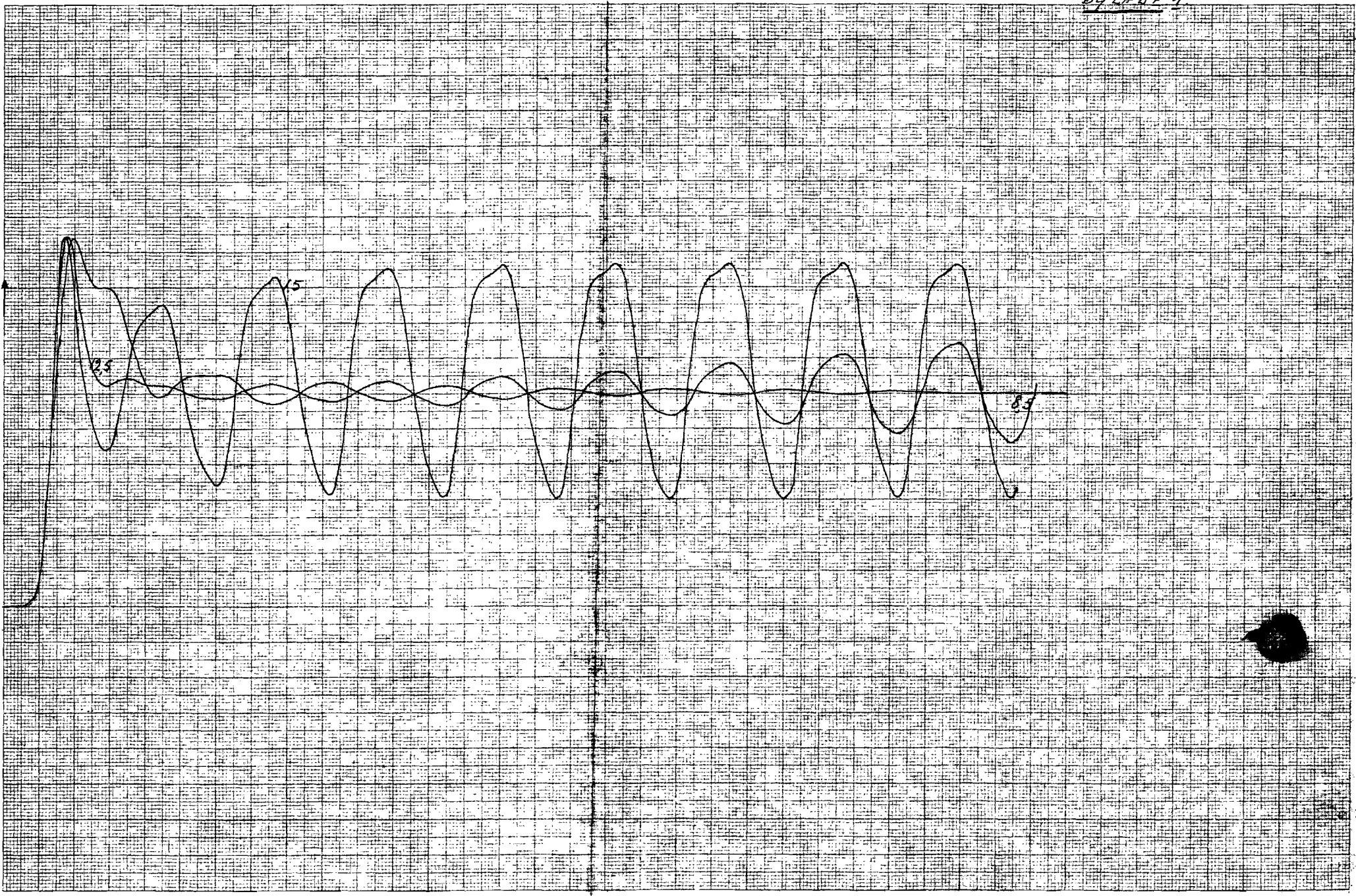
9

25

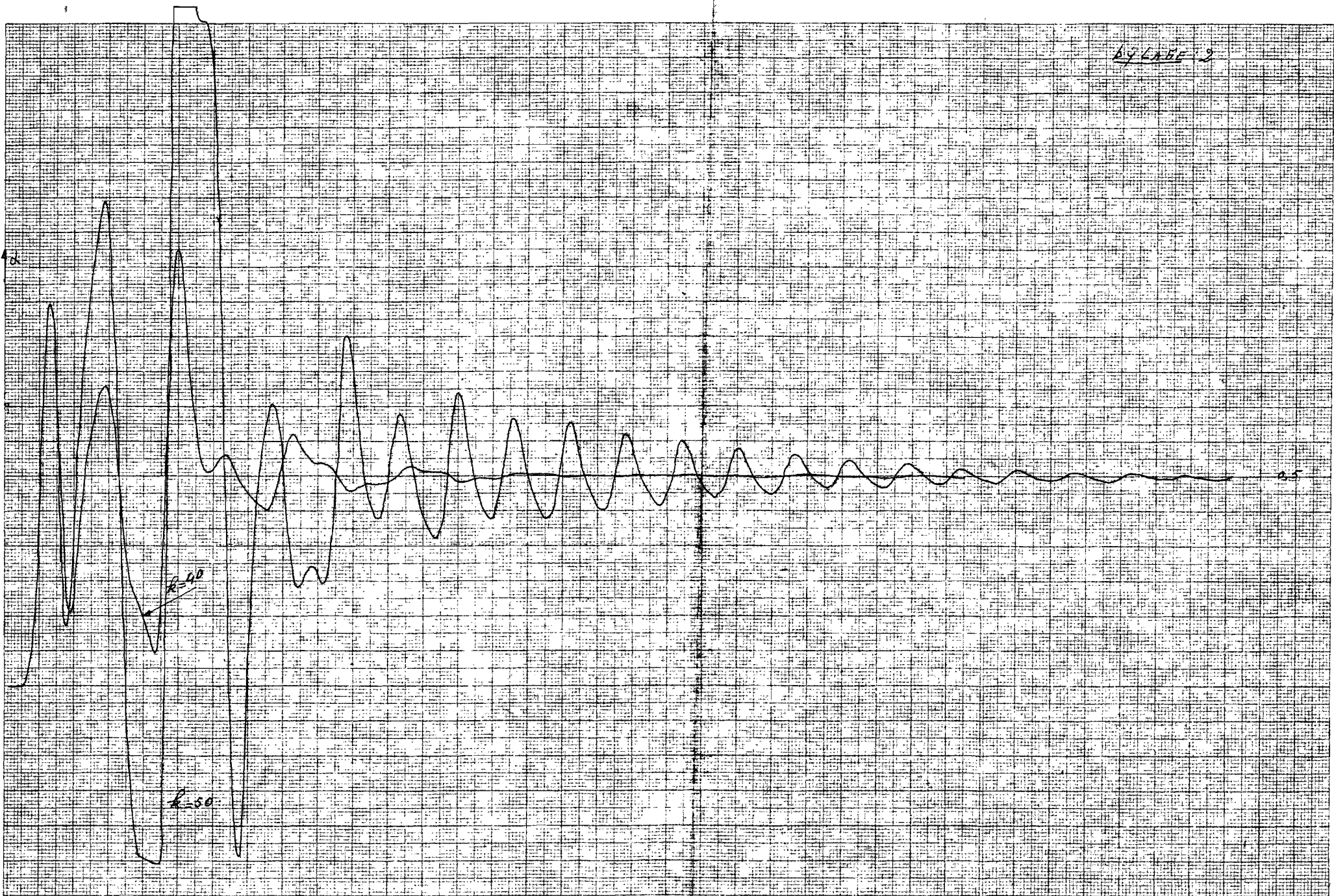
15

85

4201-07 for No 359-141



BY LABEL 2



4201-07 for No 359-14L

5 V/e

2,5 V/cm.

