

MASTER

Golfvoortplanting en dempingsmechanismen in partieel verzadigde poreuze media

De la Rosette, J.P.M.

Award date:
1990

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

University of Technology
Address: Den Dolech 2
PO. Box 513
5600 MB Eindhoven The Netherlands
Telephone (040) 479111
Telex 51163

Faculteit der Technische Natuurkunde

Vakgroep TRANSPORT-FYSICA

Titel: . Golfvoortplanting en dempingsmechanismen
in partieel verzadigde poreuze media.

Auteur: . J.P.M. De la Rosette

Verslagnummer: . R-1079-A

Datum: . september 1990

Werkeenheid: . Gasdynamica

Begeleider(s): ir. D.M.J. Smeulders
dr. ir. M.E.H. van Dongen

Met dank aan David, Rini, Louis en Hans.

Samenvatting

De aanwezigheid van kleine gasfracties in een voor het overige deel met vloeistof verzadigd poreus medium is van grote invloed op de transmissie en vervorming van een stapvormige drukgolf. De gebruikelijke tweegolven-structuur verdwijnt geheel met toenemende gasfractie. In plaats daarvan worden heftige oscillaties in het poriedruksignaal waargenomen. Deze verschijnselen kunnen theoretisch worden beschreven met een twee-fasen Biottheorie waarin de compressiemodulus van de porievloeistof complex en frequentieafhankelijk wordt verondersteld. De theorie voorspelt twee oscillatiemodes. Deze zijn in het gemeten drukspectrum teruggevonden. De orde grootte van de piek-frequenties komt overeen met de theorie.

De frequentie-afhankelijkheid van de porievloeistofcompressibiliteit wordt veroorzaakt door resonantieverschijnselen van oscillerende gasbellen. Bij de beschrijving hiervan zijn dempingsmechanismen van belang. Er is een theoretisch onderzoek gedaan naar met name de invloed van thermische demping op de oscillatie van een bel in een poreus medium. Op microscopische schaal blijkt thermische demping in bepaalde belstraalgebieden niet verwaarloosbaar t.o.v Darcy- en viskeuze demping. De invloed van thermische demping op de golfverschijnselen is in het parameterbereik van de door ons uitgevoerde experimenten verwaarloosbaar.

Tenslotte is er een diffusiemodel ter bepaling van de belstraal opgesteld en getoetst.

Inhoudsopgave

	blz
–Symbolenlijst	
1. Inleiding	1
2. Golfvoortplantingsmodel m.b.v Biottheorie	3
2.0 Inleiding	3
2.1 Biot–theorie	3
2.2 Eendimensionale golfvoortplanting in een poreuze kolom	6
3. Beldynamica en dempingsmechanismen	10
3.0 Inleiding	10
3.1 Darcy–demping, viskeuze demping en frequentie–afhankelijke compressibiliteit	10
3.2 Thermische demping	14
3.3 De verhouding van thermische demping tot viskeuze– en Darcy–demping	18
3.4 De invloed van thermische demping op de golfverschijnselen	25
3.5 Oppervlaktespanningseffecten	27
4. Diffusie en saturatie	31
4.0 Inleiding	31
4.1 Compressibiliteit en saturatie van de porievloeistof	32
4.2 Diffusiemodel ter bepaling van de belstraal	35
4.3 Compressibiliteits– en diffusie–experimenten	40
5. Transmissie van een stapvormige drukgolf	47
5.0 Inleiding	47
5.1 Berekeningen m.b.v de Biottheorie	49
5.2 Schokgolfexperimenten	59

6. Conclusies en aanbevelingen	68
7. Literatuur	70
Appendices	
A Bepaling saturatie m.b.v. een compressiemeting	73
B Corrigeren van de saturatie voor parasitaire lucht	75
C Afmetingen en volumina v.d. schokbuisopstelling	77
D Afleiding Γ voor thermische demping	78
E Limiet voor $\phi \rightarrow 0$ van voorfactor Γ	81
F Oppervlaktetensionsproefje	82
G Benaderingen voor de correctiefactor F	86
H Eigenschappen v. poreus mat. en porievloeistof	90

Symbolenlijst

Enkele symbolen hebben lokaal een andere betekenis dan hier gedefinieerd. Dit zal in de tekst worden aangegeven.

Algemene Symbolen:

a	1 ^{ste} Forchheimerparameter	m^{-2}
n	porositeit	
P	poriedruk	Pa
R_b	belstraal	m
R_p	effectieve poriestraal	m
s	saturatie	
α	toegevoegde massaparameter	
η	dynamische viscositeit porievloeistof	$kgm^{-1}s^{-1}$
ν	kinematische viscositeit porievloeistof	m^2/s
κ	permeabiliteit	m^2
ω	hoekfrequentie	rad/s

Hoofdstuk 2

c_i	fasesnelheid mode i	m/s
e_{ii}	component rektensor vaste fase	
k_i	golfvector mode i	m^{-1}
T	kinetische energie	J
u_i	verplaatsing vaste fase	m
U_i	verplaatsing vloeibare fase	m
v	snelheid vaste fase	m/s
w	snelheid vloeibare fase	m/s
ϵ	rek vloeibare fase	
γ_{ij}	component rektensor vaste fase	
ρ_f	dichtheid vloeibare fase	kg/m^3
ρ_s	dichtheid vaste fase	kg/m^3
σ_{ii}	spanningscomponent vaste fase	N/m^2
τ_{ij}	spanningscomponent vaste fase	N/m^2

Hoofdstuk 3

A	arbeid	J
E	inwendige energie	J
P_g	gasdruk in bel	Pa
P_{1b}	vloeistofdruk aan belrand	Pa
P_{g0}	rustdruk in bel	Pa
P^∞	druk op grote afstand van bel	Pa
T_p	periodetijd oscillatie van bel	s
Q	warmte	J
w_r	radiële vloeistofsnelheid	m/s
δ_t	thermische diffusielengte	m
σ_l	oppervlaktespanning vloeistof	N/m
σ_w	oppervlaktespanning water	N/m

Hoofdstuk 4

D	diffusiecoëfficiënt	m^2/s
D_e	effectieve diffusiecoëfficiënt	m^2/s
P_o	evenwichtsdruk	Pa
R^∞	gemiddelde omgevingsstraal	m
R_{b^∞}	belstraal in evenwichtssituatie	m
R_{b0}	initiële belstraal	m
s	saturation	
s_i	initiële saturatie	
s^∞	evenwichtssaturatie	
T_p	periodetijd drukverandering	
V_l	vloeistofvolume in poriën	m^3
V_g	gasvolume in poriën	m^3
β_l	compressibiliteit zuivere vloeistof	Pa^{-1}
β_f	compressibiliteit porievloeistof	Pa^{-1}
ρ_{db}	opgeloste gasdichtheid aan belrand	kg/m^3
ρ_{d^∞}	opgeloste gasdichtheid voor $r=\infty$	kg/m^3
ρ_{d0}	initiële opgeloste gasdichtheid	kg/m^3

ρ_{gd}	opgeloste gasdichtheid	kg/m^3
ρ_g	gasdichtheid	kg/m^3
ρ_f	porievloeistofdichtheid	kg/m^3
ω	oplosbaarheidscoëff. van lucht in water	

1. Inleiding

Het onderzoek naar de golfvoortplanting in poreuze media kent een aantal toepassingen in verschillende disciplines. Oliemaatschappijen verrichten boorgatmetingen met behulp van seismische reflectietechnieken. Geofysici doen onderzoek naar de samenstelling van de aardkorst en de invloed van schokken hierop. Vanuit de grondmechanica wordt geprobeerd het gedrag van de bodem tijdens het heien te beschrijven. In de civiele techniek wordt onderzoek verricht naar de gevolgen van golfklappen op dijken en golfbrekers in samenhang met de samenstelling van het constructiemateriaal.

Het onderzoek, dat binnen de sectie Gasdynamica van de vakgroep Transportfysica plaatsvindt in samenwerking met Grondmechanica Delft, is tweeledig. Enerzijds worden de golfverschijnselen in poreuze media op een modelmatige manier beschreven. Het uitgangspunt is de lineaire tweefasen-theorie van Biot [BIO56a,b]. Anderzijds worden de theoretische modellen experimenteel getoets. In een schokbuisopstelling is een poreuze kolom, bestaande uit aan elkaar gelijkde zandkorrels, opgesteld. De transmissie en reflectie van een stapvormige drukverandering, opgewekt in deze schokbuis, wordt gemeten. In de poriën van het medium bevindt zich de porievloeistof. Als de poriën volledig verzadigd zijn met water of lucht wordt de golfvoortplanting gekarakteriseerd door een tweegolvenstructuur, voorspeld door Biot. Een beschrijving van deze experimenten is weergegeven in het proefschrift van van der Grinten [GRI87]. De laatste jaren spitst het onderzoek zich toe op de voortplanting van golven in een medium waarbij de porievloeistof wordt gevormd door een mengsel van water en luchtbellen. Het effect van een kleine hoeveelheid oscillerende gasbellen op de voortplanting van de twee compressiegolven in een poreus medium is reeds beschreven door Bedford en Stern [BED83]. Uit experimenten van Sniekers et al. [SNI88], [SNI89] is gebleken dat dit van grote invloed is op het gemeten poriedruksignaal; er worden heftige oscillaties waargenomen. De golfverschijnselen in een gedeeltelijk verzadigd medium kunnen worden beschreven met een gemodificeerde Biot-theorie waarbij de compressiemodulus van de porievloeistof complex en frequentie-afhankelijk wordt verondersteld.

Het doel van dit afstudeerwerk is om gedetailleerder in te gaan op de oorsprong en het gedrag van de oscillaties als functie van de belstraal en/of gasfractie. Daarnaast is er een onderzoek nodig naar de invloed van verschillende dempingsmechanismen bij beloscillaties in een poreus medium. Tevens is er een beter diffusiemodel vereist waarmee de groei van luchtbellen in een poreus medium kan worden beschreven.

In hoofdstuk 2 wordt op beknopte wijze de Biot-theorie beschreven. In hoofdstuk 3 zijn de resultaten van een theoretisch onderzoek naar met name thermische demping in relatie tot viskeuze- en Darcy-demping weergegeven, en de invloed hiervan op beloscillaties in een poreus materiaal. Tevens wordt ingegaan op de gevolgen voor de macroscopische dempingsfactor van golven en op de effecten van oppervlaktetension. In hoofdstuk 4 wordt een nieuw diffusiemodel, om de belstraal te schatten, besproken. De oorsprong en het gedrag van de oscillaties wordt toegelicht in hoofdstuk 5, met behulp van resultaten verkregen uit de Biot-theorie. Deze zullen worden vergeleken met de resultaten van schokgolfexperimenten. Enkele conclusies en aanbevelingen zijn in hoofdstuk 6 weergegeven.

2. Golfvoortplantingsmodel m.b.v. de Biottheorie

2.0 Inleiding

De drukgolfvoortplanting in een continu medium bestaande uit twee homogene fasen (vast, vloeibaar) verschilt sterk van de voortplanting in een medium bestaande uit één homogene fase. Van der Grinten [GRI87] heeft uitgaande van continuïteits- en impulsvergelijkingen voor de vloeibare- en de vaste fase, in combinatie met een aantal constitutieve relaties, een 1-dimensionaal golfvoortplantingsmodel opgesteld. Tijdens dit onderzoek is gebruik gemaakt van een meer algemene theorie die door Biot is afgeleid [BIO56a,BIO56b]. Met behulp van deze theorie is het mogelijk de modellen uit te breiden voor 3-dimensionale effecten.

Uitgangspunt van de Biot-theorie is een statistisch isotroop poreus medium opgebouwd uit een elastische vaste fase die geheel verzadigd is met een vloeibare fase. De vloeistof is compressibel en beide fasen kunnen ten opzichte van elkaar bewegen. De Biot-theorie is een continuumtheorie, dit wil zeggen dat er wordt uitgegaan van gemiddelde materiaaleigenschappen. Ze voorspelt het bestaan van twee dispersieve longitudinale golven en één transversale golf. De oorzaken hiervan zijn de veranderde spannings-rek relaties en de interactiekrachten tussen beide fasen in het poreuze medium. De Biot-theorie is tamelijk uitgebreid. Daarom zullen slechts een aantal relevante resultaten worden gegeven.

De theorie zal verder worden uitgewerkt tot een voortplantingsmodel voor drukgolven in een 1-dimensionale situatie (poreuze kolom). De volumefractie poriën in een poreus medium is de porositeit n . In de poriën bevindt zich de porievloeistof; tijdens dit onderzoek een water-luchtbellen-mengsel. Dit mengsel zal in het kader van de Biot-theorie beschouwd worden als één homogene fase. De invloed van de luchtbellen op de golfvoortplanting zal worden verdisconteerd in de porievloeistofcompressibiliteit.

2.1 Biot-theorie

De verplaatsing van de vaste fase (ook wel skelet genoemd) wordt aangegeven door u_i en de verplaatsing van de porievloeistof door U_i (indices i voor de x,y,z richting). In een homogeen isotroop poreus medium kunnen de relaties tussen de spanningen, σ en τ , en de rek in de vloeistof, ϵ , resp. de rek in het skelet, e , als volgt worden weergegeven:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= 2Ne_{ii} + Ae + Q\epsilon \\
\tau_{ij} &= N\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)/2 \\
-nP &= Qe + R\epsilon
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

In (2.1) is n de porositeit, P de vloeistofdruk, N , A , Q , R zijn materiaalconstanten (A, N zijn de Lamé-coeff.; N is de glijdingsmodulus).

Vervolgens wordt er een uitdrukking afgeleid voor de kinetische energie T van het poreuze medium. Toepassen van het Lagrange formalisme met behulp van deze uitdrukking voor T levert vergelijkingen voor de krachten op de vloeistof en het skelet.

Substitutie hierin van de spannings-rek relaties (2.1) geeft:

$$\begin{aligned}
NV^2\vec{u} + \text{grad}\{(A+N)e + Q\epsilon\} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\vec{u} + \rho_{12}\vec{U}) \\
\text{grad}\{Qe + R\epsilon\} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\vec{u} + \rho_{22}\vec{U})
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

In deze twee vergelijkingen is geen wrijvingsinteractie tussen vloeistof en skelet meegenomen (geen dissipatie). ρ_{11} , ρ_{12} en ρ_{22} zijn massacoëfficiënten waarvoor geldt:

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= \rho_1 + \rho_a \\
\rho_{22} &= \rho_2 + \rho_a \\
\rho_{12} &= -\rho_a
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

ρ_1 is de soortelijke massafractie van de vaste stof, ρ_2 is de soortelijke massafractie van de vloeistof. ρ_a is de zogenaamde toegevoegde massa. De oorsprong van dit effect is dat een versnelling van het skelet ook een versnelling in de vloeistof veroorzaakt en omgekeerd. De massa van het skelet en de vloeistof lijkt te zijn toegenomen. De toegevoegde massa is afhankelijk van de grilligheid van het poreuze materiaal. Dit komt tot uitdrukking in het verband tussen de toegevoegde massa ρ_a , de dichtheid van de vloeistof ρ_f en de toegevoegde massaparameter α :

$$\rho_a = (\alpha - 1)n\rho_f
\tag{2.4}$$

De toegevoegde massaparameter, ook wel tortuositeit genoemd, houdt direct verband met de structuur van het poreuze materiaal.

Door de rotatie te nemen van (2.2) wordt de golfvergelijking voor de transversale golf verkregen. In het kader van dit onderzoek zijn echter de longitudinale golven van belang. Deze volgen uit de divergentie van (2.2), met $P = A+N$ geldt:

$$\begin{aligned}\nabla^2(Pe + Q\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}e + \rho_{12}\epsilon) \\ \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e + \rho_{22}\epsilon)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Door substitutie van een harmonische variatie voor e en ϵ in (2.5) verkrijgt men een stelsel vergelijkingen waaruit de dispersierelaties voor de longitudinale golven volgen. Er blijken twee waarden mogelijk voor de golfvector k :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - (PR-Q^2)/(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)} \quad (2.6)$$

In (2.6) is Δ gedefinieerd als $\Delta = (\rho_{11}Q + \rho_{22}P - 2\rho_{12}R)/(2\rho_{11}\rho_{22} - 2\rho_{12}^2)$. Voor longitudinale golven zijn er dus twee fasesnelheden met bijbehorende dempingsfactoren. De twee golven zullen worden aangeduid als mode 1 en mode 2. Bij een volledig verzadigd poreus medium vertegenwoordigt mode 1 de golf met de hoogste snelheid. Mode 2 heeft betrekking op de golf met de lage snelheid; deze wordt sterk gedempt. Dit duidelijke onderscheid geldt niet in het geval van niet volledig verzadigde media (zie hoofdstuk 5).

De complexe amplituden van druk, spanning, vloeistofsnelheid w en skeletsnelheid v kunnen worden opgesplitst in bijdragen van mode 1 en mode 2:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \hat{P}_1 + \hat{P}_2 \\ \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 \\ \hat{v} &= \hat{v}_1 + \hat{v}_2 \\ \hat{w} &= \hat{w}_1 + \hat{w}_2\end{aligned}\quad (2.7)$$

In (2.4) kan een interactieterm $b\partial/\partial t(\vec{u}-\vec{U})$ geïntroduceerd worden. b is door Biot gedefinieerd als de wrijvingskracht tussen vloeistof en skelet bij $\omega = 0$ per eenheid van relatieve snelheid. Het verband tussen b , de porositeit n , de permeabiliteit κ en de dynamische viscositeit η is $b = n^2\eta/\kappa$. De interactie in de huidige vorm is slechts geldig voor lage frequenties waarbij de vloeistofstroom door de poriën van het Poiseuille type is. Bij hoge frequenties vervormt het stromingsprofiel. Door het toevoegen van de frequentie-afhankelijke correctiefactor F kan deze afwijking in rekening worden gebracht. De interactieterm is in dat geval gelijk aan $bF\partial/\partial t(\vec{u}-\vec{U})$. De exacte vorm van $F(\omega)$ voor een reëel poreus medium is tot op heden onbekend. Voor het geval van onderling verbonden cilindervormige poriën is door Biot de volgende betrekking afgeleid:

$$F = \frac{1/4i\mu^2 J_1(\mu\sqrt{-i})}{\mu\sqrt{-i} \cdot J_0(\mu\sqrt{-i}) - 2J_1(\mu\sqrt{-i})} \quad (2.8)$$

$\mu = R_p \sqrt{\omega/\nu}$; R_p is de poriestraal, ν is de kinematische viscositeit, J_0 en J_1 zijn Besselfuncties van de nulde resp. eerste orde. De door Biot gevonden benaderingen van (2.8) zijn niet correct. In plaats hiervan zijn een aantal nieuwe benaderingen voor F opgesteld (zie Appendix G). Voor een reëel poreus medium zal in de parameter μ de effectieve poriestraal moeten worden ingevuld. Volgens Johnson, Koplik en Dashen [JOH87] geldt:

$$R_p = \sqrt{8\alpha\kappa/n} \quad (2.9)$$

Door toevoeging van de interactieterm aan (2.4) volgt uiteindelijk een nieuw stelsel vergelijkingen voor de longitudinale golven (analoog aan (2.5)):

$$\begin{aligned} \nabla^2(Pe + Q\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}e + \rho_{12}\epsilon) + bF\frac{\partial}{\partial t}(e-\epsilon) \\ \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e + \rho_{22}\epsilon) - bF\frac{\partial}{\partial t}(e-\epsilon) \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 Eindimensionale golfvoortplanting in een poreuze kolom

Tijdens dit onderzoek is gebruik gemaakt van een poreuze kolom bestaande uit aan elkaar gelijkde zandkorrels met een gemiddelde diameter van 0.40 mm. De mechanische eigenschappen hiervan worden beschreven door Smits [SMI86]. De parameters P , Q en R uit de Biot-theorie zijn gekoppeld aan meetbare materiaaleigenschappen. Het verband

tussen deze parameters en diverse compressiemoduli is afgeleid door Dunn [DUN86]. Voor het geval dat het poreuze materiaal geen lucht insluit ('no locked-in voids conditie') en de korrels niet ten opzichte van elkaar afrollen geldt in de driedimensionale situatie:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{(1-n)^2 K_s - (1-2n)K_a + nK_a(K_s/K_f - 1)}{1 - n - K_a/K_s + nK_s/K_f} + \frac{4}{3} \cdot N \\
 Q &= \frac{n(1 - n - K_a/K_s)K_s}{1 - n - K_a/K_s + nK_s/K_f} \\
 R &= \frac{n^2 K_s}{1 - n - K_a/K_s + nK_s/K_f} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

N is de glijdingsmodulus, K_s de compressiemodulus van de korrels, K_f de compressiemodulus van de porievloeistof en K_a is de frame modulus. Als de korrels incompressibel worden verondersteld geldt dat $1/K_s = 0$. De betrekkingen in (2.11) reduceren tot:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{(1-n)^2}{n} K_f + K_a + \frac{4}{3} N = \frac{(1-n)^2}{n} K_f + K_p \\
 Q &= K_f(1-n) \\
 R &= nK_f \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

K_p is de 'constrained' modulus. De Biot-theorie levert dispersierelaties, d.w.z. het verband tussen ω en de complexe golfvectoren, de verhouding van vloeistof- en skelet-snelheden als functie van de frequentie. De drukken en spanningen zijn af te leiden uit de combinatie van spannings-rek relaties en de randvoorwaarden aan de poreuze kolom. Substitutie van de uitdrukkingen voor P, Q en R vlg. (2.12) in de spannings-rek relaties gegeven in (2.1) levert voor de spanning en de druk:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -K_p \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \\
 \frac{\partial P}{\partial t} &= -K_f \cdot \left(\frac{1-n}{n} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Tijdens schokexperimenten wordt de kolom in asrichting belast zodat met een 1-dimensionale beschouwing kan worden volstaan. Uitwerking van de 1-dimensionale

situatie met behulp van de Biot-theorie geeft een eindresultaat dat identiek is aan het model dat door van der Grinten is opgesteld [GRI87]. Eendimensionaal geldt:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.14)$$

Invullen van (2.14) in (2.13) geeft voor vlakke harmonische oplossingen van P , σ , v , w :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i &= K_p \cdot \frac{\hat{v}_i}{c_i} \\ \hat{P}_i &= K_f \cdot \left\{ \frac{1-n}{n} \cdot \frac{\hat{v}_i}{c_i} + \frac{\hat{w}_i}{c_i} \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

De indices i corresponderen met mode 1 en mode 2; c_i is de fasesnelheid.

De poreuze kolom wordt voorgesteld als een halfoneindig medium met de bovenkant in $x=0$. De bovenkant van de kolom is vrij opgesteld; dit leidt tot de randvoorwaarde dat op $x=0$ de korrelspanning σ gelijk is aan nul ($\hat{\sigma}_1 = -\hat{\sigma}_2$). Herschrijven van (2.15) na eliminatie van σ_i leidt met behulp van de randvoorwaarde tot:

$$\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_2} = -\frac{\beta_1 + \frac{(1-n)/n}{\beta_2 + \frac{(1-n)/n}}{n}}{n} = q(\omega) \quad (2.16)$$

β_i is de verhouding van vloeistof- en skeletsnelheid ($\beta_i = \hat{w}_i / \hat{v}_i$).

Een drukgolf invallend op de poreuze kolom zal gedeeltelijk worden gereflecteerd. De reflectiecoëfficiënt, $r(\omega)$, te bepalen uit continuïteit van druk en massa, wordt besproken door van Berlo en Sniekers [BER87]. Met behulp van deze reflectiecoëfficiënt is de voortplanting van de drukamplituden van P_1 en P_2 te beschrijven:

$$\begin{aligned} \text{mode 1: } \frac{\hat{P}_1(x, \omega)}{\hat{P}_{in}(\omega)} &= \frac{1 + r(\omega)}{1 + q^{-1}(\omega)} \cdot e^{ik_1 x} \\ \text{mode 2: } \frac{\hat{P}_2(x, \omega)}{\hat{P}_{in}(\omega)} &= \frac{1 + r(\omega)}{1 + q(\omega)} \cdot e^{ik_2 x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

\hat{P}_{in} is de complexe amplitude van het invallende druksignaal. De golfvectoren k_1 en k_2 volgen uit de Biot-theorie. (2.17) beschrijft de voortplanting van de drukgolven in het frequentiedomein. De voortplanting in het tijdsdomein kan hieruit worden verkregen door inverse Fouriertransformatie. Voor een behandeling van fast fourieranalyse bij golfvoortplanting in poreuze media wordt verwezen naar Engbers [ENG85].

3. Beldynamica en dempingsmechanismen

3.0 Inleiding

De aanwezigheid van gasbellen in een poreus medium heeft grote gevolgen voor de golfvoortplanting. De golfsnelheden en dempingsfactoren worden sterk beïnvloed door resonantieverschijnselen van de gasbellen. In het eerste deel van dit hoofdstuk zullen beldynamische aspecten besproken worden; het zal blijken dat deze leiden tot een frequentie-afhankelijke compressibiliteit van de porievloeistof.

Bij de behandeling van resonantieverschijnselen zijn dempingsfactoren van belang; deze bepalen de sterkte van het resonantieverschijnsel alsmede de ligging van de resonantie-frequentie. Door Sniekers [SNI88] is in de golfvoortplantingsmodellen alleen Darcy-demping meegenomen. In dit hoofdstuk zal verder worden ingegaan op de betekenis van andere dempingsmechanismen voor oscillerende gasbellen in een poreus materiaal (op microscopische schaal). Met name zal de invloed van thermische demping worden vergeleken met de invloed van de overige dempingsmechanismen. Het mechanisme van thermische demping zal worden geïntroduceerd aan de hand van een vrije oscillerende gasbel in een vloeistof, analoog aan Pfried [PRI40] en Devin [DEV59].

Daarnaast zal worden ingegaan op de betekenis van de microscopische thermische dempingsfactor voor de macroscopische demping die golven in het poreuze medium ondervinden. Tenslotte zal worden gekeken naar oppervlaktespanningseffecten bij gasbellen in een poreus medium.

3.1 Darcy-demping, viskeuze demping en frequentieafhankelijke compressibiliteit

Het uitgangspunt voor de bespreking van dynamisch belgedrag is de impulsvergelijking voor de vloeistof rondom een oscillerende luchtbel zoals die door Sniekers [SNI88] is geformuleerd:

$$\alpha \rho_l \frac{dw_r}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial r} - n a \eta F w_r \quad (r > R_b) \quad (3.1)$$

De laatste term in (3.1) geeft de (Darcy-)interactie tussen vloeistof en skelet weer, F brengt de frequentieafhankelijkheid in rekening, w_r is de vloeistofsnelheid. (de snelheid van het skelet is verwaarloosd).

Dynamisch belgedrag manifesteert zich door resonantieverschijnselen. Voor de beschrijving hiervan zijn dempingsfactoren van belang. In deze eerste behandeling zal worden ingegaan op Darcy–demping en viskeuze demping. Thermische demping zal later worden besproken (§4.2).

De Darcy–term in (3.1) is afkomstig van de wet van Darcy zoals die gedefinieerd is voor een stationair bewegende vloeistof in een stilstaand poreus materiaal, zie Bourbie [BOU87]. De vloeistof rondom een oscillerende bel wordt in beweging gebracht, deze ondervindt de Darcy–stromingsweerstand. Dit is aanleiding voor de demping van de oscillatie van de bel.

