

MASTER

Adiabatische expansie van 3He in superfluide 4He

Gerritsen, H.J.

Award date:
1991

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Verslag van afstudeeronderzoek verricht in de groep Lage Temperaturen van de vakgroep Vaste Stoffysica. Periode november 1990 tot en met juli 1991.

P.E. 364982

Adiabatische expansie van
 ^3He in superfluïde ^4He .

Han Gerritsen augustus 1991

Begeleiders

Ir. A.P.J. Voncken

Dr. A.T.A.M. de Waele

Afstudeerhoogleraar

Prof. Dr. H.M. Gijsman

Samenvatting.

Adiabatische expansie van ^3He in ^4He is een koelproces in het millikelvingebied. Aan een hoeveelheid voorgekoeld geconcentreerd ^3He wordt via een superlek superfluïde ^4He toegevoegd. Bij lage temperaturen zijn twee fasen met elkaar in evenwicht. De geconcentreerde lichtere fase drijft op de verzadigde verdunde fase. Bij het oplossen wordt aan de fasegrens koude geproduceerd en wordt warmte aan de omgeving onttrokken. Door het ^3He volledig op te lossen is een temperatuursreductie van 4.57 haalbaar.

Dit proces is numeriek benaderd door een model, dat de reële situatie goed beschrijft voor temperaturen beneden de 20 mK. Met dit model zijn, zonder de invloed van warmtelekken en viskeuze opwarming mee te nemen, de temperatuurprofielen berekend in het verloop van een expansie. Door oneindig langzaam te injecteren is de koeling van het systeem het meest effectief. Wordt er sneller geïnjecteerd, dan zal de fasegrens kouder worden dan de rest van het systeem en is de koudeproductie geringer. Door temperatuurgradiënten zal dan entropieproductie optreden. In een later stadium is het model verbeterd door de warmtegeleidingscoëfficiënt te fitten met de praktische waarden tot 150 mK en zijn warmtelekken wel meegenomen.

De temperatuur in het expansievat wordt gemeten met speerweerstand, die beneden 20 mK niet meer betrouwbaar zijn. Daarom is onderzoek verricht aan een trildraadviscositeitsmeter, waarmee de viscositeit van het helium te meten is. Als we het verband tussen de viscositeit en de temperatuur nu kennen door de TDV goed te ijken, dan is door viscositeitsmetingen de temperatuur te bepalen. Het bleek dat in het hogere temperatuurgebied ($T > 100$ mK) de viscositeitsmetingen niet goed reproduceerbaar waren, terwijl in onze opstelling bij lage temperaturen nog geen metingen zijn verricht. Wel zijn oude metingen op een betrouwbaarder wijze verwerkt. Het gemeten signaal wordt met behulp van een computerprogramma gefit met het theoretische signaal, waaruit de viscositeit wordt bepaald.

Daarnaast is gemeten aan een opstelling, waarmee deze adiabatische expansie te realiseren was. Om goed inzicht in het proces te verkrijgen is op verschillende plaatsen de temperatuur gemeten en kon door capaciteitsmetingen het heliumniveau in de vaatjes bepaald worden, alsmede de concentratie van de oplossing. Het doel was om met deze opstelling een zo laag mogelijke temperatuur te behalen. Hiertoe moet het vat waarin de expansie plaatsvindt goed voorgekoeld worden. Hiervoor wordt een thermisch contact gelegd met de mengkamer van het mengkoelersysteem via een heatswitch. Deze switch is ook open te zetten, waardoor de thermische verbinding wordt verslechterd. Dit doen we tijdens een expansie, om dit proces adiabatisch te laten plaatsvinden. Ondanks aangebrachte verbeteringen in de opstelling en ten gevolge van een lek in het systeem is 21.5 mK de laagst behaalde temperatuur. De reductiefactor was hierbij 3.2.

Inhoud.

	Paginanummer
1. Inleiding	2
1.1 Helium	2
1.2 Mengkoeler	3
1.3 Adiabatische expansie	4
2. Theorie Adiabatische Expansie	5
2.1 Inleiding	5
2.2 Adiabatische expansie	5
2.3 Heatswitch	12
2.4 Capaciteitsmetingen in de vaatjes	16
2.5 Thermometrie	21
3. Trildraad Viscositeitsmeter (TDV)	23
3.1 Inleiding	23
3.2 Theorie	24
3.3 Het fitten van een scan met de TDV	28
3.4 Experiment	28
3.5 IJking van de TDV	29
4. Numerieke berekeningen aan de expansie	32
4.1 Inleiding	32
4.2 Model van het experiment	32
4.3 Discretisatie	37
4.4 De entropie	41
4.5 Viskeuze opwarming	42
4.6 Resultaten van de berekeningen	46
5. Experimenten en Resultaten	50
5.1 Inleiding	50
5.2 Run 321	50
5.3 Run 322	56
5.4 De andere runs	58
6. Conclusies en suggesties voor vervolgonderzoek	60
6.1 Conclusies	60
6.2 Suggesties voor vervolgonderzoek	60
Literatuurlijst	62
Appendices	63
I Automatisering metingen en resultaten	63
II Viscositeit gemeten door de TDV's	64
III Berekening van een temperatuurprofiel	66

Hoofdstuk 1 Inleiding.

§ 1.1 Helium.

In het begin van deze eeuw wist Kamerlingh Onnes het edelgas helium vloeibaar te maken. Dit gebeurt bij een temperatuur van 4.2 K. Door het helium af te pompen en daarmee de dampdruk dus te verlagen, is het mogelijk om de temperatuur van het helium verder te verlagen tot 1.1 K. ^3He , een ander isotoop van helium, wordt pas bij 3.2 K vloeibaar en door de dampdruk te verlagen is zelfs een temperatuur van 0.3 K haalbaar. Om bepaalde interessante fysische eigenschappen van helium, maar ook andere materialen te onderzoeken bij nog lagere temperaturen is het gebruik van een mengkoeler noodzakelijk [Gij-88], zie ook § 1.2. In ongeveer 1965 werden deze operationeel en konden temperaturen behaald worden tot enkele millikelvins.

In dit afstudeerwerk is een methode onderzocht, waarmee in de toekomst nog lagere temperaturen behaald kunnen worden en de stromingseigenschappen van het helium onderzocht kunnen worden. Vloeibaar ^4He gaat zich beneden $T_\lambda=2.17\text{ K}$ namelijk anders gedragen. Het ondergaat bij deze temperatuur een faseovergang. Boven deze lambdatemperatuur gedraagt het ^4He zich als een normale vloeistof en beneden deze temperatuur kan het beschreven worden met het 2-fluïda-model, waarbij er vanuit wordt gegaan, dat de vloeistof uit 2 componenten bestaat. Een normale component, die entropie bevat en een component, die entropieloos is en daarom geen viscositeit heeft. Daarom kan deze component ook zonder wrijving stromen, zij het beneden een bepaalde kritische snelheid. Helium boven de lambdatemperatuur noemen we He-I en beneden deze temperatuur He-II. Hoe lager de temperatuur wordt, hoe groter de verhouding superfluïde/normale component wordt en beneden 1 K zal praktisch al het ^4He superfluïde zijn geworden. ^3He kent deze overgang ook, maar treedt pas op bij $T=0.97\text{ mK}$.

Beneden 0.87 K treedt nog een ander interessant verschijnsel op. Als we een mengsel van ^3He en ^4He afkoelen tot beneden deze temperatuur treedt ontmenging op. Er ontstaan dan twee fasen, één rijk aan ^3He en één arm aan ^4He . Bij verder afkoelen tot aan 0 K zien we dat de ^3He -arme fase nog 6.6% ^3He bevat en de ^3He -rijke fase nagenoeg zuiver ^3He bevat. In de onderstaande figuur is het fasegedrag van ^3He - ^4He mengsels te zien als functie van T en de concentratie ^3He , x .

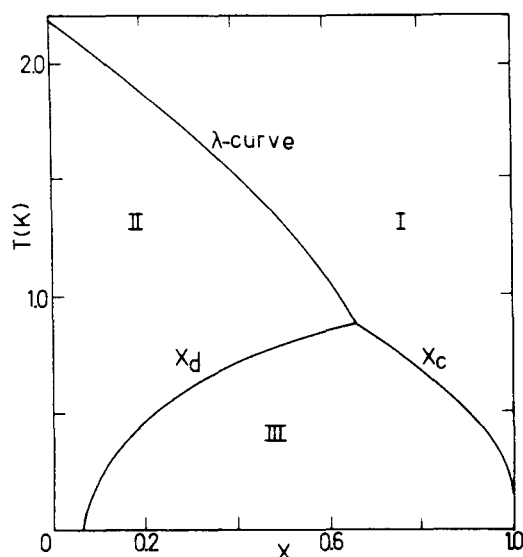


Fig 1.1
Fasediagram van ^3He - ^4He mengsels
bij verzadigde dampdruk.

We zien in deze figuur 3 gebieden. De gebieden I en II worden gescheiden door de λ -curve. Gebied I bevat geen superfluïde ^4He in tegenstelling tot gebied II. Beneden 0.87 K zien we dat het mengsel gaat ontmengen in 2 fasen, een ^3He -arme (verdunde) en een ^3He -rijke (geconcentreerde) fase. Mengsels met een samenstelling van gebied III kunnen niet voorkomen en ontmengen meteen. We zien uit de figuur ook, dat voor $T \rightarrow 0$ in de verdunde fase een kleine hoeveelheid ^3He overblijft, nl. 6.6%. Voor de concentratie ^3He geldt in de verdunde fase als functie van de temperatuur de volgende relatie [Kue-87]:

$$x(T) = 0.066 + 0.5056T^2 - 0.2488T^3 + 18.22T^4 - 74.22T^5 \quad (1-1)$$

Deze vergelijking geldt alleen voor temperaturen beneden 150 mK, het gebied waarin wij ook onze experimenten zullen doen.

§ 1.2 Mengkoeler.

In onze experimenten wordt gebruik gemaakt van de in de vakgroep aanwezige mengkoeler, die hieronder schematisch is getekend (fig 1.2).

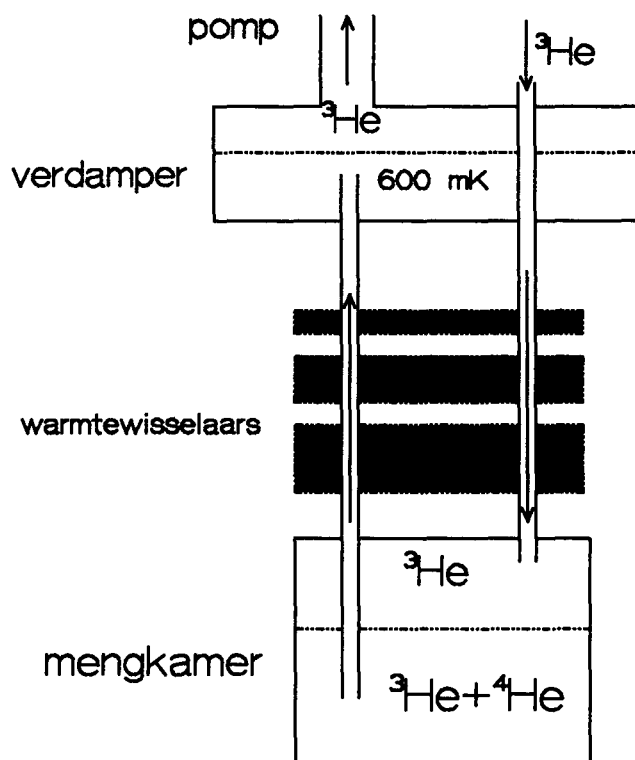


Fig 1.2 De mengkoeler, waarin ^3He gecirculeerd wordt.

In het dictaat van Prof. Gijsman [Gij-88] en in [Lou-74] staat nauwkeurig beschreven hoe een

mengkoeler werkt en daarom zullen hier alleen de hoofdpunten even aangestipt worden.

In de mengkamer bevindt zich een verzadigd mengsel van ^3He in ^4He . Via een aantal warmtewisselaars staat het mengsel in verbinding met de verdamper, waar aan het mengsel gepompt. Hoewel het mengsel daar nog slechts 1% ^3He bevat, zal de onttrokken damp bijna volledig uit ^3He bestaan. Het ^3He zal langs de verdamper, waar het afgekoeld wordt tot zo'n 600 à 700 mK, en via de warmtewisselaars teruggevoerd worden naar de mengkamer. Omdat in de verdamper ^3He aan het mengsel onttrokken wordt, zal vanuit de geconcentreerde fase in de mengkamer atomen oversteken naar het mengsel. Bij deze overgang wordt een hoeveelheid warmte, \dot{Q} , aan de omgeving onttrokken en wel:

$$\dot{Q} = \dot{n}_3(H_{\text{verd}} - H_{\text{gec}}) \quad (1-2)$$

We zijn uitgegaan van een constante stroom ^3He , waardoor we ook een warmtestroom verkrijgen. De enthalpie van de verdunde fase ^3He , H_{verd} , is gelijk aan $96T^2$ J/mol en de enthalpie van de geconcentreerde fase, H_{gec} , is gelijk aan $12T^2$ J/mol. Deze kou wordt gebruikt om het binnenkomende ^3He te koelen tot de temperatuur van de mengkamer. Een ander deel vloeit weg via warmtelekken. Stel nu dat we geen warmtelekken zouden hebben, dan moet het binnenkomend ^3He met een temperatuur T_i , gekoeld worden tot de mengkamer temperatuur, T_M . De warmte, die aan het ^3He onttrokken moet worden, is gelijk aan

$$\dot{Q} = 12\dot{n}_3(T_i^2 - T_M^2) \quad (1-3)$$

waaruit volgt, dat $T_M = T_i/2.8$. Dit leidt tot de conclusie, dat we met goede warmtewisselaars moeten zorgen voor een zo laag mogelijke temperatuur van het binnenkomend ^3He , omdat dat de laagst haalbare temperatuur in de mengkamer bepaalt.