as $\mu \rightarrow \infty$. The iso μ curve $\mu = 0.1$ is its characteristic or boundary curve separating the stable and unstable regions. Thus for

$$y'' + 0.2y' + (a - 2q \cos 2z)y = 0, \tag{1}$$

the stable regions are larger than those for Mathieu's equation, by

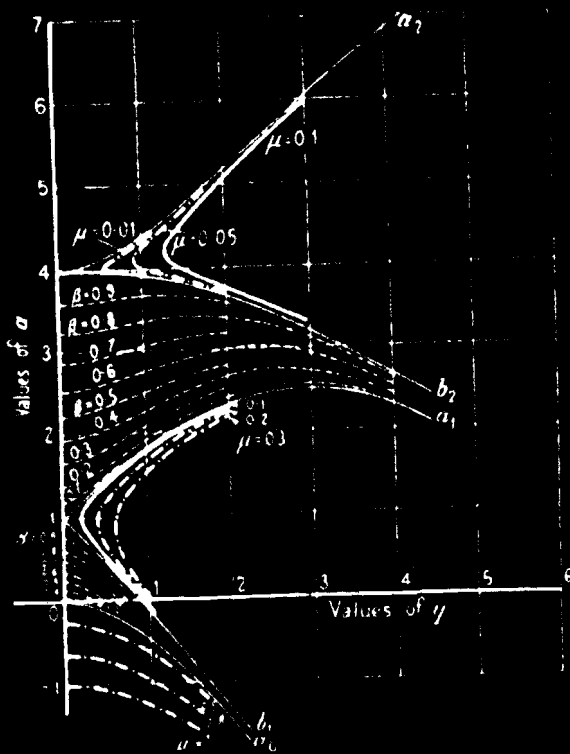


FIG. 11. The stability charts for Mathieu functions of low order. For the iso μ curves, μ is constant along the a axis.

the areas included between the iso μ curves $\mu = 0.1$ and the b_{1n} , a_{1n} curves to which they are asymptotic. The range of μ is $-\infty < \mu < \infty$ if positive d is 0.

4.85. Solution of $y'' + 2qy' + (a - 2q \cos 2z)y = 0$ when $d = 2q = 0$, $a = \kappa^2$. We assume that the point $(a = \kappa^2, q)$ lies in a stable region of Fig. 8 or 11. Then by 4.8, $y = e^{-\kappa z} u(z)$, $u(z)$ being a solution of

3.25 Continuity of the characteristic number of γ . By considering an...

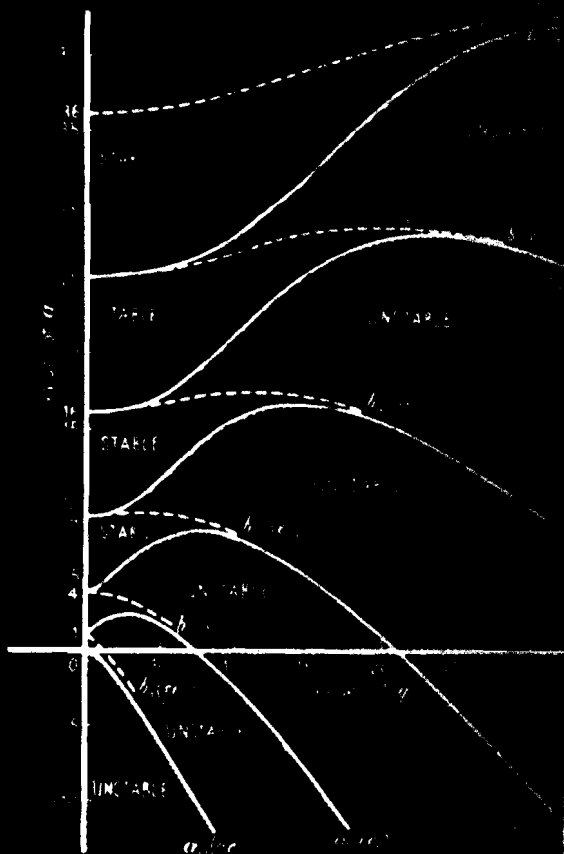
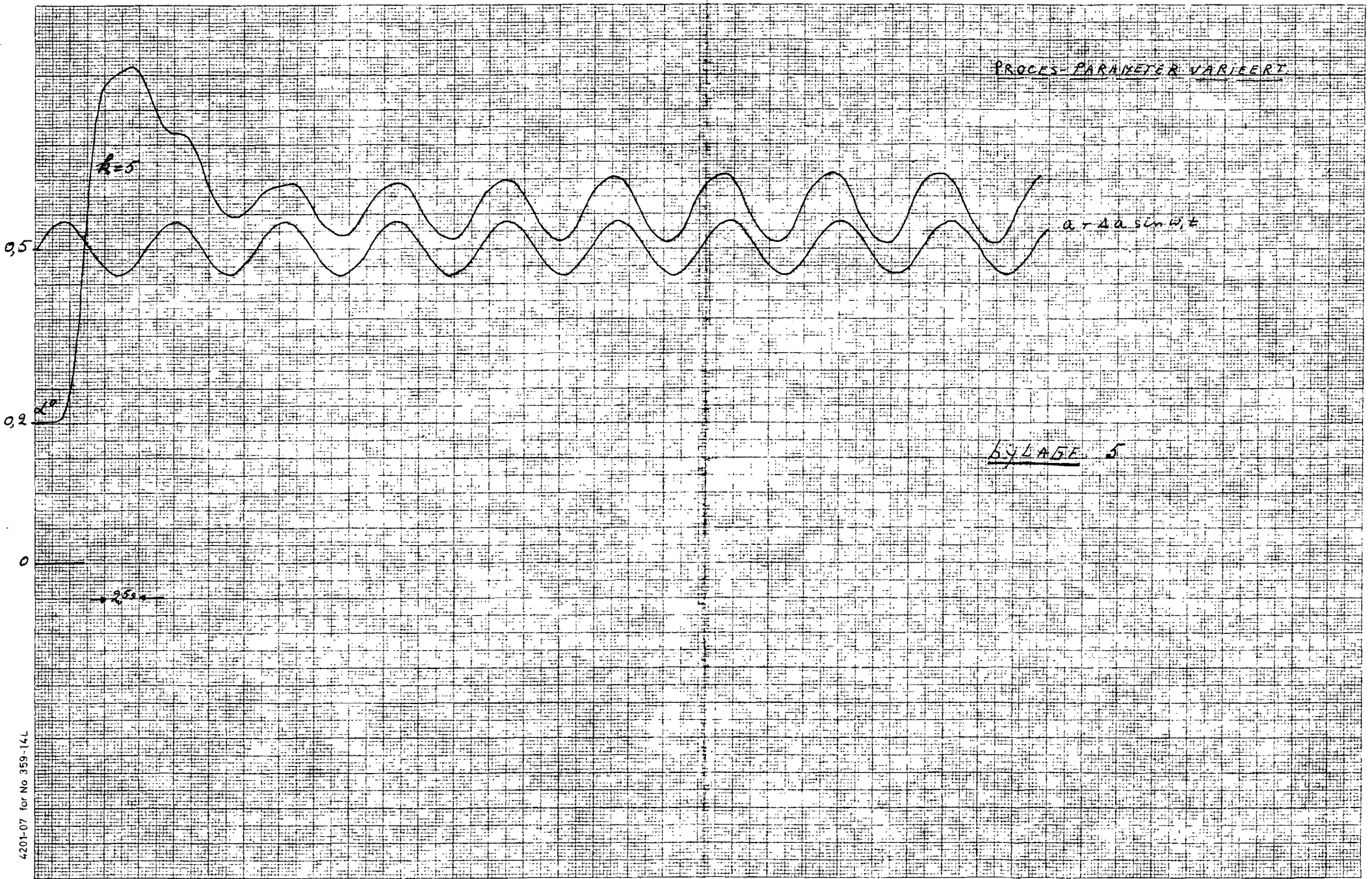
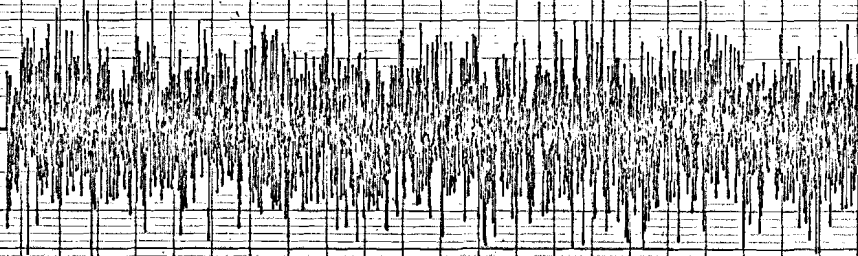