De viskeuze dempingsterm is nog niet zichtbaar in (3.1). Deze wordt geïntroduceerd door de randvoorwaarden voor de druk op de belrand. Via viskeuze interactie kan er impuls tussen vloeistofelementen, die met een verschillende snelheid bewegen, worden uitgewisseld. Wanneer de opgenomen impuls niet gelijk is aan de afgegeven impuls is er sprake van viskeuze dissipatie. In het geval van een oscillerende luchtbel treedt er deformatie van vloeistofelementen op. De viscositeit veroorzaakt een extra bijdrage aan de spanningen, in dit geval aan de normaalspanning τ_{rr} . Het netto–effect van deze normaalspanning op een volume–element in de vloeistofbolk is nul, zie Devin [DEV59]. Dit geldt niet op de belrand. Hier leiden de normaalspanningen tot een druksprong over de belrand:

$$P_{1b} - P_g = 2\eta m \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R_b} \quad (r > R_b) \quad (3.2)$$

In (3.2) is P_{1b} de druk aan de vloeistofzijde van de belrand; P_g is de druk in de bel. Om bewegingsvergelijking (3.1) op te lossen is een uitdrukking voor de vloeistofsnelheid w_r vereist. Voor een incompressibele vloeistof wordt deze verkregen uit de continuïteitsvergelijking. Na linearisatie volgt:

$$w_r = \frac{R_b^2}{r^2} \cdot \frac{dR'}{dt} = \frac{R_b^2}{r^2} \cdot u_b' \quad (3.3)$$

Verwaarlozing van convectieve termen in (3.1) en linearisatie geeft na substitutie van een harmonische variatie voor P en w_r volgens (3.3):

$$i\omega\rho_1\hat{\alpha}u_b \cdot \frac{R_b^2}{r^2} = -\frac{\partial\hat{P}}{\partial r} - naF\eta u_b \cdot \frac{R_b^2}{r^2} \quad (3.4)$$

Oplossen van (3.4) gaat via integratie van $r=R_b$ naar $R=\infty$. De randvoorwaarden voor de druk in de vloeistof ter plaatse van de belrand volgen uit (3.2). Het resultaat is

$$\hat{P}_\infty = \hat{P}_g + \omega^2\rho_1\alpha R_b\hat{R} - i4\omega n\eta\frac{\hat{R}}{R_b} - i\omega naF\eta R_b\hat{R} \quad (3.5)$$

\hat{P}_∞ is de complexe amplitude van de drukvariatie die op grote afstand van de bel wordt aangelegd. In (3.5) is er nog een verband vereist tussen de amplitude van variatie van de gasdruk, \hat{P}_g , en de amplitude van variatie van de straal, \hat{R} . Onder de aanname dat het gas in de bel de (adiabatische) ideale gaswet volgt, geldt na linearisatie van de volumeveranderingen (voor $R_b \gg R_p$):

$$\frac{\hat{P}_g}{P_{g0}} = -3\gamma\frac{\hat{R}}{R_b} \quad (3.6)$$

Hierin is γ de verhouding tussen de soortelijke warmten bij constante druk en constant volume; $\gamma=c_p/c_v$. P_{g0} is de rustdruk in de bel, R_b is de belstraal in rust. Substitutie van (3.6) in (3.5) geeft de zogenaamde Rayleigh–Plesset vergelijking die het verband tussen de variaties van de belstraal en de variatie van de gasdruk op grote afstand van de bel beschrijft:

$$\hat{P}_\infty = -3\gamma P_{g0}\frac{\hat{R}}{R_b} + \omega^2\rho_1\alpha R_b\hat{R} - i4\omega n\eta\frac{\hat{R}}{R_b} - i\omega naF\eta R_b\hat{R} \quad (3.7)$$

De derde term in het rechterlid geeft de viskeuze demping aan het beloppervlak weer; de vierde term in het rechterlid heeft betrekking op de Darcy–demping. Met behulp van (3.7) volgt eenvoudig de compressiemodulus K_g van het gas in de bel:

$$K_g = \gamma P_{g0} - \frac{1}{3}\omega^2\rho_1\alpha R_b^2 + \frac{i\omega n\eta}{3}(4 + aFR_b^2) \quad (3.8)$$

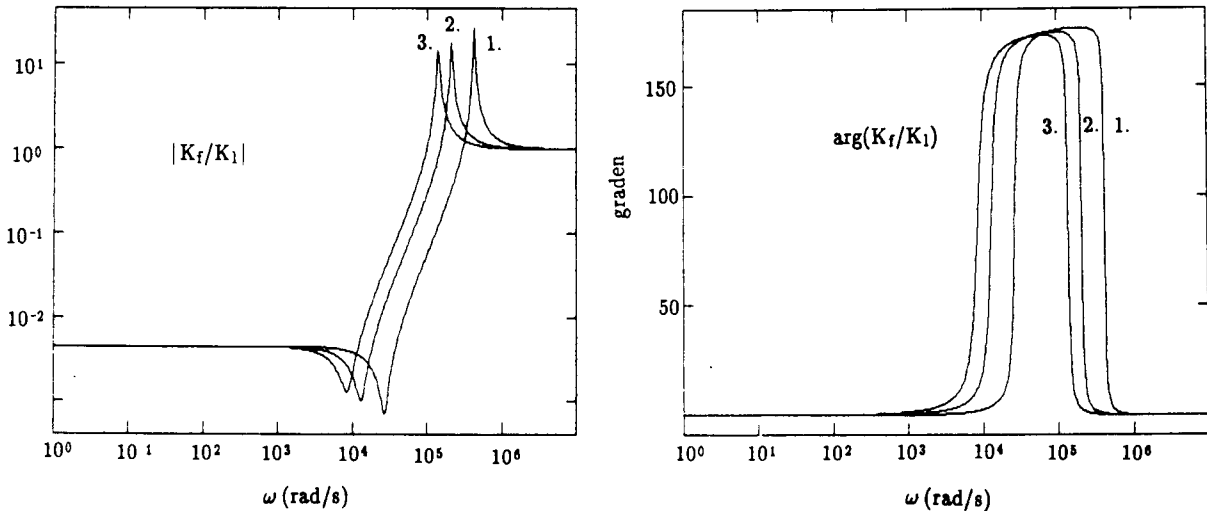
Daarnaast volgt uit (3.8) de resonantiefrequentie ω_r :

$$\omega_r = \sqrt{\left(\frac{3\gamma P_{g0}}{\alpha\rho_1 R_b^2}\right)} \quad (3.9)$$

Deze blijkt in sterke mate af te hangen van de belstraal R_b . In het geval van een porievloei­stof met een homogeen verdeeld aantal bellen van gelijke grootte, kan de totale compressiemodulus uitgedrukt worden in compressiemoduli van water (K_1) en lucht­bellen (K_g):

$$\frac{1}{K_f} = \frac{1-s}{K_g} + \frac{s}{K_1} \quad (3.10)$$

De compressiemodulus van de porievloei­stof is dus een complexe frequentie­afhankelijke grootheid. De absolute waarde en het argument van K_f zijn voor een aantal belstralen weergegeven in figuur 3.1.



Figuur 3.1: De modulus en het argument van de compressiemodulus van de porievloei­stof. $1-s = 1\%$, voor de belstraal geldt: 1. $R_b = 0.5\text{ mm}$, 2. $R_b = 1.0\text{ mm}$, 3. $R_b = 1.5\text{ mm}$.

In bepaalde frequentiegebieden wordt de compressiemodulus sterk beïnvloed door het dynamisch gedrag van de lucht­bellen. Dit is reeds door Sniekers [SNI88] en van Wijngaarden [WIJN72] beschreven. In het kort luidt de redenering als volgt: Voor lage frequenties geldt de statische K_f waarde. Bij de resonantiefrequentie ω_r is het mengsel zeer compressibel. In het frequentiegebied na ω_r gaan fase­effecten een rol spelen.

De bellen kunnen de opgelegde oscillaties niet geheel meer volgen. Bij de antiresonantiefrequentie ω_a bewegen de bellen in tegenfase met de opgelegde drukvariaties. Bij drukverhoging in de vloeistof expanderen de bellen en omgekeerd. De porievloeistof is dan zeer incompressibel. In de hoge frequentielimiet worden de bellen niet meer aangeslagen, de compressiemodulus is gelijk aan die van water. De frequentie-afhankelijke compressibiliteit is van grote invloed op de golfsnelheden en dempingsfactoren van beide golfmodes, dit zal verder worden toegelicht in hoofdstuk 5.

3.2 Thermische demping

Om het mechanisme van thermische demping te beschrijven gaan we uit van een vrije luchtbel in een oneindige hoeveelheid vloeistof. De bel wordt verondersteld te oscilleren met een hoekfrequentie ω . De vloeistof rondom de bel heeft een grote warmtecapaciteit en thermische geleidbaarheid ten opzichte van de lucht in de bel.

De bel wordt thermisch gedempt als er gedurende een oscillatieperiode netto arbeid wordt verricht op de omgeving (vloeistof). Deze arbeid, A , volgt uit de eerste hoofdwet van de thermodynamica:

$$A = \oint P dV = \int_0^{T_p} P \frac{dV}{dt} dt \quad (3.11)$$

Daarnaast is de thermische diffusielengte δ_t gedefinieerd als:

$$\delta_t = \sqrt{\frac{2a_g}{\omega}} \quad (3.12)$$

De thermische diffusielengte geeft aan over welke afstand gedurende één oscillatieperiode warmte met de omgeving uitgewisseld kan worden. a_g is de temperatuurvereffeningscoëfficiënt van het gas in de bel. In het frequentiegebied geldt:

1. Lage frequentielimiet: $\delta_t \gg R_b$. Over een afstand in de orde van de belstraal kan gedurende een oscillatieperiode vrijelijk warmte met de omgeving worden uitgewisseld. De hoeveelheid warmte die tijdens compressie door de bel aan de vloeistof wordt afgestaan, wordt weer opgenomen bij expansie. De arbeid die de drijvende kracht

verricht bij het comprimeren van de bel is dan gelijk aan de arbeid die de bel verricht op de vloeistof tijdens expansie. Het proces is isotherm. De relatieve verandering in druk en volume zijn precies in tegenfase zodat (3.11) nul oplevert. Er geldt:

$$\frac{dP}{P_{g0}} = -\frac{dV}{V_0} \quad (3.13)$$

De nulindices hebben betrekking op rustsituatie. Er is geen thermische demping.

2. Hoge frequentielimiet: $\delta_t \ll R_b$. In dit geval kan er geen warmte-uitwisseling tussen bel en vloeistof plaatsvinden. De frequentie van de oscillatie is dermate hoog dat er geen warmtestroom op gang kan komen. Het proces is adiabatisch, er geldt:

$$\frac{dP}{P_{g0}} = -\gamma \frac{dV}{V_0} \quad (3.14)$$

Er is ook nu geen thermische demping.

3. Tussenliggend frequentiegebied: De bel gedraagt zich polytroop; dit wil zeggen dat niet alle warmte uitgewisseld kan worden. Er ontstaat een faseverschil tussen de relatieve druk- en volumeverandering. De compressie-arbeid is groter dan de expansie-arbeid. Dit verschil in arbeid manifesteert zich als een netto warmtestroom naar de vloeistof. Er gaat energie verloren zodat de bel thermisch gedempt wordt. Het verband tussen de complexe amplituden van druk- en volumevariatiës luidt:

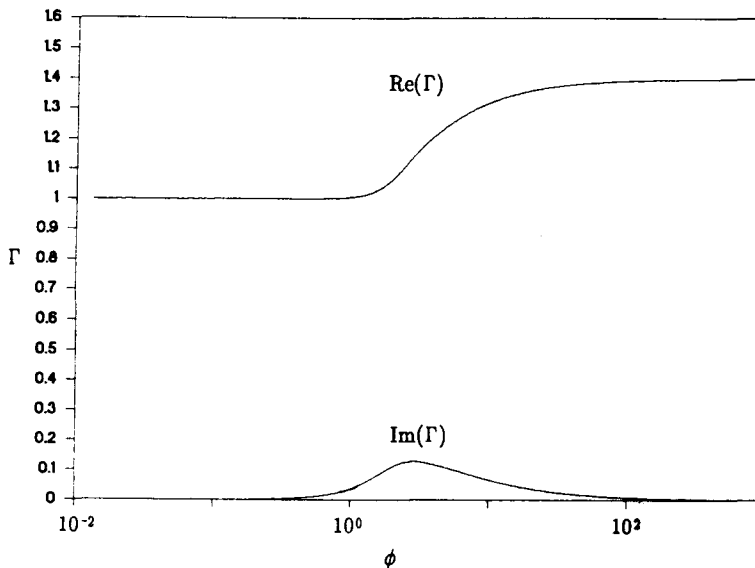
$$\frac{d\hat{P}}{P_{g0}} = -\Gamma(\phi) \cdot \frac{d\hat{V}}{V_0} \quad (3.15)$$

De parameter ϕ is gegeven door $\phi = R\sqrt{\omega/2a_g}$. R is de afstand waarover warmte moet worden uitgewisseld (in dit geval de belstraal R_b). Γ is een complexe voorfactor die volgt uit de warmtegeleidingstheorie. In Appendix D zal deze voorfactor worden afgeleid. Uitgangspunt hierbij is de gelineariseerde energievergelijking; hieruit worden uitdrukkingen verkregen voor de inwendige energie en de warmtestroom naar de omgeving. Opmaken van de energiebalans levert een uitdrukking voor Γ :

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\gamma} \cdot [1 + 3(\gamma-1) \cdot (\frac{B}{\Psi R} - \frac{1}{(\Psi R)^2})] \quad (3.16)$$

De functie Ψ wordt beschreven in Appendix D. Het reële en imaginaire deel van de voorfactor Γ is als functie van de parameter ϕ weergegeven in figuur 3.2 (voor lucht). Het reële deel is voor kleine ϕ gelijk aan 1, het imaginaire deel gaat naar nul,

(isotherme limiet; 3.13). In Appendix E zal de limiet voor $\phi \rightarrow 0$ worden besproken. Voor grote waarden van ϕ gaat het imaginaire deel weer naar nul, het reële deel gaat naar 1.4 ($=\gamma_{\text{lucht}}$, adiabatische limiet, zie 3.14).



Figuur 3.2: Het reële en imaginaire deel van de voorfactor Γ bij beloscillaties.

Bij een reële gasbel zal er altijd sprake zijn van thermische demping. Het gas aan de belrand staat in contact met de vloeistof en zal voldoen aan de isotherme toestandsvergelijking. Het gas in het centrum van de bel is relatief ver verwijderd van de vloeistof en zal de adiabatische toestandsvergelijking volgen. De bel gedraagt zich dus altijd in bepaalde mate polytroom.

Bij aanwezigheid van poreus materiaal blijft het mechanisme van thermische demping gelijk aan dat van een vrije bel. Er moeten echter twee gevallen worden onderscheiden: Bellen kleiner dan de porieafmeting (R_p) en bellen groter dan de porieafmeting.

1. $R_b > R_p$: De warmte-overdracht vanuit de bel vindt in dit geval plaats aan het poreuze materiaal dat zich binnen de bel bevindt. De karakteristieke lengteschaal, R , in de parameter ϕ is in dit geval de poriestraal R_p :

$$\phi = R_p \sqrt{\omega/2a_g} \quad (3.17)$$

2. $R_b < R_p$: Dit geval is geheel analoog aan de vrije bel. De warmte-overdracht vindt plaats op de belrand:

$$\phi = R_b \sqrt{\omega/2a_g} \quad (3.18)$$

In (3.13), (3.14) en (3.15) staat telkens een verband tussen de variatie in druk en de variatie in het volume. In de bewegingsvergelijking van de bel, zie (3.7), staan geen volumevariaties (\hat{V}/V_0) maar variaties in de belstraal, (\hat{R}/R_b). Als een thermische dempingsterm in de bewegingsvergelijking wordt ingebouwd moet niet alleen de parameter ϕ geschaald worden. Tevens moet, afhankelijk van de grootte van de bel ten opzichte van de porieafmetingen, het verband tussen \hat{V}/V_0 en \hat{R}/R_b aangepast worden. Hierbij worden drie gevallen onderscheiden:

1. $R_b < R_p$: In analogie met de vrije bel geldt:

$$\frac{\hat{V}}{V_0} = 3 \cdot \frac{\hat{R}}{R_b} \quad (3.19)$$

2. $R_b \gg R_p$:

$$\frac{\hat{V}}{V_0} = 3 \cdot \frac{\hat{R}}{R_b} \quad (3.20)$$

3. $R_b \approx R_p$: Voor een bel die niet veel groter is dan de porieafmeting wordt het belgedeelte tot $r = R_p$ voorgesteld als een bolvormig geheel. Het belgedeelte voor $r > R_p$ wordt voorgesteld als zijnde vertakt binnen het poreus materiaal (porositeit n). Het totale belvolume V_0 bedraagt: $4/3\pi R_p^3 + 4/3\pi n(R_b^3 - R_p^3)$. Hieruit volgt eenvoudig:

$$\frac{\hat{V}}{V_0} = \frac{3nR_b^2 \cdot \hat{R}}{R_p^3 + n(R_b^3 - R_p^3)} \quad (3.21)$$

De limiet van (3.21) voor $R_b \gg R_p$ is gelijk aan (3.20).

3.3 De verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping

Bij een vrije oscillerende luchtbel in water is thermische demping volgens van Wijngaarden het belangrijkste dempingsmechanisme [WIJN72]. Met behulp van §3.2 kan de thermische dempingsfactor in de bewegingsvergelijking van een oscillerende luchtbel in een poreus medium worden opgenomen. Aan de hand hiervan kan de verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping onderzocht worden. Om misverstanden te voorkomen wordt er op gewezen dat in deze paragraaf de invloed van thermische demping op microscopische schaal wordt besproken (demping van de beloscillatie) en niet op de macroscopische dempingsfactor van de golven (deze komt in §3.4 aan bod). De invloed van het soort poreus materiaal, belgrootte, druk en poriestraal zal worden bekeken. De effecten van oppervlaktetension zullen later worden besproken (§3.5). Allereerst dienen de bewegingsvergelijkingen met alle dempingsfactoren opgesteld te worden. Om de invloed van belgrootte op de dempingstermen te analyseren is het noodzakelijk twee situaties apart uit te werken; het geval dat de bellen groter zijn dan de porieafmeting ($R_b > R_p$) en het geval dat de bellen kleiner zijn dan de porieafmeting ($R_b < R_p$).

3.3.1 $R_b < R_p$

De porie wordt gemodelleerd als een bolvormige holte. Het middelpunt van de bel wordt verondersteld samen te vallen met het middelpunt van de porie. Tot aan de poriegrens is de bel omgeven door water, voorbij de poriegrens vertakt het water zich in andere poriën. De bewegingsvergelijking van de bel wordt opgesteld uit de impulsvergelijkingen voor de vloeistof voor twee gebieden ($R_b < r < R_p$ en $R_p < r < \infty$). De twee oplossingen hiervan worden aan elkaar gekoppeld bij $r = R_p$.

1. $R_b < r < R_p$: In dit gebied geldt de gelineariseerde impulsvergelijking van de vloeistof zonder Darcy-term. Na invullen van een harmonische variatie volgt:

$$i\omega\rho_1\hat{w}_r = -\frac{\partial\hat{P}}{\partial r} \quad (3.22)$$

De vloeistofsnelheid w_r volgt uit (3.3). Substitutie hiervan in (3.22) en integratie van $r = R_b$ naar $r = R_p$ geeft:

$$\hat{P}_g = \hat{P}_a + i\omega\rho_1\hat{u}_bR_b - i\omega\rho_1\hat{u}_bR_b^2/R_p + 4\eta\hat{u}_b/R_b \quad (3.23)$$

Waarin \hat{P}_a de betrekking heeft op de variatie van de druk bij $r=R_p$.

2. $R_p < r < \infty$: Hier geldt de impulsvergelijking volgens (3.1). De snelheid w_r is in dit geval vervangen door w_p . De randvoorwaarde aan de overgang $r=R_p$ levert $w_p = w_r/n$.

Substitutie hiervan in (3.1), vervolgens lineariseren en invullen van een harmonische variatie geeft:

$$i\omega\alpha\rho_1\hat{u}_bR_b^2/(nr^2) = -\frac{\partial\hat{P}}{\partial r} - a\eta F\hat{u}_bR_b^2/r^2 \quad (3.24)$$

Integratie van (3.24) van $r=R_p$ naar $r=\infty$ geeft:

$$\hat{P}_\infty = \hat{P}_a - i\omega\alpha\rho_1\hat{u}_bR_b^2/(nR_p) - a\eta F\hat{u}_bR_b^2/R_p \quad (3.25)$$

Gelijkstellen van (3.23) en (3.25) levert na substitutie van $\hat{u}_b = i\omega\hat{R}$ de Rayleigh-Plesset vergelijking voor de bel:

$$\hat{P}_g - \hat{P}_\infty = -\omega^2\rho_1R_b\hat{R} \cdot \left\{1 + \frac{R_b}{R_p}\left(\frac{\alpha}{n} - 1\right)\right\} + i\omega\eta\frac{\hat{R}}{R_b}\left\{4 + aF\frac{R_b^3}{R_p}\right\} \quad (3.26)$$

De 'pure vloeistof' limiet van (3.26) (geen poreus materiaal: $a \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 1, n \rightarrow 1$) luidt:

$$\hat{P}_g - \hat{P}_\infty = -\omega^2\rho_1R_b\hat{R} + 4i\omega\eta\hat{R}/R_b \quad (3.27)$$

(3.27) is identiek aan de bewegingsvergelijking voor een vrije bel in vloeistof zoals die gegeven is door Devin [DEV59].

Met behulp van (3.15), (3.18) en (3.19) kan via \hat{P}_g in (3.26) de thermische dempingsterm worden geïntroduceerd. Het resultaat is:

$$\hat{P}_\infty = -3\Gamma P_{g0}\hat{R}/R_b - \omega^2\rho_1R_b\hat{R} \cdot \left\{1 + \frac{R_b}{R_p}\left(\frac{\alpha}{n} - 1\right)\right\} + i\omega\eta\frac{\hat{R}}{R_b}\left\{4 + aF\frac{R_b^3}{R_p}\right\} \quad (3.28)$$

De eerste term in het rechterlid van (3.28) geeft aanleiding tot thermische demping. De tweede term is de traagheidsterm. De derde term is de viskeuze dempingsterm en de vierde term is de Darcy-dempingsterm. De verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping wordt gedefinieerd als β_1 en volgt eenvoudig uit (3.28):

$$\beta_1 = \frac{3P_{g0} \cdot \text{Im}(\Gamma)}{\omega\eta(4 + a \cdot \text{Re}(F))R_b^3/R_p} \quad (R_b < R_p) \quad (3.29)$$

3.3.2 $R_b > R_p$

Voor de vloeistof rondom de bel geldt de gelineariseerde impulsvergelijking volgens (3.1). Substitutie van een harmonische variatie voor de druk en de snelheid, vervolgens integreren van $r=R_b$ tot $r=\infty$ geeft:

$$\hat{P}_\infty = \hat{P}_g + \omega^2 \rho_1 \alpha R_b \hat{R} - i\omega n \eta \{4/R_b - aFR_b\} \hat{R} \quad (3.30)$$

De thermische dempingsterm volgt m.b.v. (3.15), (3.17) en (3.21):

$$\hat{P}_g = -\Gamma P_{g0} \cdot \frac{3nR_b^2 \cdot \hat{R}}{R_p^3 + n(R_b^3 - R_p^3)} \quad (3.31)$$

De verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping, in dit geval gedefinieerd als β_2 , volgt eenvoudig uit (3.30) en (3.31):

$$\beta_2 = \frac{3nR_b^2 \cdot P_{g0} \text{Im}(\Gamma)}{4\omega n \eta / R_b + \omega \eta n a \text{Re}(F) R_b} \cdot \frac{1}{R_p^3 + n(R_b^3 - R_p^3)} \quad (3.32)$$

Voor $R_b=R_p$ dienen β_1 en β_2 aan elkaar gelijk te zijn. Substitutie hiervan in (3.29) en (3.32) heeft als resultaat:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{3P_{g0} \cdot \text{Im}(\Gamma)}{\omega\eta(4 + a\text{Re}(F))R_p^2} \quad (3.33)$$

3.3.3 Resultaten

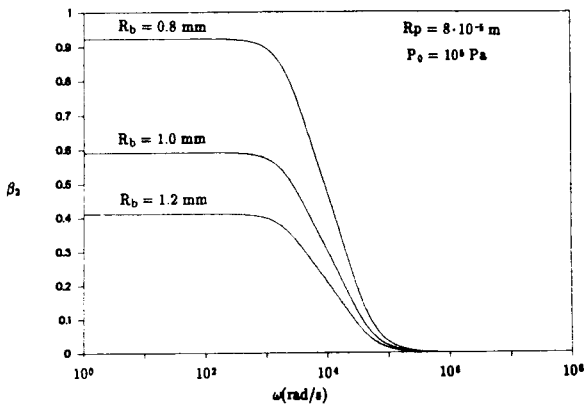
Er zijn een aantal berekeningen uitgevoerd met de verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping. Allereerst zullen de resultaten bij gelijmd zand worden besproken (poriestraal $R_p = 8 \cdot 10^{-5}$ m.). Aansluitend zal worden ingegaan op de resultaten bij een aantal in de natuur voorkomende zandsteensoorten, zoals Nugget zandsteen, Beria zandsteen en Vosgian zandsteen. Tenslotte zal een resultaat getoond worden bij een aquifer-reservoir materiaal (een drinkwaterhoudende grondlaag).

1. Gelijmd zand:

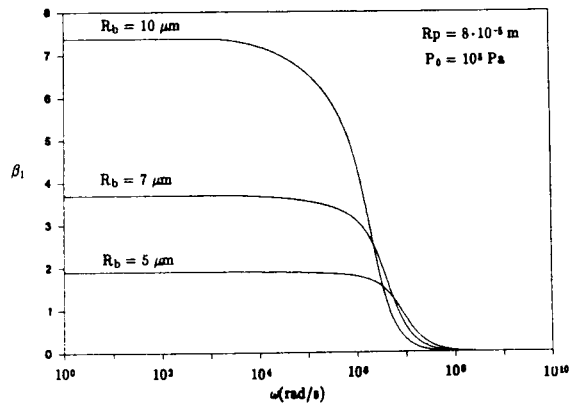
Figuur 3.3 geeft β weer als functie van de hoekfrequentie ω , voor belstralen groter dan de porieafmeting. De aangegeven belstralen zijn qua grootte orde gelijk aan de belafmetingen die doorgaans gebruikt worden bij schokgolffexperimenten aan de poreuze zandkolom. Voor lage frequenties ($< 10^3$ rad/s) treedt er een plateau op. Voor deze frequenties is thermische demping niet verwaarloosbaar t.o.v de andere dempingsmechanismen. Voor hoge frequenties ($> 10^4$ rad/s) is de invloed thermische demping verwaarloosbaar. Ook blijkt de verhouding toe te nemen met afnemende belstraal. Dit is te verklaren door de corresponderende afname van Darcy-demping. Als een bel kleiner wordt nemen de vloeistofsnelheden in de poriën af zodat Darcy-demping minder effect sorteert.

Het omgekeerde geldt voor bellen die kleiner zijn dan de porieafmetingen. In figuur 3.4 blijkt dat een afnemende belstraal gepaard gaat met een afname van de invloed van thermische demping. Dit is grotendeels te wijten aan een sterke toename van viskeuze demping. Voor deze belstralen blijkt thermische demping bij lage frequenties dominant. Het optreden van een plateau bij lage frequenties is eenvoudig te verklaren m.b.v. de relaties (3.29) en (3.32). In de teller staat het imaginaire deel van de Γ -voorfactor; in de noemer staat de hoekfrequentie ω en het reële deel van de correctiefactor F . Bij lage frequenties is $\text{Im}(\Gamma)$ rechtevenredig met ω (zie Appendix E). De frequentieafhankelijkheid vervalt dan. Het reële deel van F is voor lage frequenties constant (zie Appendix E). Het resultaat hiervan is een constante waarde van β voor lage frequenties. Bij hoge frequenties neemt $\text{Re}(F)$ sterk toe zodat $\beta \rightarrow 0$.

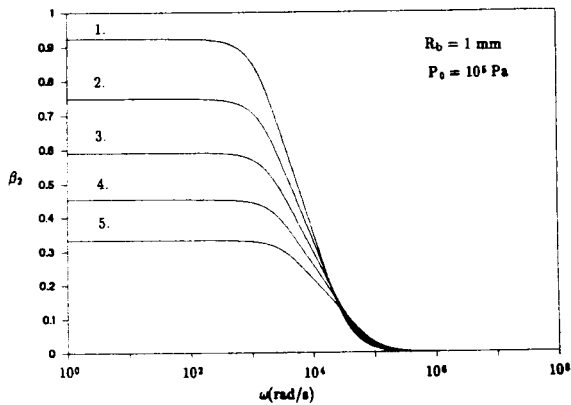
In figuur 3.5 is een resultaat weergegeven bij variatie van de poriestraal rondom de gemiddelde waarde van $8 \cdot 10^{-5}$ meter. De belgrootte bedraagt 1mm. Een toename van de poriestraal blijkt de invloed van thermische demping bij lage frequenties te vergroten. Dit is te wijten aan een afname van Darcy-demping bij grotere poriestralen.



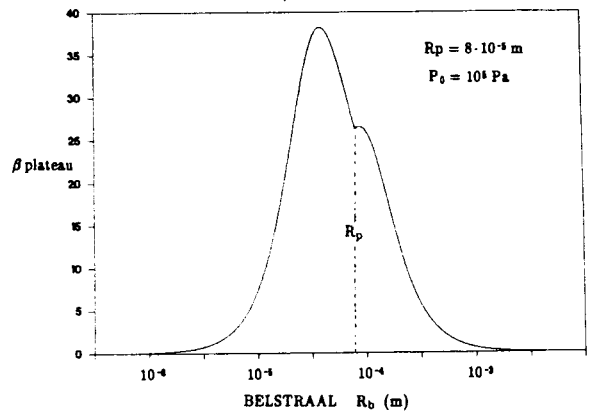
Figuur 3.3: β_2 als functie van ω voor diverse belstralen R_b .



Figuur 3.4: β_1 als functie van ω voor diverse belstralen R_b .



*Figuur 3.5: β_2 als functie van ω bij variatie van de poriestraal R_p :
 (1) $10 \cdot 10^{-5}$ m, (2) $9 \cdot 10^{-5}$ m, (3) $8 \cdot 10^{-5}$ m,
 (4) $7 \cdot 10^{-5}$ m, (5) $6 \cdot 10^{-5}$ m*



Figuur 3.6: Laagfrequente plateauwaarde van β als functie van de belstraal.