Omdat we echter de warmtelekken nooit helemaal kunnen verwaarlozen zal dit ook een beperkende factor zijn, omdat het koelvermogen van de mengkamer bij lagere temperaturen steeds kleiner wordt en daarmee de invloed van de warmtelekken steeds groter.

§ 1.3 Adiabatische expansie.

De in dit afstudeerwerk onderzochte koelmethode is gebaseerd op het oplossen van het ^3He in superfluïde ^4He , dat via een superlek aan het ^3He wordt toegevoegd. Het principe van deze koelmethode, adiabatische expansie, is in feite hetzelfde als in een mengkoeler, zij het dat we nu geen circulatie van ^3He , maar een stroom van ^4He hebben. In theorie is hiermee door het volledig oplossen van het ^3He een temperatuursdaling met een factor 4.57 mogelijk. In dit verslag zal deze methode worden toegelicht en de optredende verschijnselen en problemen worden behandeld. In hoofdstuk 2 zal de theorie van de adiabatische expansie besproken en de opstelling behandeld worden. In hoofdstuk 3 zal een trilraadviscositeitsmeter besproken worden, waarmee we in de toekomst de temperatuur kunnen meten bij lage temperaturen. Vervolgens zal in hoofdstuk 4 uiteen worden gezet, hoe we het temperatuurprofiel in het expansievat kunnen berekenen en volgen in de tijd. Tenslotte zullen in hoofdstuk 5 de resultaten van het onderzoek aan bod komen.

Hoofdstuk 2 Theorie Adiabatische Expansie.

§ 2.1 Inleiding.

Adiabatische expansie is een koelmethode, waarbij ^3He oplost in ^4He . Hierbij neemt het volume van het ^3He toe en expandeert dus. Omdat bij een bepaalde temperatuur de enthalpie van het ^3He in opgeloste toestand groter is dan in geconcentreerde toestand, zal er warmte aan de omgeving worden onttrokken en daalt de temperatuur van het systeem. In ons geval werken we met 2 vaatjes, een expansievat, waarin zich het ^3He bevindt en het ^4He -vat, waarin zich het ^4He bevindt. Deze vaatjes zijn verbonden via een superlek, waar alleen superfluïde helium doorheen kan stromen. Door het superfluïde ^4He te injecteren in het expansievat, zal het ^3He oplossen en koude geproduceerd worden. We proberen dit zonder warmteoverdracht te laten plaatsvinden, wat wil zeggen dat het adiabatisch gebeurt. In de volgende paragraaf zal dit proces worden toegelicht en in de daarop volgende paragrafen enkele onderdelen uit de opstelling belicht worden.

§ 2.2 Adiabatische expansie.

Als we het ^4He toevoeren aan het expansievat, zullen daar 2 fasen ontstaan. De lichtere fase, het geconcentreerd ^3He , zal drijven op de verdunde fase. Omdat bij het toevoeren van ^4He , het ^3He in oplossing gaat zal warmte aan de vloeistof worden onttrokken. We kunnen ^4He injecteren tot al het ^3He is opgelost en we dus alleen nog een verzadigd mengsel over hebben. We spreken van een expansie, omdat de hoeveelheid geconcentreerd ^3He dat oplost een groter volume inneemt (het superfluïde ^4He is te zien als een mechanisch vacuüm en het ^3He verdampt als het ware). Als we deze expansie van ^3He nu adiabatisch, dus zonder warmteuitwisseling met de omgeving laten plaatsvinden en ook reversibel, dus isentroop, dan is een maximale temperatuursreductie mogelijk van 4.57. Dit zal hieronder berekend worden.

Als het proces isentroop verloopt, dan moet de entropie voor en na de expansie gelijk zijn. De entropie is gelijk aan:

$$S(T) = \int_0^T \frac{C(T')}{T'} dT' \quad (2-1)$$

Hierin is C de soortelijke warmte van het ^3He en S de entropie. De soortelijke warmte van ^3He boven de temperatuur, waarbij het superfluïde wordt (T_c), is voor de verdunde en geconcentreerde fase gelijk aan:

$$C_{\text{verd}}(T) = C_{\text{verd},0} T \quad (2-2)$$

$$C_{\text{gecon}}(T) = C_{\text{gecon},0} T \quad (2-3)$$

Hierin zijn $C_{\text{verd},0}$ en $C_{\text{gecon},0}$ ($[\text{J/molK}^2]$) constanten, die gelijk zijn aan respectievelijk, 104.3 en 22.8 $[\text{J/molK}^2]$. Hiermee verkrijgen we de volgende relatie voor de temperatuur voor en na de expansie:

$$S(T_{\text{voor}}) = S(T_{\text{na}}) \Leftrightarrow C_{\text{gecon},0} T_{\text{voor}} = C_{\text{verd},0} T_{\text{na}} \Leftrightarrow T_{\text{na}} = \frac{T_{\text{voor}}}{4.57}$$

Vervolgens kunnen we het geval bekijken, dat de begintemperatuur beneden de kritische temperatuur van ^3He ligt ($T_c = 0.97$ mK). Voor de soortelijke warmte van het geconcentreerde ^3He kunnen we schatten:

$$C_{\text{gecon}}(T) = C_{\text{gecon},0} \frac{3T^3}{T_c^2} \quad (2-7)$$

met $T < T_c$, maar $T > 0.5$ mK (Deze schatting is gemaakt uit fig. 2.1). Als we nu de temperatuursreductie uitrekenen, vinden we:

$$T_{\text{na}} = \frac{1}{4.57} \frac{T_{\text{voor}}^3}{T_c^2}$$

In de onderstaande figuur is de afhankelijkheid van de entropie, als functie van de temperatuur weergegeven:

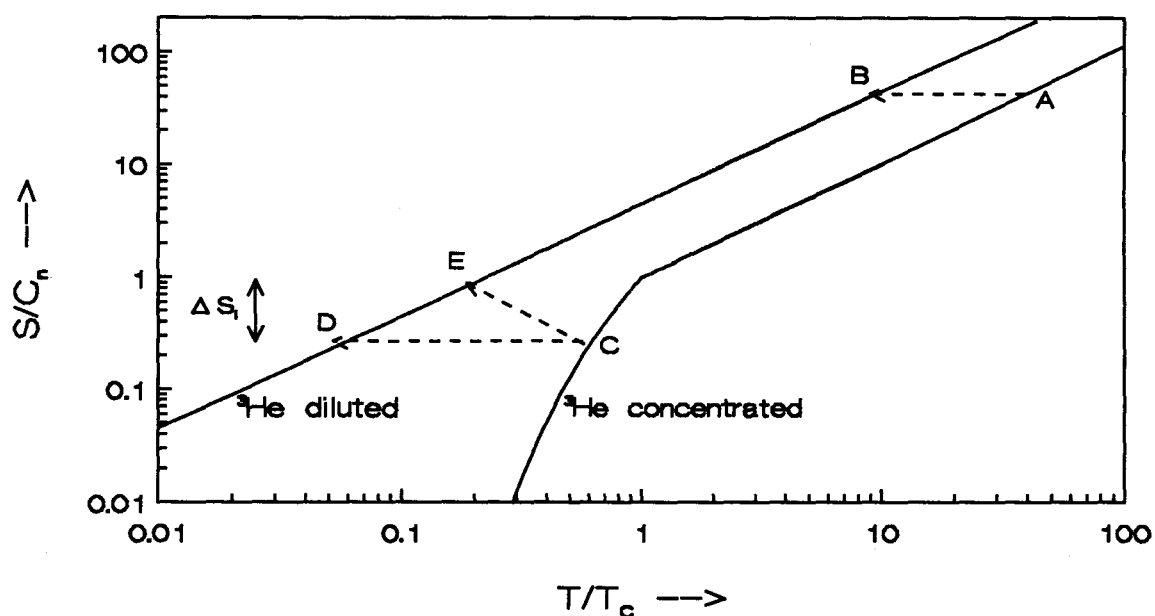


Fig 2.1 Entropie van de verdunde en geconcentreerde fase als functie van de temperatuur.

In het geval van een isentrope overgang van geconcentreerd ^3He naar verdund ^3He (overgangen A-B en C-D) hebben we te maken met een maximale temperatuursreductie. In deze situaties moeten we het superfluïde ^4He zeer langzaam toevoegen. Omdat namelijk de kou alleen aan de fasegrens wordt geproduceerd en niet homogeen over de gehele vloeistof, moet via warmtegeleiding de hele vloeistof op één temperatuur worden gebracht. Wordt het ^4He te snel geïnjecteerd, dan wordt de temperatuur aan de fasegrens lager dan elders en ontstaan temperatuursgradiënten, wat entropieproductie, S_{irr} , met zich meebrengt. Hierdoor is de temperatuursreductie niet optimaal, zoals te zien is uit proces C-E. Op

de grootte van deze irreversibele entropieterm wordt later in dit verslag nog ingegaan. Naast entropieverhoging door irreversibele processen, wordt de entropie van het systeem ook verhoogd door warmtelekken. De entropietoename als gevolg van een warmtelek, \dot{Q}_{lek} , is gelijk aan:

$$\Delta S_Q = \int_0^t \frac{\dot{Q}_{lek}}{T(t')} dt' \quad (2-5)$$

Als we veronderstellen, dat het warmtelek onafhankelijk is van de tijd, dan zien we dat een lange expansieslag inhoudt dat de term S_Q groter wordt. Het is dus mogelijk om met deze gegevens in het achterhoofd een optimale injectietijd te vinden. Hieraan is door P. Krutzen gewerkt [Kru-91].

Nu gaan we eerst de opstelling, waarmee de adiabatise expansie uit te voeren is, bekijken (fig 2.2).

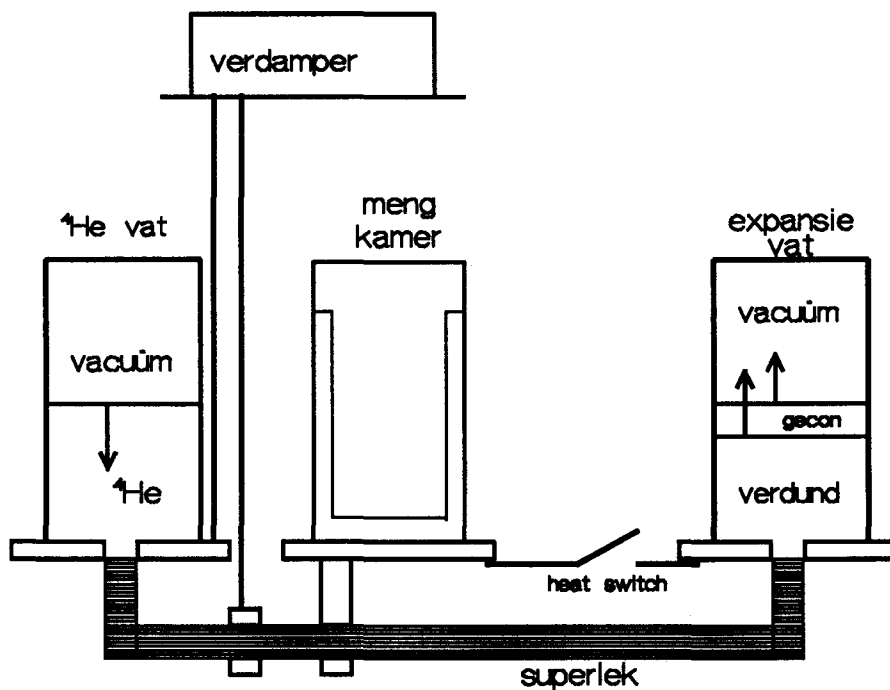


Fig 2.2 Opstelling voor adiabatise expansie.