FIG. 8. Continuity of the characteristic number of γ . The curves are plotted for $\gamma = 1, 2, 3, 4$. The regions between the curves are labeled 'STABLE' and 'UNSTABLE'. The curves are labeled $h_{1,1}, h_{2,1}, h_{3,1}, h_{4,1}, h_{1,2}, h_{2,2}, h_{3,2}, h_{4,2}$.



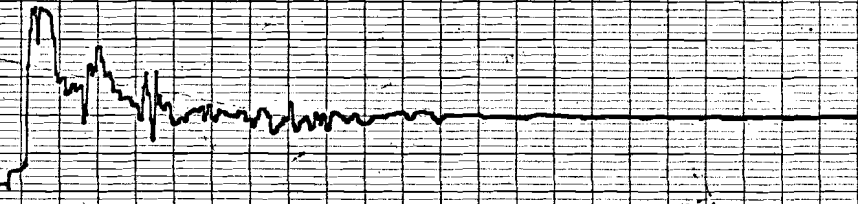
bjLAE69

$x(t)$ 10V/mm



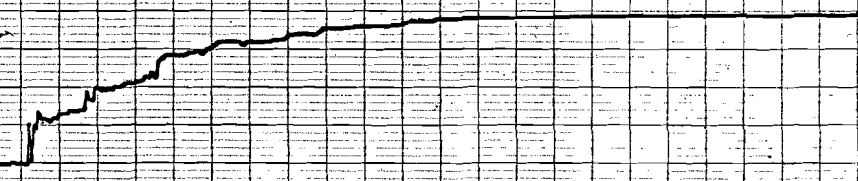
2

d_3 2V/mm



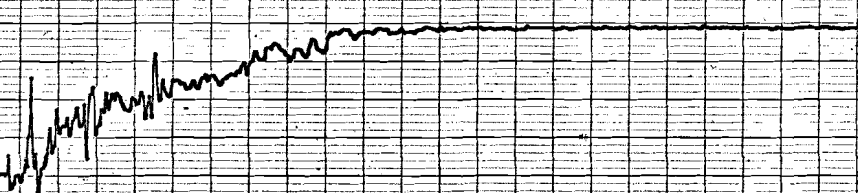
3

d_4 5V/mm



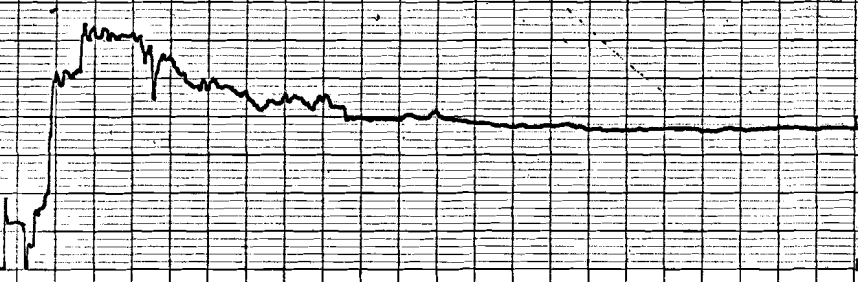
4

d_2 2V/mm

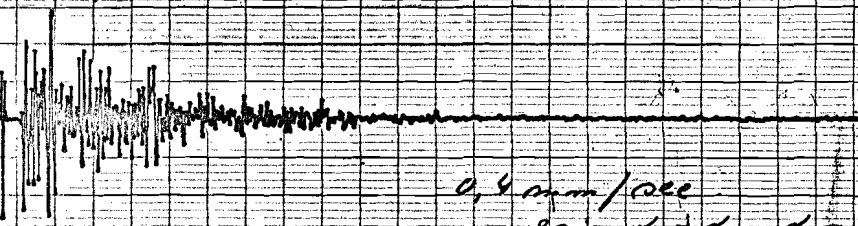


5

d_1 15V/mm



$\epsilon(t)$ 2V/mm



0,4 mm/sec
gain $d_1 + d_3 + d_4 + d_2 = 22,5$

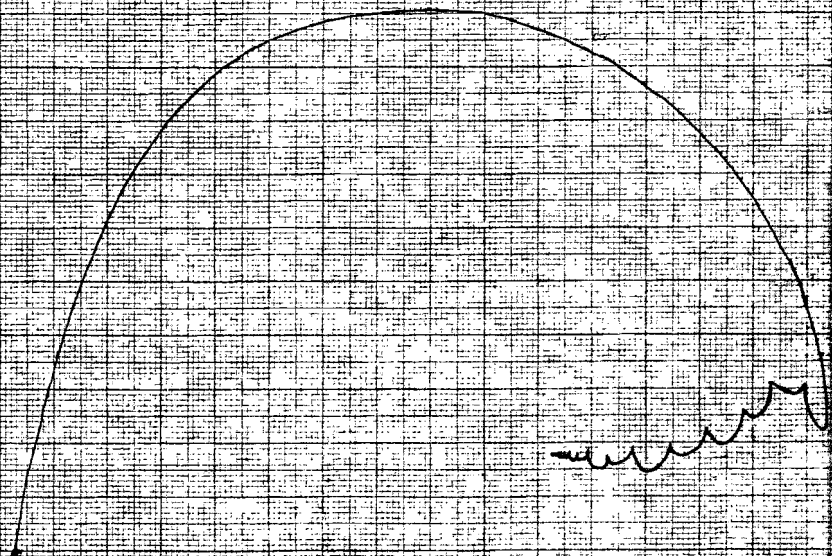
Intensity d_3/d_4

BY LAME: 7

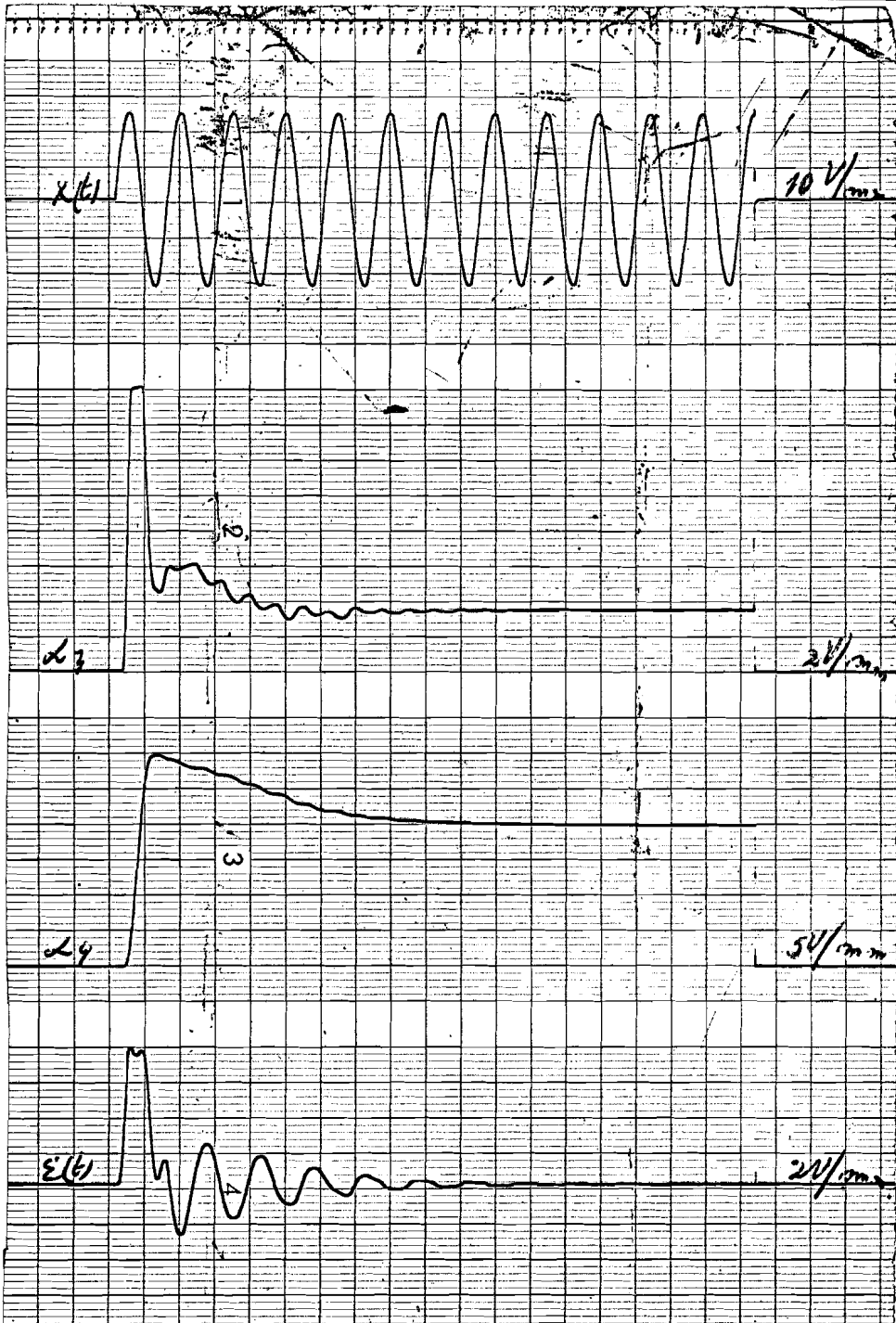
power $d_3 = d_4 = 0.97 \times 10^3$

$X(t) = \sin \omega t$ for $1/2$ Hz.

α_3 ↑
12.7/cm



d_4 → 10 V/cm.