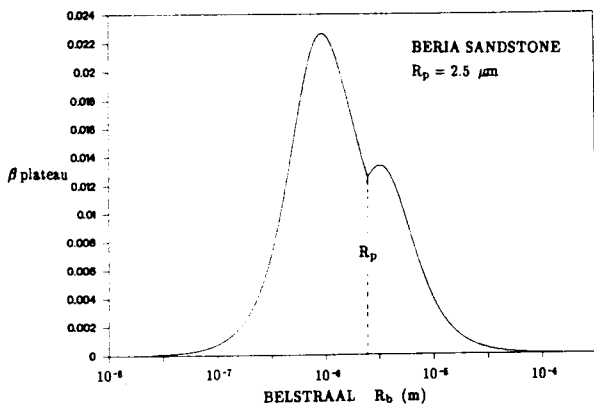
Tevens blijkt uit (3.29) en (3.32) dat de verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping lineair toeneemt met de statische druk P_{g0} .

In figuur 3.6 is de karakteristieke plateauwaarde bij lage frequenties uitgezet als functie van de belstraal. De verticale stippellijn geeft de poriegrens aan. Bij grote belstralen (10^{-3} m) is thermische demping laagfrequent te verwaarlozen. Hetzelfde geldt voor zeer kleine bellen (10^{-6} m). In het tussengebied rondom de poriestraal ($\approx 10^{-4}$ m) is thermische demping echter het dominante dempingsmechanisme. Voor bellen die niet veel kleiner dan de poriestraal zijn treedt er een maximum op in β .

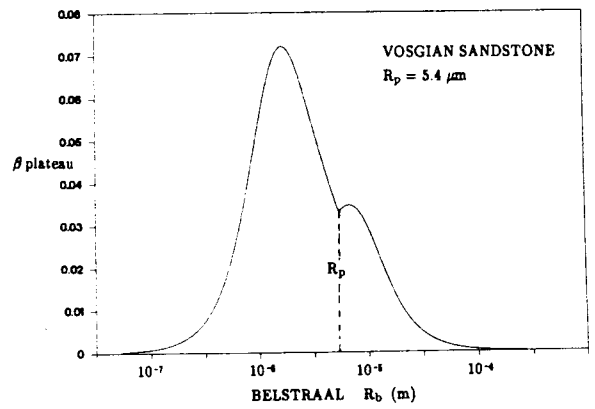
2. Andere poreuze materialen:

In de figuren 3.7, 3.8 en 3.9 zijn tevens de plateauwaarden van β uitgezet als functie van de belstraal. De gegevens van de zandsteensoorten zijn verkregen uit Bourbie [BOU87], Scheidegger [SCH58] en Johnson [JOH83]. De figuren vertonen eenzelfde verloop als bij het gelijmd zand. De verhouding β vertoont een maximum voor belstralen die net iets kleiner zijn dan de porieafmetingen. Deze verhouding is bij de zandsteensoorten over het gehele belstraalgebied relatief klein t.o.v. van gelijmd zand, zodat in deze gevallen thermische demping altijd verwaarloosd kan worden. De zandsteensoorten zijn minder permeabel dan het gelijmde zand. Het gevolg hiervan is dat de Darcy-demping sterk toeneemt (via de 1^e Forchheimerparameter, a ; deze is omgekeerd evenredig met de permeabiliteit).

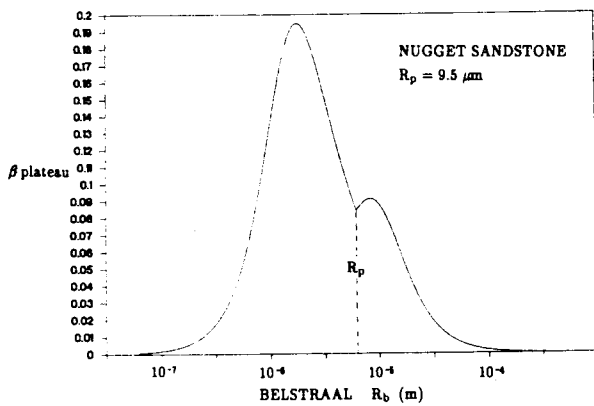
In figuur 3.10 is β als functie van de belstraal uitgezet voor een aquifer-reservoir materiaal. De gegevens van dit materiaal zijn verstrekt door van Dalssen [DAL90]. De permeabiliteit is vergelijkbaar met die van het gelijmde zand (≈ 90 Darcy). In dit geval is in het belstraalgebied rondom de poriestraal thermische demping dominant.



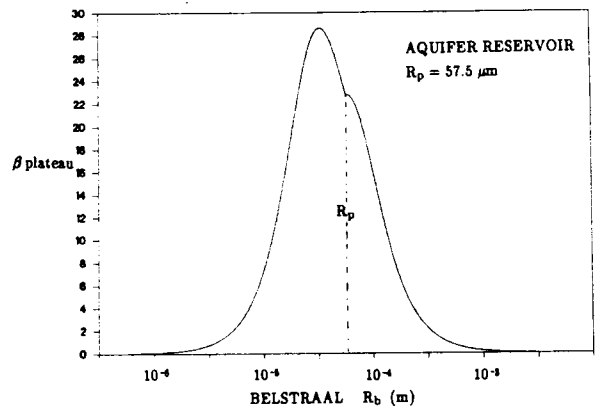
Figuur 3.7: Plateauwaarde van β als functie van de belstraal bij Beria-sandstone ($R_p = 2.5 \mu\text{m}$).



Figuur 3.8: Plateauwaarde van β als functie van de belstraal bij Vosgian-sandstone ($R_p = 5.4 \mu\text{m}$).



Figuur 3.9: Plateauwaarde van β als functie van de belstraal bij Nugget-sandstone ($R_p = 9.5 \mu\text{m}$).

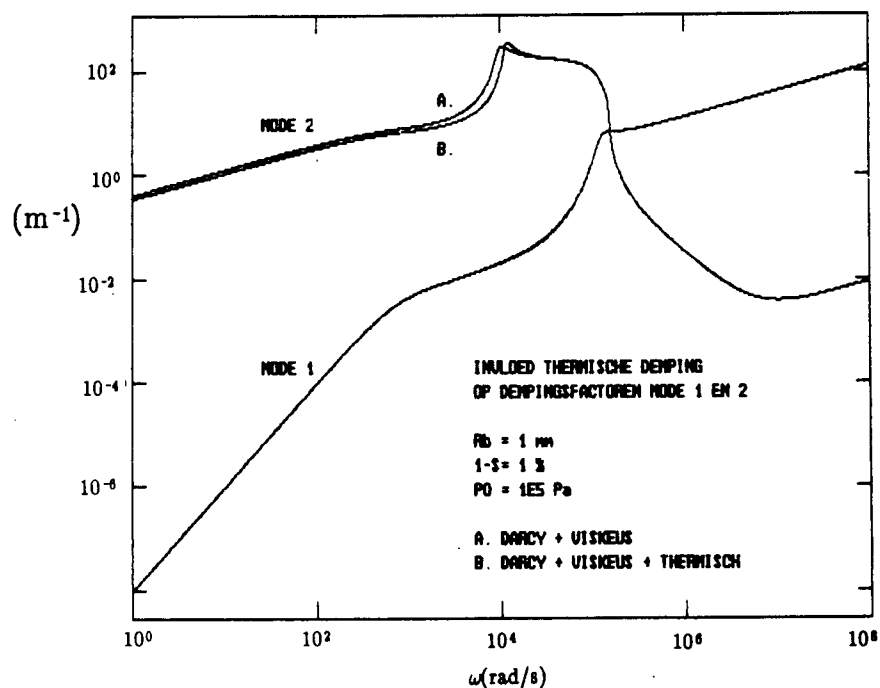
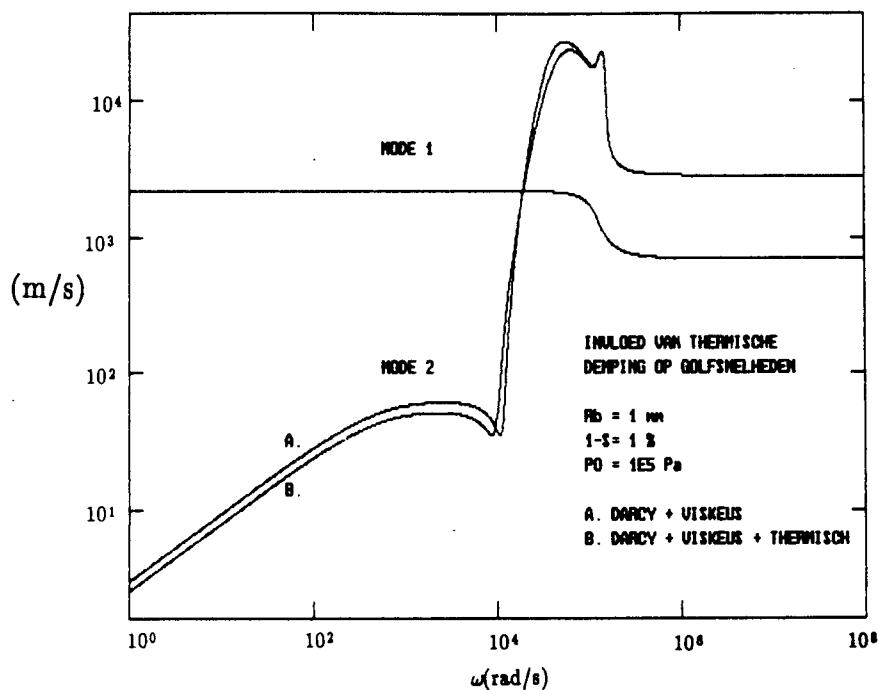


Figuur 3.10: Plateauwaarde van β als functie van de belstraal bij aquifer-reservoir ($R_p = 57.5 \mu\text{m}$).

3.4 De invloed van thermische demping op de golfverschijnselen

In §3.1 is gebleken dat de aanwezigheid van oscillerende luchtbellen in een poreus medium leiden tot een frequentie—afhankelijke compressiemodulus van de porievloeistof. Dit is in de buurt van de resonantiefrequentie van grote invloed op de fasesnelheid en de macroscopische dempingsfactor van de golven. In §3.2 en §3.3 is de invloed van thermische demping op de oscillatie van een enkele bel in het poreus materiaal bekeken. Dit verschijnsel speelt zich af op microscopische schaal. Deze microscopische verschijnselen komen tot uiting in de compressiemodulus van de porievloeistof (K_f) afhankelijk van de luchtfraction $1-s$. K_f wordt ingebouwd in de Biot—theorie; via deze weg komen de microscopische verschijnselen tot uiting in macroscopische golfeigenschappen zoals dempingsfactor en fasesnelheid. De demping en fasesnelheid van de golven worden echter niet alleen bepaald door de compressiemodulus van de porievloeistof maar ook door de gemiddelde interactie tussen porievloeistof en poreus materiaal. De Darcy interactie komt dus op twee manieren tot uiting; enerzijds in de radiële oscillatie van de bel op microscopische schaal en anderzijds door de gemiddelde beweging van de porievloeistof op macroscopische schaal.

Voor de typische parameterwaarden bij schokgolfexperimenten (gelijmd zand, $R_b=1\text{mm}$, $P_{g0}=1\text{ bar}$) is de invloed van thermische demping op de macroscopische golfeigenschappen weergegeven in figuur 3.11. Uitgezet zijn de fasesnelheden en dempingsfactoren voor beide golfmodes als functie van de hoekfrequentie. Voor geval A is slechts viskeuze—en Darcy—demping voor de beloscillatie meegenomen. In geval B is hieraan de thermische dempingsfactor toegevoegd. Het mode 1 golfverschijnsel wordt niet zichtbaar beïnvloed. Het mode 2 verschijnsel wordt slechts marginaal beïnvloed door het toevoegen van thermische demping.



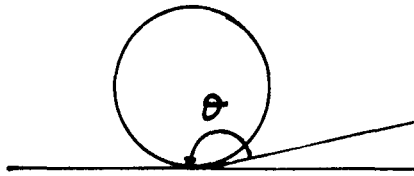
Figuur 3.11: De invloed van thermische demping op de macroscopische dempingsfactoren en golfsnelheden ($R_b = 1 \text{ mm}$, $1-s = 1\%$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$).

3.5 Oppervlaktespanningseffecten

De effecten van oppervlaktespanning en dampdruk zijn tot nu toe verwaarloosd. Omdat de luchtbellen in het poreuze medium groeien rondom benatte korrels kan er een dampspanning binnen de bel ontstaan. Hier zal echter niet verder op in worden gegaan. De oppervlaktespanning van water kan er toe leiden dat de rustdruk in de luchtbel niet gelijk is aan de rustdruk in de vloeistof. Anderzijds kan de oppervlaktespanning ook invloed hebben op de drukvariaties (dynamisch effect). Een algemene beschrijving van oppervlaktespanningseffecten wordt gegeven door [KER76].

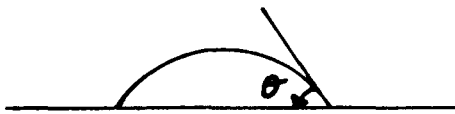
3.5.1 Inleiding

Allereerst wordt het gedrag van een vloeistof op een vaste drager beschouwd. De situatie van een niet-benattende vloeistof is schematisch weergegeven in figuur 3.12.



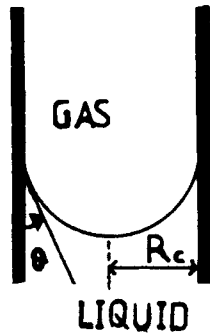
Figuur 3.12: Niet benattende vloeistof op een vaste drager.

Θ is de contacthoek, dit is de hoek tussen de vloeistof en het benatte oppervlak. In de niet-benatte situatie is de contacthoek groot ($90 \text{ graden} < \Theta < 180 \text{ graden}$). Voor een benattende vloeistof is de contacthoek juist klein ($0 \text{ graden} < \Theta < 90 \text{ graden}$). Deze situatie is schematisch weergegeven in figuur 3.13.



Figuur 3.13: Benattende vloeistof op vaste drager.

Het gedrag van een water–bel scheidingsoppervlak in een porie wordt gemodelleerd door een vloeistof–gas overgang in een capillair, zie figuur 3.14.



Figuur 3.14: Vloeistof– gasovergang in capillair.

Ten gevolge van de oppervlaktespanning van de vloeistof treedt er een drukverschil op tussen de gas– en vloeistoffase. Er geldt:

$$\Delta P = P_g - P_{lb} = \frac{2 \cdot \sigma_1 \cos \Theta}{R_c} \quad (3.34)$$

R_c is de straal van het capillair, σ_1 is de oppervlaktespanning van de vloeistof. P_{lb} is de druk in de vloeistof ter plaatse van de belrand. Aan de hand van deze algemene voorbeelden zal het effect van oppervlaktespanning bij luchtbelletjes in een poreus medium worden beschreven. Hierbij worden twee gevallen onderscheiden nl. de situatie waarbij de belstraal kleiner is dan de poriestraal ($R_b < R_p$) en het geval dat de belstraal groter is dan de poriestraal ($R_b > R_p$).

3.5.2 $R_b < R_p$

Deze situatie is geheel analoog aan een vrije oscillerende bel in water. Voor het drukverschil over de belrand geldt:

$$\Delta P(t) = P_g(t) - P_{lb}(t) = \frac{2 \cdot \sigma_w}{R_b + \tilde{R}(t)} \quad (3.35)$$

σ_w is de oppervlaktespanning van water. Het statisch effect is na linearisatie gelijk aan:

$$\Delta P_{g0} = \frac{2 \cdot \sigma_w}{R_b} \quad (3.36)$$

Het dynamisch effect is na linearisatie gelijk aan:

$$\Delta P' = -\frac{2 \cdot \sigma_w R'}{R_b^2} \quad (3.37)$$

Met behulp van (3.36) en (3.37) volgt de Rayleigh–Plesset vergelijking met oppervlaktespanningstermen:

$$\begin{aligned} \hat{P}_\infty = & -3\Gamma(P_{g0} + \frac{2 \cdot \sigma_w}{R_b})\hat{R}/R_b - \omega^2 \rho_l R_b \hat{R} \cdot \{1 + \frac{R_b}{R_p}(\frac{\alpha}{n} - 1)\} \\ & + i\omega \eta \frac{\hat{R}}{R_b} \{4 + aF \frac{R_b^3}{R_p}\} + \frac{2 \cdot \sigma_w \hat{R}}{R_b^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Het statisch– en dynamisch effect van de oppervlaktespanning blijken toe te nemen met afnemende belstraal R_b . Daarnaast is de grootte van P_{g0} van belang.

3.5.3 $R_b > R_p$

Het effect van oppervlaktespanning is in dit geval moeilijk te beschrijven. De vorm van een luchtbel in het poreuze medium is immers onbekend. Onder de aanname dat de bel zich in meerdere poriën vertakt wordt het oppervlaktespanningseffect bepaald door de afmetingen van de porie ter plaatse van het belfront. Voor het statisch effect is de kromming van het belfront in de porie, en dus de contacthoek, van groot belang. De contacthoek wordt echter niet alleen bepaald door de water–lucht overgang, maar ook in grote mate door de oppervlakte–eigenschappen van het poreuze materiaal. Deze zijn geheel onbekend. Bij de beschrijving van het dynamische effect van oppervlaktespanning speelt het verloop van het poriekanaal ter plaatse van het belfront een grote rol; tevens kan de kromtestraal van het belfront veranderen bij doorgang in de porie. Het is echter waarschijnlijk dat dit effect uitmiddelt over een groot aantal bellen.

Vanwege de grote onzekerheden zullen de oppervlaktespanningseffecten bij $R_b > R_p$ niet in de bewegingsvergelijkingen worden opgenomen. In plaats daarvan zal de beschrijving beperkt blijven tot een ruwe afschatting van het effect bij het gelijkde zand.

Onder de aanname dat het belfront in de porie bol is , bij een contacthoek van 0 graden, volgt met behulp van (3.34) het drukverschil; $\Delta P = 1750$ Pa. Hierbij is gerekend met een effectieve poriestraal bij gelijkde zand van $8 \cdot 10^{-5}$ m. en een oppervlaktespanning van water $\sigma_w = 7 \cdot 10^{-2}$ N/m. Dit effect is verwaarloosbaar bij een rustdruk P_{g0} van 10^5 Pa. Bij minder doorlatende materialen, zoals de zandsteensoorten in §3.3, is het statisch oppervlaktespanningseffect niet zonder meer verwaarloosbaar. Bij Beria zandsteen ($R_p=2.5\mu\text{m}$) is ΔP gelijk aan $5.6 \cdot 10^4$ Pa.

Om iets meer te weten te komen over de oppervlaktespanningseffecten bij gelijkde zand is er een eenvoudig proefje uitgevoerd. De opstelling en de resultaten worden uitvoerig besproken in Appendix F. Tijdens dit proefje wordt lucht in met water verzadigd poreus materiaal gepompt. De druk waarbij belvorming optreedt wordt gemeten. Met behulp hiervan is een schatting voor de druksprong, die over de belrand ontstaat, af te leiden. De gemiddeld gemeten druksprong bedraagt: $\Delta P = (1280 \pm 80)$ Pa. Onder de aanname dat de contacthoek nul graden is, kan m.b.v (3.34) een schatting worden gemaakt van de poriestraal: $R_{p,\text{meet}} = (1.1 \pm 0.07) \cdot 10^{-4}$ m. Dit ligt redelijk in de buurt van de berekende effectieve poriestraal gegeven door (2.9). Daarnaast kan de gemeten waarde van R_p vergeleken worden met de poriestraal die volgt uit de stationaire Darcy-weerstand: $R_{p,\text{darcy}} = \sqrt{(8/2a)} = 5 \cdot 10^{-5}$ m. Deze heeft het karakter van een nauwste doorsnede.

Er zijn nog veel vragen wat belvorm in het poreuze medium betreft open. Naast bolvormige bellen, (zoals tot nu toe in modellen wordt aangenomen) zijn bellen die zich vertakken in meerdere poriën, denkbaar. Dit zou van grote invloed zijn op de resonantieverschijnselen; de resonantiefrequentie wordt bepaald door de nauwste doorsnede van de bel.

4. Diffusie en saturatie

4.0 Inleiding

Zoals uit de Biot-theorie blijkt hebben de eigenschappen van beide fasen van het poreuze medium (te weten de porievloeistof en het poreuze materiaal) grote invloed op de golfvoortplanting. De eigenschappen van het gelijmd zand zijn reeds bekend uit de experimenten van v.d Grinten [GRI87]. In dit hoofdstuk zullen de eigenschappen van de porievloeistof besproken worden, met name als dit een water-luchtbellen-mengsel is.

Voor een goed gedefinieerd golfexperiment is een homogene belverdeling en een uniforme belstraal vereist. De manier waarop luchtbellen in het poreuze medium worden aangebracht is globaal als volgt: Onder hoge druk wordt water met opgeloste lucht in de poreuze kolom aangebracht. Vervolgens wordt de druk verlaagd zodat lucht uit de oplossing in belvorm vrijkomt. De ontstane luchtbellen groeien d.m.v. diffusie totdat een nieuw evenwicht is bereikt.

Belangrijke eigenschappen van de porievloeistof zijn de compressibiliteit en de saturatie (dit is de volumefractie vloeistof in de poriën). De saturatie kan bepaald worden met behulp van een snelle compressibiliteitsmeting ('frozen').

In dit hoofdstuk zal het verband tussen compressibiliteit en saturatie aan de orde komen. Uit het verloop van de saturatie gedurende een diffusie-experiment kan met behulp van een model een schatting worden gemaakt van de belstraal. Er zal een diffusiemodel voor belgroei en belverkleining worden besproken. Tenslotte zal worden ingegaan op een aantal compressie- en diffusiemetingen

4.1 Compressibiliteit en saturatie van de porievloeistof

De uitgangssituatie is een porievloeistof bestaande uit een water–luchtbellemengsel. De saturatie s is gedefinieerd als de volumefractie vloeistof in de poriën. Als V_1 het vloeistofvolume en V_g het gasvolume in de poriën is geldt:

$$s = \frac{V_1}{V_1 + V_g} \quad (4.1)$$

De compressibiliteit van een water–luchtbellemengsel wordt besproken door Barends [BAR79,80] en van der Grinten [GRI87]. De compressibiliteit β_f van de porievloeistof is gedefinieerd als de relatieve dichtheidsverandering bij een isotherme drukverandering:

$$\beta_f = \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial p} \right)_T \quad (4.2)$$

Vervolgens zal het verband tussen β_f en de saturatie s worden opgesteld. Het verband tussen de dichtheid ρ_f en de dichtheden ρ_1 van de vloeistof, ρ_g van het gas en ρ_{gd} van opgelost gas in de vloeistof is gegeven door:

$$\rho_f = s\rho_1 + (1-s)\rho_g + s\rho_{gd} \quad (4.3)$$

De verandering van luchtmassa binnen een eenheidsvolume, dat een aantal luchtbelletjes bevat, is gelijk aan $\rho_{gd}ds$. Deze aanname geldt in het geval dat er geen lucht in belvorm het volume in- of uitstroomt. Hieruit volgt:

$$d\{ (1-s)\rho_g + s\rho_{gd} \} = \rho_{gd}ds \quad (4.4)$$

Uitschrijven van (4.4) en substitutie in de differentiaal $d\rho_f$ van (4.3) geeft:

$$d\rho_f = \rho_1 ds + s d\rho_1 + \rho_{gd} ds \quad (4.5)$$

Benadering van ρ_f in de voorfactor van (4.2) door $s\rho_1$ en substitutie van (4.5) in (4.2) levert een verband tussen β_f en de saturatie s . Als $\rho_{gd}/\rho_1 \ll 1$ geldt in goede benadering:

$$\beta_f = \beta_1 + \frac{1}{s} \frac{ds}{dp} \quad (4.6)$$

Dit verband kan verder worden uitgewerkt voor twee typen van compressibiliteitsmetingen; de meting onder 'frozen' condities en de meting onder evenwichtscondities.

A. De evenwichtsconditie:

In dit geval treedt er een drukverandering in de porievloeistof op die voldoende lang aanhoudt om een nieuw evenwicht tussen lucht in belvorm en opgeloste lucht te bereiken. De wet van Henry is van toepassing zodat geldt:

$$\rho_{gd} = \omega \rho_g \quad (4.7)$$

Hierin is ω de oplosbaarheidscoëfficiënt. Substitutie van (4.7) in (4.4) leidt na herschrijven tot:

$$(1 + \omega s - s) d\rho_g = \rho_g ds \quad (4.8)$$

Integratie van (4.8) van de uitgangssituatie ρ_{g0}, s_0 naar de eindsituatie ρ_g, s geeft voor $\omega \ll 1$ het volgende verband tussen de gasdichtheid en saturatie bij evenwicht:

$$\left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)_{\text{evenwicht}} = \frac{1 - s_0 + \omega s_0}{1 - s + \omega s} \quad (4.9)$$

B. De frozen conditie:

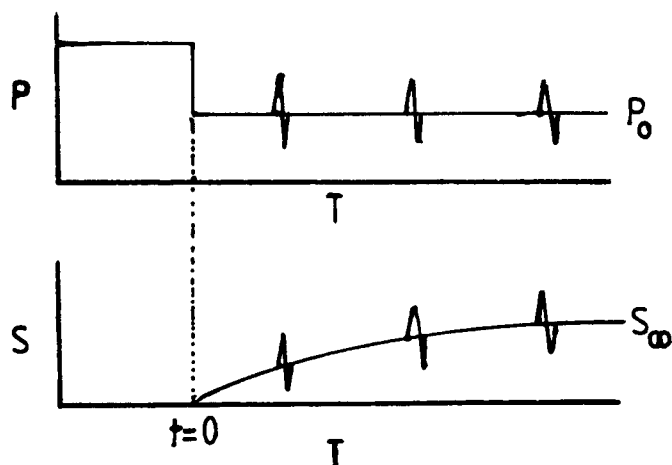
De drukverandering in de porievloeistof treedt in dit geval slechts gedurende korte tijd op, zodat als gevolg ervan geen extra diffusie van lucht zal optreden. De dichtheid van opgeloste lucht, ρ_{gd} , is dan constant. Vergelijking (4.4) vereenvoudigt tot:

$$d\{ (1-s)\rho_g \} = 0 \quad (4.10)$$

Integratie van (4.10) van de uitgangssituatie ρ_{g0}, s_0 naar de eindsituatie ρ_g, s levert:

$$\left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)_{\text{frozen}} = \frac{1 - s_0}{1 - s} \quad (4.11)$$

Verderop in dit hoofdstuk zal blijken dat het meten van de porievloeistofcompressibiliteit onder frozen condities een manier is om de momentane saturatie s_0 te bepalen. Hierbij moet men bedenken dat de saturatie s_0 gedurende een diffusieproces (bijv. bij belgroei) langzaam verandert ($s_0 = s_0(t)$). Bij een drukverhoging onder frozen omstandigheden verandert de saturatie instantaan van s_0 naar s ; bij de hierop volgende drukverlaging neemt de saturatie weer de oorspronkelijke waarde s_0 aan. Deze situatie is schematisch weergegeven in figuur 4.1.



Figuur 4.1: Saturatie en druk tijdens belgroei proces, op $t=0$ wordt de druk verlaagd naar P_0 , de pieken geven de frozen metingen weer. De saturatie in evenwicht bij P_0 is s_∞ .

Als de compressie en expansie van luchtbelllen isotherm verloopt en de ideale gaswet volgt, kan een verband tussen de dichtheid ρ_g en de druk P_g worden verkregen. Bij verwaarlozing van de effecten van oppervlaktetenspanning en dampdruk is de druk in de luchtbel, P_g , gelijk aan de poriedruk P . Er geldt:

$$\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} = \frac{P}{P_0} \quad (4.12)$$

Hierin is P_0 de rustdruk waarbij het diffusieproces plaatsvindt. Met de verkregen uitdrukkingen is het mogelijk het verband tussen de compressibiliteit β_f en de saturatie s_0 op te stellen.