In de figuur is rechts het expansievat getekend, waarin de expansie plaatsvindt. Links is het ^4He -vat getekend, waarin zich het superfluïde ^4He bevindt, dat via het superlek naar expansievat kan stromen. Dit superlek is gemaakt door zeer fijn poeder (parijs rood, Fe_2O_3) aan te stampen in een metalen buisje. In fig 2.2 is verder de in het vorige hoofdstuk beschreven mengkamer te zien, die wordt gebruikt om het expansievat, via een warmteschakelaar (heat switch), af te koelen. Het afkoelen van het expansievat, gebeurt vóór een expansieslag, waarna we de thermische verbinding met de mengkamer willen verbreken, omdat we **adiabatise** willen expanderen. Op dat moment moet de heat switch dus open staan. In § 2.3 wordt de werking ervan besproken. Door middel van een heater wordt voor de expansie het ^4He -vat op een hoge temperatuur (1.35 K) gebracht. Om het warmtelek via het superlek naar het expansievat zo klein mogelijk te houden, wordt het superlek op twee punten

thermisch geaard. Ten eerste met de verdampers via een dikke koperen draad, en ten tweede met de mengkamer via een koperen contact. Ook het ^4He -vat zelf is verbonden via een dikke koperen draad met de verdampers om de temperatuur, als de heater wordt uitgezet, zo snel mogelijk te laten zakken. De snelheid van de injectie van het ^4He , dus het toevoeren via het superlek, is namelijk afhankelijk van deze temperatuur. Het wel of niet stromen van het superfluïde ^4He door het superlek is afhankelijk van de chemische potentiaal van het ^4He in de beide vaten. De chemische potentiaal van ^4He is afhankelijk van de druk en temperatuur in een vat en de concentratie opgelost ^3He in het ^4He :

$$\mu_4 = \mu_4(p, T, x_3) \quad (2-6)$$

waarbij p de som is van de hydrostatische druk en de dampdruk. We moeten nu nog de afhankelijkheid van de chemische potentiaal onderzoeken wat betreft de temperatuur en de concentratie ^3He . Daartoe zullen in het kort de grootheden, fonteindruk en osmotische druk worden besproken.

- Fonteindruk.

We beschouwen 2 potjes met ^4He , die verbonden zijn door een superlek. Ze hebben temperaturen T_1 en T_2 . Hoe hoger de temperatuur, hoe minder superfluïde component aanwezig zal zijn. Omdat het systeem naar een evenwicht streeft, zal er superfluïde ^4He gaan stromen naar het potje met de hoogste temperatuur. Dit proces zal doorgaan, totdat er evenwicht heerst, in de zin, dat het hydrostatisch drukverschil gelijk is aan het fonteindrukverschil. De chemische potentiaal moet in beide potjes gelijk zijn: $\mu_1 = \mu_2$. Daarmee geldt dus ook:

$$d\mu = -SdT + Vdp = 0 \quad (2-7)$$

Hieruit definiëren we het fonteindrukverschil als

$$\Delta p_f = \int_{T_1}^{T_2} \frac{S(T)}{V_4} dT \quad (2-8)$$

waarin V_4 het molair volume is van ^4He [m^3/mol] en $S(T)$ de molaire entropie van het ^4He [J/molK]. We kunnen de fonteindruk dan definiëren als:

$$p_f(T) = \frac{1}{V_4} \int_0^T S(T') dT' \quad (2-9)$$

We hebben al gezien, dat de entropie afhangt van de temperatuur volgens:

$$S(T) = \int_0^T \frac{C_4(T')}{T'} dT' \quad (2-10)$$

met $C_4(T)$ de molaire warmtecapaciteit van ^4He [J/molK]. Ook de warmtecapaciteit van ^4He hangt weer van de temperatuur af. Met behulp van literatuurwaarden heeft M. Jacobs een fit gemaakt van de warmtecapaciteit als functie van de temperatuur, waaruit na integreren de entropie en daaruit vervolgens de fonteindruk gevonden kan worden [Jac-91]. In [Con-70] zijn ook waarden gegeven voor de fonteindruk. De afhankelijkheid is weergegeven in een grafiek (fig 2.3):

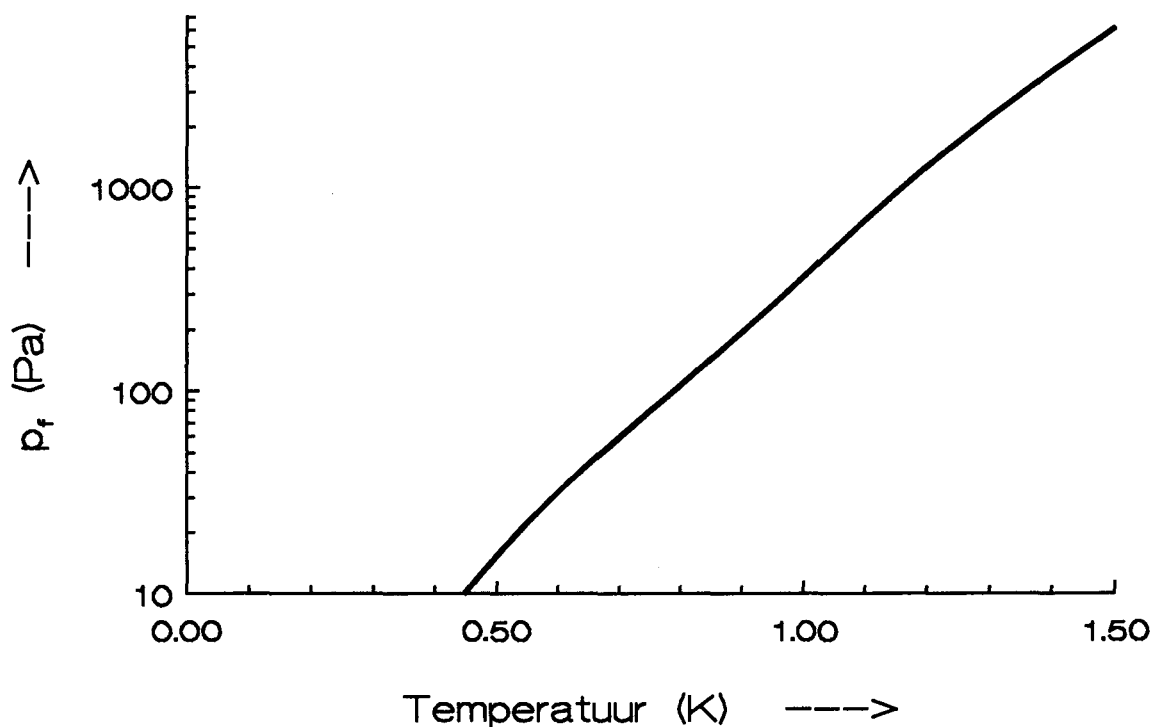


Fig 2.3 De fonteindruk van ${}^4\text{He}$ als functie van T tot 1.5 K [Con-70].

We zien hieruit, dat de fonteindruk in het expansievat ($T < 100$ mK) te verwaarlozen is t.o.v. die in het ${}^4\text{He}$ -vat ($T > 1$ K).

- Osmotische druk.

Osmotische druk wordt veroorzaakt, doordat er 2 stoffen in elkaar zijn opgelost, in dit geval ${}^3\text{He}$ in ${}^4\text{He}$. Als we twee vaatjes met dezelfde temperatuur, met in de ene een ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$ -mengsel en in het andere alleen ${}^4\text{He}$ met elkaar verbinden via een superlek zal wegens het concentratieverschil, ${}^4\text{He}$ naar het mengsel worden gezogen, totdat het ontstane hydrostatische drukverschil gelijk is aan de osmotische druk. In evenwicht moet de chemische potentiaal van ${}^4\text{He}$ gelijk zijn in beide potjes: $\mu_1 = \mu_2$.

$$\mu_1(T, \pi, x_3) = \mu_2(T, 0, 0) \quad (2-11)$$

Voor klassieke ideale mengsels geldt voor de chemische potentiaal:

$$\mu(T, \pi, x_3) = \mu(T, \pi, 0) + RT \ln(1 - x_3) \quad (2-12)$$

en dus voor μ_1 en kleine x_3

$$\mu_1(T, \pi, x_3) = \mu_1(T, \pi, 0) + RT \ln(1 - x_3) = \mu_1(T, \pi, 0) - RT x_3 \quad (2-13)$$

Voor $\mu(T, \pi, 0)$ kunnen we schrijven:

$$\mu(T, \pi, 0) = \mu(T, 0, 0) + \int_0^\pi V_4 dp \quad (2-14)$$

Hiermee hebben we een uitdrukking gekregen voor de osmotische druk, nl.:

$$\pi = \frac{x_3 RT}{V_4} = \frac{RT}{V_3} \quad (2-15)$$

waarin V_3 het volume is van het mengsel met één mol ^3He . Deze berekening geldt echter alleen voor klassieke ideale mengsels en het blijkt dat voor lagere temperaturen het ^3He de Fermi-Dirac-statistiek volgt. De osmotische druk neigt dan naar een constante waarde. In het onderstaande plaatje is het verband tussen de osmotische druk en de temperatuur goed te zien. In de figuur is de fonteindruk ook weergegeven.

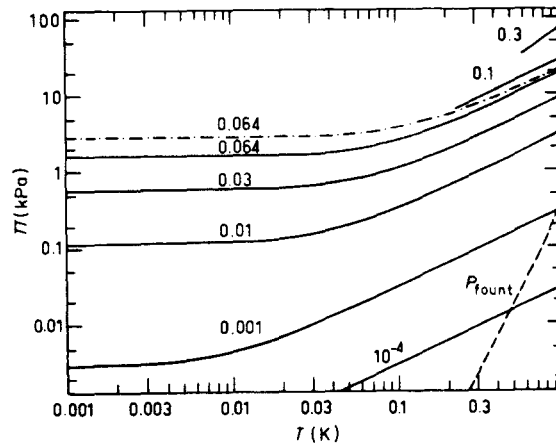


Fig 2.6 De osmotische druk voor verschillende He-mengsels en de fonteindruk als functie van de temperatuur.

De hydrostatische druk is in het ^4He -vat maximaal gelijk aan:

$$p_{\max} = \frac{h_{\max} Mg}{V_m} \quad (2-16)$$

met h_{\max} de maximale hoogte van het He in het vat, M de molaire massa, g de zwaartekrachtversnelling en V_m het molair volume. Alle waarden invullend geeft een maximale druk van 114 Pa. In het expansievat is de dampdruk te verwaarlozen, waar vanwege de lage temperatuur ook de fonteindruk te verwaarlozen is, wat we reeds hebben gezien. In het ^4He -vat kunnen we, vanwege de afwezigheid van ^3He (goed superlek), de osmotische druk verwaarlozen. In het geval, dat er geen ^4He stroomt door het superlek en er aan beide kanten ^4He aanwezig is, moet de chemische potentiaal in beide vaatjes gelijk zijn:

$$\mu_{4,\text{He}}(p_{4\text{He,damp}} + p_{4\text{He,hydr}}, T_{4\text{He}}, 0) = \mu_{4,\text{exp}}(p_{\text{exp,hydr}}, T_{\text{exp}}, x_3)$$

Voor het ^4He -vat geldt:

$$\mu_{4,\text{He}}(p_{\text{damp}} + p_{\text{hydr}}, T, 0) = \mu_{4,\text{He}}(p_{\text{damp}} + p_{\text{hydr}} - p_f, 0, 0)$$

en voor het expansievat:

$$\mu_{4,\text{exp}}(p_{\text{hydr}}, T, x_3) = \mu_{4,\text{exp}}(p_{\text{hydr}} - \pi, 0, 0)$$

waaruit volgt bij evenwicht

$$P_{4\text{He},damp} + P_{4\text{He},hydr} - P_f = P_{exp,hydr} - \pi$$

Is $\Delta\mu \neq 0$, dan zal het superfluïde helium door het superlek gaan stromen.

Uit metingen is gebleken, dat wanneer er 0.75 mW gestookt wordt in het ^4He -vat, de temperatuur constant blijft op ongeveer 1.35 K. De dampdruk in het ^4He -vat is bij deze temperatuur gelijk aan 217 Pa. Bij deze temperatuur is er geen drukverschil en zal er geen ^4He naar het expansievat stromen. De temperatuur is constant, omdat de stook overeenkomt met het warmtelek naar de verdamper via de pook (Cu, 2 mm diameter en 40 cm lengte). Uit deze pookgeometrie volgt een warmtelek van 0.71 mW, nagenoeg gelijk aan de stook, die experimenteel gevonden is. Bij verlaging van de stook zal er ^4He naar het expansievat lopen en een expansie plaatsvinden. De snelste injectie van ^4He verkrijgen we door de stook helemaal uit te zetten. De temperatuur zal dan door koeling via de verdamper gaan zakken (koeling 0.75 mW), maar omdat er superfluïde ^4He verdwijnt, zal normaal ^4He omgezet moeten worden in superfluïde ^4He . Hierbij komt warmte vrij, die maximaal 0.75 mW kan bedragen. Hieruit is te berekenen hoeveel ^4He per seconde door het superlek naar het expansievat stroomt.

$$\dot{Q}_{stook} = \dot{Q}_{verdamper} + \dot{Q}_{s \rightarrow n} \quad (2-17)$$

De gestookte warmte vloeit dus voor een deel weg naar de verdamper en het overige deel zet superfluïde om in normaal ^4He . Als \dot{Q}_{stook} kleiner is dan $\dot{Q}_{verdamper}$ ($=0.75$ mW), zal normaal in superfluïde ^4He omgezet worden, omdat $\dot{Q}_{s \rightarrow n}$ negatief wordt. Deze laatste term is gelijk aan:

$$\dot{Q}_{s \rightarrow n} = \dot{n}_4 H_m(T) \quad (2-18)$$

waarin H_m de molaire enthalpie van het ^4He bij temperatuur T en \dot{n}_4 het aantal mol helium, dat per seconde door het superlek stroomt. Bij 1.35 K is de enthalpie ongeveer gelijk aan 0.5 [J/mol] en wordt de maximale injectie van ^4He , $1.5 \cdot 10^{-3}$ [mol/s].