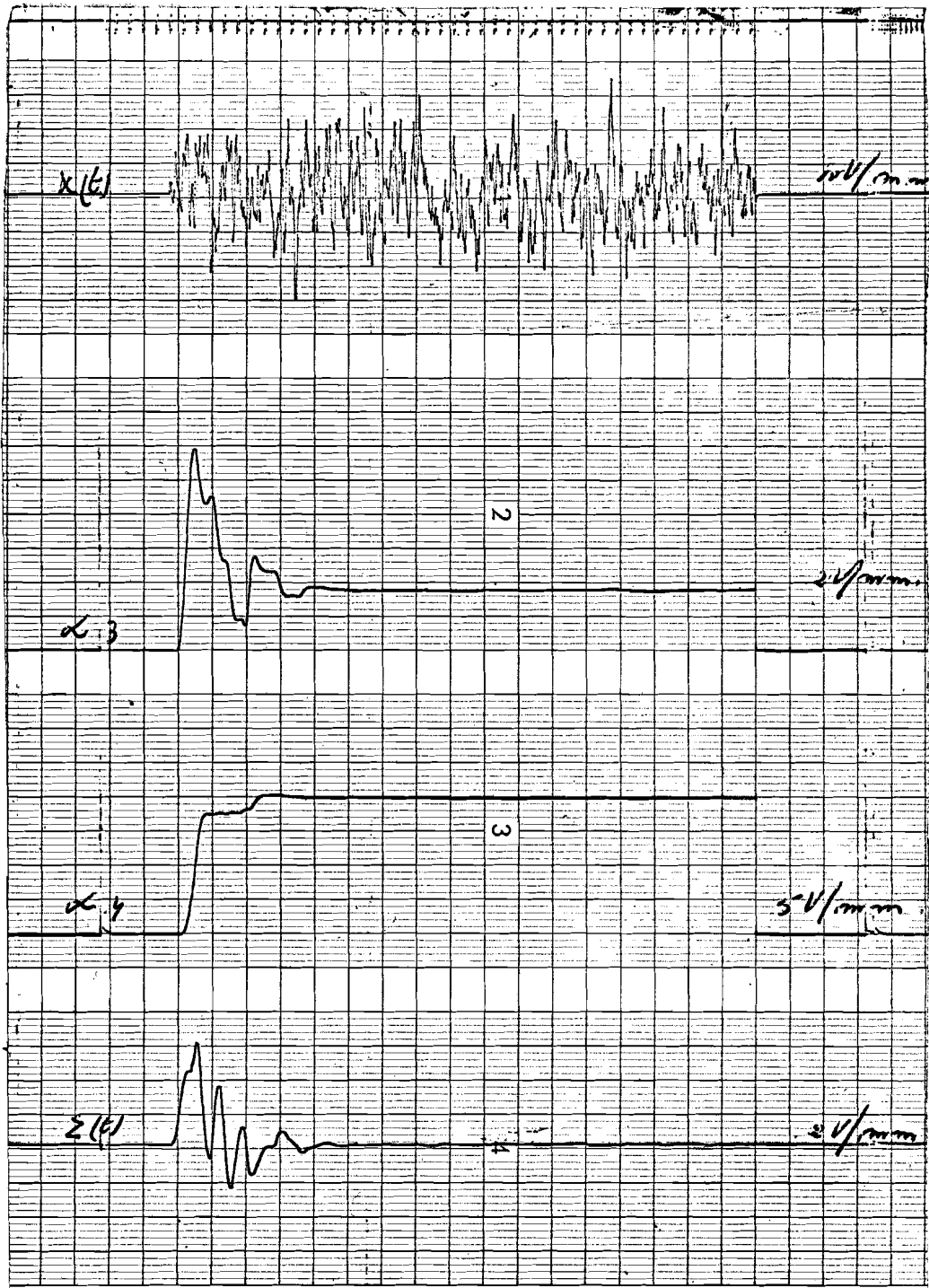
BRUSH INSTRUMENTS DIVISION OF C

5

gain $\alpha_3 + \alpha_4 = 30$

by LA55-8 A

0



CLEVELAND, OHIO PRINTED IN U. S. A. □

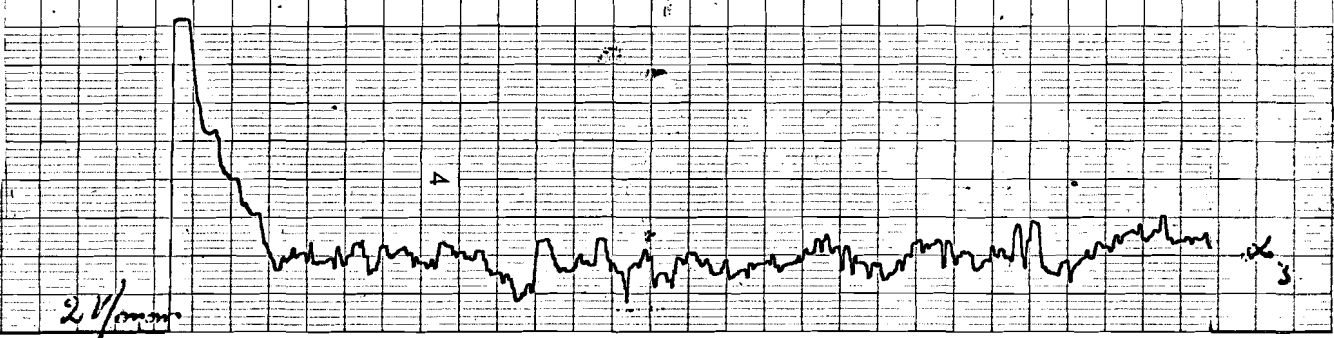