A. Evenwicht:

De uitdrukking voor $1/s \, ds/dp$ in (4.6) volgt uit de combinatie van (4.9) en (4.12). Substitutie van deze uitdrukking in (4.6) geeft de porievloeistofcompressibiliteit in evenwicht:

$$\beta_{f_{\text{evenwicht}}} = \beta_1 + \frac{(1-s_0 + \omega s_0) P_0/P^2}{1 - (1-s_0 + \omega s_0) P_0/P} \quad (4.13)$$

B. Frozen:

Combinatie van (4.11) en (4.12) geeft na omschrijven de uitdrukking voor $1/s \, ds/dp$. Substitutie hiervan in (4.6) geeft een uitdrukking voor β_f . Als P_0/P van de orde 1 is en $1-s_0 \ll 1$ geldt in goede benadering:

$$\beta_{f_{\text{frozen}}} = \beta_1 + (1-s_0) P_0/P^2 \quad (4.14)$$

4.2 Diffusiemodel ter bepaling van de belstraal

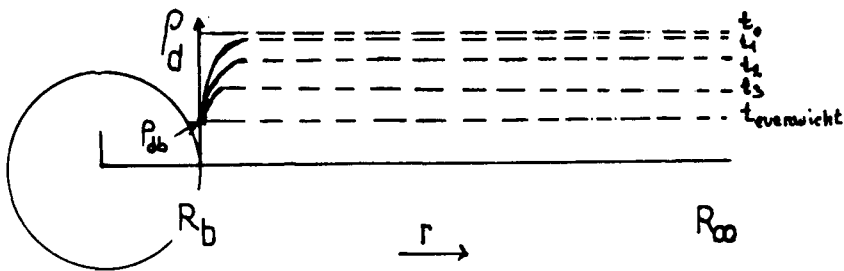
De manier waarop luchtbelletjes in de poreuze kolom worden aangebracht is globaal als volgt: In een separate opstelling wordt lucht onder verhoogde druk in water opgelost. Dit beluchte water wordt in de kolom gepompt. Vervolgens wordt de druk verlaagd zodat het water oververzadigd raakt met lucht. Om een nieuwe evenwichtssituatie te bereiken komt lucht vrij uit de oplossing. Deze lucht diffundeert naar een bestaande luchtbel, die als gevolg hiervan zal groeien. Het ontstaan van clusters luchtmoleculen aan caviteiten en onzuiverheden wordt beschreven door Castenmiller [CAS88]. Het omgekeerde proces treedt op als bij een in evenwicht verkerend water–belletjes–mengsel de druk wordt verhoogd. De vloeistof raakt onderverzadigd zodat er diffusie van lucht uit de bel naar het water plaatvindt.

Tijdens het diffusieproces verandert de saturatie s_0 en dus ook de compressibiliteit van de porievloeistof (β_f). Dit is geheel te wijten aan verandering van de luchthoeveelheid in belvorm. De opgeloste lucht draagt immers niet extra bij aan de compressibiliteit

De tijd die het mengsel nodig heeft om een nieuw evenwicht te bereiken hangt onder andere af van de diffusiecoëfficiënt D van lucht in water. Er zal gebruik worden gemaakt van een effectieve diffusiecoëfficiënt, D_e ; hierin is de vertragende werking van het poreus materiaal verdisconteerd ($D_e = D/\alpha$)

Uitgangspunt van het diffusiemodel is het gedrag van een enkele luchtbel omgeven door water. Er wordt verondersteld dat de bel een eindige invloedssfeer heeft, dit wil zeggen er is een begrensde gebied in de vloeistof van waaruit de bel lucht putten en waaraan de bel lucht kan afstaan. Deze afstand, vanaf het middelpunt van de bel, is de omgevingsstraal R^∞ . Verder heeft de bel een straal R_b en een luchtdichtheid ρ_g . De dichtheid van opgeloste lucht in water is ρ_{gd} , op de belrand geldt $\rho_{gd}(r=R_b) = \rho_{db}$. Ter plaatse $r=R^\infty$ is $\rho_{gd}=\rho_{d^\infty}$.

Drukverlaging boven de vloeistof wordt gemodelleerd door een plotselinge verlaging van ρ_{db} . Deze situatie is schematisch weergegeven in figuur 4.2. Ontwikkeling naar een nieuwe evenwichtssituatie vindt plaats via de aangegeven stippellijnen, totdat overal in het water geldt $\rho_{gd}(r,t) = \rho_{db}$ ($R_b < r < R^\infty$). Drukverhoging bij een bel in evenwicht met water wordt gemodelleerd door een instantane verhoging van ρ_{db} .



Figuur 4.2: Schematische weergave van het veronderstelde diffusieverloop. ρ_d is de opgeloste dichtheid, R_b de belstraal en R^∞ is de omgevingsstraal van de bel.

Het diffusiemodel is geldig vlak na de initiële compressie of expansie (dit tijdstip wordt gedefinieerd als $t = 0$). Daarna treedt belgroei of belkrimp op bij een constante luchtdichtheid ρ_g (ideale gaswet, isotherm). Daarnaast wordt de omgevingsstraal R^∞ constant verondersteld. De beginsituatie op $t = 0$ is gekarakteriseerd door de belstraal R_{b0} en opgeloste dichtheid ρ_{d0} . Op een later tijdstip t is de belstraal $R_b(t)$ en de

opgeloste dichtheid $\rho_{gd}(r,t)$. Als er bij een belgroeiproces op $t = 0$ nog geen bellen zijn geldt uiteraard $R_{b0} = 0$.

De dimensieloze concentratie is gedefinieerd als:

$$C(r,t) = \frac{\rho_{gd}(r,t) - \rho_{d^\infty}(t)}{\rho_{db} - \rho_{d^\infty}(t)} \quad (4.15)$$

zodat:

$$r \rightarrow R^\infty : C \rightarrow 0$$

$$r \rightarrow R_b : C \rightarrow 1$$

Op tijdstip t luidt de diffusievergelijking (quasistatisch):

$$\nabla^2 C = 0 \quad (4.16)$$

Met behulp van (4.15) volgt een uitdrukking voor de massaflux van de bel naar de omgeving:

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi R_b D_e (\rho_{db} - \rho_{d^\infty}(t)) \quad (4.17)$$

De wet van behoud van massa kan als volgt worden geformuleerd:

$$\frac{4}{3}\pi\rho_g R_b^3(t) + \int_{R_b(t)}^{R^\infty} 4\pi R^2 \rho_{gd}(r,t) dR = \frac{4}{3}\pi\rho_g R_{b0}^3 + \frac{4}{3}\pi\rho_{d0}(R_\infty^3 - R_{b0}^3) \quad (4.18)$$

Vervolgens wordt $\rho_{gd}(r,t)$ benaderd door $\rho_{d^\infty}(t)$, hetgeen slechts afwijkingen zal introduceren aan de belrand. Deze afwijking van de luchtmassa wordt klein verondersteld t.o.v. de bulkmassa lucht in de vloeistof. Substitutie hiervan in (4.18) geeft na omwerken een uitdrukking voor $\rho_{d^\infty}(t)$:

$$\rho_{d^\infty}(t) = \frac{\rho_g(R_{b0}^3 - R_b^3(t)) + \rho_{d0}(R_\infty^3 - R_{b0}^3)}{R_\infty^3 - R_b^3} \quad (4.19)$$

Met $R_b^3 \ll R_\infty^3$ en $R_{b0}^3 \ll R_\infty^3$ geldt in goede benadering:

$$\rho_{d^\infty}(t) = \rho_{d0} + \rho_g \frac{R_{b0}^3}{R_\infty^3} - \rho_g \frac{R_b^3(t)}{R_\infty^3} \quad (4.20)$$

De massaflux van de bel naar de vloeistof is per definitie;

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\rho_g \frac{dR_b^3(t)}{dt} \quad (4.21)$$

Substitutie van (4.20) in (4.17) geeft een nieuwe uitdrukking voor de massaflux.

Gelijkstellen van deze uitdrukking aan (4.21) geeft na enig omschrijven:

$$R_b(t) \frac{dR_b(t)}{dt} = D_e \left\{ \frac{\rho_{d0} - \rho_{db}}{\rho_g} + \frac{R_{b0}^3}{R_\infty^3} - \frac{R_b^3(t)}{R_\infty^3} \right\} \quad (4.22)$$

Vervolgens kunnen een aantal dimensieloze parameters gedefinieerd worden, er geldt:

$$\eta(t) = \frac{R_b(t)}{R_\infty}; \quad \hat{\rho} = \frac{\rho_{d0} - \rho_{db}}{\rho_g} + \frac{R_{b0}^3}{R_\infty^3}; \quad t' = \frac{D_e t}{R_\infty^2}$$

t' is de dimensieloze tijd, η de genormeerde belstraal en $\hat{\rho}$ is de genormeerde dichtheid. substitutie van deze parameters in (4.22) geeft:

$$\eta \frac{d\eta}{dt'} = \hat{\rho} - \eta^3 \quad (4.23)$$

Het is eenvoudig in te zien dat:

$$t' \rightarrow \infty: \frac{d\eta}{dt'} \rightarrow 0 \quad \text{zodat} \quad \eta \rightarrow \sqrt[3]{\hat{\rho}} = a \quad (4.24)$$

De algemene oplossing van (4.23) wordt verkregen door integratie met de grenzen η_0 (beginsituatie) en $\eta_\infty = a$ (eindsituatie).

De oplossing hiervan is getabelleerd door Dwight [DWI57] en luidt:

$$t' = \frac{1}{6a} \left\{ \ln \frac{a^2 + a\eta + \eta^2}{(a-\eta)^2} - \ln \frac{a^2 + a\eta_0 + \eta_0^2}{(a-\eta_0)^2} \right\} + \frac{1}{a\sqrt{3}} \left\{ \arctan \frac{2\eta_0 + a}{a\sqrt{3}} - \arctan \frac{2\eta + a}{a\sqrt{3}} \right\} \quad (4.25)$$

Hiermee is het verband gevonden tussen de genormeerde belstraal en de dimensieloze tijd. In het geval van belgroei, zonder dat er in het begin bellen zijn, moet men voor η_0 in (4.25) 0 invullen.

Toetsing van dit diffusiemodel is mogelijk als het verband tussen η , η_0 , a en meetbare grootheden van een water-luchtbellemengsel bekend is. Via 'frozen' compressibiliteitsmetingen kan de momentane luchtfractie $1-s$ tijdens het diffusieproces bepaald worden. Indien er een aantal bellen, groter dan de porieafmeting, in de poriën aanwezig zijn geldt:

$$1-s(t) = \frac{V_{\text{lucht}}(t)}{V_{\text{poriën}}} = \frac{R_b^3(t)}{R_\infty^3} \quad (4.26)$$

In dit geval heeft R_b de betekenis van gemiddelde belstraal. Ook de omgevingsstraal, R_∞ , moet nu opgevat worden als de gemiddelde omgevingsstraal. Met behulp van de definitie van η volgt eenvoudig:

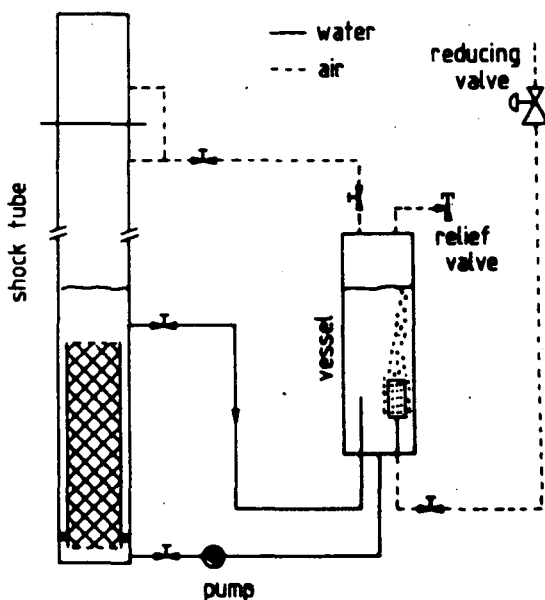
$$1-s(t) = \eta^3(t) \quad (4.27)$$

Meting van de eindsaturatie $1-s^\infty$ levert de asymptotische waarde η^∞ ; zodoende is de parameter a bekend. Om de uiteindelijke waarde van de belstraal te bepalen moet de tweede parameter, R_∞ , bekend zijn ($R_b^\infty = a \cdot R_\infty$). Deze wordt gevonden door aanpassing van de experimentele $\eta(t)$ aan de theoretische kromme volgens (4.25).

4.3 Compressibiliteits- en diffusie-experimenten

4.3.1 Doorborrelprocedure:

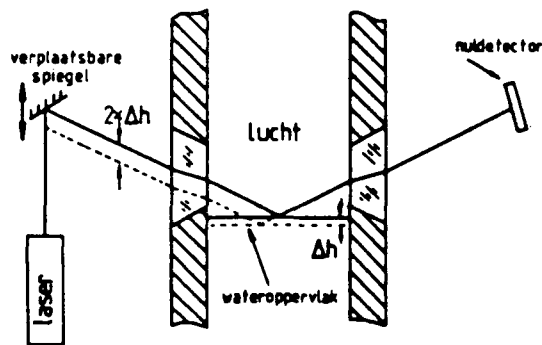
In een separaat vat (het borrelvat) wordt water onder een overdruk doorgeborreld met lucht. Hierbij zal lucht oplossen in water. De hoeveelheid opgeloste lucht wordt geregeld d.m.v. de druk in het borrelvat. Aan het eind van het doorborrelproces zijn er geen luchtbelletjes meer in het vat aanwezig. Het borrelvat is verbonden met de schokbuisopstelling; een schematisch overzicht van de opstelling is te zien in figuur 4.3. Vervolgens laat men het beluchte water en de porievloeistof circuleren; hierbij wordt continue doorgeborreld. Tussen de poreuze zandkolom en de wand van de schokbuis bevindt zich een spleet; deze is aan de onderkant afgedicht d.m.v. een o-ring zodat tijdens het circuleren het water van beneden naar boven door de kolom moet. Na voldoende lang rondpompen is de concentratie van opgeloste lucht over de hele kolom gelijk. Aansluitend is het mogelijk de druk te verlagen zodat belvorming en belgroei optreedt.



Figuur 4.3: Schematische weergave van de doorborrelprocedure.

4.3.2 Meetopstelling ter bepaling van de compressibiliteit:

Tijdens de compressibiliteitsmetingen is gebruik gemaakt van een optische opstelling gebouwd door Horyon [HOR83]. In figuur 4.4 is het principe hiervan schematisch weergegeven. De lichtbundel van een He-Ne laser valt onder een hoek op een spiegel die d.m.v. een stappenmotor in verticale richting verplaatst kan worden. De gereflecteerde bundel passeert een venster en reflecteert nogmaals aan het wateroppervlak. Hierna wordt een differentiële diode bereikt. De spanning die de diode afgeeft is evenredig met het verschil in lichtintensiteit tussen de bovenste en onderste helft. Deze spanning wordt teruggekoppeld naar de stappenmotor die een zodanige spiegelverplaatsing bewerkstelligt dat de verschilspanning minimaal is. De verplaatsing van de spiegel wordt gemeten met een verplaatsingsopnemer (Sangamo transducer no. 72822). Tijdens een compressiemeting wordt gedurende korte tijd de druk veranderd; hierdoor zal het waternivo stijgen of dalen. Met behulp van deze opstelling kan de verplaatsing van het waternivo als functie van het opgelegde drukverschil $P-P_0$ worden gemeten. Hiermee is eenvoudig de compressibiliteit β_f te bepalen. Een stap van de stappenmotor komt overeen met een spiegelverplaatsing van $10 \mu\text{m}$, de verplaatsing van het waternivo is dan de helft hiervan; $5 \mu\text{m}$.



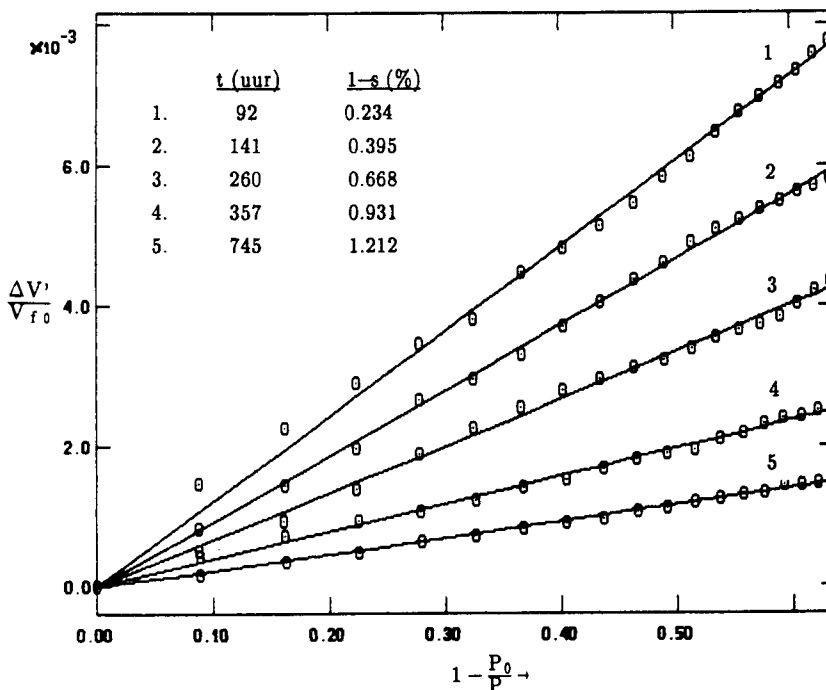
Figuur 4.4: Schematische weergave van de optische opstelling ter bepaling van de compressibiliteit.

4.3.3 Belgroeiexperiment

Ter preparatie van het water–luchtbellen–mengsel is de gebruikelijke procedure gevolgd. Het experiment betreft kraanwater dat is doorgeborreld onder een overdruk van 1.75 kP/cm². De kolom is drie middagen doorgespoeld met het beluchte water. Het extra drukverschil over de kolom ten gevolge van het pompen bedraagt 0.32 kP/cm² (een gedeelte hiervan veroorzaakt door de waterkolom van 1.75 m). De spleet en het schokbuisgedeelte onder de kijkglazen is gevuld met ontlucht water. De gemeten referentiecompressibiliteit bedraagt $(7.76 \pm 0.06) \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ (zie Appendix A). De druk is vervolgens verlaagd naar atmosferische condities zodat belgroei op gang komt.

Het belgroeiproces is gedurende ongeveer een maand gevolgd door middel van compressibiliteitsmetingen. Vanwege de tijd die de meting in beslag neemt (enkele minuten) in vergelijking met de totale diffusietijd, mag worden verondersteld dat de metingen 'frozen' zijn. Tijdens de compressiemeting is het drukverschil met tussenstappen van 0.1 kP/cm² opgevoerd tot 1.8 kP/cm².

Enkele resultaten van compressiemetingen zijn weergegeven in figuur 4.5.

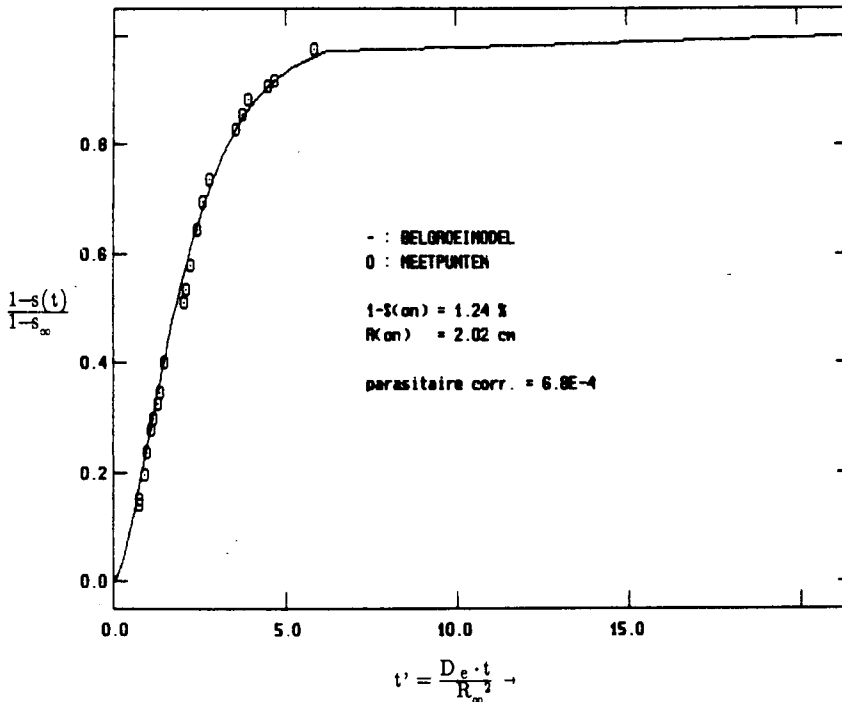


Figuur 4.5: Enkele resultaten van compressiemetingen bij belgroei.

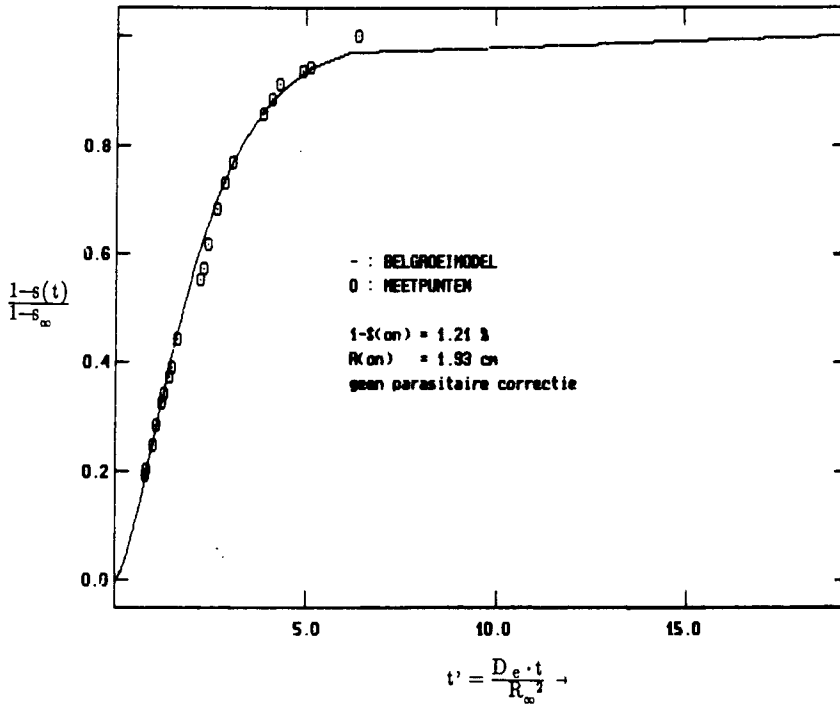
Langs de horizontale as is $1-P_0/P$ uitgezet. P_0 is de statische druk waarbij het diffusieproces plaatsvindt (in dit geval atmosferisch). $P-P_0$ is het drukverschil dat tijdens de compressiemeting wordt opgelegd. Op de verticale as is $\Delta V'/V_{f0}$ uitgezet. $\Delta V'$ is de gecorrigeerde volumeverandering (zie Appendix A), V_{f0} is het porievolume. De helling van de verschillende lijnen in figuur 4.5 geeft de momentane luchtfractie $1-s_0$ (zie Appendix A, voor vloeistofvolumina e.d. zie Appendix C).

De gemeten eindsaturatie bedraagt ongeveer 1.25% en wordt na circa een maand bereikt. De geschatte parasitaire saturatie $1-s_p$ is $6.8 \cdot 10^{-4}$ (zie Appendix B).

Met behulp van het diffusiemodel uit §4.2 kan uit het saturatieverloop tijdens het diffusieproces een schatting voor de omgevingsstraal en de uiteindelijke belstraal worden verkregen. De waarde van de eindsaturatie $1-s_\infty$ bepaalt het verloop van de modelkromme volgens (4.25) volledig ($\eta_0 = 0$). Voor de tweede parameter, R_∞ , wordt die waarde genomen waarbij de meetresultaten het beste overeenkomen met de modelkromme. Er is gekozen voor een kleinste kwadraten-aanpassing. De resultaten zijn weergegeven in figuur 4.6 (met parasitaire correctie; zie Appendix B) en in figuur 4.7 (zonder parasitaire correctie).



Figuur 4.6: Belgroeimodel en -metingen, met parasitaire correctie.



Figuur 4.7: Belgroei-model en -metingen zonder parasitaire correctie.

Als er gecorrigeerd wordt voor parasitaire lucht geldt:

$R^\infty = (2.0 \pm 0.1)$ cm; $R_b^\infty = (4.6 \pm 0.3)$ mm. In het geval dat er geen correctie wordt uitgevoerd geldt: $R^\infty = (1.93 \pm 0.16)$ cm en $R_b^\infty = (4.4 \pm 0.4)$ mm. De gevonden omgevingsstralen komen wat orde grootte betreft overeen met de waarden bepaald door van Dijk [DIJK90].

In het algemeen zijn de meetresultaten goed aan te passen aan het diffusiemodel. Dit is echter niet het geval voor metingen die vlak na de start van het diffusieproces zijn uitgevoerd (tot ± 2 dagen na drukverlaging). Deze vertonen een significant snellere groei dan het model voorspelt (niet uitgezet in figuur 4.6 en 4.7). Mogelijke oorzaken voor deze discrepantie zijn:

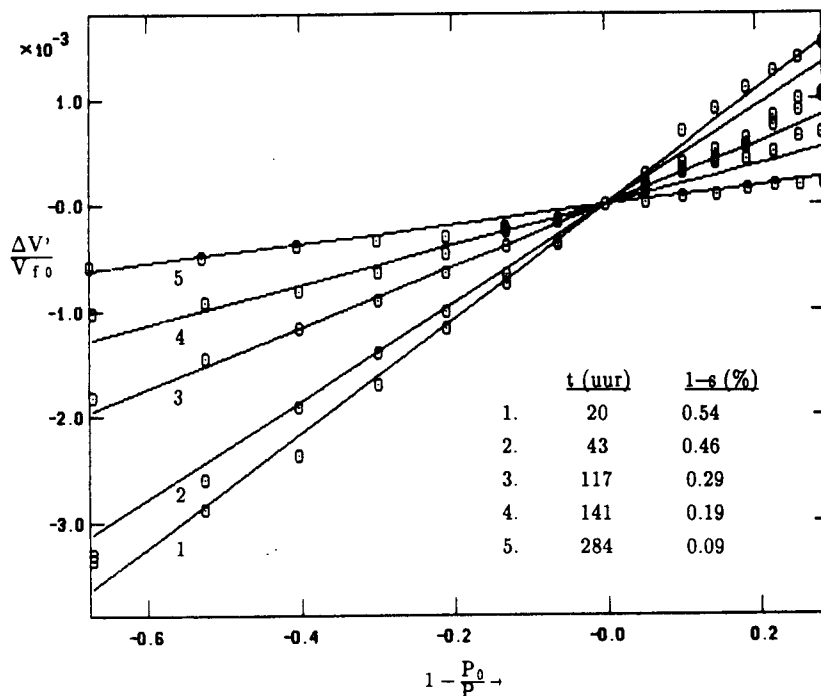
- Storingen t.g.v. parasitaire lucht, deze effecten zijn in het begin immers relatief groot.
- Vrije belgroei; In het beginstadium van het groeiproces zijn de bellen kleiner dan de porieafmetingen zodat de diffusie relatief weinig hinder ondervindt van de aanwezigheid van poreus materiaal (de diffusieconstante is dan groter dan D_e).

- Clustervorming; meerdere kleine luchtbelletjes verenigen zich tot een groter geheel. In het model wordt echter uitgegaan van een constant aantal belletjes.
- Benadering van $\rho_{gd}(r,t)$ door $\rho_d^\infty(t)$; de afwijkingen in de luchtmassa ten gevolge hiervan zijn in de beginfase het grootst.

Een mogelijke oorzaak voor afwijking van het diffusiemodel in het algemeen zijn temperatuurvariaties tijdens het groeiproces. ($288 \text{ K} < T < 300 \text{ K}$). Dit beïnvloedt de oplosbaarheid van lucht in water. In het model wordt uitgegaan van isotherme condities.

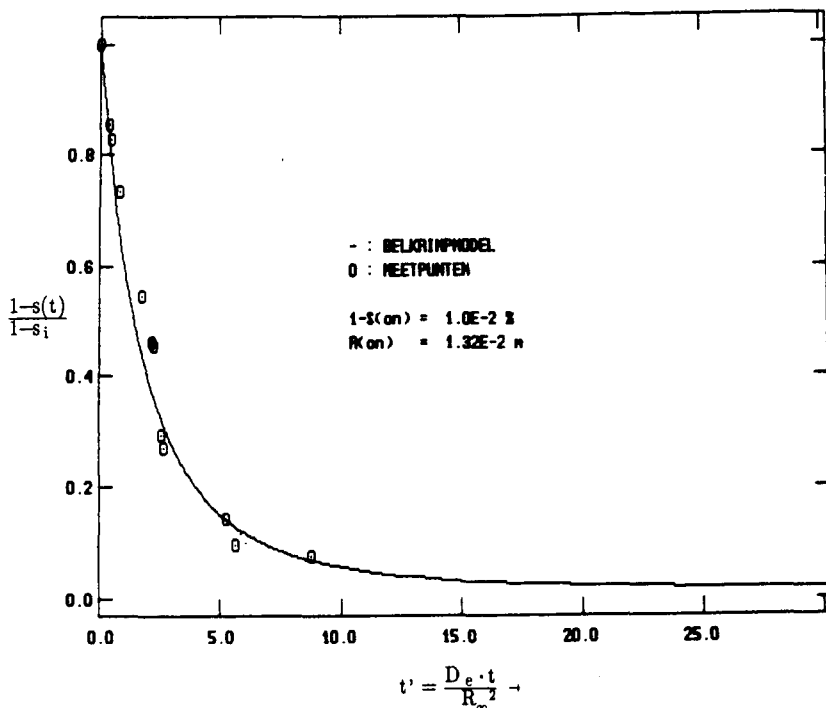
4.3.4 Belkrimpexperiment

Het diffusiemodel moet bij een gegeven water-bellen-mengsel bij belgroei en belkrimp eenzelfde gemiddelde belconcentratie ($\sim 1/R^\infty$) opleveren. Om dit te verifiëren is er na het belgroeiexperiment een belkrimpexperiment uitgevoerd. Hiertoe is het mengsel onder een constante overdruk van 0.7 kP/cm^2 gezet. Op weg naar nieuw evenwicht zijn een aantal compressiemetingen uitgevoerd om het verloop van de saturatie te volgen. Enkele resultaten hiervan zijn weergegeven in figuur 4.8 weergegeven.