In § 5.2 van dit verslag zal uit de metingen bepaald worden, wat de enthalpie van het helium is, door \dot{Q}_{stook} uit te zetten tegen \dot{n}_4 .

§ 2.3 Heatswitch.

De heatswitch zorgt voor een goede danwel slechte thermische verbinding tussen de mengkamer en het expansievat. Dit is van belang, omdat we vóór de expansie het expansievat op een zo laag mogelijke temperatuur willen brengen via een goed warmtecontact met de mengkamer en tijdens de expansie de verbinding tussen de mengkamer en het expansievat weer willen verbreken om de mengkamer niet mee af te koelen.

De werking van onze heatswitch berust op het principe, dat warmtegeleiding in een supergeleidend metaal niet via elektronen kan plaatsvinden, maar alleen via fononen. Door het supergeleidende materiaal in een magneetveld te plaatsen, is de supergeleider normaal te maken. De warmtegeleiding kan dan ook plaats vinden via elektronen. Voor de warmtegeleidingscoëfficiënten van de warmtegeleiding door fononen en door elektronen geldt:

$$\begin{aligned} \kappa_{fonon} &\sim T^3 \\ \kappa_{elektron} &\sim T \end{aligned} \tag{2-19}$$

De roosterbijdrage aan de warmtegeleiding is bij lage temperaturen zeer gering en de warmtegeleiding dus slecht. Door de temperatuur van de heatswitch in de praktijk lager te houden dan de kritische waarde, waarbij het supergeleidende materiaal weer normaal wordt, is het dus mogelijk door het aan en uit schakelen van de magneet een 'warmteschakelaar' te maken. We spreken dan respectievelijk van een open en dichte heatswitch, ondanks het feit dat de warmtegeleiding in de open-stand niet nul is. De praktische uitvoering van onze heatswitch is hieronder weergegeven in fig 2.7:

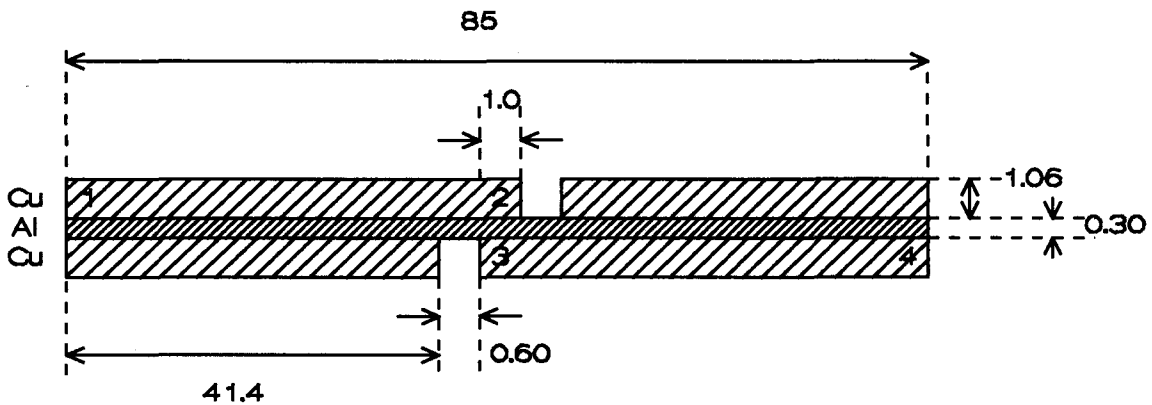


Fig 2.7 Heatswitch, waarbij de warmtestroom altijd ook door het aluminium gaat. De breedte van de heatswitch is 6 mm.

De heatswitch bestaat uit 2 laagjes koper met ertussen een laagje aluminium (6 mm breed en 0.3 mm dik). Aluminium is een supergeleider en heeft een kritische temperatuur van 1.2 K. Onze werkt temperatuur was daar altijd lager. In de laagjes koper zijn inkepingen gemaakt, zodat de warmtestroom altijd gedeeltelijk via het aluminium moet gaan (In fig. 2.7 van punt 2 naar 3). De heatswitch is geplaatst in een niet getekende elektromagneet, die een magneetveld kan creëren, dat groot genoeg is om het aluminium normaal te maken.

Als het aluminium supergeleidend is, zal de warmtegeleiding plaatsvinden via fononen. Onder

de kritische temperatuur zijn echter nog wel ongepaarde elektronen aanwezig en de warmtegeleiding door fononen gaat pas beneden 0.1 K overheersen [Mue-78]. De warmtestroom wordt beschreven door de wet van Fourier:

$$\dot{Q} = -A \kappa_s(T) \frac{dT}{dx} \quad (2-20)$$

waarbij $\kappa_s(T) = \kappa_{s0} T^3$, waarin κ_{s0} een constante is. Deze benadering geldt dus alleen beneden 0.1 K. Voor de warmtegeleiding van punt 2 naar 3 krijgen we:

$$\dot{Q}_{open} = \frac{1}{4} \frac{\kappa_{s0} A}{h} (T_3^4 - T_2^4) = \beta (T_3^4 - T_2^4)$$

waarbij A het oppervlak loodrecht op de warmtestroom is ($A = d \cdot b = 6 \cdot 0.6 \text{ mm}^2$) en h de afstand waarover de temperatuursval plaatsvindt, dus de hoogte van het aluminiumplaatje ($= 0.3 \text{ mm}$).

Als we er nu van uitgaan dat de warmtestroom door het bovenste plaatje koper loopt van 1 naar 2, vervolgens via het aluminium van 2 naar 3 en tenslotte door het onderste plaatje koper van 3 naar 4, dan moet gelden:

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow 3} = \dot{Q}_{3 \rightarrow 2} = \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} \quad (2-21)$$

met voor $\dot{Q}_{4 \rightarrow 3}$ en $\dot{Q}_{2 \rightarrow 1}$:

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow 3} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_{Cu} A'}{\Delta l} (T_4^2 - T_3^2) = \alpha (T_4^2 - T_3^2)$$

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \alpha (T_2^2 - T_1^2)$$

Hierin is A' gelijk aan de doorsnede van het koperplaatje (6 bij 1.06 mm) en Δl gelijk aan de lengte ervan (42.5 mm). We vinden voor de warmtestroom, uitgedrukt in de bekende temperaturen T_1 en T_4 , de volgende uitdrukking:

$$\dot{Q} = \frac{\beta (T_4^4 - T_1^4)}{1 + 2 \frac{\beta}{\alpha} (T_4^2 + T_1^2)} \quad (2-22)$$

Als we nu een stroom ($> 60 \text{ mA}$) door de elektromagneet sturen, creëren we een veld, groter dan 10^2 Tesla, waardoor het aluminium normaal wordt en de warmtegeleiding voornamelijk plaatsvindt via elektronen. We kunnen de warmtegeleiding nu als volgt voorstellen. Over een afstand van 41.4 mm loopt de warmtestroom door het koper en aluminium, vervolgens door 2.2 mm aluminium en tenslotte weer over 41.4 mm koper en aluminium. Er geldt nu voor de warmtestroomcomponenten:

$$\dot{Q}_{3 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_{n0} A^*}{2.2 \cdot 10^{-3}} (T_3^2 - T_2^2) = \delta \Delta T^2$$

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow 3} = \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_{Cu} A' + \kappa_{n0} A^*}{41.4 \cdot 10^{-3}} \Delta T^2 = \gamma \Delta T^2$$

waarin κ_{n0} de warmtegeleidingscoëfficiënt van normaal aluminium is bij 1 K, A' de doorsnede (hoogte·diepte) van het koperplaatje ($A' = d \cdot h = 6 \cdot 1.06 \text{ mm}^2$) en A^* de doorsnede van het aluminiumplaatje ($A^* = d \cdot h = 6 \cdot 0.3 \text{ mm}^2$). Na wat rekenwerk vinden we:

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow 1} = \frac{\delta \gamma}{2\delta + \gamma} (T_4^2 - T_1^2) \quad (2-23)$$

Het is nu interessant te kijken naar de verhouding van de warmtestromen bij dezelfde temperaturen T_1 en T_4 , de zogenaamde schakelverhouding. We vinden:

$$\frac{\dot{Q}_{dicht}}{\dot{Q}_{open}} = \frac{1}{T_1^2 + T_4^2} \frac{\alpha \gamma \delta + 2\beta \gamma \delta (T_1^2 + T_4^2)}{(2\alpha \beta \delta + \alpha \beta \gamma)} \quad (2-24)$$

en met de waarden voor de κ 's volgens [Lou-74] ($\kappa_{s0} = \kappa_{n0} = 6.0 \cdot 10^2 \text{ W/Km}$ en $\kappa_{Cu} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ W/Km}$) vinden we als schakelverhouding:

$$\frac{\dot{Q}_{dicht}}{\dot{Q}_{open}} = 3.18 + \frac{5.15 \cdot 10^{-3}}{T_1^2 + T_4^2}$$

Een realistisch voorbeeld is $T_1 = 50 \text{ mK}$ ($= T_{\text{mengkamer}}$) en $T_4 = 100 \text{ mK}$ ($= T_{\text{expansievat}}$). In deze situatie hebben we een schakelverhouding van 3.6, wat laag is vergeleken met bijvoorbeeld de waarde van Mueller, die $\kappa_n / \kappa_s = 1600 / T^2$ vond [Mue-78]. Hieruit blijkt dat de geometrie van de heatswitch niet erg gunstig gekozen is en we moeten dan ook zoeken naar andere, gunstigere geometrieën om een betere schakelverhouding te realiseren. Als voorbeeld bekijken we nu de situatie, dat we alleen een aluminium plaat hebben met afmetingen $6 \cdot 3 \cdot 85 \text{ mm}$. De warmtestromen in supergeleidende (=open switch) en normale toestand (=dicht) zijn nu gelijk aan:

$$\dot{Q}_{open} = \frac{1}{4} \frac{\kappa_{s0} A}{l} (T_4^4 - T_1^4) \quad (2-25)$$

$$\dot{Q}_{dicht} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_{n0} A}{l} (T_4^2 - T_1^2) \quad (2-26)$$

waarmee we de volgende schakelverhouding krijgen:

$$\frac{\dot{Q}_{dicht}}{\dot{Q}_{open}} = 2 \frac{\kappa_{n0}}{\kappa_{s0}} \frac{1}{T_1^2 + T_4^2} \quad (2-27)$$

met het bovenstaande voorbeeld van $T_1 = 50 \text{ mK}$ en $T_4 = 100 \text{ mK}$ krijgen we een schakelverhouding

van 160. Dit is echter de ideale situatie. Aluminium heeft namelijk de neiging snel te oxideren en het ontstane oxidelaagje heeft juist een zeer grote thermische weerstand. Om dit te vermijden moeten we het aluminium plaatje voorzien van een laagje koper of goud, dat het oxideren van het aluminium tegen gaat. Het moet echter wel zo dun zijn, dat het nauwelijks invloed heeft op de warmtegeleiding. Om het contact tussen de beide metalen zo goed mogelijk te laten zijn, is het van belang het aluminiumoppervlak zeer goed schoon te maken (etsen). De heatswitch van Mueller et al. voldoet aan deze eisen, waardoor een dergelijke goede schakelverhouding te verkrijgen is [Mue-78]. In dit artikel wordt ook beschreven, dat κ_{s0} in feite veel kleiner is, dan we hier hebben verondersteld. Hierop zal nu niet verder worden ingegaan.

§ 2.4 Capaciteitsmetingen in de vaten.

In het expansievat en ^4He -vat kunnen 2 belangrijke parameters worden bepaald middels capaciteitsmetingen. Ten eerste kan de hoogte van het niveau van het helium in de vaatjes gemeten worden door een cilindrische condensator. Ten tweede kan de ^3He -concentratie van het mengsel bepaald worden door een meting van de elektrische permeabiliteit van het mengsel. Deze verandert namelijk met de concentratie van het ^3He in het ^4He , welke in een verzadigde oplossing weer van de temperatuur afhangt.

a) Hoogtemeting

Voor de hoogtemeting worden 2 metalen cilinders gebruikt met verschillende diameters ($2r_a$ en $2r_b$), die concentrisch in elkaar geschoven worden (fig 2.8).