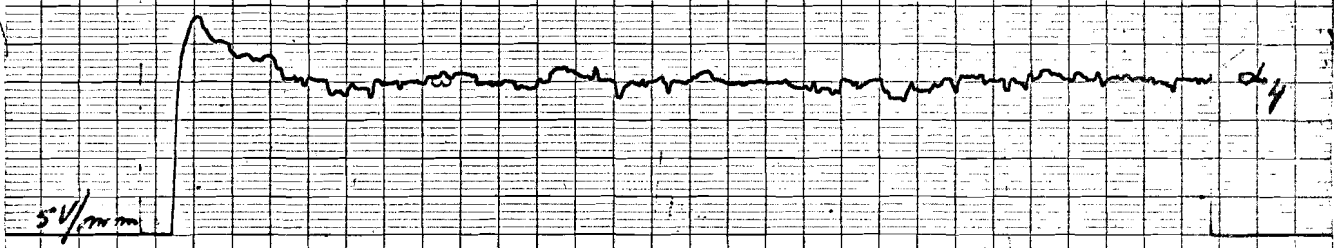
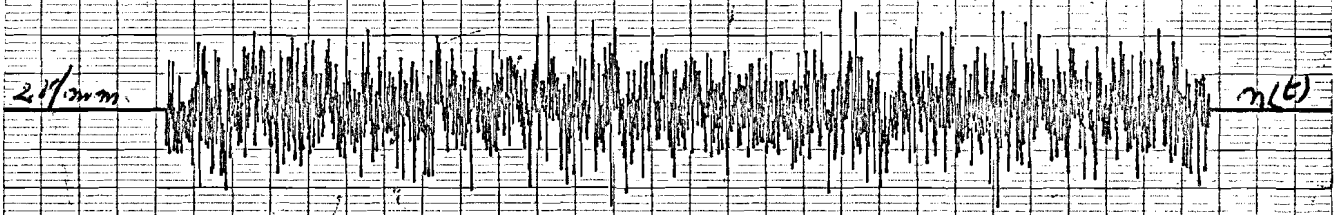
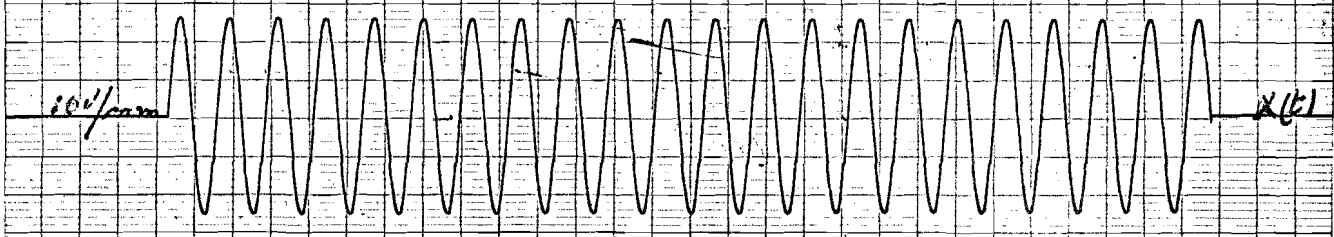
5

by L.H.G.E. P.B.

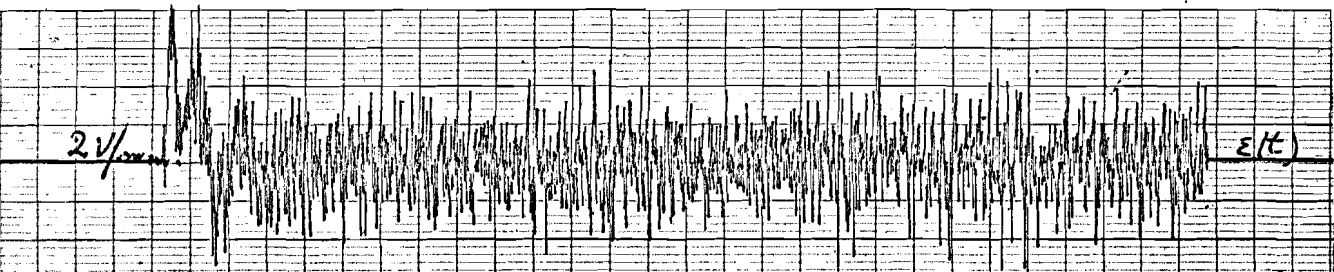
$\alpha_3 = \alpha_4 = 30$

2mm or/acc.