Figuur 4.8: Enkele resultaten van compressiemetingen bij belkrimp.

De helling van de lijnen geeft de momentane luchtvolume fractie $1-s_0$. De gemeten eindsaturatie is $1-s^\infty = (0.03 \pm 0.01) \%$. De werkelijke hoeveelheid lucht in belvorm wordt geschat op de helft hiervan. In figuur 4.9 zijn de resultaten van het diffusieproces weergegeven. Op de horizontale as staat de dimensieloze tijd t' ; op de verticale as staat $1-s(t)/1-s_i$. Hierin is $1-s_i$ de initiële luchtfractie vlak na de compressie.



figuur 4.9: Diffusiemetingen en model bij belkrimp.

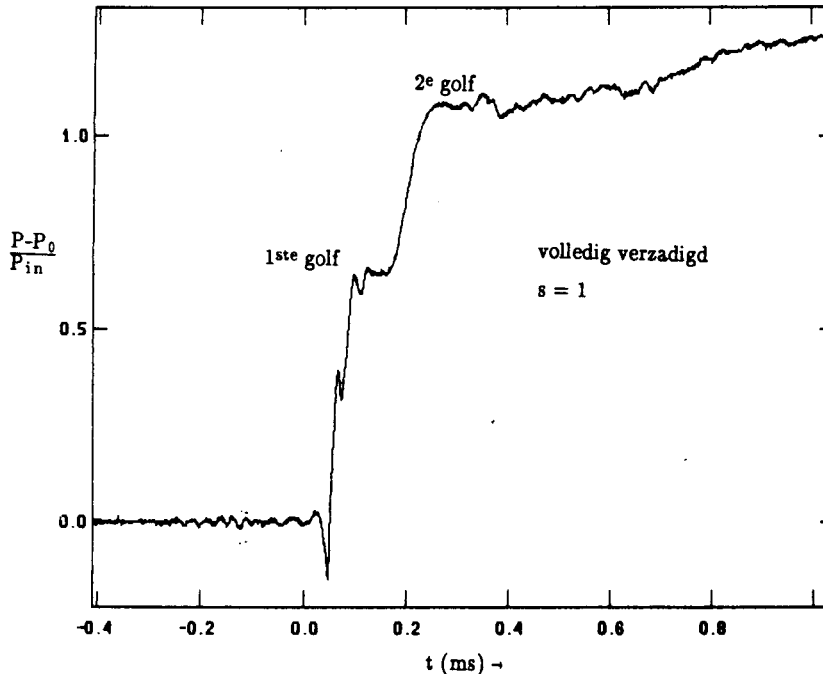
De waarde van de omgevingsstraal is verkregen door een kleinste-kwadraten-aanpassing van de meetpunten aan de modelkromme, met als resultaat: $R^\infty = (1.32 \pm 0.20)$ cm. De geschatte belstraal in de nieuwe evenwichtsituatie is: $R_{b^\infty} = (0.6 \pm 0.2)$ mm.

De gemiddelde omgevingsstralen bij belgroei en belkrimp liggen niet binnen elkaars nauwkeurigheid, maar zijn wel van dezelfde orde grootte. Het vermoeden is echter dat aan het principe van gelijke belconcentratie is voldaan. Een grote onzekerheid is geïntroduceerd door de compressiemetingen bij kleine luchtfracties. Parasitaire luchthoeveelheden worden even groot als de eigenlijke luchtfractie $1-s_0$. Beide vertonen echter een ander compressiegedrag zodat de interpretatie van de metingen minder nauwkeurig wordt. Daarnaast blijkt dat de eindsaturaties bij belgroei en belkrimp niet aan de evenwichtsvoorwaarde (4.9) voldoen. Dit is waarschijnlijk veroorzaakt door een niet volledige verzadiging na de doorborrelprocedure.

5. Transmissie van een stapvormige drukgolf

5.0 Inleiding

Het onderwerp van dit hoofdstuk is de voortplanting en de vervorming van een stapvormige drukverandering in een partieel met vloeistof verzadigd poreus medium. Een illustratief experimenteel voorbeeld van de voortplanting van een stapvormige drukverandering in een volledig met water verzadigde poreuze kolom is weergegeven in figuur 5.1.

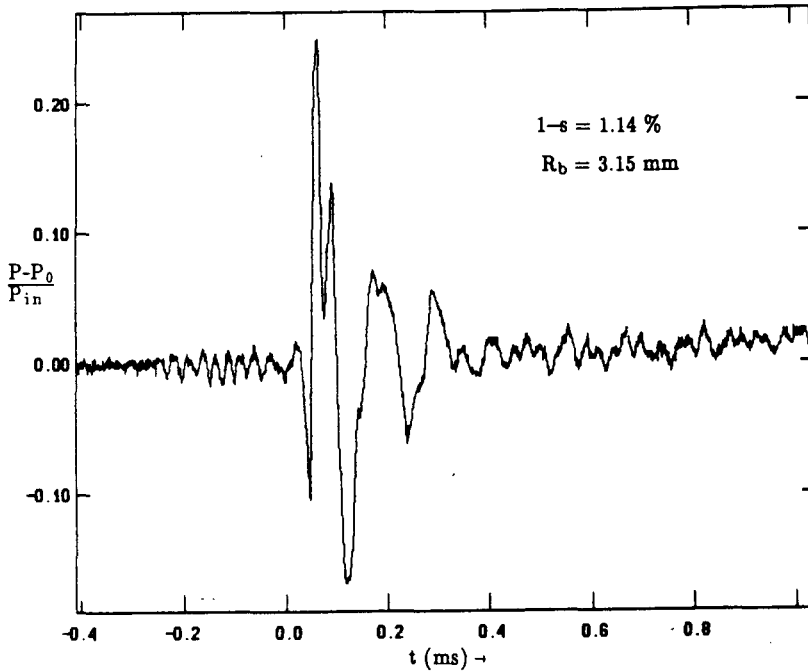


Figuur 5.1: Experimenteel voorbeeld van het genormeed poriedruksignaal op een diepte van 12 cm in de volledig met water verzadigde gelijkde zandkolom.

In dit experiment is de door Biot voorspelde tweegolven-structuur zichtbaar. Mode 1 correspondeert in dit geval met een snelle niet-dispersieve golf waarbij de bewegingen van vloeistof en skelet in fase zijn. Mode 2 is een tragere golf met een diffuus karakter, waarbij de bewegingen van vloeistof en skelet in tegenfase zijn.

In figuur 5.2 is een experimenteel voorbeeld van de voortplanting van een stapvormige drukverandering in een gedeeltelijk met water verzadigde poreuze kolom te zien. De aanwezigheid van kleine volumefracties lucht (in dit geval $1-s = 1.14\%$, $R_b = 3.15$ mm) blijkt van grote invloed op de golfverschijnselen. Dit is reeds door Sniekers [SNI88] en

Moerdijk [MOE90] geconstateerd. Het poriedruksignaal wordt gekarakteriseerd door heftige oscillaties, terwijl de tweegolven-structuur geheel is verdwenen. De laagfrequente druktoename is nihil.



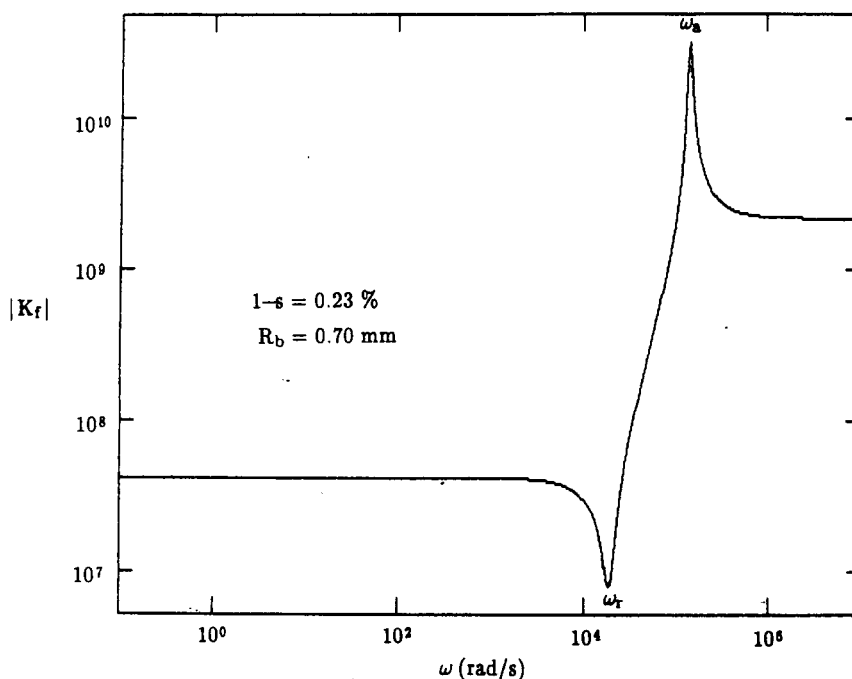
Figuur 5.2: Experimenteel voorbeeld van het genormeerde poriedruksignaal op een diepte van 12 cm in de partiel verzadigde gelijkde zandkolom; $1-s = 1.14\%$, $R_b = 3.15$ mm.

De aanwezigheid van oscillaties in het druksignaal wijst erop dat bepaalde frequenties door het poreuze medium beter worden ingekoppeld dan alle andere. Om deze verschijnselen te verklaren zullen een aantal berekeningen, verkregen met behulp van de Biottheorie, besproken worden. Daarna zullen de resultaten van enkele schokgolfmetingen worden gepresenteerd.

5.1 Berekeningen met behulp van de Biot-theorie

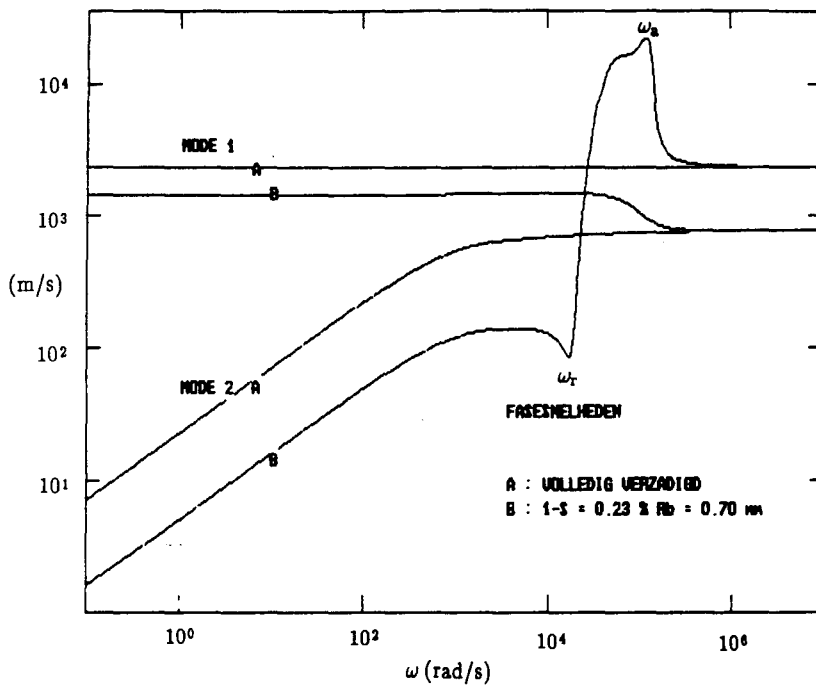
Om het effect van de aanwezigheid van luchtbelletjes in een poreus medium op de golfvoortplanting te demonstreren zal worden uitgegaan van een concreet geval, n.l. het poreus gelijkzand met een water-luchtbelletjes-mengsel waarbij de luchtvolume fractie $(1-s)$ 0.23 % is en de gemiddelde belstraal (R_b) 0.70 mm bedraagt. De Biot-theorie wordt gemodificeerd door het meenemen van de frequentie-afhankelijke compressiemodulus van de porievloeistof.

De frequentie-afhankelijke compressiemodulus van het boven beschreven mengsel is in figuur 5.3 weergegeven als functie van de hoekfrequentie ω .

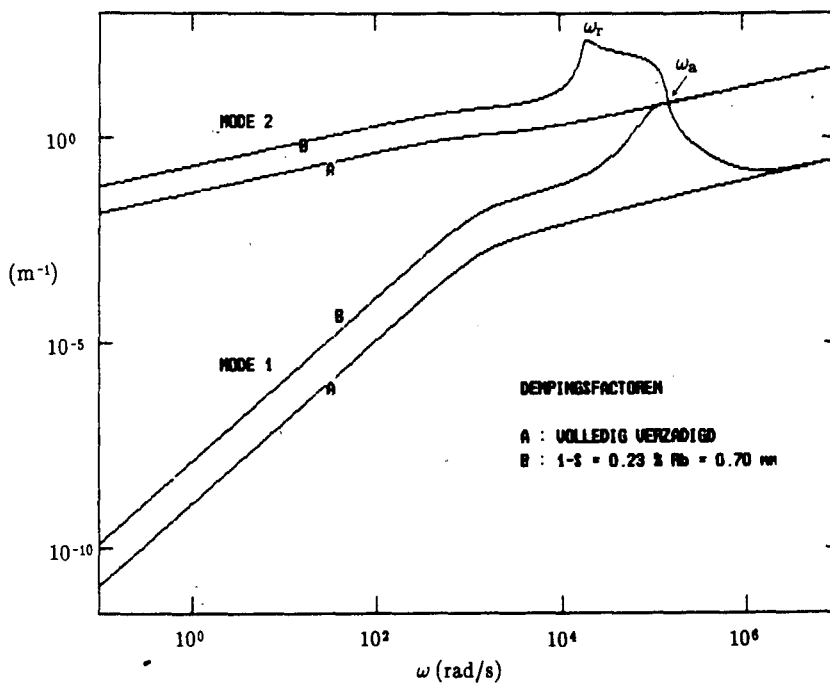


Figuur 5.3: Absolute waarde van de compressiemodulus bij $1-s=0.23\%$ en $R_b=0.70$ mm, tevens zijn de resonantie- (ω_r) en antiresonantiefrequentie (ω_a) aangegeven.

De resonantiefrequentie ω_r bedraagt $1.8 \cdot 10^4$ rad/s, de antiresonantiefrequentie ω_a bedraagt $1.5 \cdot 10^5$ rad/s. Voor een beschrijving van de beldynamische aspecten die hieraan zijn verbonden wordt verwezen naar hoofdstuk 3. De consequenties voor de fasesnelheden en dempingsfactoren van beide Biotmodes zijn weergegeven in figuur 5.4 resp. figuur 5.5. De lijnen aangegeven door A hebben betrekking op de volledig verzadigde situatie.



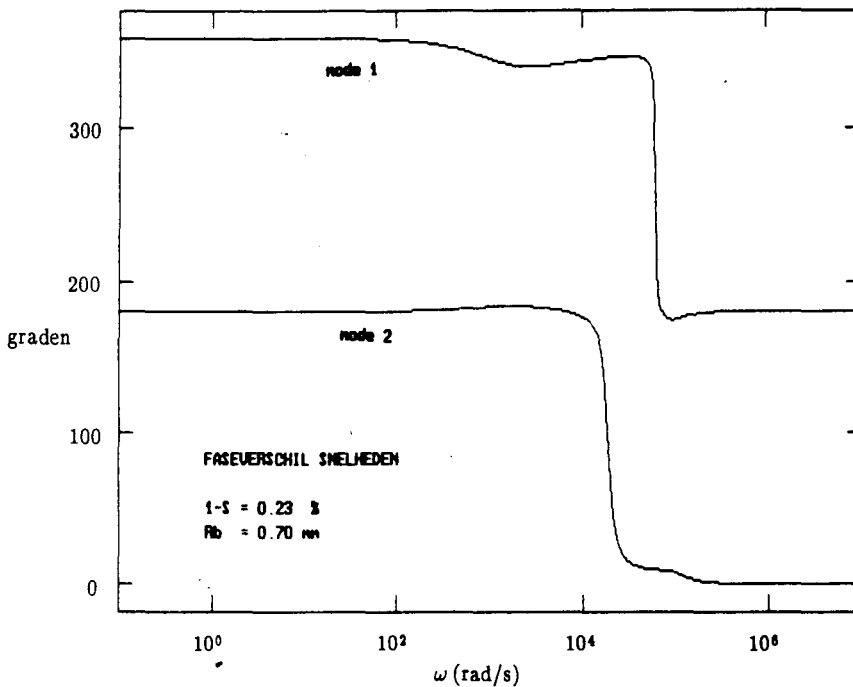
Figuur 5.4: Fasesnelheden van mode 1 en mode 2 als functie van ω . A geeft het volledig verzadigd geval weer, B heeft betrekking op $1-s = 0.23\%$, $R_b = 0.70$ mm.



Figuur 5.5: Dempingsfactoren van mode 1 en mode 2 als functie van ω . A geeft het volledig verzadigd geval weer, B heeft betrekking op $1-s = 0.23\%$, $R_b = 0.70$ mm.

In het frequentiegebied rond ω_r en ω_a , waar beldynamica belangrijk is, worden de dempingsfactor en de fasesnelheid van mode 2 sterk beïnvloedt. De fasesnelheid van mode 2 is minimaal bij resonantie als gevolg van de toegenomen compressibiliteit van de porievloeistof. Bij antiresonantie is de fasesnelheid van mode 2 maximaal door de sterk gereduceerde compressibiliteit. De dempingsfactor van mode 2 is relatief groot tussen ω_r en ω_a , het maximum ligt bij ω_r . In het lage frequentiegebied ($< \omega_r$) zijn fasesnelheid en demping slechts onderhevig aan een statische correctie ten gevolge van de hoeveelheid lucht. Het mode 1 golfverschijnsel wordt relatief weinig beïnvloed door de aanwezigheid van luchtbellen. De dempingsfactoren van beide modes zijn aan elkaar gelijk bij de antiresonantiefrequentie ω_a . Tenslotte is in figuur 5.4 en figuur 5.5 te zien dat er een rolwisseling tussen mode 1 en mode 2 optreedt; dit wil zeggen dat bij hoge frequenties mode 1 naar de mode 2 limiet gaat en omgekeerd. Dit effect blijkt in het algemeen op te treden als een bepaalde drempelwaarde van de saturatie wordt overschreden.

In figuur 5.6 zijn de berekende faseverschillen tussen vloeistof- en skeletsnelheid weergegeven als functie van de frequentie.

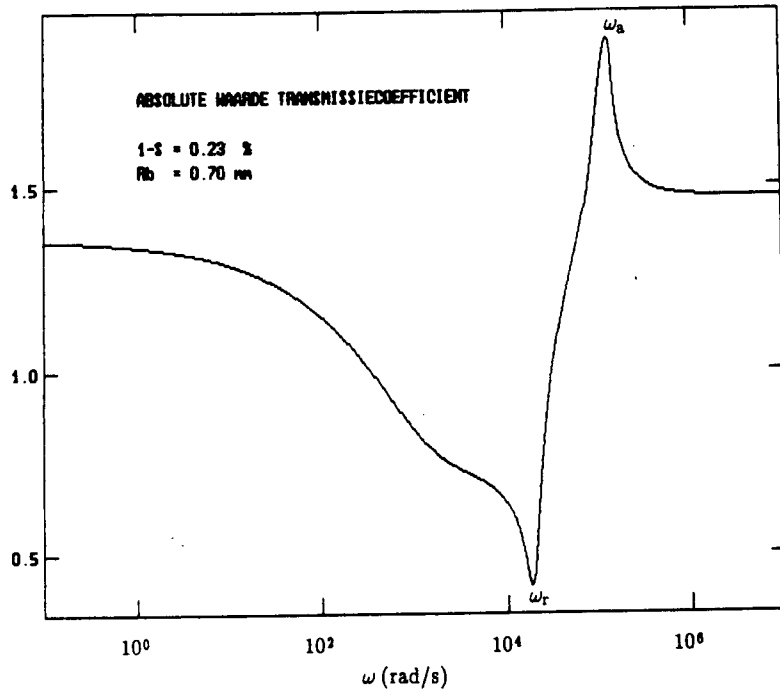


Figuur 5.6: Faseverschil van de vloeistof- en skeletsnelheden; $1-s=0.23\%$, $R_b=0.70\text{mm}$.

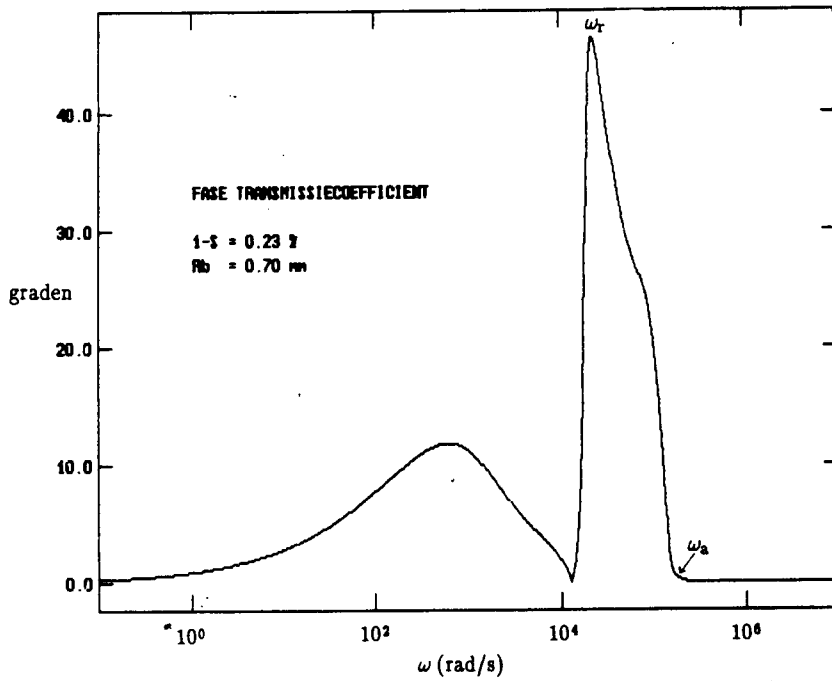
Hieruit blijkt dat bij een gedeeltelijk verzadigd medium de mode 1- en mode 2 golfverschijnselen niet zonder met in-fase en uit-fase gedrag mogen worden geassocieerd. Bij lage frequenties is mode 1 in-fase (360 graden) en mode 2 uit-fase (180 graden). Voorbij de resonantiefrequentie treedt een verwisseling op in het fasegedrag. Het gevolg hiervan is dat in de hoge frequentielimiet mode 1 in tegenfase is en mode 2 in-fase.

Vervolgens zal worden ingegaan op de vraag welke frequentiecomponenten het beste in het poreuze medium koppelen. Figuur 5.7 en figuur 5.8 tonen de absolute waarde resp. het argument van de transmissiecoëfficiënt in het frequentiedomein. De lage frequenties ($< \omega_r$) en de hoge frequenties ($> \omega_a$) blijken goed door het medium te worden opgenomen. Componenten rondom de resonantiefrequentie reflecteren echter in hoge mate. Bij antiresonantie is de inkoppeling juist maximaal. Een en ander kan als volgt worden verklaard: Beschouw het scheidingsvlak van twee eenvoudige media A resp. B. De akoestische impedantie van elk van beide media is het product van dichtheid en golfsnelheid ($Z_i = \rho_i \cdot c_i$). Het verband tussen de reflectiecoëfficiënt r en de akoestische impedanties luidt: $r = (Z_b - Z_a) / (Z_b + Z_a)$. Als medium A de waterlaag boven de poreuze kolom is en medium B de poreuze kolom voorstelt geldt bij resonantie; $Z_b \ll Z_a$, zodat $r \rightarrow -1$ en de transmissiecoëfficiënt $t \rightarrow 0$ (minimale transmissie). Bij antiresonantie is $Z_b \gg Z_a$ zodat $r \rightarrow 1$, t is maximaal.

Met behulp van de transmissiecoëfficiënt en de fouriergetransformeerde van de op de poreuze kolom invallende drukstap kan de complexe amplitude van de druk in het medium bepaald worden (voor mode 1 en mode 2). Bij een volledig verzadigd medium zal het drukamplitudespectrum een continue afvallende functie zijn, met een dominante laagfrequente bijdrage. In het drukspectrum van een gedeeltelijk verzadigd medium treden echter naast deze dominante lage frequenties 2 maxima op, afkomstig van mode 1 en mode 2. Deze twee maxima zullen in het vervolg aangeduid worden als de mode 1 piek en de mode 2 piek. Later zal blijken dat deze twee maxima corresponderen met de frequenties van twee oscillaties van het druksignaal in het tijdsdomein.

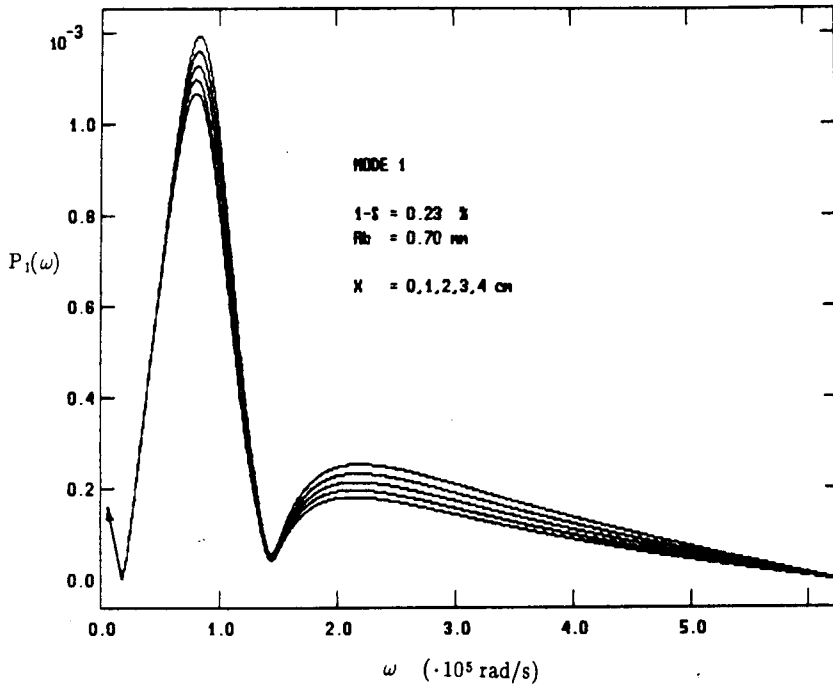


Figuur 5.7: De absolute waarde van de transmissiecoëfficiënt bij $1-s = 0.23 \%$ en $R_b = 0.70 \text{ mm}$.

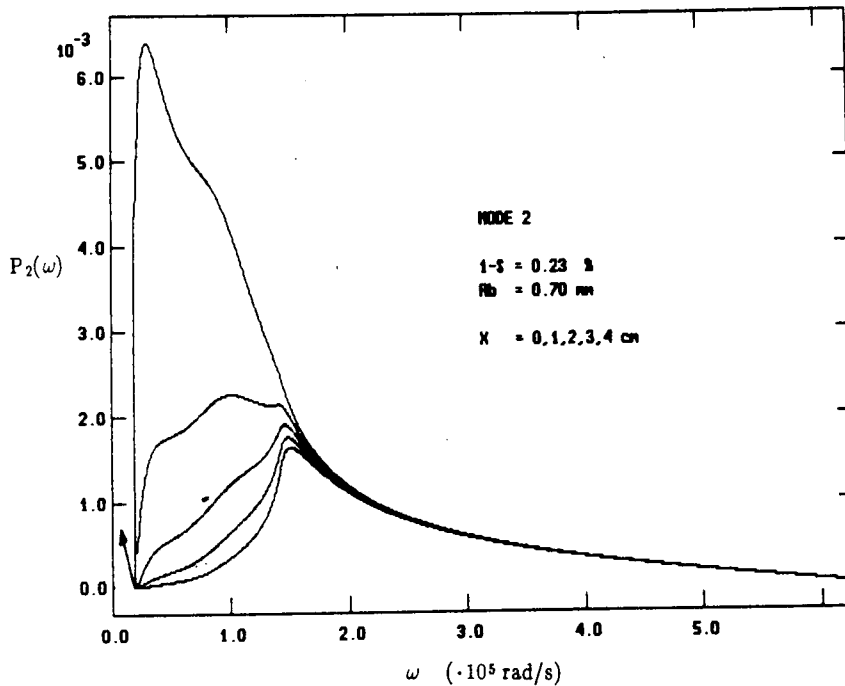


Figuur 5.8: Het argument van de transmissiecoëfficiënt bij $1-s = 0.23 \%$ en $R_b = 0.70 \text{ mm}$.

Er zal nu verder worden ingegaan op de verschuiving van deze twee pieken in het frequentiedomein als functie van de afstand in het poreuze medium. De ontwikkeling van de mode 1 en mode 2 piek voor verschillende afstanden x is weergegeven in figuur 5.9 resp. figuur 5.10 ($1-s = 0.23\%$, $R_b = 0.70$ mm).