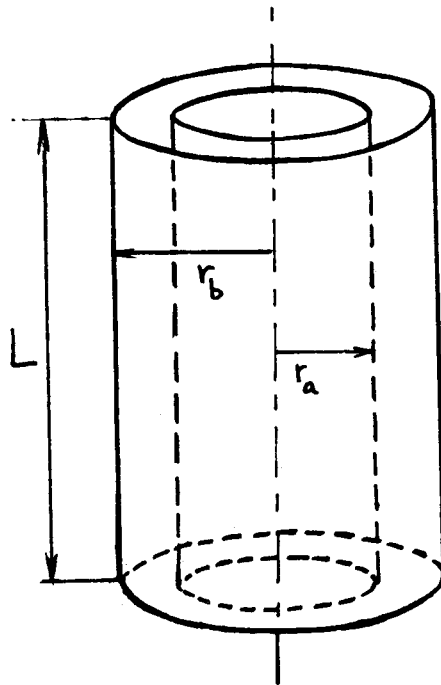


Fig 2.8 Condensator voor het meten van de hoogte van het heliumniveau.

De capaciteit van een cilindrische condensator wordt gegeven door de volgende relatie:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(r_b/r_a)} \quad (2-28)$$

met ϵ_r de relatieve elektrische permeabiliteit van helium, die als volgt van het percentage ^3He in het ^4He afhangt:

$$\epsilon_r(x) = 1 + (\epsilon_r({}^4\text{He}) - 1) \cdot \frac{V_M(0)}{V_M(x)} \quad (2-29)$$

met $V_M(0)$ het molair volume van ${}^4\text{He}$ en $V_M(x)$ het molair volume van het mengsel, met x de concentratie ${}^3\text{He}$. $V_M(x)$ kan vervolgens geschreven worden als

$$V_M(x) = V_M(0)(1 + \alpha x) \quad (2-30)$$

met $\alpha=0.286$ [Kue-87].

We gaan nu de gevoeligheid van de condensator, dC/dh , berekenen voor twee gevallen. Ten eerste nemen we de situatie, dat er nog een fasegrens in het expansievat is en beide fasen nog aanwezig zijn. Ten tweede bekijken we het geval, dat alleen nog mengsel aanwezig is en bij injecteren van ${}^4\text{He}$ de verzadigde oplossing dus doorverdund wordt ($x \leq x_{\text{max}}$). We bekijken nu eerst het geval met fasegrens.

1) Geconcentreerde fase en verzadigd mengsel.

De capaciteit van de condensator is nu gelijk aan de som van de drie delen, vacuüm, geconcentreerde fase en verdunde fase:

$$C = C_{\text{vacuum}} + C_{\text{gecon}} + C_{\text{verd}} \quad (2-31)$$

Deze situatie is in de onderstaande figuur geschetst (fig 2.9).

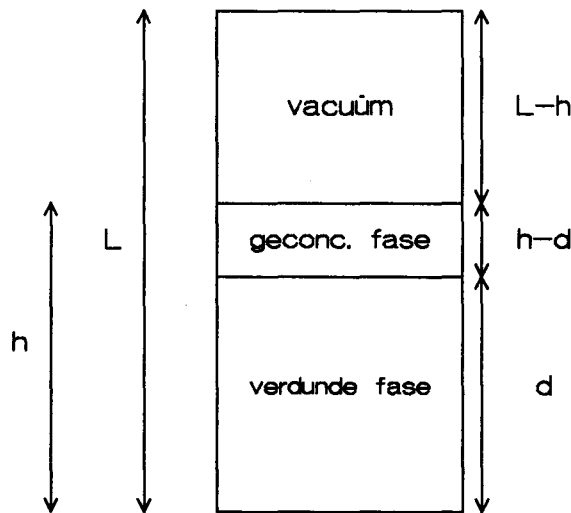


Fig 2.9 Situatieschets van het expansievat met daarin geconcentreerd en verdund ${}^3\text{He}$.

De capaciteit is gelijk aan:

$$C = C_0 + \frac{C_0}{L} \left(d \cdot (\epsilon_r(x) - 1) + (h - d) \cdot (\epsilon_r({}^3\text{He}) - 1) \right) \quad (2-32)$$

waarin $C_0 (= 2\pi\epsilon_0 L / \ln(r_b/r_a))$ de capaciteit in vacuüm is.

De gevoeligheid, dC/dh , is gelijk aan

$$\frac{dC}{dh} = \frac{\dot{C}}{\dot{h}} = \frac{C_0 \left(\dot{d}(\epsilon_r(x) - 1) + (\dot{h} - \dot{d})(\epsilon_r(^3He) - 1) \right)}{\dot{h}} \quad (2-33)$$

hierin geeft de punt op de parameters de afgeleide naar de tijd weer. Stel we voeren \dot{n}_4 mol 4He per seconde toe, dan geldt voor \dot{d} en \dot{h} :

$$\dot{d} = \frac{\dot{n}_4 V_M(x)}{A(1-x)} \quad (2-34)$$

$$\dot{h} = \frac{\dot{n}_4}{A(1-x)} \left(V_M(x) - x \cdot V_M(^3He) \right) \quad (2-35)$$

met A het oppervlak van de bodem van het potje. Hieruit volgt voor de gevoeligheid, na wat rekenwerk, dat

$$\frac{dC}{dh} = \frac{C_0}{L} \frac{V_M(x)(\epsilon_r(x) - 1) - x V_M(^3He)(\epsilon_r(^3He) - 1)}{V_M(x) - x V_M(^3He)} \quad (2-36)$$

waaruit volgt met $x=0.066$, $r_a=5.0$ mm, $r_b=5.5$ mm, dat $dC/dh=33.4$ [fF/mm].

2) Alleen mengsel ($x \leq 0.066$).

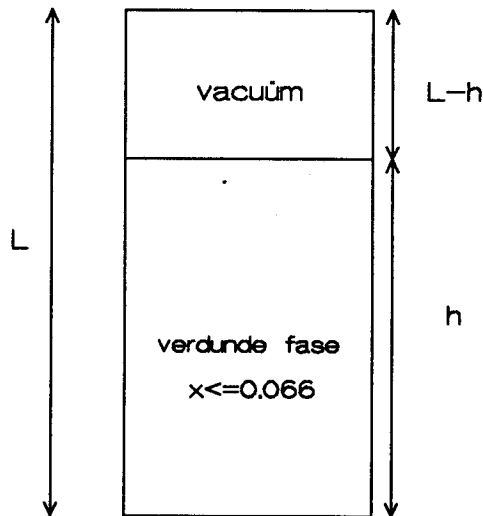


Fig 2.10 Situatieschets van het expansievat met daarin alleen nog mengsel.

De capaciteit van de condensator is nu gelijk aan:

$$C = \frac{C_0}{L}(L - h + h\varepsilon_r(x)) = C_0 + \frac{C_0}{L}(h \cdot (\varepsilon_r(x) - 1)) \quad (2-37)$$

en de gevoeligheid is:

$$\frac{dC}{dh} = \frac{\dot{C}}{\dot{h}} = \frac{C_0}{L} \frac{\dot{h}(\varepsilon_r(x(t)) - 1) + h\dot{\varepsilon}_r(x(t))}{\dot{h}} \quad (2-38)$$

Nemen we nu weer aan, dat per seconde \dot{n}_4 mol ^4He wordt toegevoerd dan geldt voor $x(t)$ en $h(t)$:

$$x(t) = \frac{0.066N_0}{N_0 + n_4(t)} \quad (2-39)$$

$$h(t) = \frac{N_0 + n_4(t)}{A} V_M(0) (1 + \alpha x(t)) \quad (2-40)$$

met $x(0) = 0.066$ en N_0 het aantal molen mengsel op tijdstip $t=0$ en $n_4(t)$ het aantal toegevoerde molen ^4He sinds $t=0$. De tijdsafgeleiden van x , h en ε_r voldoen aan de volgende relaties:

$$\dot{x}(t) = \frac{-\dot{n}_4 x(t)}{N_0 + n_4(t)} \quad (2-41)$$

en

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{n}_4}{A} V_M(0) (1 + \alpha x(t)) + \frac{N_0 + n_4(t)}{A} V_M(0) \alpha \dot{x}(t) = \frac{\dot{n}_4 V_M(0)}{A} \quad (2-42)$$

en

$$\dot{\varepsilon}_r(x(t)) = \frac{d\varepsilon_r(x(t))}{dx(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{(\varepsilon_r(^4\text{He}) - 1) \alpha x(t) \dot{n}_4}{(1 + \alpha x(t))^2 (N_0 + n_4(t))} \quad (2-43)$$

Vullen we nu (2-29), (2-39), (2-42) en (2-43) in (2-38) in, dan vinden we na enig rekenwerk voor de gevoeligheid van de condensator:

$$\frac{dC}{dh} = \frac{C_0}{L} (\varepsilon_r(^4\text{He}) - 1) \quad (2-44)$$

wat numeriek gelijk is aan 32.7 fF/mm.

b) Concentratie meting

Voor het meten van de concentratie ${}^3\text{He}$ in ${}^4\text{He}$, gebruiken we de onderstaande condensator (fig 2.11).

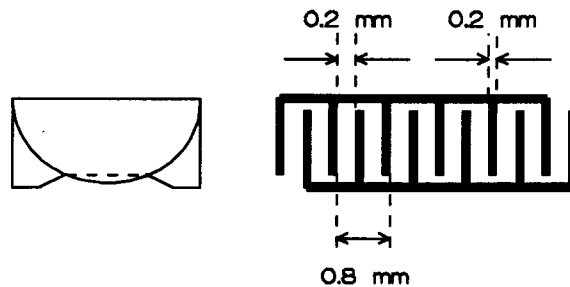


Fig 2.11 Condensator ter bepaling van de ${}^3\text{He}$ -concentratie.

De grootte van de capaciteit is gelijk aan de som van de capaciteiten van de plaatcondensatoren. Omdat de maten van deze condensator moeilijk te meten zijn, moeten we in de eerste plaats de capaciteit in vacuüm ($=C_0$) meten. De capaciteit van de condensator in het helium, is dan gelijk aan C_0 vermenigvuldigd met ϵ_r van het mengsel, omdat de condensator onderin het expansievat is geplaatst en we er van uit gaan, dat de condensator volledig gevuld is met helium. De elektrische permeabiliteit hangt nu alleen nog af van de concentratie volgens formule (2-29). Een verandering van x geeft een verandering van C , volgens

$$\frac{dC}{dx} = C_0 \frac{d\epsilon_r(x)}{dx} = C_0 \frac{-\alpha(\epsilon_r({}^4\text{He}) - 1)}{(1 + \alpha x)^2} \quad (2-45)$$

wat met $C_0 \approx 68$ pF (gemeten) en $x=0.05$ een verandering in C geeft van 1.08 fF als $\Delta x=0.001$. Om kleine veranderingen in x te kunnen meten, is het dus noodzakelijk zeer kleine veranderingen in de capaciteit te kunnen meten, wat tot dusver nog niet nauwkeurig is onderzocht, maar in de nabije toekomst zeker mogelijk is met de komst van een extra lock-in versterker, die zeer gevoelig is. Wel mag dan geen ruis aanwezig zijn in het signaal, omdat het maximale verschil, dat gemeten zal worden ongeveer 20 fF is (van een 6.6% naar een 4.5% mengsel).

§ 2.5 Thermometrie.

Voor het meten van de temperatuur in en op de vaatjes hebben we gebruik gemaakt van zogenaamde Speerweerstandjes. Deze weerstandjes hebben in het door ons bekeken temperatuurgebied een weerstand, die sterk afhankelijk is van de temperatuur en zijn daarom goed te gebruiken als thermometer, als de weerstand correct gemeten wordt en een goede ijking van de weerstand als functie van de temperatuur gedaan is. De Speerweerstandjes zijn bruikbaar in het gebied van 20 mK tot 4.2 K. Het temperatuurgebied is naar beneden begrensd, omdat de weerstand dan zeer hoog oploopt ($>100 \text{ k}\Omega$) en het koolstof, waaruit de weerstandjes bestaan dan een zeer lange relaxatietijd heeft; vanwege het dan slechte warmtegeleidingsvermogen duurt het heel lang voordat het hele weerstandje de omgevingstemperatuur heeft aangenomen (tot meer dan enkele uren).

In de Speerweerstandjes vindt elektrische geleiding plaats, dat beschreven wordt door Hoppinggeleiding. Voor dit type geleiding geldt voor de weerstand als functie van de temperatuur de volgende relatie:

$$\ln(R) = C + \alpha T^{-s} \quad (2-46)$$

waarin c , α en s nog parameters zijn, die door de ijking bepaald kunnen worden. Wij hebben gekozen voor een iets andere aanpak. We nemen $s=1/2$ en fitten vervolgens $T^{-1/2}$ als functie van $\ln(R)$ met een 10^{e} -graads chebychevpolynoom, waarvan de vorm hieronder is gegeven.

$$T^{-1/2} = \sum_{i=0}^{10} A_i \cdot \cos(i \cdot \arccos(x)) \quad (2-47)$$

met $x = \frac{2Z - Z_U - Z_L}{Z_U - Z_L}$ en $Z = \ln(R(k\Omega))$. Hierin zijn Z_U en Z_L het maximum en minimum van de logaritmie van alle gemeten R_i . Hieronder zijn de meetpunten en de Chebychevpolynoomfit in figuur 2.12 uitgezet.