642 A GE 9



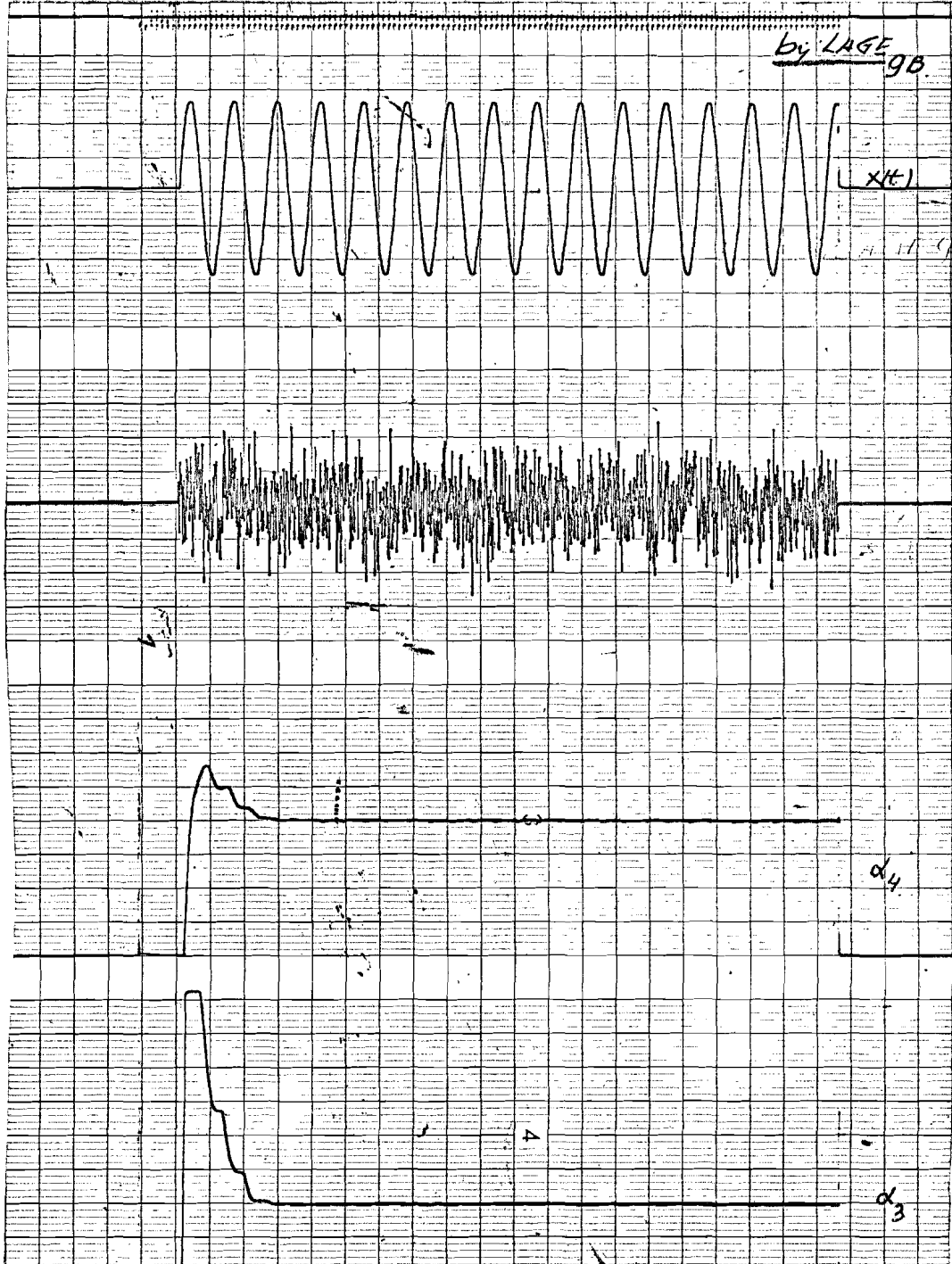
ND. OHIO PRINTED IN U. S. A. □



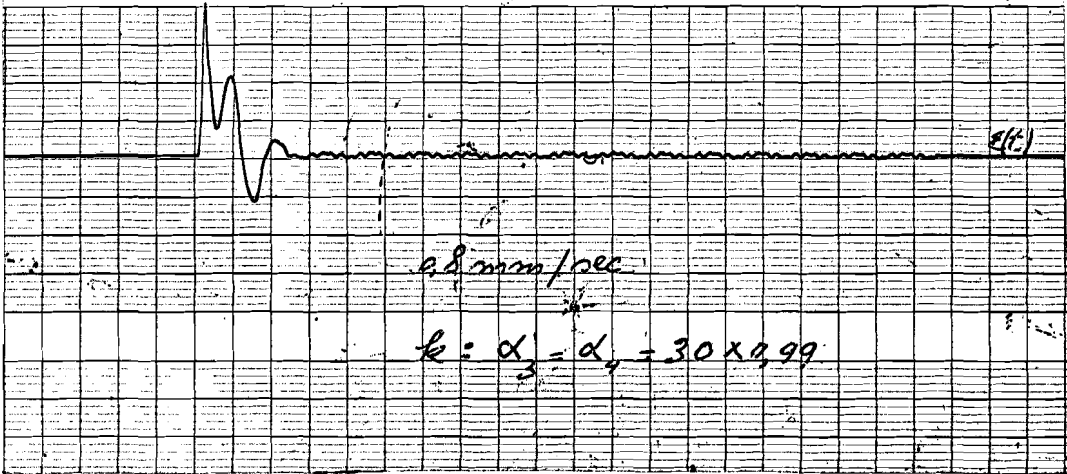
0,8 mm/sec

$$k: \alpha_3 = \alpha_4 = 30 \times 0,99$$

By LAGE GB

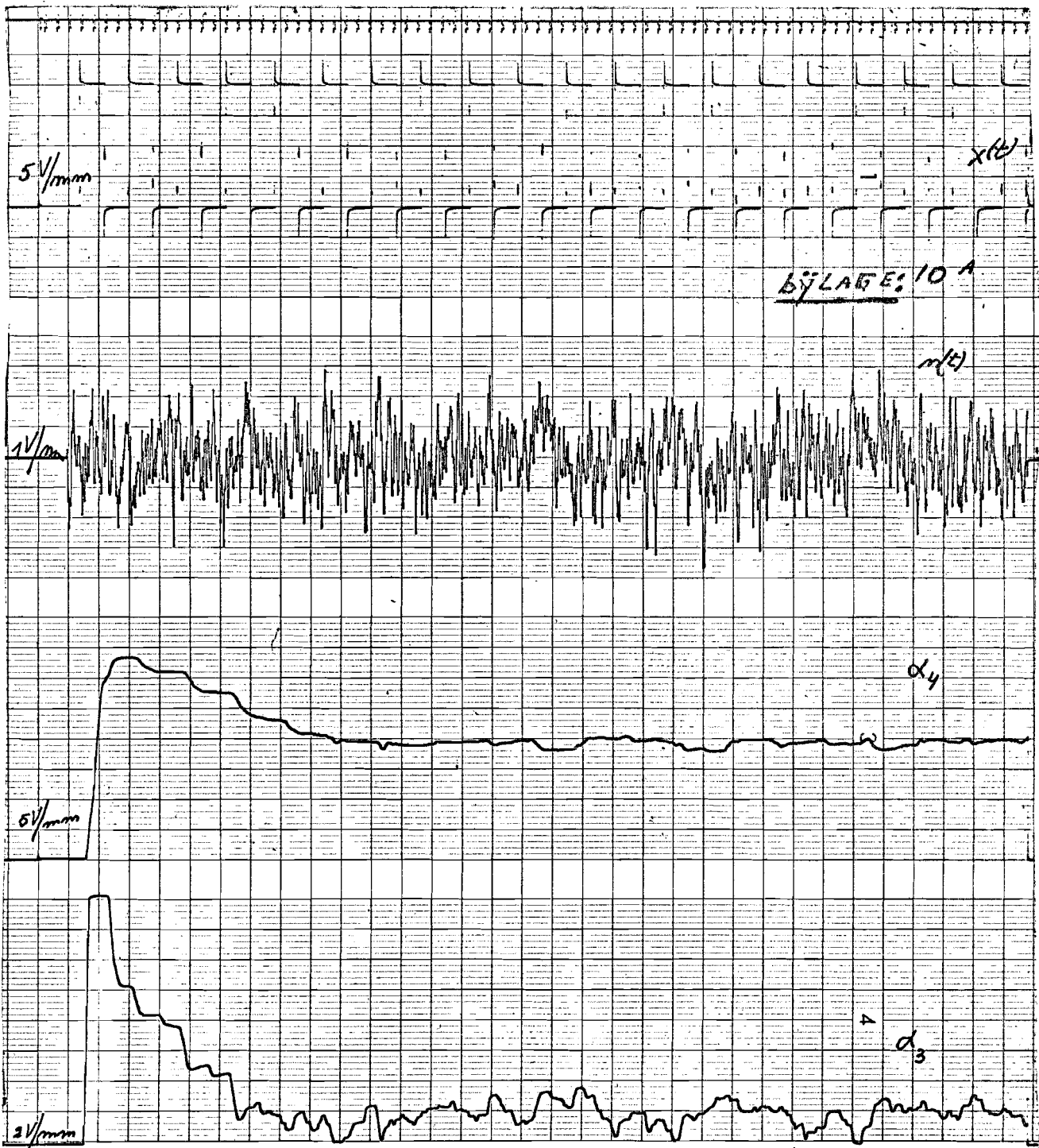


BRUSH INSTRUMENT