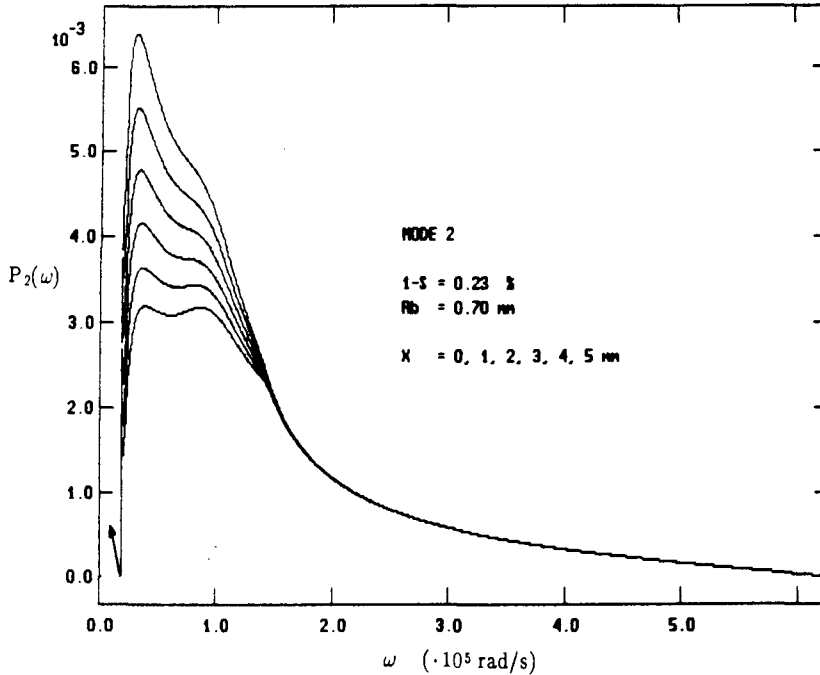


Figuur 5.9: De mode 1 piek van $x = 0$ cm (bovenste) naar $x = 4$ cm (onderste).



Figuur 5.10: De mode 2 piek van $x = 0$ cm (bovenste) naar $x = 4$ cm (onderste).

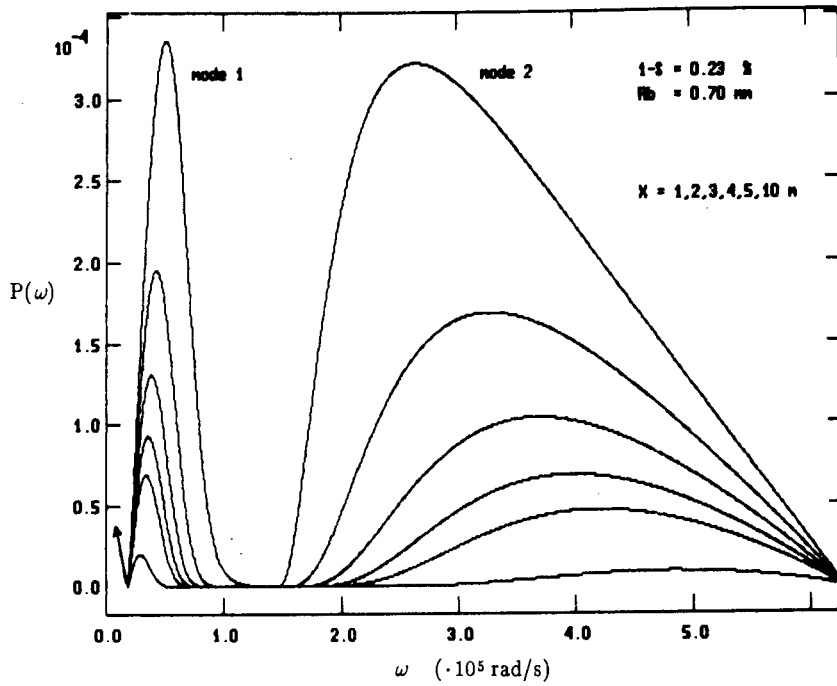
De dominante laagfrequente flank is uit beide spectra gefilterd; dit wordt aangegeven door een pijl. Van de bovenste kromme naar de onderste kromme neemt de afstand toe van 0 cm naar 4 cm. Op de afstand $x = 0$ is de mode 1 piek maximaal bij $\omega = 8.3 \cdot 10^4$ rad/s en minimaal bij ω_r en ω_a . De mode 2 piek is bij $x = 0$ relatief breed. Deze piek is minimaal bij ω_r en maximaal bij een frequentie gelegen tussen ω_r en ω_a (zie figuur 5.11).



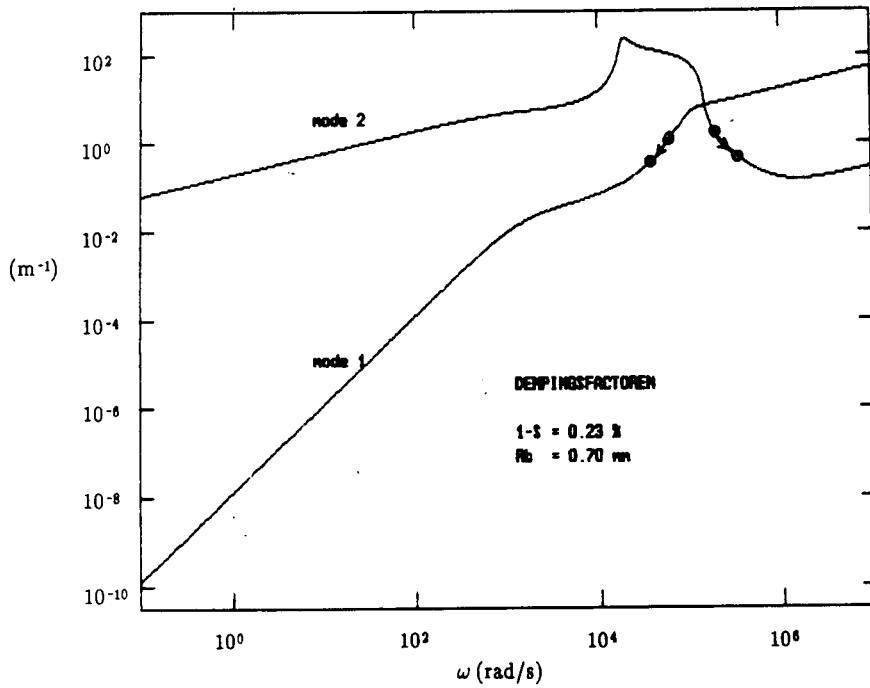
Figuur 5.11: Ontwikkeling van mode 2 piek op kleine dieptes; van $x=0$ mm (bovenste) naar $x=5$ mm (onderste).

Als gevolg van de demping verschuiven de pieken van beide modes gaandeweg door het poreuze medium. Dit is te zien in figuur 5.12. Het maximum van mode 1 verschuift naar een lagere frequentie. Dit is een gevolg van de dempingsfactor van mode 1; deze neemt in de richting van lage frequenties af (zie figuur 5.13). Het gedrag van mode 2 is voor kleine afstanden nogmaals weergegeven in figuur 5.11. De dempingsfactor van mode 2 is tussen ω_r en ω_a zeer groot zodat de relatief brede lob op $x = 0$ snel afvlakt tot een gepiekte structuur met een maximum voorbij de antiresonantiefrequentie. Als gevolg van de demping van mode 2 in dit gebied verschuift de piek naar hogere frequenties (zie figuur 5.13).

Bij zeer grote afstanden (>100 m) verdwijnt de mode 1 piek in de laagfrequente bulk. Het mode 2 maximum verschuift in de richting van het dempingsminimum voorbij ω_a .

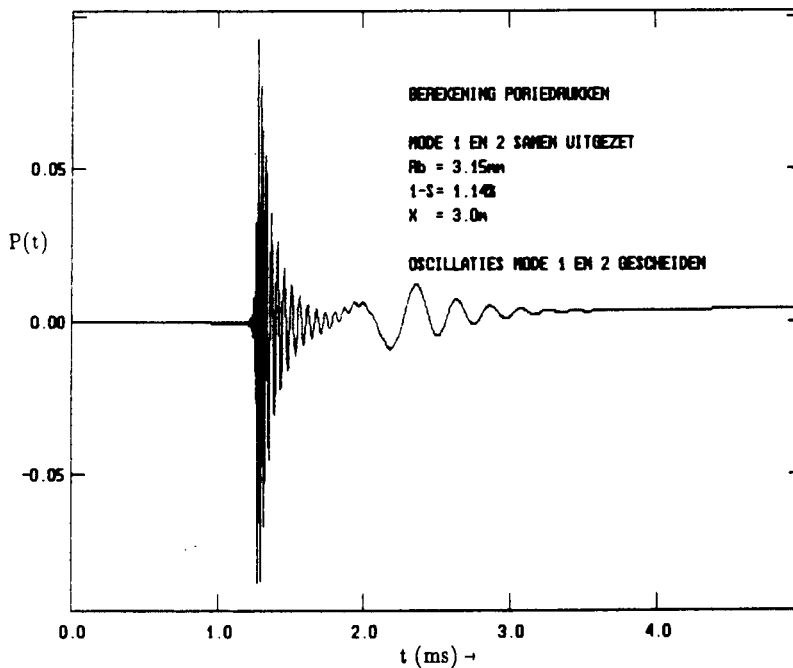


Figuur 5.12: De ontwikkeling van de mode 1 en mode 2 piek op verschillende afstanden; 1 meter (bovenste kromme) naar 10 meter (onderste kromme).

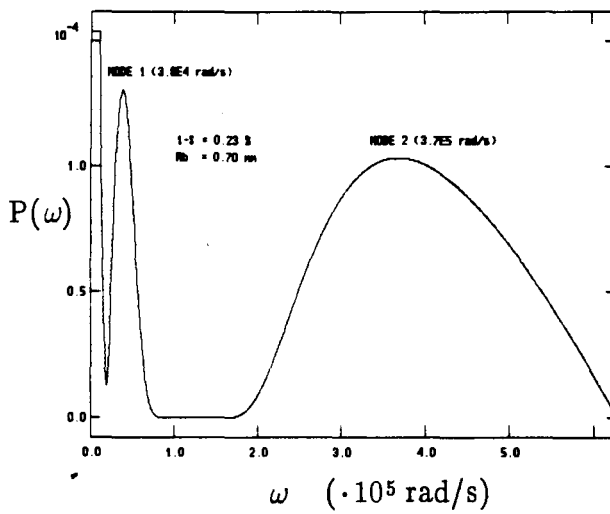
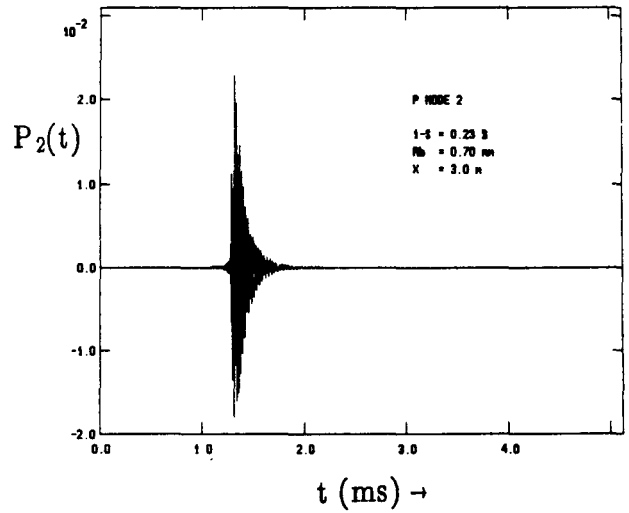
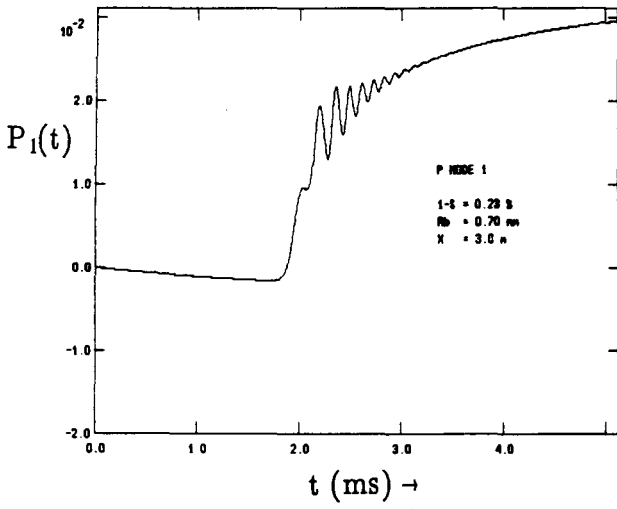
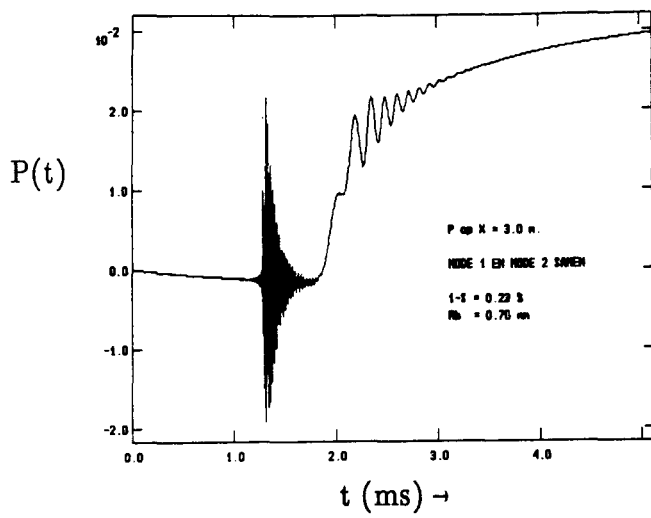


Figuur 5.13: Verschuiving van mode 1 en mode 2 piekfrequentie als gevolg van de demping over de afstand van 12 naar 72 cm (zie pijlen).

In het tijdsdomein leiden de twee maxima in het drukspectrum tot 2 oscillaties. De frequenties van beide oscillaties corresponderen met de maxima van mode 1 resp. mode 2. De (hoogfrequente) mode 2 oscillatie plant zich sneller voort dan de (laagfrequente) mode 1 oscillatie. Door dit snelheidsverschil zal er over de afgelegde afstand een scheiding tussen beide oscillatie-modes ontstaan. Voor $1-s = 0.23\%$, $R_b = 0.70$ mm en $x = 3$ m zijn beide modes met het bijbehorende spectrum weergegeven in figuur 5.15. In figuur 5.14 is nogmaals de scheiding op $x = 3$ m, die tussen beide modes ontstaat, weergegeven, maar nu voor $1-s = 1.14\%$ en $R_b = 3.15$ mm.



Figuur 5.14: Poriedruksignaal op 3 meter bij $1-s = 1.14\%$ en $R_b = 3.15$ mm. De scheiding die tussen beide oscillatiemodes ontstaat, als gevolg van het snelheidsverschil, is duidelijk zichtbaar.



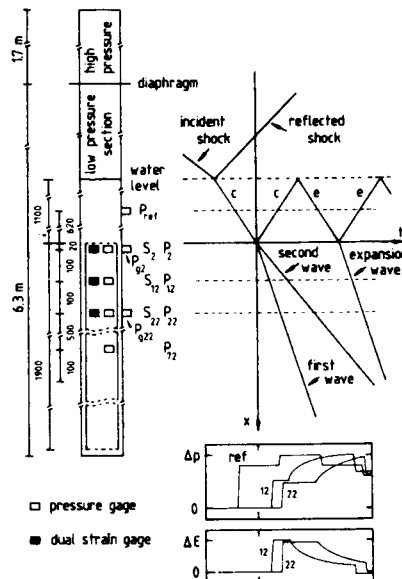
Figuur 5.15: Voor $1-s=0.25\%$ en $R_b = 0.70$ mm: Boven: berekende $P(t)$, midden: splitsing in P_1 en P_2 , beneden: de twee frequentiemaxima in het berekende drukspectrum corresponderend met de frequenties van de oscillaties in P_1 en P_2 .

5.2 Schokgolfexperimenten

Allereerst zal het principe van de schokbuisopstelling worden toegelicht. Daarna zal worden ingegaan op de resultaten van enkele golfexperimenten, zowel in het tijdsdomein als in het frequentiedomein.

5.2.1 De schokbuisopstelling

Bij golfexperimenten wordt gebruik gemaakt van een verticaal opgestelde schokbuis. De buis heeft een lengte van ongeveer 8 meter en een binnendiameter van 77 mm. De schokbuis bestaat uit een hoge-druk sectie en een lage-druk sectie die door middel van een plastic vlies van elkaar zijn gescheiden. De poreuze kolom van gelijmd zand is geplaatst in de lage-druk sectie en heeft een lengte van 1410 mm. Een schematische voorstelling van de opstelling is weergegeven in figuur 5.16.



Figuur 5.16: Schematische weergave van de schokbuisopstelling. Naast de schokbuis is het $x-t$ diagram van golven in de volledig verzadigde situatie weergegeven. De aangegeven strain-gages (rekstrookmeters) zijn tijdens dit onderzoek niet gebruikt.

Tussen de wand van de schokbuis en de kolom is een spleet van ongeveer 1mm zodat interactie tussen beide wordt vermeden. De zijwand van de kolom is voorzien van een epoxy-coating zodat vloeistofuitstroming wordt voorkomen. De boven- en onderkant van de kolom is open. De spleet en een gedeelte schokbuis boven de kolom is gevuld met water. In de waterlaag boven de kolom bevindt zich de referentiedrukopnemer;

(Kistler 603B; piëzo-electrisch). Deze dient voor de triggering van het meetsysteem. De poreuze kolom is voorzien van vier poriedrukopnemers (Druck PDCR81; piëzo-resistief) op afstanden van 2, 12, 22 en 72 cm van de bovenkant van de kolom. De registratie en opslag van de meetresultaten gebeurt met een lokaal computersysteem dat beschreven wordt door Janssens [JAN85]. De samplefrequentie van het transiëntrecordersysteem bedraagt 1 Mhz.

Een schokgolffexperiment verloopt als volgt: Nadat het drukverschil tussen hoge- en lage-druk sectie is ingesteld (max. 2 bar) wordt het plastic vlies, dat beide secties scheidt, doorgebrand. Hierdoor ontstaat een vlakke schokgolf, gekenmerkt door een stapvormige druktoename. Deze vlakke compressiegolf reflecteert aan de bovenkant van de kolom en aan de waterlaag. Als de kolom volledig verzadigd is met water zullen er twee longitudinale compressiegolven ontstaan. Daarnaast zullen reflecties van golven aan de bovenkant van de waterlaag en aan de onderkant van de kolom na enige tijd een rol gaan spelen. De golfverschijnselen zijn schematisch weergegeven in het $x-t$ diagram van figuur 5.16. De gemeten poriedrukken zijn te vergelijken met de theorie tot het tijdstip waarop de eerste reflectiegolf aankomt. Door het variëren van de druk in de lage-druk sectie kunnen de golfexperimenten bij verschillende saturaties en belstralen worden uitgevoerd.

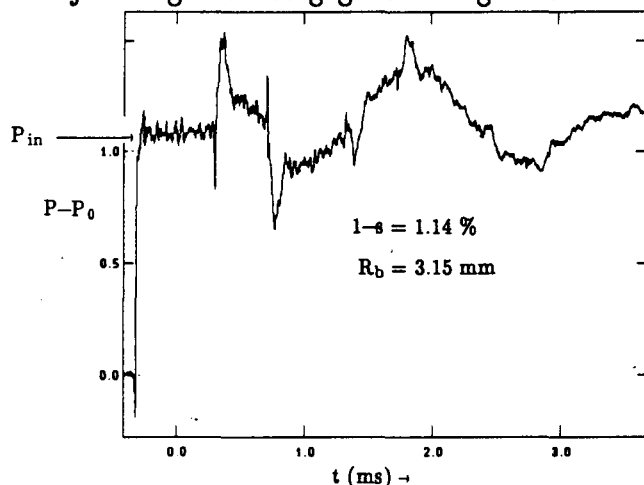
5.2.2 Resultaten in het tijdsdomein

Er zullen drie schokgolffmetingen besproken worden. Deze metingen zijn bij verschillende luchtvolume fracties $1-s$ en belstralen R_b uitgevoerd. Een overzicht hiervan wordt gegeven in tabel 5.1. P_0 is de druk in de lage-druk sectie. De eerste en de tweede meting betreffen water-luchtbellemengsels in evenwicht. De uiteindelijke waarde van de belstraal is bepaald met behulp van het diffusiemodel uit hoofdstuk 4. De derde meting betreft het mengsel van meting 2 onder een frozen drukverhoging van 1 naar 2 bar.

	P_0 (bar)	$1-s$ (%)	R_b (mm)
1.	1.0	1.14	3.15
2.	1.0	0.23	0.70
3.	2.0	0.12	0.55

Tabel 5.1 Omstandigheden waaronder de golfexperimenten verricht zijn. P_0 is de druk in de lage-druk sectie, R_b is de belstraal en $1-s$ is de volumefractie lucht.

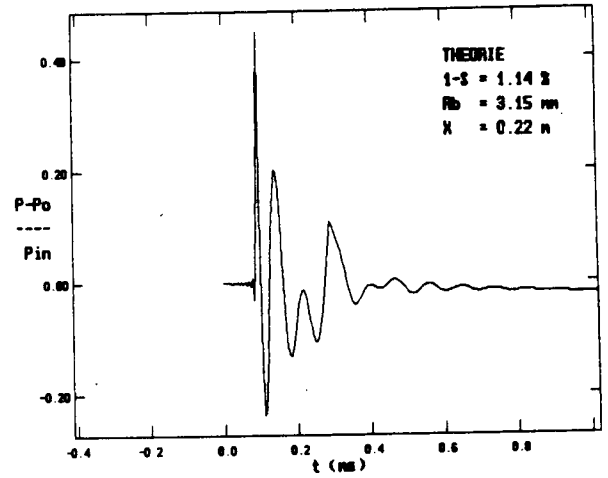
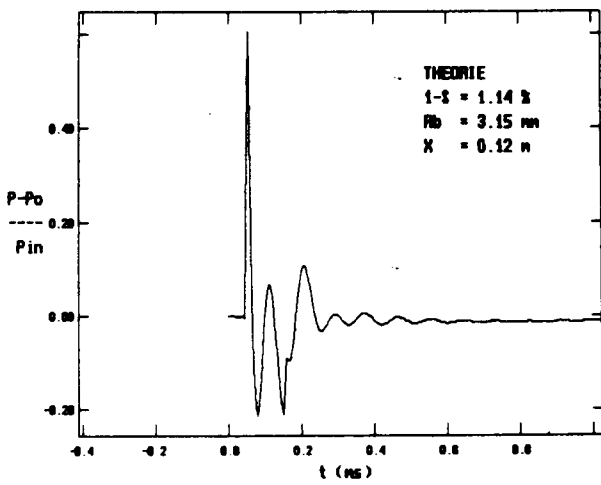
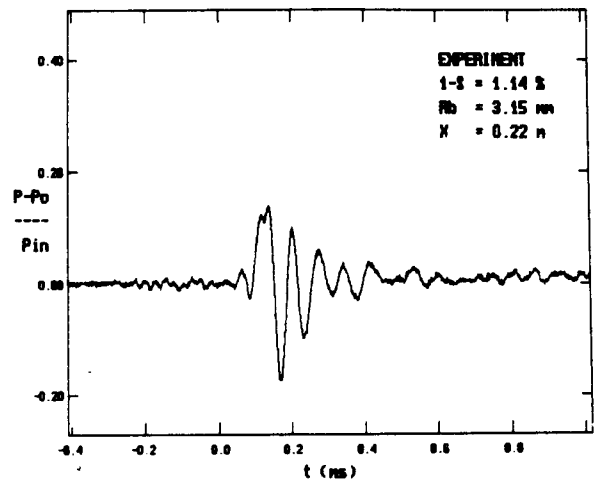
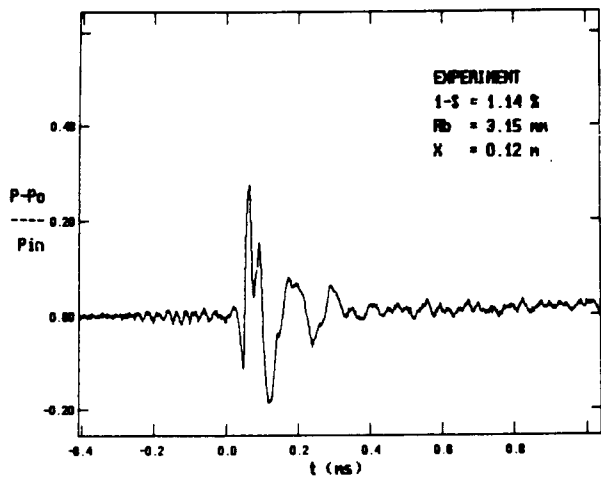
De gemeten poriedrukken worden genormeerd op de amplitude van de invallende drukgolf P_{in} . Deze kan bepaald worden uit de referentiedrukmeting. De referentiedrukmeting behorende bij meting 1 is weergegeven in figuur 5.17.



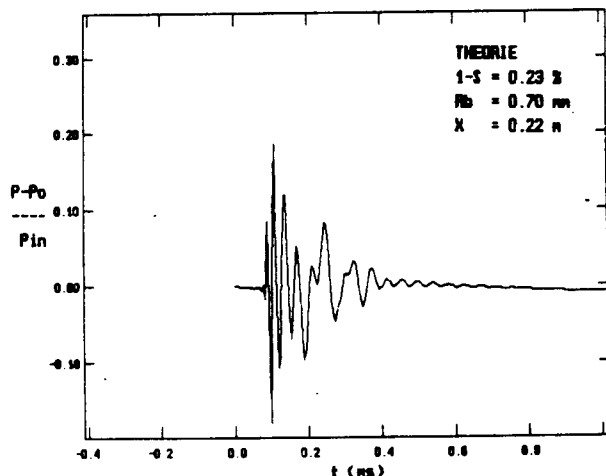
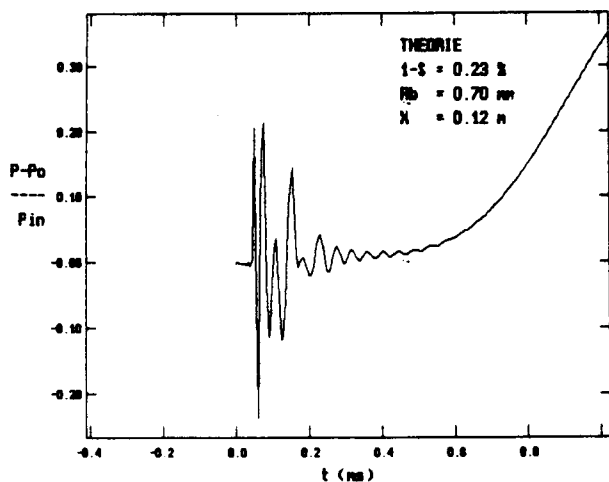
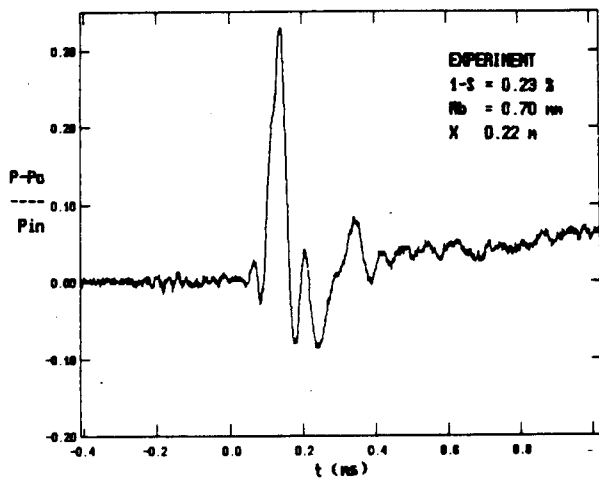
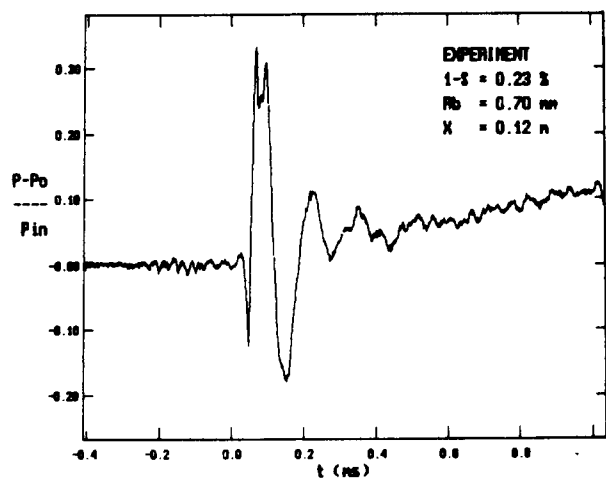
Figuur 5.17: Voorbeeld van een referentiedrukmeting bij $1-s = 1.14\%$ en $R_b = 3.15$ mm. P_{in} is de waarde van de op de kolom invallende drukstap.