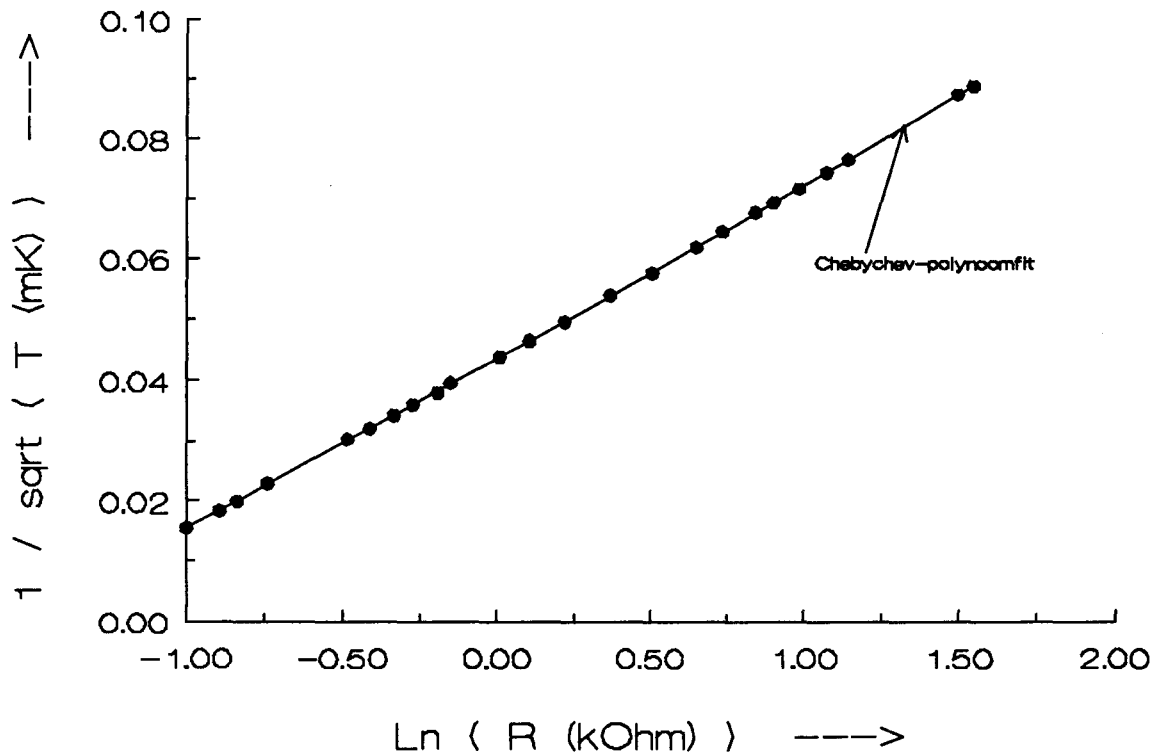


Fig 2.12 De meetpunten en de fit van Speer s308.

Er moet bij deze weerstanden rekening worden gehouden met het feit, dat na verloop van tijd (opwarmen en afkoelen) de weerstand kan veranderen in verloop van de tijd, waardoor een nieuwe ijking wenselijk is. In temperatuurgebieden boven 1 Kelvin is de Speer niet meer zo gevoelig, vanwege zijn kleine weerstand, maar met een goede ijking is het tot 4.2 K toch bruikbaar.

Zoals reeds vermeld kunnen de Speerweerstand beneden 20 mK niet nauwkeurig meer gebruikt worden, maar moet gebruik gemaakt worden van susceptibiliteitsmetingen van een kleine hoeveelheid zout, bv. CMN ($2\text{Ce}(\text{NO}_3)_3 \cdot 3\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 24\text{H}_2\text{O}$) of viscositeitsmetingen van het heliummengsel met behulp van een trildraad viscositeitsmeter (zie hoofdstuk 3).

Hoofdstuk 3 Trildraad Viscositeitsmeter (TDV).

§ 3.1 Inleiding.

In dit hoofdstuk zal worden besproken wat een TDV is, wat we ermee doen tijdens onze experimenten en wat de werking ervan is.

Een TDV is een meetinstrument, waarmee de viscositeit van gassen en vloeistoffen bepaald kan worden. In onze metingen is het echter van belang de temperatuur van het helium in het expansievat te meten. Omdat er een verband bestaat tussen de viscositeit en de temperatuur, is door het meten van de viscositeit van het helium de temperatuur te bepalen. Om dit verband te vinden zal de TDV eerst geijkt moeten worden als functie van de temperatuur. In het verleden is de door ons gebruikte TDV al geijkt door J. Zeegers [Zee-91]. De manier waarop deze metingen zijn geïnterpreteerd was echter niet optimaal en is daarom verbeterd.

We hebben de TDV als thermometer genomen, omdat deze instantaan de temperatuur van het helium volgt en niet zoals bijvoorbeeld een Speerweerstand een lange tijd nodig heeft om naar de juiste temperatuur te relaxeren. Een nadeel is wel, dat eerst een goede ijking gedaan moet worden en dan dus wel gebruik gemaakt moet worden van een andere thermometer.

Het principe van de trildraad berust erop, dat een ingeklemde oscillerende draad, gedempt zal worden door het medium, waarin de draad zich bevindt. Onze trildraad was gemaakt van Iridium (dichtheid = 22659 kg/m^3) en had een diameter van $1.01 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. De trildraad is geplaatst in een houder van araldiet, waarin zich 2 permanente magneten bevinden, die samen een magneetveld genereren van 80 mT. De trildraad is gekromd in de vorm van een halve cirkel met een diameter van 10 mm. Door nu een wisselstroom door de draad te sturen, zal de draad als gevolg van de Lorentzkracht gaan oscilleren. In de onderstaande figuur is een situatieschets weergegeven (fig 3.1).

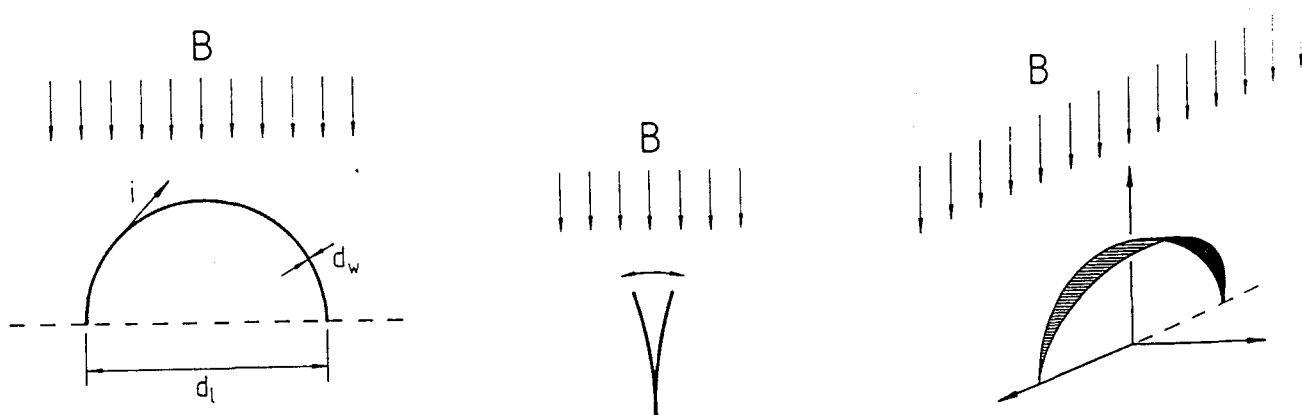


Fig 3.1 Situatieschets van de trildraad.

De veerkracht zal de draad weer terug willen brengen in zijn evenwichtstoestand. In een medium zal een dempingskracht, tegengesteld aan de bewegingsrichting van de trildraad, aanwezig zijn. Door de beweging van de stroomvoerende draad in het magneetveld zal er een inductiespanning worden

opgewekt, die als functie van de frequentie gemeten wordt.

In de volgende paragraaf zal de achterliggende theorie uitvoeriger worden besproken en in de derde paragraaf wordt de methode om de gescande piek te fitten bediscussieerd. In § 3.4 zal de experimentele opzet worden behandeld en tenslotte komen in §3.5 de resultaten aan bod.

§ 3.2 Theorie.

Voor een oneindig lange oscillerende draad kan de volgende bewegingsvergelijking worden opgesteld:

$$(M + kM')\ddot{u} + \omega(k'M' + M\beta)\dot{u} + M\omega_0^2 u = F_L \quad (3-1)$$

waarin F_L de Lorentzkracht per lengteëenheid en M de massa van de draad per lengteëenheid is. M' is de massa per lengteëenheid van de verplaatste vloeistof en k en k' zijn Stokesfuncties, welke worden beschreven in het proefschrift van Goodwin [Goo-68]. β is een parameter, die de interne demping van de draad beschrijft, en ω_0 is de resonantiefrequentie in vacuüm. De derde term in de bewegingsvergelijking volgt uit de linearisatie van de elastische krachten. Je mag deze linearisatie toepassen, omdat de uitwijking u , t.o.v. de draaddiameter, d_w , verondersteld wordt zeer klein te zijn. De kracht als gevolg van de aanwezigheid van de vloeistof op de draad per lengteëenheid is gelijk aan:

$$F_d = -\omega^2 M' u_0 e^{j\omega t} (-k + jk') \quad (3-2)$$

met $u_0 e^{j\omega t}$ de uitwijking van de draad op tijdstip t . Deze kracht zit verwerkt in de eerste en tweede term van de bewegingsvergelijking. Het tweede deel van de tweede term van vgl. (3-1), $\omega M\beta\dot{u}$, is het gevolg van de interne demping van de draad. Door het invoeren van deze term zal de resonantiefrequentie ook verschuiven; hierop wordt straks nog ingegaan.

De stokesfuncties k en k' zijn een functie van de parameter m , welke gedefinieerd is als

$$m = \frac{d_w}{4\delta_v} \quad (3-3)$$

waarin δ_v de viskeuze penetratiediepte is:

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\eta}{\rho\omega}} \quad (3-4)$$

met η de viscositeit van de vloeistof.

De functies $k(m)$ en $k'(m)$ zijn nu respectievelijk gelijk aan het reële en negatieve imaginaire deel van:

$$1 - \frac{4K_1(2m\sqrt{i})}{K_1(2m\sqrt{i}) + 2m\sqrt{i} K_1'(2m\sqrt{i})} \quad (3-5)$$

met K_1 en zijn afgeleide, K_1' , gemodificeerde Besselfuncties van de tweede soort. In figuur 3.2 zijn de beide functies weergegeven als functie van parameter m :

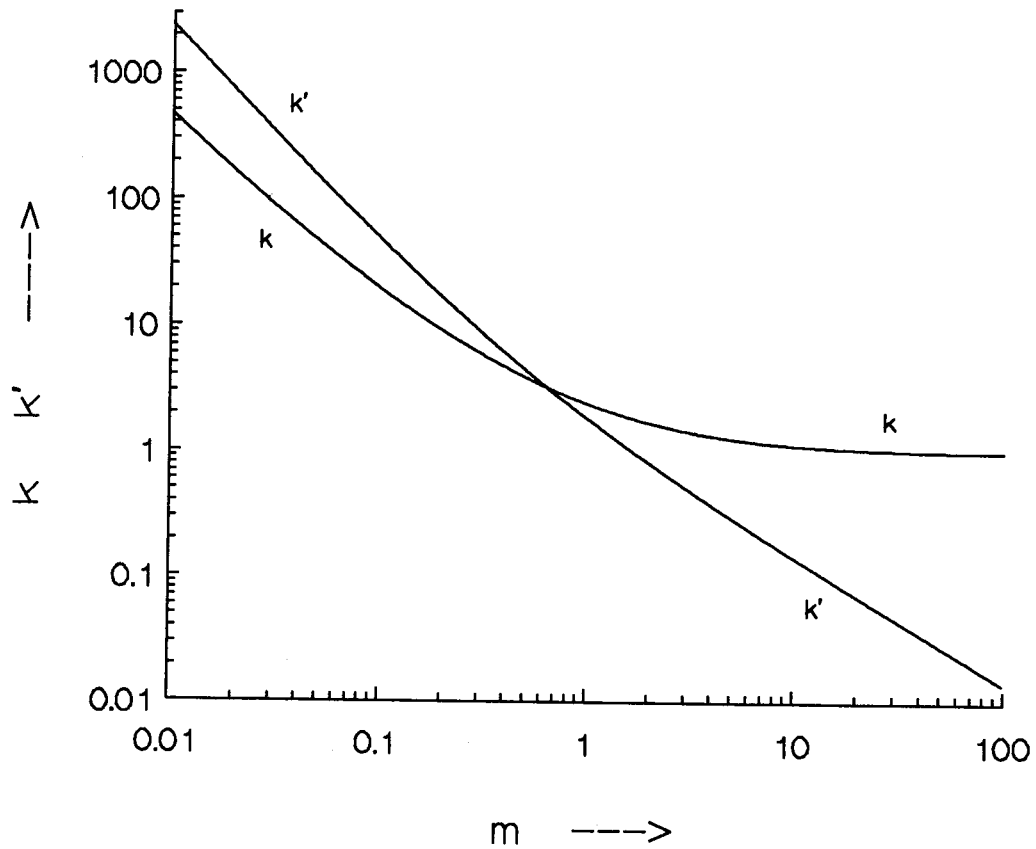


Fig 3.2 De Stokesfuncties k en k' als functie van parameter m .