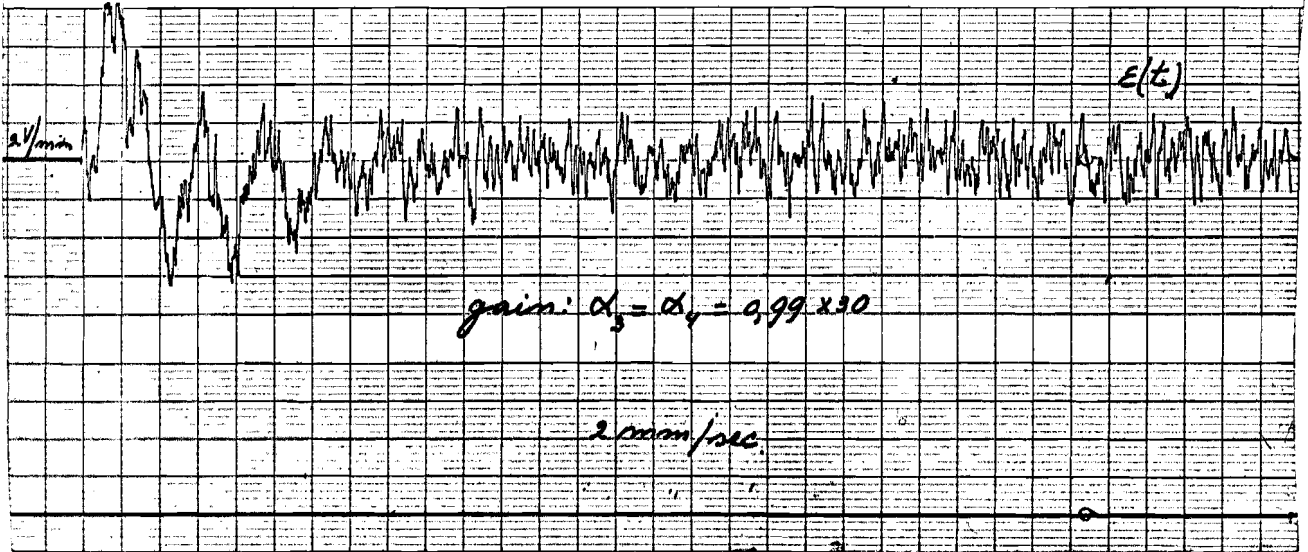


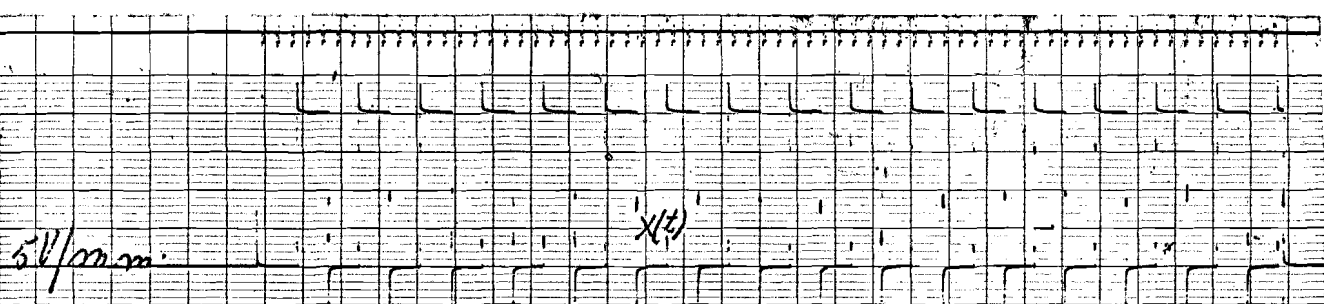
28 mm/sec

$$k = \alpha_3 = \alpha_4 = 30 \times 10^9$$

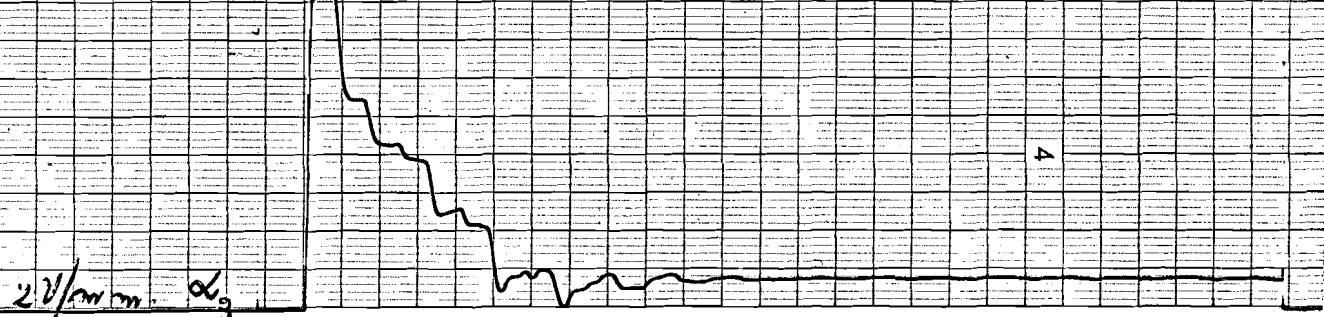
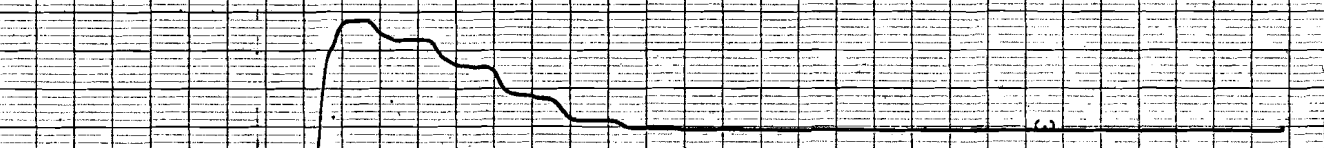
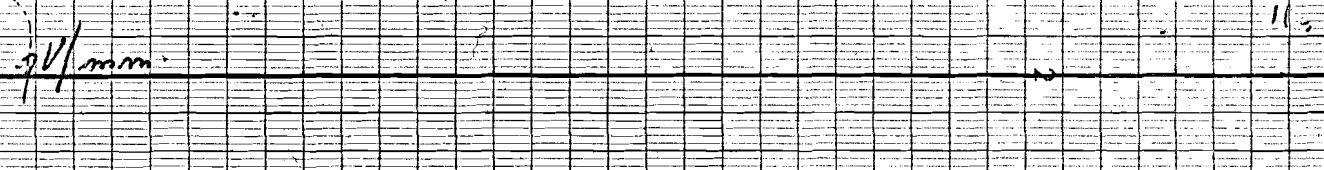