Na de passage van de stapvormige drukgolf kan de daarop gesuperponeerde gereflecteerde golf worden waargenomen. De vorm ervan doet vermoeden dat de top van de kolom vrijwel verzadigd is met water waardoor een sterk positieve reflectie optreedt. Na enige tijd arriveren golven bij de referentiedrukopnemer die het gevolg zijn van reflecties aan de bovenzijde van de waterlaag.

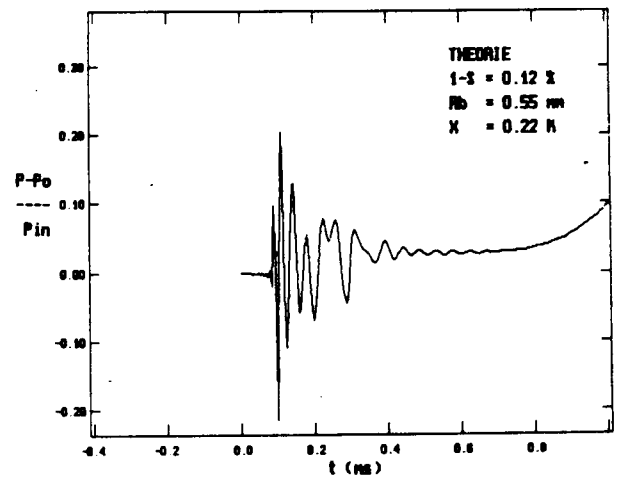
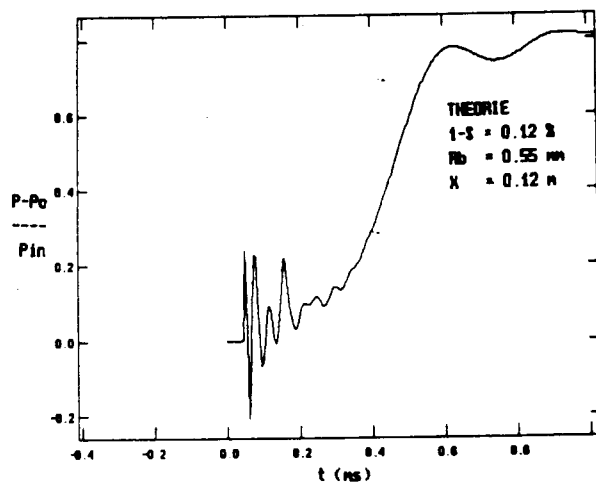
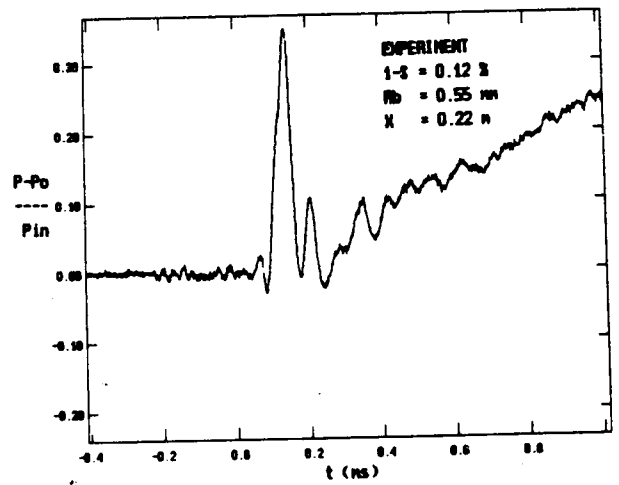
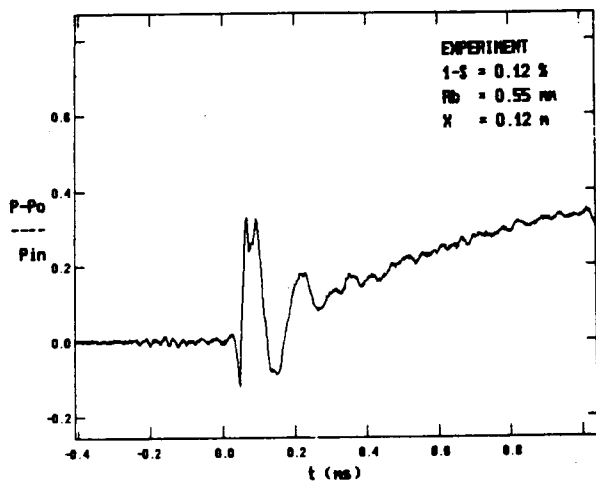
De poriedrukken zullen worden uitgezet tot vlak voordat de eerste reflectiegolf arriveert. De resultaten van poriedrukmetingen bij de condities weergegeven in tabel 5.1 zijn weergegeven in figuur 5.18, 5.19 en 5.20. De metingen hebben betrekking op de afstanden 12 en 22 cm. van de bovenkant van de kolom. Het op grond van de Biottheorie berekende drukverloop is onder de metingen weergegeven.



Figuur 5.18: Gemeten en berekende poriedruksignalen bij $1-s = 1.14\%$ en $R_b = 3.15\text{mm}$ op diepten van 12 cm en 22 cm.



Figuur 5.19: Gemeten en berekende poriedruksignalen bij $1-s = 0.23 \%$ en $R_b = 0.70 \text{ mm}$ op diepten van 12 cm en 22 cm.



Figuur 5.20: Gemeten en berekende poriedruksignalen bij $1-s = 0.12\%$ en $R_b = 0.55 \text{ mm}$ op diepten van 12 cm en 22 cm.

De meting in figuur 5.18, bij een luchtfractie van 1.14 % en een belstraal van 3.15 mm, toont dat de tweegolvenstructuur geheel is verdwenen en dat heftige oscillaties overheersen. Kwalitatief is er overeenstemming tussen model en experiment. De theorie voorspelt in dit geval een hoogfrequente oscillatie gevolgd door een laagfrequente oscillatie. Het laagfrequente deel van de oscillatie ontbreekt echter bij de metingen. De voortplantingssnelheden van de oscillaties komen globaal overeen met de theorie. De gemeten drukamplituden blijken echter lager dan het model voorspelt.

In figuur 5.19 zijn de metingen en berekeningen weergegeven bij een luchtfractie van 0.23% en een gemiddelde belstraal van 0.70 mm. De gemeten oscillaties op 12 en 22 cm blijken significant laagfrequenter dan berekend. De laagfrequente druktoename is volgens model en experiment bij deze kleinere luchtfractie in verhouding tot de oscillatie toegenomen. Het model voorspelt echter meer laagfrequente druktoename.

In figuur 5.20 zijn de resultaten van een meting weergegeven bij een nogmaals verkleinde luchtfractie en belstraal ($1-s = 0.12\%$, $R_b = 0.55$ mm). De druktoename ten gevolge van laagfrequente componenten is wederom in verhouding tot de oscillatie toegenomen. Het model voorspelt een grotere toename dan wordt gemeten.

Aan de hand van deze drie metingen kunnen een aantal trends worden gegeven:

Bij verlaging van de luchtfractie blijkt de laagfrequente bijdrage tot de druk in verhouding toe te nemen ten opzichte van de bijdrage van oscillaties. Het gedrag gaat immers meer in de richting van een volledig verzadigd medium. Het model voorspelt voor de laatste twee metingen meer laagfrequente bijdrage dan wordt gemeten. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat er waarschijnlijk meer lucht aanwezig is. De gemeten drukamplituden zijn doorgaans lager dan bij de berekening. Deze discrepantie is mogelijk terug te voeren op het verwaarlozen van 3-dimensionale effecten in het golfmodel.

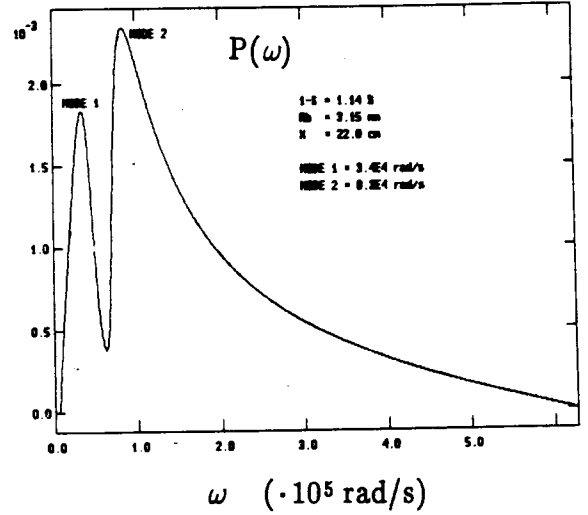
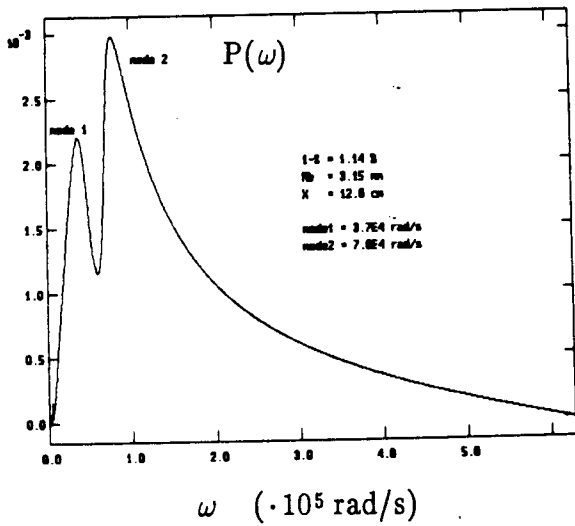
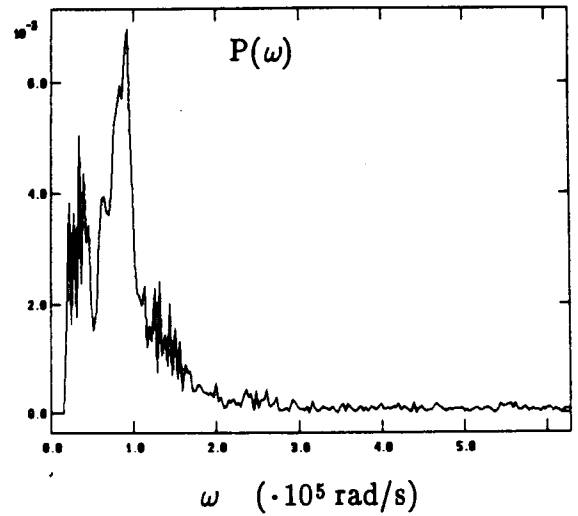
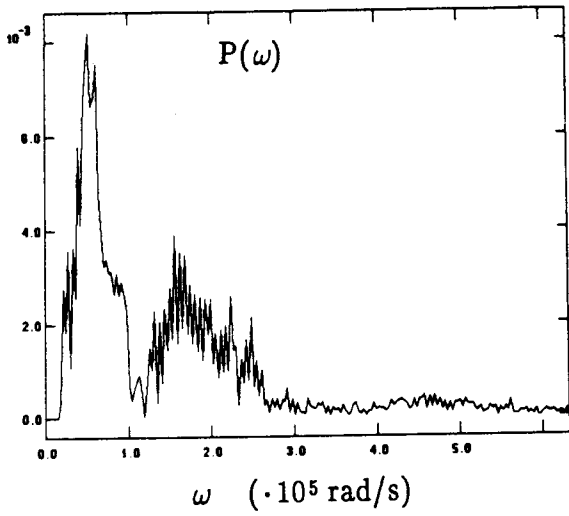
Uitzetting van de kolom in radiële richting leidt waarschijnlijk tot een verlaging van de poriedruk. Op dit moment dient tevens opgemerkt te worden dat de referentiedrukmetingen niet maatgevend veranderen bij variatie van de luchtfractie. Dit duidt op een verwaarloosbare hoeveelheid lucht in de bovenkant van de kolom. Dit stuk van de kolom bepaalt immers in grote mate de reflectiecoëfficiënt. Poriedrukmetingen op andere afstanden dan 12 en 22 cm doen ook vermoeden dat de luchtverdeling in de kolom niet geheel homogeen is. De discrepanties wat oscillatiefrequentie betreft kunnen mede verklaard worden door afwijkingen ten opzichte van de gemiddelde belstraal. Het is echter onduidelijk waarom de voorspelde laagfrequente oscillatie (mode 1) niet wordt

waargenomen. Een mogelijke verklaring voor afwijkingen tussen model en metingen is de vorm van de bellen in het medium. In de modellen wordt aangenomen dat de bellen bolvormig zijn. In werkelijkheid zijn de bellen mogelijk vertakt. Dit is van invloed op de resonantiefrequentie; die wordt immers bepaald door de kleinste afmeting van de bel.

5.2.3 Resultaten in het frequentiedomein.

Door het toepassen van fourieranalyse op de gemeten poriedruksignalen kunnen spectra worden verkregen die rechtstreeks vergelijkbaar zijn met de voorspellingen van de Biot-theorie in het frequentiedomein. De resultaten hiervan zijn voor de meting met $1-s = 1.14\%$ en $R_b = 3.15$ mm weergegeven in figuur 5.21. De dominante laagfrequente flank is in de gemeten- en berekende spectra weggelaten.

Het gemeten spectrum op 12 cm vertoont een hoogfrequente 'piek' rond $1.5 \cdot 10^5$ rad/s. Het is niet waarschijnlijk dat deze piek afkomstig is van de mode 2 oscillatie. Immers de maximale piekfrequentie verschuift niet naar een hogere waarde tussen 12 en 22 cm. Bovendien is de demping veel groter dan op grond van de theorie kan worden verwacht. Mogelijk is er hier sprake van een drukopnemeroscillatie of de 'piek' is het gevolg van een inhomogene belverdeling. Het is ook mogelijk dat deze piek het gevolg is van een hoogfrequente golf die door de buiswand loopt. De dominante piek in beide gemeten spectra verschuift van $5.2 \cdot 10^4$ rad/s naar $9.2 \cdot 10^4$ rad/s over de afstand van 12 naar 22 cm. Dit doet op grond van de Biot-theorie vermoeden dat deze juist betrekking heeft op het mode 2 verschijnsel. In dat geval is te zien dat de mode 1 piek zich pas op 22 cm bij een lagere frequentie begint te ontwikkelen. In het algemeen hebben de frequenties behorende bij de piekwaarden de goede grootte orde. Het een en ander dient in de toekomst verder onderzocht te worden.



Figuur 5.21: Spectra volgend uit metingen (boven) en theoretisch berekende spectra (onder) bij $1-s = 1.14\%$, $R_b = 3.15$ mm op diepten van 12 en 22 cm.

6. Conclusies en aanbevelingen

Er is een nieuw diffusiemodel opgesteld ter bepaling van de belstraal. Belgroei- en belkrimpmetingen kunnen door schaling van de omgevingsstraal in goede overeenstemming worden gebracht met dit model. Eventuele afwijkingen tussen model en experiment zijn mogelijk het gevolg van temperatuurvariaties en de uitgangspunten van het model. De gemiddelde omgevingsstraal van een water-luchtbellemengsel representeert de gemiddelde belconcentratie. De omgevingsstraal bij het belgroeiexperiment bedroeg (1.93 ± 0.16 cm). Het bijbehorende belkrimpexperiment leverde een omgevingsstraal van (1.32 ± 0.20) cm. De omgevingsstralen bij belgroei en belkrimp liggen niet binnen elkaars nauwkeurigheden maar zijn wel van dezelfde grootte orde.

Uit theoretische berekeningen blijkt dat de thermische demping van een oscillerende gasbel in een poreus medium niet onder alle omstandigheden verwaarloosbaar is ten opzichte van Darcy-demping en viskeuze demping. Bij gelijmd zand in het typische parametergebied van schokgolffexperimenten ($1-s = 1\%$, $R_b = 1\text{mm}$) is thermische demping op microscopische schaal bij lage frequenties niet verwaarloosbaar. De verhouding van thermische demping tot viskeuze- en Darcy-demping is sterk afhankelijk van de belgrootte. Bij gelijmd zand is thermische demping bij lage frequenties voor belstralen in de buurt van de porieafmetingen het dominante dempingsmechanisme. Bij de onderzochte minder permeabele zandsteensoorten is thermische demping verwaarloosbaar. De invloed van thermische demping van de gasbel op de macroscopische dempingsfactor van golven is in het parameterbereik van schokgolffexperimenten verwaarloosbaar.

De aanwezigheid van kleine gasfracties, in een voor het overige deel met vloeistof verzadigd poreus medium, is van grote invloed op de transmissie van een stapvormige drukverandering. De gebruikelijke tweegolvenstructuur verdwijnt met toenemende gashoeveelheid. In plaats daarvan worden heftige oscillaties in het poriedruksignaal waargenomen. Deze verschijnselen kunnen theoretisch worden beschreven met een tweefasen Biottheorie waarin de compressiemodulus van de porievloeistof complex en frequentieafhankelijk wordt verondersteld. De theorie voorspelt in dat geval twee oscillatiemodes. De ene (mode 1) is laagfrequent en de andere (mode 2) is hoogfrequent en plant zich sneller voort dan mode 1.

De frequentiemaxima van beide modes verschuiven gaandeweg in het poreuze medium als gevolg van de demping. Mode 1 verschuift naar een lagere frequentie en mode 2 naar een hogere frequentie. De schokgolffexperimenten geven kwalitatief hetzelfde beeld. Er worden twee oscillatiemodes waargenomen. Het mode 2 verschijnsel is vermoedelijk dominant. De orde grootte van de piekfrequenties komt overeen met de theorie.

Het een en ander dient in de toekomst verder onderzocht te worden. Een meer homogene belverdeling zou bijdragen tot een betere vergelijking tussen theorie en experiment. Het gebruik van nucleatiekernen zoals beschreven is door Sniekers [SNI88] is mogelijk een oplossing. Daarnaast lijkt het zinvol het golfvoortplantingsmodel uit te breiden voor meer dimensionale- en niet-lineaire effecten.

De frequentieresolutie bij analyse van poriedrukken zou kunnen worden verhoogd door gebruik te maken van een transiëntrecorder met een hogere samplefrequentie (> 1 MHz). Om de oscillatiemodes experimenteel gescheiden waar te nemen is het misschien nuttig om meervoudige reflectiesignalen te analyseren.

Tenslotte zou een completer beeld van beide oscillatiemodes worden verkregen door poriedrukmetingen te combineren met rekstrookmetingen.

7. Literatuur

- [ABR65] Abramowitz M. and Stegun I.A. (1965):
Handbook of mathematical functions.
Dover Publications Inc., New York.
- [BAR79] Barends F.B.J. (1979): The compressibility of an air-water mixture
in a porous solid. LGM-mededelingen 20 (2-4), pp49-66, Delft Soil.
Mech. Lab.
- [BAR80] Barends F.B.J. (1980): Non-linearity in groundwater flow,
LGM-mededelingen 21 (1), Delft Soil. Mech. Lab.
- [BED83] Bedford A. and Stern M. (1983): A model for wave propagation
in gassy sediments. J. Acoust. Soc. Am. 73 (2) pp 409 - 417
- [BER87] Berlo A. van en Sniekers R (1987): Reflectie van compressiegolven
aan een poreus meer-fasen systeem. Verslag R-867-S
TU Eindhoven.
- [BIO56a] Biot M.A. (1956): Theory of propagation of elastic waves in a
fluid-saturated porous solid, Part 1 : Low frequency range.
J. Acoust. Soc. Am. 28 (2), pp 168-178
- [BIO56b] Biot M.A. (1956): Theory of propagation of elastic waves in a
fluid-saturated porous solid, Part 2 : High frequency range.
J. Acoust. Soc. Am. 28 (2), pp 178-191
- [BOU87] Bourbie T., Coussy O. and Zinsner B.(1987):
Acoustics of porous media
Gulf Publishing Company.
- [CAS88] Castenmiller T. (1988): De vorming groei en stabiliteit van
luchtbellens in een poreuze zandkolom. Verslag R-911-S
TU Eindhoven.
- [DAL90] Dalfsen W. van (1990): private communication.
- [DEV59] Devin C. (1959): Survey of thermal, radiation and viscous
damping of pulsating air bubbles in water.
J. Acoust. Soc. Am. 31, pp 1654-1667
- [DON55] McDonald D.A.(1955): The relation of pulsatile pressure to
flow in arteries. J. Physiol. 127 pp. 533 - 552.

- [DUN86] Dunn K.J. (1986): Acoustic attenuation in fluid saturated-porous cylinders at low frequencies.
J. Acoust. Soc. Am. 79 (6) pp 1709-1721
- [DWI57] Dwight H.B. (1957): Tables of integrals and other mathematical data. The Macmillan Company, New York.
- [DIJK90] Dijk P. van (1990): Porositeit, permeabiliteit, saturatie en een nieuw belgroeimodel. Verslag R-1057-S TU Eindhoven.
- [ENG85] Engbers P.M.G. (1985) Een fast fourieranalyse van golfvoortplanting in met water verzadigde media Verslag R-711-S TU Eindhoven.
- [GRI87] Grinten J.G.M. van der (1987): An experimental study of shock-induced wave propagation in dry, water-saturated and partially saturated porous media. Proefschrift TU Eindhoven.
- [HOR83] Horyon J.L. (1983): De compressibiliteit van een water-lucht-mengsel in een poreus medium. Verslag R-606-S TU Eindhoven.
- [JAN85] Janssens M.F.M. (1985): Een programma voor het gebruik van snelle adc's als een meerkanaals transientrecorder. Verslag R-702-S TU Eindhoven.
- [JOH83] Johnson D.L. and Sen P.N. (1983): AIP Conference Proceedings no. 107: Physics and chemistry of porous media. Schlumberger-Doll Research.
- [JOH87] Johnson D.L., Koplik J. and Dashen R. (1987): Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid saturated porous media. J. Fluid. Mech. 176, pp 379-402.
- [KER76] Kerker M. (1976): Adsorption, catalysis, solid surfaces, wetting, surface tension and water. Academic Press, London.
- [MCL55] McLachlan N.W. (1955): Besselfunctions for Engineers. Oxford University Press.
- [MIL82] Milnor W.R. (1982): Hemodynamics. Williams & Wilkins.
- [MOE90] Moerdijk A.J. (1990): Experimenten aan de poreuze kolom. Verslag R-1017-S TU Eindhoven.
- [PRI40] Pfriem H. (1940): Zur thermischen Dampfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen. Akust. Z. 5, 202
- [SCH57] Scheidegger A.E. (1957): The physics of flow through porous media. University of Toronto Press.

- [SMI86] Smits M.A. (1986): Conditionering en karakterisering van een poreus 3-fasen systeem. Verslag R-794-A TU Eindhoven.
- [SNI88] Sniekers R. (1988): Golfvoortplanting in gedeeltelijk met water verzadigde poreuze media. Verslag R-917-A TU Eindhoven.
- [SNI89] Sniekers R., Smeulders D. and Dongen M. van (1989): Pressure wave propagation in a partially water-saturated porous medium. J. Appl. Phys. 66 (9)
- [WOM55] Womersley J.R. (1955) : Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. J. Physiol. 127 pp 533 – 552.
- [WIJN72] Wijngaarden L. van (1972): One dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. Ann. Rev. Fluid. Mech. 4 pp 369-395.

Appendix A: Bepaling saturatie m.b.v. een compressiemeting

Door het volgen van het verloop van de saturatie tijdens een diffusie-experiment kan in combinatie met een diffusiemodel een schatting worden gemaakt voor de uiteindelijke belstraal en de omgevingsstraal. Hiervoor is echter een verband nodig tussen de gemeten porievloeistofcompressibiliteit (β_f) en de momentane saturatie $s_0(t)$. Dit verband zal nu worden afgeleid.

Het comprimeerbaar volume in de schokbuisopstelling bestaat uit een volume zuiver water (V_1) en een volume water met luchtbelletjes (de porievloeistof, V_f). Daarnaast draagt de opstelling (o-ringen etc.) bij aan de compressibiliteit. Het poreuze materiaal wordt incompressibel verondersteld. Er geldt dus:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_f \quad (\text{A1})$$

De definitie van de totale compressibiliteit luidt:

$$\beta_{\text{tot}} = -\frac{dV}{V_0 dP} = -\frac{dV_1}{V_0 dP} - \frac{dV_f}{V_0 dP} \quad (\text{A2})$$

Omschrijven van (A2) geeft:

$$\beta_{\text{tot}} = \frac{V_1}{V_0} \beta_1 + \frac{V_{f0}}{V_0} \beta_f \quad (\text{A3})$$

De nulindices geven de beginsituatie aan. β_f wordt onder frozen condities gemeten zodat voor β_f (4.14) kan worden ingevuld. Substitutie in (A3) geeft:

$$\beta_{\text{tot}} = \beta_1 + \frac{V_{f0}}{V_0} (1-s_0) \frac{P_0}{P^2} \quad (\text{A4})$$

P_0 is de statische druk tijdens het diffusieproces. P is de druk die tijdens de compressiemeting wordt opgelegd. Tenslotte wordt β_1 vervangen door de referentiecompressibiliteit β_{ref} waarin de compressibiliteit van de opstelling is verdisconteerd. β_{ref} wordt gemeten als de opstelling volledig verzadigd is ($s = 1$):

$$\beta_{\text{tot}} = \beta_{\text{ref}} + \frac{V_{f0}}{V_0} (1-s_0) \frac{P_0}{P^2} \quad (\text{A5})$$

Door substitutie van de definitie van β_{tot} kan (A5) herschreven worden tot:

$$-\frac{dV}{V_0 dP} = \beta_{\text{ref}} + \frac{V_{f0}}{V_0} (1-s_0) \frac{P_0}{P^2} \quad (\text{A6})$$

Integratie van (A6) van de beginconditie P_0, V_0 naar de frozen eindconditie P, V geeft na omwerken:

$$\frac{(V_0 - V) - \beta_{\text{ref}} V_0 (P - P_0)}{V_{f0}} = (1 - s_0) \left(1 - \frac{P_0}{P}\right) \quad (\text{A7})$$

De gecorrigeerde volumeverandering $\Delta V'$ is gedefinieerd als:

$\Delta V' = (V_0 - V) - \beta_{\text{ref}} V_0 (P - P_0)$, substitutie in (A7) geeft:

$$\frac{\Delta V'}{V_{f0}} = (1 - s_0) \left(1 - \frac{P_0}{P}\right) \quad (\text{A8})$$

De waarde van $(1-s_0)$ is eenvoudig te bepalen uit de helling van de lijn als $\Delta V'/V_{f0}$ tegen $1-P_0/P$ wordt uitgezet.

Appendix B: Corrigeren van de saturatie voor parasitaire lucht

In het onderste gedeelte van de schokbuis, beneden de poreuze kolom, bevindt zich een volume belucht water. Bij drukverlaging (belgroei) zal hierin vrijwel instantaan een hoeveelheid bellen ontstaan. Deze luchtbelletjes beïnvloeden de compressibiliteit en dus de bepaalde saturatie. Om deze bijdrage af te schatten wordt er een correctieterm aan de totale compressibiliteit toegevoegd. Vergelijking (A2) luidt in dat geval:

$$\beta_{\text{tot}} = -\frac{dV}{V_0 dP} = -\frac{dV_1}{V_0 dP} - \frac{dV_f}{V_0 dP} - \frac{dV_{\text{par}}}{V_0 dP} \quad (\text{B1})$$

V_1 is het vloeistofvolume, V_f het porievloeistofvolume en V_{par} is het parasitaire volume. (B1) kan herschreven worden tot:

$$\beta_{\text{tot}} = \frac{V_1}{V_0} \beta_1 + \frac{V_{f0}}{V_0} \beta_f + \frac{V_{\text{par}}}{V_0} \beta_{\text{par}} \quad (\text{B2})$$

β_1 is de compressibiliteit van zuiver water, β_f en β_{par} hebben beide betrekking op een water-luchtbelletjes-mengsel. Onder frozen condities geldt voor beide de uitdrukking (4.14). De luchtfractie in de porievloeistof is $1-s_0$, de luchtfractie in de parasitaire vloeistof is gelijk aan $1-s_p$. Er geldt dus:

$$\begin{aligned} \beta_f &= \beta_1 + (1-s_0) \frac{P_0}{P^2} \\ \beta_{\text{par}} &= \beta_1 + (1-s_p) \frac{P_0}{P^2} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Substitutie van (B3) in (B2), in rekening brengen van β_{ref} , integratie en omwerken analoog aan Appendix A heeft als eindresultaat:

$$\frac{(V_0 - V) - \beta_{\text{ref}} V_0 (P - P_0)}{V_{f0}} = \left\{ (1-s_0) + \frac{V_{\text{par}}}{V_{f0}} (1-s_p) \right\} \left(1 - \frac{P_0}{P} \right) \quad (\text{B4})$$

Met de definitie van $\Delta V'$ uit Appendix A volgt eenvoudig:

$$\frac{\Delta V'}{V_{f0}} = \left\{ (1-s_0) + \frac{V_{\text{par}}}{V_{f0}} (1-s_p) \right\} \left(1 - \frac{P_0}{P} \right) \quad (\text{B5})$$

In het geval dat er gecorrigeerd moet worden voor de parasitaire lucht dient de gevonden waarde van $1-s_0$ volgens (A5) verminderd te worden met de term $V_{\text{par}}/V_{f0} \cdot (1-s_p)$ in (B5). De volumina van de schokbuis staan in Appendix C. De fractie $1-s_p$ kan bepaald worden met behulp van de evenwichtsvoorwaarde (4.9) en (4.12). De uitgangssituatie hierbij is het beluchte water onder doorborreldruck. Bij het belgroeiexperiment beschreven in §4.3.3 is deze term gelijk aan $6.8 \cdot 10^{-4}$.