De inductiespanning kan geschreven worden als:

$$V_i = V_0 e^{j\omega t} (V_1 + jV_2) \tag{3-6}$$

waarin V_0 :

$$V_0 = \frac{4B^2 I_0 r^2}{\pi^2 d_w^3 \rho_w}$$

met B de grootte van het magnetveld, I_0 de stroom, r de straal van de boog van de trildraad, d_w de diameter van de draad en ρ_w de dichtheid van de draad. V_1 is evenredig met de in-fase-spanning en V_2 is evenredig met het 90° -signaal.

De beide dimensieloze functies, V_1 en V_2 , worden nu geschreven als:

$$V_1 = \frac{\omega_0 \left(\frac{\rho k'}{\rho_w} + \beta \right) \omega^3}{\left[\omega_0^2 - \left(1 + \frac{\rho k}{\rho_w} \right) \omega^2 \right]^2 + \left(\frac{\rho k'}{\rho_w} + \beta \right)^2 \omega^4} \tag{3-7}$$

en

$$V_2 = \frac{\omega_0 \omega [\omega_0^2 - (1 + \frac{\rho k}{\rho_w}) \omega^2]}{[\omega_0^2 - (1 + \frac{\rho k}{\rho_w}) \omega^2]^2 + (\frac{\rho k'}{\rho_w} + \beta)^2 \omega^4} \quad (3-8)$$

Hierin is ρ de dichtheid van het medium en ω de hoekfrequentie.

In fig 3.3 zijn deze twee signalen als functie van de frequentie weergegeven:

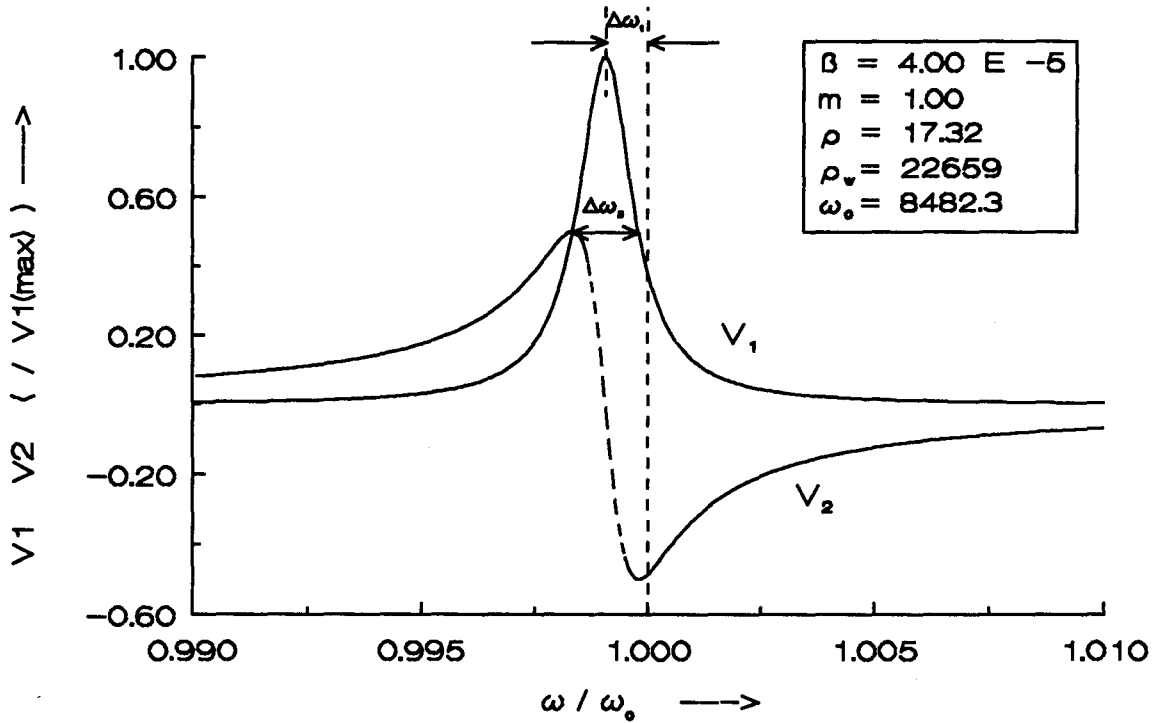


Fig 3.3 De signalen V_1 en V_2 als functie van de frequentie, met de parameters in SI-eenheden.

Bekijken we nu de situatie voor vacuüm ($\rho=0$), dan krijgen we voor V_1 de volgende vergelijking:

$$V_1 = \frac{\omega_0 \beta \omega^3}{(1 + \beta^2) \omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4} \quad (3-9)$$

De resonantiefrequentie wordt nu gegeven door:

$$\omega_r \cong \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8} \beta^2 + \frac{3}{64} \beta^4 - \dots \right) \quad (3-10)$$

Omdat β van orde grootte 10^4 à 10^5 is, is het duidelijk dat de termen met β te verwaarlozen zijn.

Het bepalen van de viscositeit houdt in, het berekenen van de parameter m , welke bepaald wordt door de functies k en k' . Uit het berekenen van de verschuiving van de resonantiefrequentie t.o.v. de resonantiefrequentie in vacuüm en/of de breedte van de resonantiepiek zijn de waarden van k en k' te bepalen en daarmee m , en dus de viscositeit.

De resonantiefrequentie in een medium is gelijk aan:

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{\rho k}{\rho_w}}} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho k' + \rho_w \beta}{\rho_w + \rho k} \right)^2 + \frac{15}{128} \left(\frac{\rho k' + \rho_w \beta}{\rho_w + \rho k} \right)^4 - \dots \right) \quad (3-11)$$

De verschuiving t.o.v. de resonantiepiek in vacuüm is dus gelijk aan:

$$\Delta\omega = \omega_r - \omega_0 = \frac{\omega_0}{2} \frac{\rho k}{\rho_w} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\rho k}{\rho_w} + \dots \right) \quad (3-12)$$

met verwaarlozing van de tweede factor uit formule (3-11).

Door het meten van de verschuiving van de resonantiefrequentie is k te berekenen en daarmee m te bepalen, waarmee we de viscositeit kunnen berekenen.

Naast de bepaling uit de ligging van de piek, kan de viscositeit ook berekend worden uit de breedte van de piek. Deze breedte, $\Delta\omega_2$, wordt bepaald door de frequenties, waarbij $V_1 = \pm V_2$. Hieruit volgt voor de breedte:

$$\Delta\omega_2 = \omega_0 \left(\beta + \frac{\rho k'}{\rho_w} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho k}{\rho_w} + \dots \right) \quad (3-13)$$

Hieraan zou nog een extra correctie kunnen worden toegevoegd, omdat k nog afhangt van de scanfrequentie. Dit, omdat deze stromingsfunctie niet alleen wordt bepaald door de viscositeit van de vloeistof, maar ook door de snelheid waarmee de draad door het medium beweegt. We zullen echter van deze correctie afzien, omdat deze verwaarloosbaar is t.o.v. de term $\rho k/\rho_w$. Dit komt, omdat de piek smal en k dus klein is. Zie voor de grootte van de correctieterm [Bla-71].

Door bepaling van β uit de vacuümpiek en k en k' uit de breedte van de piek bij aanwezigheid van helium is de viscositeit van het helium te bepalen.

Bij metingen in He-II moet het twee-fluidamodel worden toegepast, waardoor de dichtheid van de vloeistof moet worden gezien als een mengsel van een normale (= viskeuze) en een superfluïde component met dichtheden van respectievelijk ρ_n en ρ_s . De eerste-orde-verschuiving van de resonantiefrequentie wordt nu:

$$\Delta\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} \frac{\rho_n k + \rho_s}{\rho_w} \quad (3-14)$$

De breedte van de piek kan op dezelfde manier worden berekend als wanneer de vloeistof slechts uit één component bestaat, alleen moet nu voor ρ de dichtheid van de normale component worden gebruikt.

De beste manier om de viscositeit te bepalen, is natuurlijk door het fitten van de gehele scanpiek. In de volgende paragraaf wordt beschreven hoe dit in zijn werk gaat.

§ 3.3 Het fitten van een scan met de TDV.

Om de viscositeit van het heliummengsel te bepalen moet eerst een fit worden gemaakt van de 'vacuümpiek' en daaruit β en ω_0 worden bepaald. Vervolgens kunnen deze waarden constant worden beschouwd tijdens alle volgende metingen met de TDV in helium, hoewel het de aanbeveling verdient om regelmatig deze twee parameters te controleren. Hoe een fit wordt gemaakt, zal nu besproken worden.

Het signaal kan worden geschreven als een achtergrondsignaal plus een deel dat evenredig is met het in-fasesignaal ($\sim V_1$) en een deel dat evenredig is met het uit-fasesignaal ($\sim V_2$). De grootte van deze drie delen ten opzichte van elkaar zijn onbekend en deze drie parameters moeten dus gefit worden. Verder zijn onbekend, de parameter m , die k en k' vastlegt en een eventuele kleine verschuiving van de piek langs de frequenties, d .

De fit wordt gedaan volgens de kleinste kwadraten methode en er moet dus gelden:

$$Q = \sum_i (V_{gem} - a - bV_1(m,d,\omega_i) - cV_2(m,d,\omega_i))^2 \text{ is minimaal} \quad (3-15)$$

waarbij gesommeerd wordt over het aantal meetpunten van de scan.

Q wordt geminimaliseerd door de afgeleiden van Q naar a, b, c, m en d gelijk aan nul te stellen. Uit het aldus ontstane stelsel vergelijkingen zijn de parameters te berekenen. Overigens is het niet mogelijk om analytische uitdrukkingen te vinden voor alle fitparameters. Daarom moeten voor m en d schattingen gedaan worden en vervolgens door intervalhalvering de goede waarden gevonden worden. De waarden voor a, b en c kunnen wel analytisch berekend worden bij vaste waarden van m en d .

Een soortgelijke fitprocedure wordt eerst toegepast met gebruikmaking van formule (3-9) om de parameters β en ω te vinden.

§ 3.4 Experiment.

De trildraad wordt geplaatst in het expansievat, waar we met de TDV temperaturen willen meten. Ten eerste moet dan een meting gedaan worden in vacuüm bij een lage temperatuur en vervolgens kan dan de viscositeit bepaald worden met de TDV van het helium. Uit oude resultaten is gebleken, dat met de TDV boven een temperatuur van 60 mK de viscositeit niet nauwkeurig te bepalen is [Zee-91]. Aangezien we tijdens de runs met de TDV in het expansievat niet meer zo laag in temperatuur zijn geweest, was er dus geen mogelijkheid goede metingen met onze TDV te doen.

Wel was het mogelijk de TDV met oude metingen volgens de nieuwe fitprocedure te ijken. De metingen van run 316 zijn gebruikt om 3 TDV's opnieuw te ijken, dwz een vergelijking te vinden van de viscositeit als functie van de temperatuur. Bij de oude ijking was dus geen gebruik gemaakt van de parameter β en was ook geen rekening gehouden met de dichtheid van het superfluïde ^4He , ρ_s . De viscositeit was bepaald door de breedte van de piek te bepalen en niet door alle meetpunten te gebruiken. In onze methode wordt dit wel gedaan en de resultaten hiervan zijn te vinden in de volgende paragraaf.

§ 3.5 IJking van de TDV.

Door eerst de temperatuur in te voeren, waarbij de scan van de TDV is gemaakt, kunnen de dichtheden van ρ_n en ρ_s worden bepaald. Deze hangen af van de temperatuur, omdat het percentage ^3He in ^4He in een verzadigde oplossing afhankelijk is van de temperatuur. Deze afhankelijkheid wordt als volgt gegeven:

$$x = 0.066 + 0.506T^2 - 0.249T^3 + 18.2T^4 - 74.2T^5 \quad (3-16)$$

De dichtheden ρ_n en ρ_s zijn vervolgens gelijk aan:

$$\rho_n = \frac{m^*}{m_3} \rho_3 = 2.46 \cdot (0.1437 + 104.5x) \quad (3-17)$$

en

$$\rho_s = \rho - \rho_n \quad (3-18)$$

waarbij ρ de dichtheid van het mengsel is en $m^*=2.46 m_3$ de effectieve massa van het ^3He .