NTS DIVISION OF CLEVITE CORPORATION CLEVELAND, OHIO PRINTED IN U. S. A. □

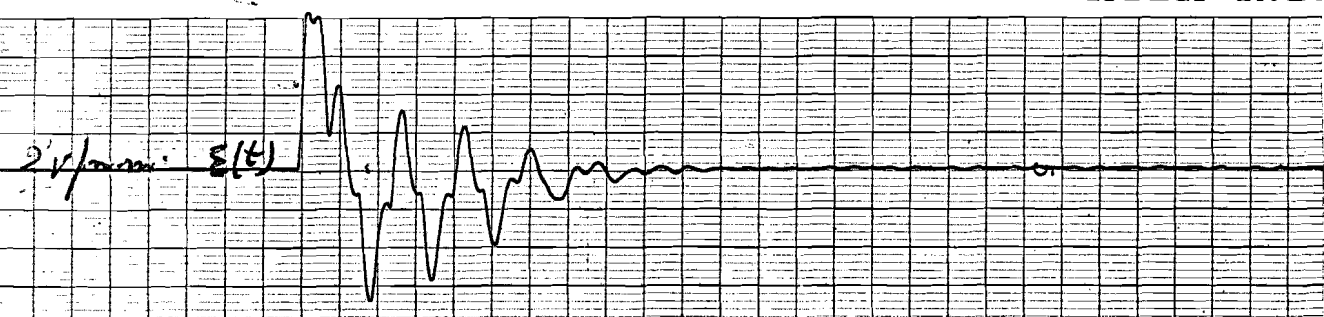




BYLAGE: 10₀

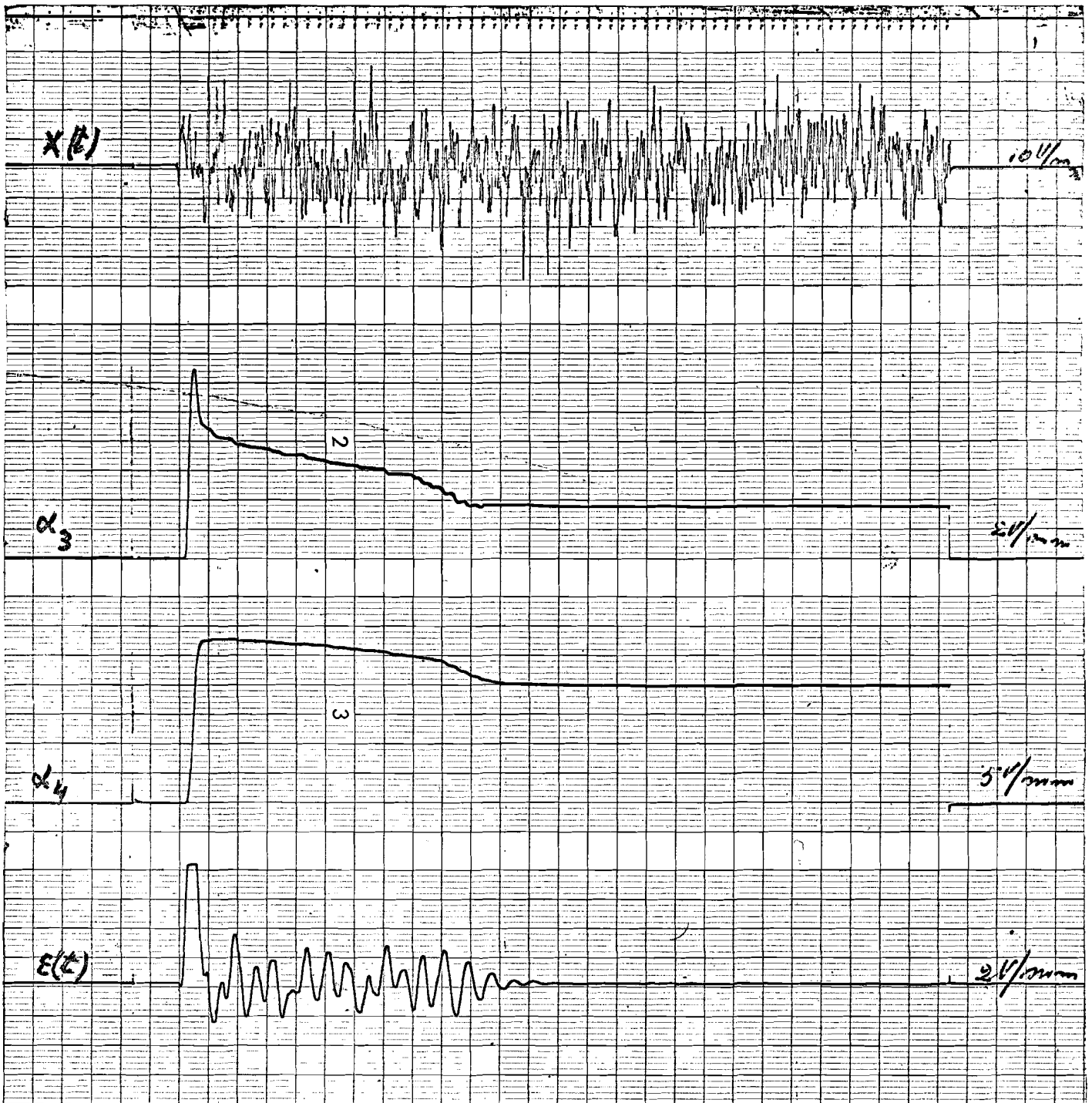


BRUSH INST



100V. $d_3, d_4 = 0,54 \cdot 230$

2 mm / sec.



BRUSH INSTRUMENTS

DIVISION OF CLEVITE CORPORATION

5

by L.F.E. 11

2 mm/sec.

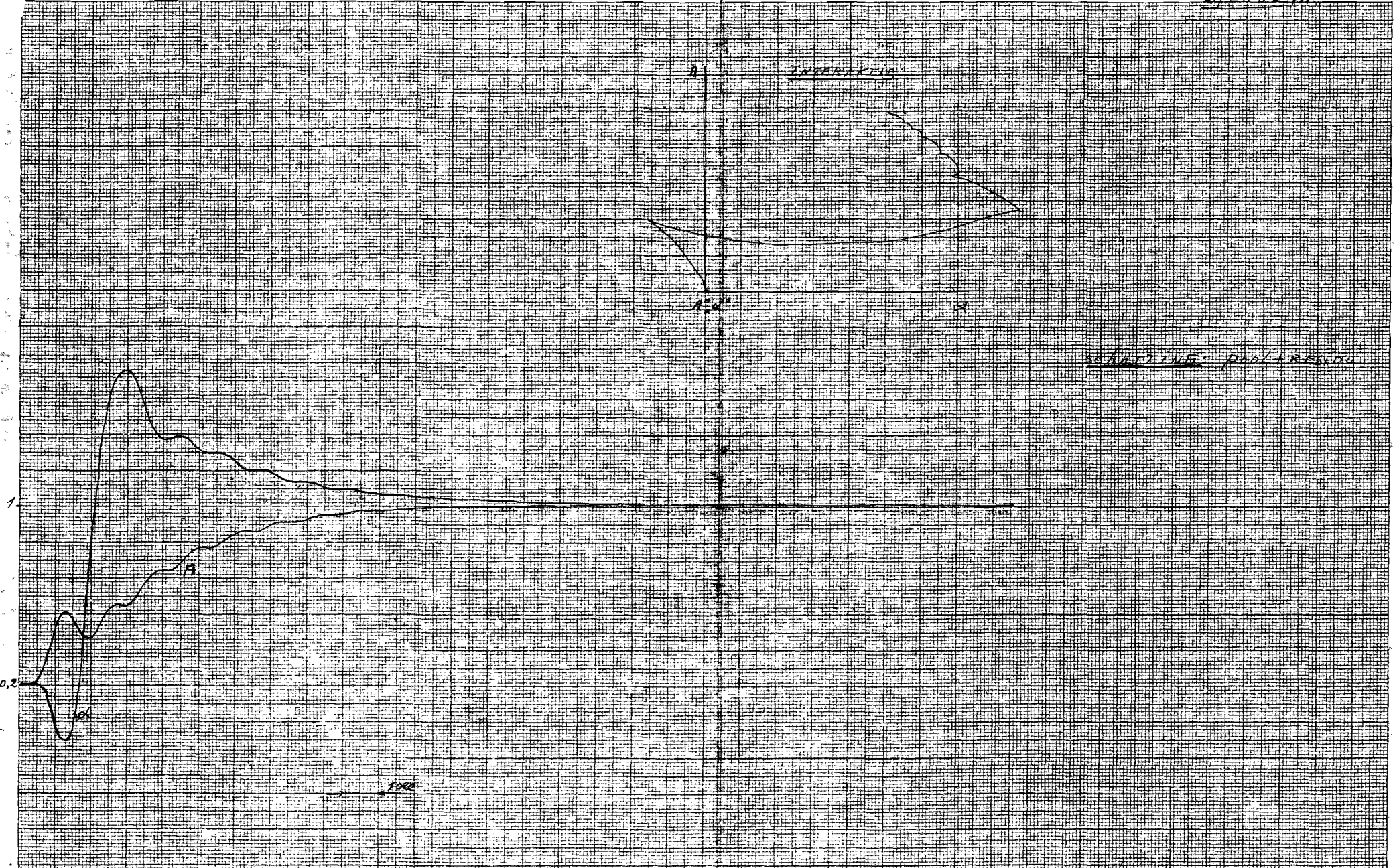
gain: $\alpha_3 = 0,3 \times 30$

$\alpha_4 = 0,75 \times 30$

5

6/L 45-12

4201-07 for No 359-14L



Openloop-metode

BIJLAGES 13

$k=10$

$k=50$

$\Delta\alpha$
↑

$k=99$