Appendix C: Afmetingen en volumina van de schokbuisopstelling

Hoogte kolom	1410 mm
Diameter kolom	74 mm
Diameter buis	77 mm
Oppervlak doorsnede buis	46.57 cm ²
Hoogte waterlaag boven kolom	535 mm
Volume spleet	501657.37 mm ³
Volume poriën (V_{f0})	1758613.6 mm ³
Volume water boven kolom	3529259.6 mm ³
Volume onder kolom (V_{par})	300000 mm ³
<hr/>	
Totaal comprimeerbaar volume (V_0)	$5.82 \cdot 10^6$ mm ³

Referentiecompressibiliteit $\beta_{ref} = (7.76 \pm 0.06) \cdot 10^{-10}$ Pa⁻¹.

Appendix D: Afleiding Γ voor thermische demping

De complexe voorfactor Γ die het verband tussen druk- en volumevariaties beschrijft tijdens de oscillatie van een vrije bel zal nu worden afgeleid. Het uitgangspunt is de eerste hoofdwet van de thermodynamica:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} \quad (D1)$$

Substitutie van de inwendige energie per massa-eenheid, verwaarlozing van convectieve termen, herschrijven van dQ met behulp van de wet van Fourier levert voor een ideaal gas:

$$\lambda \nabla^2 T = \rho_g c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{R_g}{V} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial P_g}{\partial t} \quad (D2)$$

V is het belvolume, R_g de gasconstante en P_g de gasdruk.

Linearisatie van druk, temperatuur en dichtheid in (D2) geeft na invoering van bolcoördinaten de gelineariseerde energievergelijking voor de bel:

$$\frac{\partial(rT')}{\partial t} = a_g \frac{\partial^2(rT')}{\partial r^2} + \frac{r}{\rho_g c_p} \frac{dP_g'}{dt} \quad (D3)$$

a_g is de temperatuurvereffeningscoëfficiënt van het gas, T' is het temperatuurverschil met de omgeving. De randvoorwaarden behorende bij (D3) zijn:

$$r = R: T' = 0$$

$$r = 0: T' \text{ eindig}$$

Oplossen van (D3) en substitutie van een harmonische variatie voor T' en P_g geeft:

$$\hat{T} = \frac{\hat{R}P_g}{\rho_g c_p} \left[\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{e^{\Psi R} - e^{-\Psi R}} \right) \frac{e^{\Psi R} - e^{-\Psi R}}{r} \right] \quad (D4)$$

Hierin is Ψ gelijk aan $(1+i) \cdot (\omega/2a_g)^{1/2}$

Om de complexe voorfactor Γ te vinden dient de energiebalans van de bel opgesteld te worden. M.b.v. (D4) zijn uitdrukkingen voor de warmtestroom van de bel naar de omgeving en voor de inwendige energie af te leiden.

1. De warmtestroom naar de omgeving:

Uit de wet van Fourier volgt:

$$\left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right) = -\lambda \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial r}\right) 4\pi r^2 \Big|_{r=R} \quad (D5)$$

Met behulp van (D4) volgt voor (D5);

$$\left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right) = 4\pi\lambda \frac{R P_g}{\rho_{g0} c_p} \left(\Psi R \frac{e^{\Psi R} + e^{-\Psi R}}{e^{\Psi R} - e^{-\Psi R}} - 1 \right) \quad (D6)$$

2. De inwendige energie van de bel:

De amplitude van de variatie van de inwendige energie, \hat{E} , is voor een ideaal gas gelijk aan:

$$\hat{E} = \int_0^R (\rho_{g0} 4\pi r^2) c_v \hat{T} dr \quad (D7)$$

Substitutie van (D4) in (D7) en oplossen van de integraal geeft:

$$\hat{E} = 4\pi \frac{c_v}{c_p} R P_g \left(\frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{\Psi^2} - \frac{R}{\Psi} B \right) \quad (D8)$$

De functie B is gedefinieerd als:

$$B = \frac{e^{\Psi R} + e^{-\Psi R}}{e^{\Psi R} - e^{-\Psi R}} \quad (D9)$$

Vervolgens kunnen in de energiebalans (D1) de convectieve termen worden verwaarloosd. Invullen van een harmonische variatie voor E, V en Q levert:

$$\left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right) = i\omega \hat{E} + i\omega P_{g0} \hat{V} \quad (D10)$$

Uit (D6) volgt eenvoudig de toegevoerde warmtestroom; substitutie van (D8) en de uitdrukking voor de toegevoerde warmtestroom in betrekking (D10) geeft na enig omwerken:

$$\frac{\hat{V}}{V_0} = \frac{\hat{P}_g}{\gamma P_{g0}} \left\{ 1 + (3\gamma - 3) \left(\frac{B}{\Psi R} - \frac{1}{(\Psi R)^2} \right) \right\} \quad (D11)$$

Waarin $\gamma = c_p/c_v$ en $V_0 = 4/3\pi R^3$. Met de definitie $1/\Gamma = -P_{g0}\hat{V}/V_0\hat{P}_g$ volgt:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + 3(\gamma - 1) \left[\frac{B}{\Psi R} - \frac{1}{(\Psi R)^2} \right] \right\} \quad (D12)$$

Hiermee is de complexe voorfactor Γ verkregen die het verband tussen volume- en drukvariatië bij een vrije oscillerende bel beschrijft.

Appendix E: Limiet voor $\phi \rightarrow 0$ van voorfactor Γ

Reeksontwikkeling van de functie B in (D9) met $x = (1+i)\phi$ geeft:

$$B = \frac{1+x+1/2 \cdot x^2+1/6 \cdot x^3+1/24 \cdot x^4+\dots+1-x+1/2 \cdot x^2-1/6 \cdot x^3+1/24 \cdot x^4}{1+x+1/2 \cdot x^2+1/6 \cdot x^3+1/24 \cdot x^4+\dots-1+x-1/2 \cdot x^2+1/6 \cdot x^3-1/24 \cdot x^4}$$

Uitschrijven hiervan geeft :

$$B = \frac{1}{x} \cdot (1+1/3 \cdot x^3-1/45 \cdot x^4+\dots) \quad (\text{E1})$$

Substitutie van (E1) in (D12) geeft een benadering voor Γ :

$$\Gamma = \frac{1}{1+3(\gamma-1) \cdot (1/x^2 \cdot (1/3 \cdot x^3-1/45 \cdot x^4))} \approx \frac{1}{1-1/15 \cdot x^2(\gamma/(\gamma-1))} \quad (\text{E2})$$

Relatie (E2) kan benaderd worden door:

$$\Gamma \approx 1 + \frac{1}{15} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) = 1 + \frac{2}{15} i \phi^2 \cdot \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \quad (\text{E3})$$

Waarin gebruik gemaakt is van : $x^2 = 2i\phi^2$. De limieten voor $\phi \rightarrow 0$ volgen eenvoudig uit (E3):

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \text{Re}(\Gamma) = 1 \quad (\text{E4})$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \text{Im}(\Gamma) = 0 \quad (\text{E5})$$

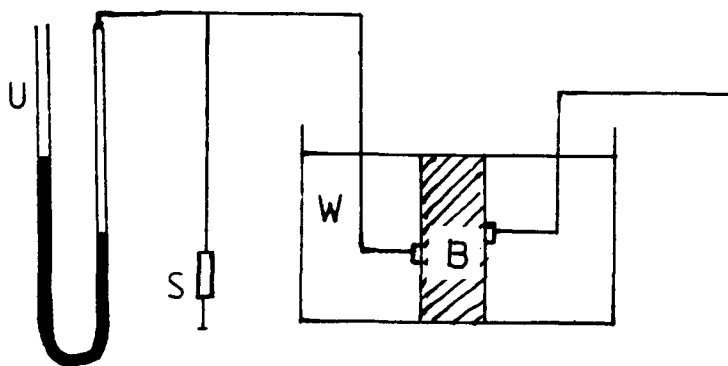
Bij berekeningen betreffende thermische demping speelt het imaginaire deel van Γ een belangrijke rol. Voor lage waarden van ϕ ($\phi \ll 1$) is in de berekeningen de volgende benadering gebruikt:

$$\text{Im}(\Gamma) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{2}{15} \cdot \phi^2 \quad (\text{E6})$$

Appendix F Oppervlaktespanningsproefje

Door middel van luchtinjectie in met water verzadigd poreus materiaal kan een indruk worden verkregen van de druksprong die aan het beloppervlak optreedt ten gevolge van de oppervlaktespanning.

In figuur F1 is de experimentele opstelling schematisch weergegeven. Het poreuze blok bevindt zich in een bak met water. Er zijn twee ingangen op het blok gemonteerd. De ene ingang is afgedicht met siliconenkit en zit op een diepte van 60 mm onder de waterspiegel. De andere ingang bevindt zich op een diepte van 45 mm en is afgedicht d.m.v een rubberen o-ring.



Figuur F1: Schematische weergave van de opstelling bij het oppervlaktespanningsproefje. B is het poreuze blok, S is de spuit, U de U-buis en W het water.

De lucht wordt met behulp van een spuit geïnjecteerd en bereikt via een slangetje de opening op het poreuze blok. De druk in het slangetje wordt gemeten met behulp van een U-buis manometer. Het proefje gaat als volgt in zijn werk:

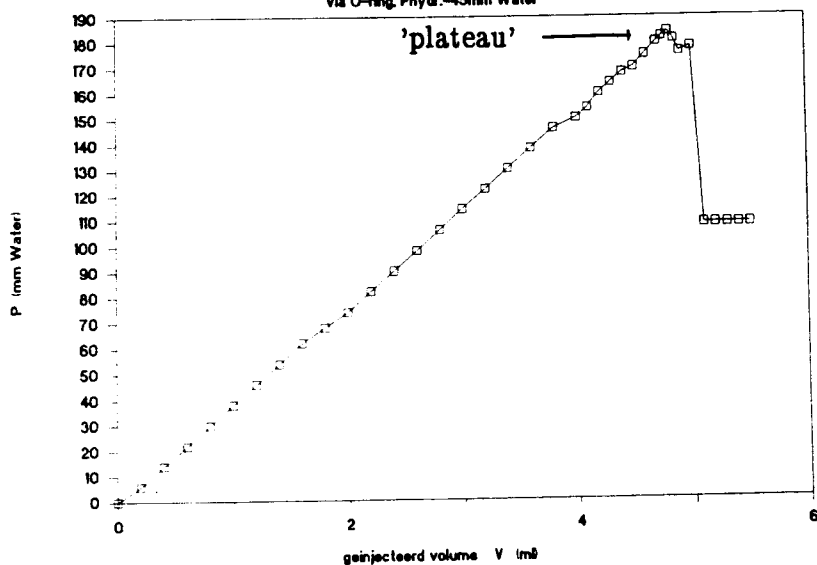
Het geïnjecteerde luchtvolume wordt als functie van de druk gemeten. Allereerst moet met luchtinjectie de druk dermate worden verhoogd dat het hydrostatische drukverschil ten gevolge van de waterhoogte wordt overwonnen. Daarna moet de weerstand van het poreuze materiaal doorbroken worden. Tijdens deze twee fasen gaat de lucht hoofdzakelijk naar de U-buis manometer. Hierna zal echter lucht het poreuze materiaal binnentreden en een luchtbel vormen. Deze luchtbel groeit bij constante druk; er gaat geen lucht meer naar de U-buis. Er zou dus een drukplateau moeten optreden. In de praktijk wordt geen echt plateau gemeten, maar een drukmaximum.

Dit is het gevolg van doorbraak; na injectie van klein volume lucht in het materiaal (≈ 0.1 ml) ontwijkt de gevormde bel via een poriekanaal naar buiten. Het gemeten drukmaximum is een maat voor de overdruk in de bel. Deze waarde, verminderd met het hydrostatische drukverschil ten gevolge van de waterhoogte, levert het drukverschil over de belrand. Hierbij wordt aangenomen dat de bel op de hoogte van de ingang zit.

De resultaten van enkele metingen zijn weergegeven in de figuren F2 en F3. Langs de horizontale as staat het geïnjecteerde volume in ml, op de verticale as staat de druk in mm water. In het begin is de druktoename evenredig met het geïnjecteerde luchtvolume. Op het moment van belvorming treedt er een drukmaximum op. Na doorbraak treedt er een plateau op; alle extra toegevoerde lucht stroomt onder constante druk uit het materiaal. Het gemiddelde drukverschil over de belrand volgend uit de 4 metingen bedraagt 1280 ± 80 Pa. Omdat na een kleine volume-injectie doorbraak optreedt is het waarschijnlijk dat de bel in lengterichting groeit in een of meerdere poriën.

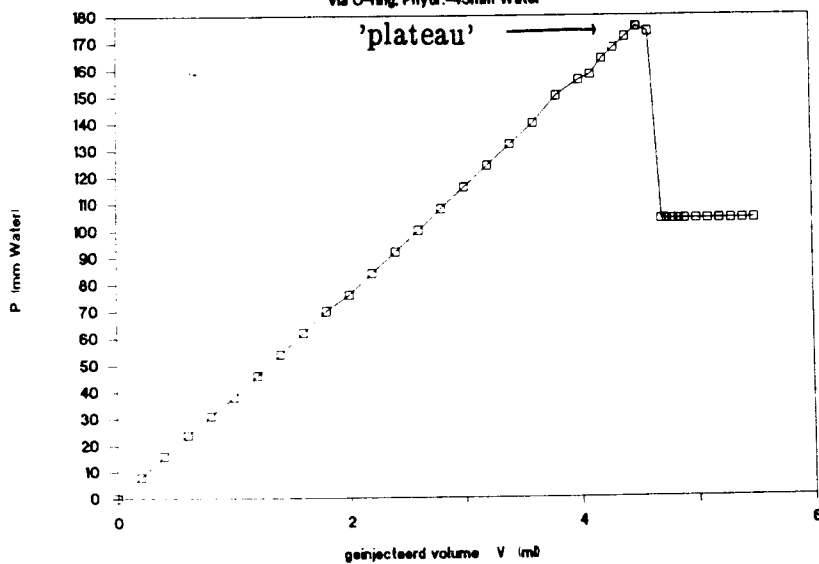
LUCHTINJECTIE IN POREUS MATERIAAL

via O-ring, Phedr.-45mm Water



LUCHTINJECTIE IN POREUS MATERIAAL

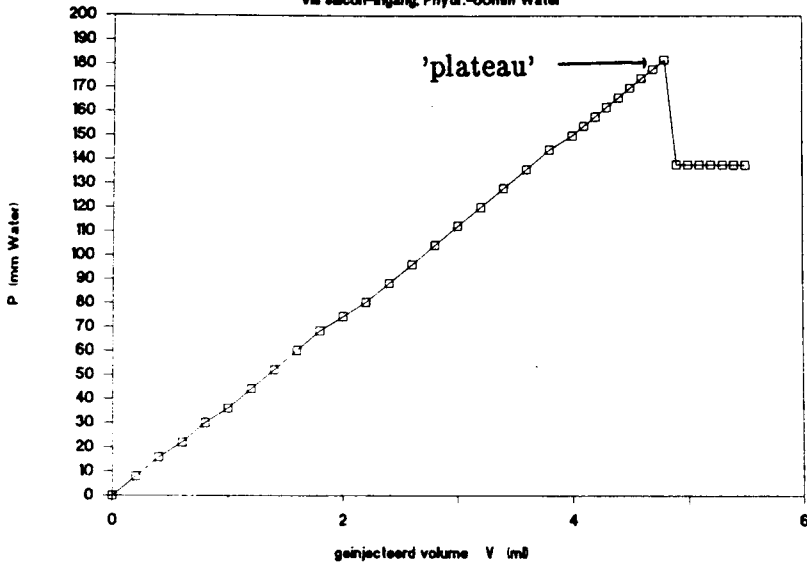
via O-ring, Phedr.-45mm Water



Figuur F2: Twee resultaten van de oppervlaktespanningsproef gebruikmakend van de O-ring ingang. Op de horizontale as staat het geïnjecteerd volume in ml. Op de verticale as staat de druk in mm water.

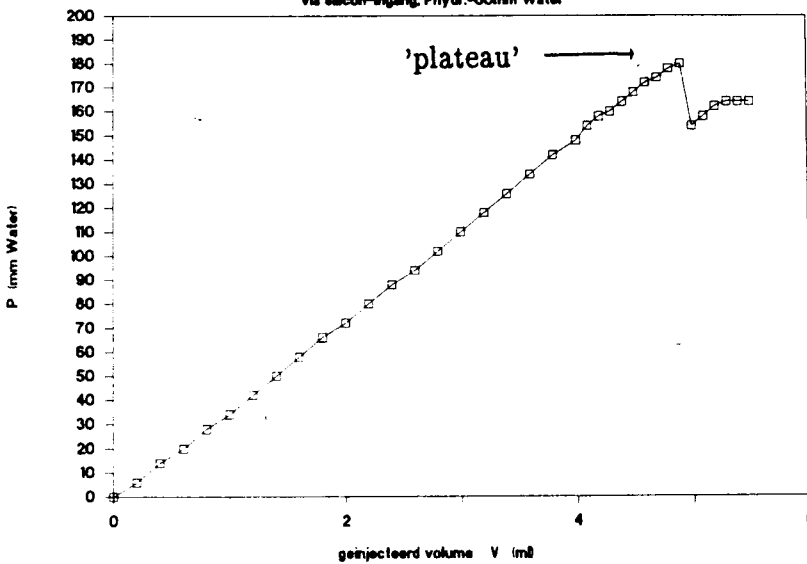
LUCHTINJECTIE IN POREUS MATERIAAL

via silicon-ingang, Phedr.-60mm Water



LUCHTINJECTIE IN POREUS MATERIAAL

via silicon-ingang, Phedr.-60mm Water



Figuur F3: Twee resultaten van de oppervlaktespanningsproef gebruikmakend van de silicon-ingang. Op de horizontale as staat het geïnjecteerd volume in ml. Op de verticale as staat de druk in mm water.

Appendix G: Benaderingen voor de correctiefactor F

Door Biot [BIO56b] is een uitdrukking voor de correctiefactor F gevonden, die de frequentie-afhankelijkheid van de interactiekracht tussen vloeistof en skelet beschrijft:

$$F = \frac{1/4 \cdot i \mu^2 \cdot J_1(\mu\sqrt{-i})}{\mu\sqrt{-i} \cdot J_0(\mu\sqrt{-i}) - 2 \cdot J_1(\mu\sqrt{-i})} \quad (G1)$$

De parameter μ is gegeven door: $\mu = R_p \sqrt{(\omega/\nu)}$. J_0 en J_1 zijn Besselfuncties van de nulde resp. eerste orde. De benaderingen voor (G1) die door Biot zijn opgesteld zijn echter niet correct. Daartoe zullen nu een aantal andere uitdrukkingen worden besproken.

Door Womersley [WOM55] is een model voor de stroming in een star cilindrisch bloedvat opgesteld. De vloeistof is incompressibel en de snelheid v is alleen een functie van r . Het verband tussen de gemiddelde snelheidsamplitude over de doorsnede en de complexe amplitude van de druk is gegeven door:

$$\bar{v} = \frac{-1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} \cdot (1 - F_w) \quad (G2)$$

Hierin is ρ de dichtheid van de vloeistof. F_w is de zogenaamde Womersley functie die de frequentie-afhankelijkheid van de wrijving tussen stroming en wand beschrijft. Deze uitdrukking is algemeen van toepassing op een oscillerende stroming in een cilindrische pijp. De functie F_w is gegeven door:

$$F_w = \frac{2}{\mu\sqrt{-i}} \cdot \frac{J_1(\mu\sqrt{-i})}{J_0(\mu\sqrt{-i})} \quad (G3)$$

Voor $\omega \rightarrow \infty$ geldt: $|1 - F_w| \rightarrow 1$, $\text{argument}(1 - F_w) \rightarrow 0$; De wrijving tussen vloeistof en wand is dan verwaarloosbaar. De complexe F_w functie is getabelleerd door Milnor [MIL82]. Het verband tussen F_w en de correctiefactor F van Biot volgt uit (G1) en (G3):

$$F = \frac{1}{8} \cdot i \mu^2 \cdot \frac{F_w}{1 - F_w} \quad (G4)$$

Er zullen een aantal benaderingen voor F_w gegeven worden waaruit F is af te leiden met behulp van (G4).

1. Laagfrequent (μ klein):

Voor de Besselfuncties J_0 en J_1 schrijven we (zie Mclachlan [MCL55]):

$$\begin{aligned} J_0(\mu\sqrt{-i}) &= \text{ber}\mu + i \cdot \text{bei}\mu \\ J_1(\mu\sqrt{-i}) &= \text{ber}_1\mu + i \cdot \text{bei}_1\mu \end{aligned} \quad (\text{G5})$$

De reeksontwikkelingen voor ber , bei volgen uit Abramowitz & Stegun [ABR65].

Uitschrijven van (G1) met behulp van (G5) levert:

$$F = \frac{1}{i-1} \cdot \frac{\text{ber}_1^*\mu + i \cdot \text{bei}_1^*\mu}{\text{ber}\mu + i \cdot \text{bei}\mu} \quad (\text{G6})$$

Met:

$$\begin{aligned} \text{ber}_1^*\mu &= -1 - \frac{(1/2 \cdot \mu)^2}{1!2!} + \frac{(1/2 \cdot \mu)^2}{2!3!} + \frac{(1/2 \cdot \mu)^6}{3!4!} - \dots \\ \text{bei}_1^*\mu &= 1 - \frac{(1/2 \cdot \mu)^2}{1!2!} - \frac{(1/2 \cdot \mu)^4}{2!3!} + \frac{(1/2 \cdot \mu)^6}{3!4!} + \dots \\ \text{ber}\mu &= 1 - \frac{(1/2 \cdot \mu)^4}{(2!)^2} + \frac{(1/2 \cdot \mu)^8}{(4!)^2} - \frac{(1/2 \cdot \mu)^{12}}{(6!)^2} + \dots \\ \text{bei}\mu &= (1/2 \cdot \mu)^2 - \frac{(1/2 \cdot \mu)^6}{(3!)^2} + \frac{(1/2 \cdot \mu)^{10}}{(5!)^2} - \dots \end{aligned} \quad (\text{G7})$$

Substitutie van (G7) in (G6) en verwaarlozing van hogere orde termen geeft voor $\mu < 1$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(F) &= \frac{1152 + 39\mu^4}{1152 + 38\mu^4} \\ \text{Im}(F) &= \frac{960\mu^2 + 31\mu^6}{2340 + 760\mu^8} \end{aligned} \quad (\text{G8})$$

2. Hoogfrequent (μ groot):

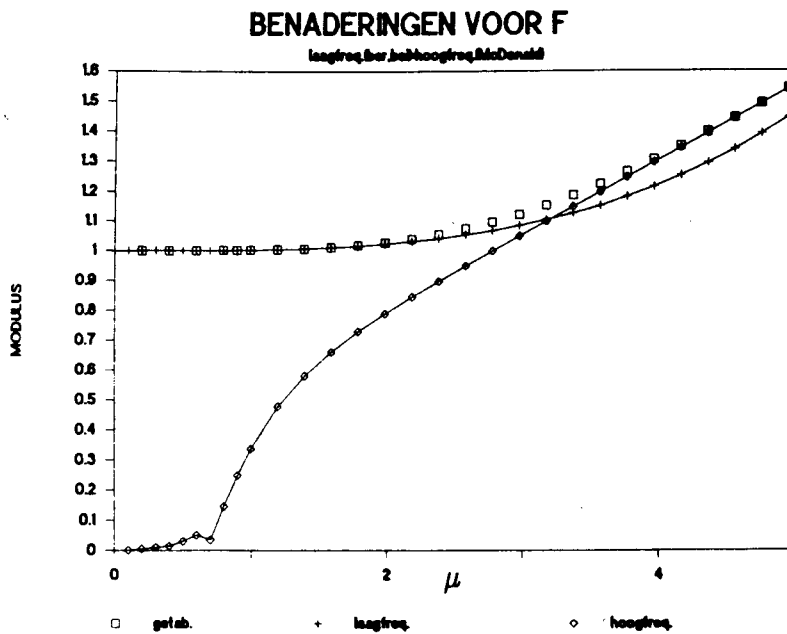
Hierbij wordt gebruikt gemaakt van een asymptotische expansie gevonden door McDonald [DON55], voor het argument en de modulus van $1-F_w$. De F factor volgt hieruit met behulp van (G4).

Voor $1-F_w$ geldt:

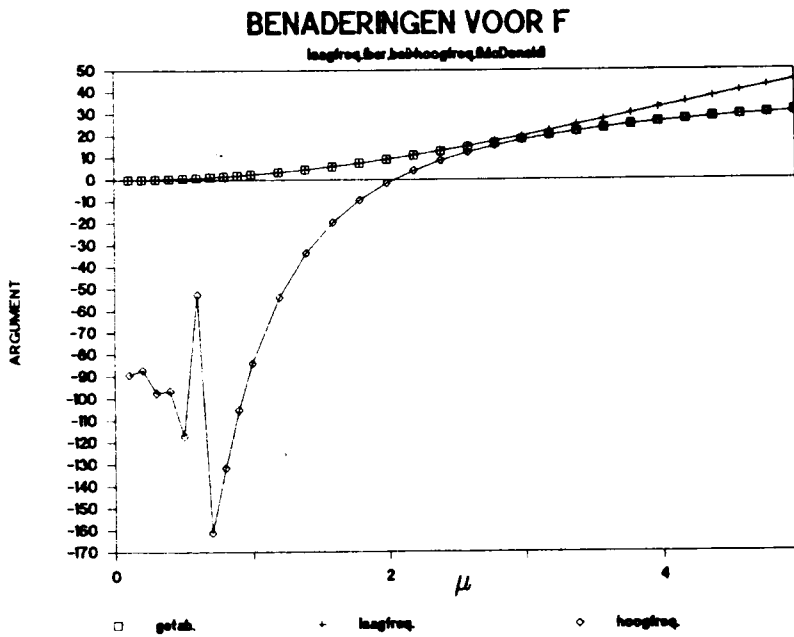
$$|1-F_w| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}$$
$$\arg(1-F_w) = \frac{\sqrt{2}}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{19}{24 \cdot \sqrt{2} \cdot \mu^3} \quad (\text{G9})$$

Het argument en de absolute waarde van de hoog- en laagfrequente benaderingen zijn samen met de waarden van F , volgend uit getabelleerde waarden van F_w , uitgezet in figuur G1 en figuur G2.

De laagfrequente benadering die volgt uit (G8) blijkt te voldoen voor $\mu < 3$. De hoogfrequente benadering van McDonald, (G9), voldoet voor $\mu > 4$. In het tussengebied kan de exacte uitdrukking (G6) in combinatie met (G7) gebruikt worden.



Figuur G1: Absolute waarde van F; de getabelleerde waarde, de hoogfrequente benadering en de laagfrequente benadering als functie van de parameter μ .



Figuur G2: Het argument van F; de getabelleerde waarde, de hoogfrequente benadering en de laagfrequente benadering als functie van de parameter μ .

Appendix H: Eigenschappen van het poreus materiaal en de porievloeistof

<u>grootheid</u>	<u>symbool</u>	<u>waarde</u>
Eigenschappen poreus materiaal:		
dichtheid poreus materiaal	ρ_p (kg/m ³)	$2.65 \cdot 10^3$
porositeit	n	0.29
1 ^{ste} Forchheimerparameter:		
bij Biot berekeningen	a (m ⁻²)	$1.78 \cdot 10^{10}$
bij dempingsberekeningen	a (m ⁻²)	$1.10 \cdot 10^{10}$
permeabiliteit:		
bij Biot berekeningen	κ (m ²)/(Darcy)	$5.6 \cdot 10^{-11}/56$
bij dempingsberekeningen	κ (m ²)/(Darcy)	$9.1 \cdot 10^{-11}/91$
constrained modulus	K_p (GPa)	4.5
toegevoegde massaparameter		
bij Biot berekeningen	α	1.45
bij dempingsberekeningen	α	2.70
effectieve poriestraal	R_p (m)	$\sqrt{(8\alpha/an)}$
Eigenschappen porievloeistof:		
dichtheid water	ρ_1 (kg/m ³)	$1.0 \cdot 10^3$
compressiemodulus water	K_1 (Gpa)	2.2
compressibiliteit water	β_1 (Pa ⁻¹)	$4.6 \cdot 10^{-10}$
dynamische viscositeit	η (kgm ⁻¹ s ⁻¹)	$1.0 \cdot 10^{-3}$
kinematische viscositeit	ν (m ² /s)	$1.0 \cdot 10^{-6}$
oplosbaarheidscoëff. lucht	ω	0.021