Als uit de vacuümpiek β en ω_0 reeds zijn berekend (in onderstaand voorbeeld voor de in §3.4 beschreven TDV is $\beta=4.6 \cdot 10^{-5}$ en $\omega_0=8.504 \cdot 10^3$ [1/s]), dan is de viscositeit bij de verschillende temperaturen ($T < 100$ mK) te bepalen uit de scan met onze fitprocedure. Dat de fit goed gedaan is, volgt uit het feit, dat het residu uit ruis bestaat. In de limiet voor lage temperaturen met ^3He als ideaal Fermigas, geldt volgens de theorie, dat de viscositeit van het heliummengsel omgekeerd evenredig is met de temperatuur in het kwadraat:

$$\eta = \frac{\eta_0}{T^2} \quad (3-19)$$

met $\eta_0=5 \cdot 10^{-8}$ PasK².

Zetten we de 2 grootheden echter logaritmisch tegen elkaar uit, dan vinden we het volgende verband:

$$\log(\eta) = -1.1 - 1.80 \cdot \log(T)$$

In de onderstaande figuur zijn de meetpunten en het gevonden verband getekend.

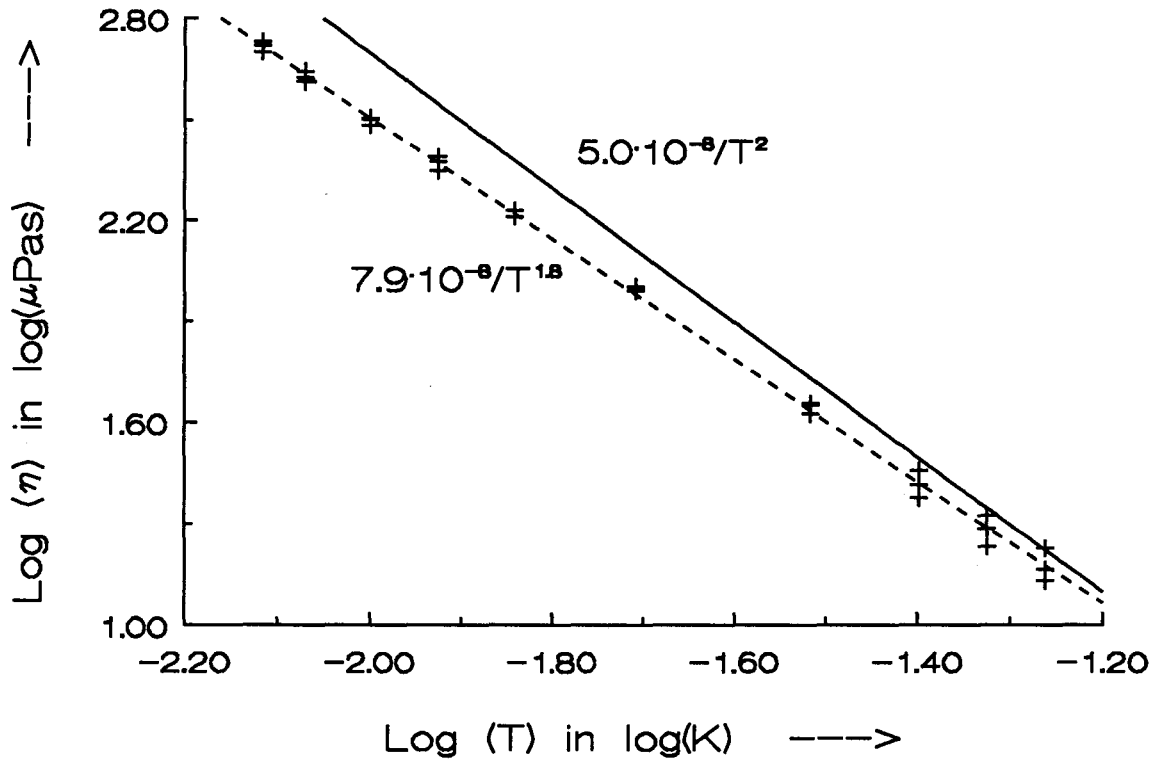
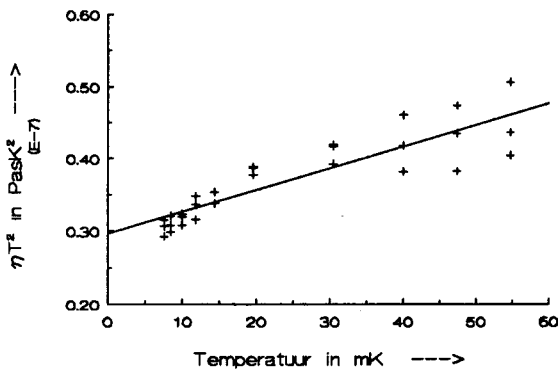
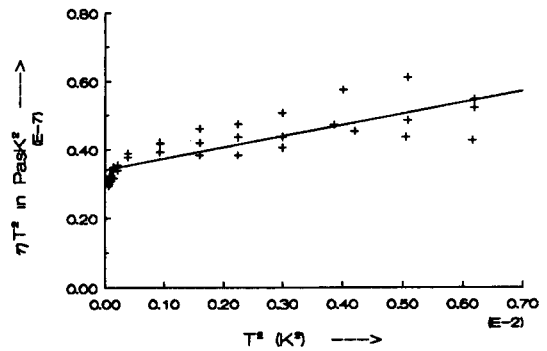


Fig 3.4 *Log η als functie van log T.*

Volgens andere theorieën zou het verband tussen de viscositeit en de temperatuur beschreven kunnen worden als:

$$\eta = \frac{a}{T} + \frac{b}{T^2} \quad (3-20)$$

Als we dus vervolgens ηT^2 uitzetten tegen T , zouden we een lineair verband moeten vinden. In de onderstaande figuur is dit gedaan en tevens is in een tweede figuur η uitgezet tegen T^2 , wat η een functie maakt van T^2 .

Fig 3.5 ηT^2 als functie van T .Fig 3.6 ηT^2 als functie van T^2 .

Af te leiden uit deze twee figuren is, dat de gevonden punten erg om de lijnen (fit door de punten) heen scatteren en dus geen goed verband van η te geven is in de vorm van (3-20) of $\eta = \eta(T^2)$. In de eerste figuur zijn alleen punten meegenomen met $T < 60$ mK, omdat het scatteren van de punten voor hogere temperaturen nog sterker wordt. Dit geldt ook voor de tweede figuur, waar de metingen tot 80 mK zijn meegenomen. Hierin is dan ook duidelijk te zien, dat de scattering bij hogere temperaturen alleen maar sterker wordt. Dit kan verklaard worden door de grotere invloed van de berekening van β , die bij hogere temperaturen, dus smallere pieken, belangrijk wordt. Een nauwkeurige bepaling van deze parameter is dan ook van groot belang voor een ijking bij temperaturen boven de 60 mK.

In de appendix wordt het verband van de viscositeit, gemeten door de drie verschillende TDV's in verschillende figuren uitgezet, zoals hierboven gedaan is voor alle metingen samen. Daar is te zien, dat ook de TDV's elk een andere viscositeit meten bij een zelfde temperatuur, waaruit af te leiden is, dat beschreven theorie in § 3.2 niet noodzakelijk helemaal juist is. Een mogelijke correctie die toegepast zou kunnen worden zijn slipeffecten, die door de Stokesfuncties niet worden beschreven.

Hoofdstuk 4 Numerieke berekeningen aan de expansie.

§ 4.1 Inleiding.

In dit hoofdstuk zal worden nagegaan wat er in het expansievat gebeurt, als ^4He toegevoerd wordt aan een hoeveelheid ^3He . Omdat een deel van het ^3He oplost zullen 2 fasen ontstaan. Aan de fasegrens wordt vanwege het oplossen van het ^3He koude geproduceerd en zal de fasegrens een lagere temperatuur krijgen. Door warmtestromen naar de fasegrens zal in verloop van tijd het gehele systeem afkoelen. Welke temperatuurprofielen ontstaan en hoe deze in de tijd veranderen zal in dit hoofdstuk berekend worden. Ook zal de entropietoename als gevolg van ontstane temperatuursgradiënten worden berekend. Dit onderdeel van mijn werk is in samenwerking gedaan met H. Jenniskens [Jen-91] en een vervolg op deze berekeningen is gedaan door P. Krutzen [Kru-91].

§ 4.2 Model van het experiment.

We beschouwen een volume geconcentreerd of verdund ^3He en passen hierop de wet van behoud van energie toe:

$$\frac{C_v(T)}{V_m} \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \kappa(T) \vec{\nabla} T + \Phi + \dot{q} \quad (4-1)$$

Links staat de toename van de inwendige energie van een volumetje per tijds- en volumeëenheid. Dit moet gelijk zijn aan de netto binnengestroomde energie samen met de in het volume geproduceerde warmte door viskeuze wrijving (Φ) en door warmtebronnen (\dot{q}). In vergelijking (4-1) is C_v de soortelijke warmte, κ de warmtegeleidingscoëfficiënt en V_m het molair volume.

Door enkele aannamen te doen en door cilindercoördinaten te gebruiken, vanwege de geometrie van het systeem, is formule (4-1) te vereenvoudigen. Stel ten eerste dat het helium incompressibel is ($C_p = C_v$ en $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0$). Doordat het systeem cilindersymmetrisch is, hangen v en T niet van de hoek ϕ af. De stroming vindt plaats in de z -richting en we veronderstellen dat dit de enige snelheidscomponent is. Het probleem wordt verder vereenvoudigd door in (4-1) de viskeuze opwarming te verwaarlozen ($\Phi = 0$) en de warmtelekken (adiabatisch) te verwaarlozen ($\dot{q} = 0$). In § 4.5 zal deze verwaarlozing nog ter sprake komen. Vervolgens gaan we de beide fasen afzonderlijk bekijken (fase 1 en 2) en kiezen de fasegrens als oorsprong van de z -as, terwijl deze in werkelijkheid beweegt. De consequentie hiervan is dat de grenzen van de beide fasen dus bewegen, omdat de geconcentreerde fase kleiner wordt en de verdunde fase groter. Deze situatie is hieronder in een schetsje weergegeven:

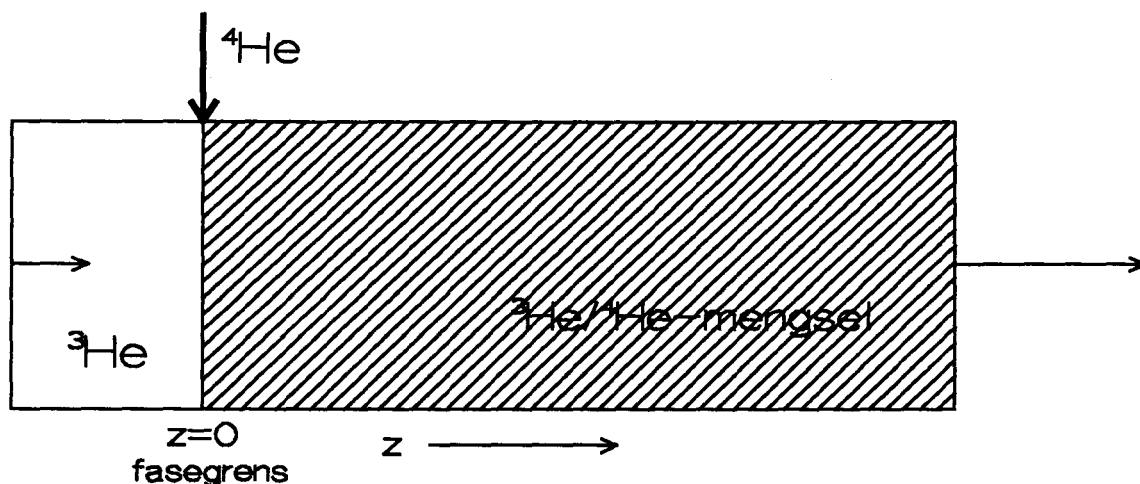


Fig 4.1 Situatieschets van het model in het expansievat.

Het linkerlid van vergelijking (4-1) voor de fasen wordt dan:

$$\frac{C_{v,i}}{V_{i,m}} \frac{DT}{Dt} = \frac{C_{v,i}}{V_{i,m}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) T \right) = \frac{C_{i,0} T}{V_{i,m}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{i,z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (4-2)$$

Hierin geeft het subscript i aan op welke fase de vergelijking van toepassing is. $C_{v,i}$ is de molaire warmtecapaciteit en $V_{i,m}$ het molair volume. We hebben reeds gezien in hoofdstuk 2, dat $C_{v,i}$ afhankelijk is van de temperatuur volgens $C_{v,i} = C_{i,0} T$, wat geldt voor $T < 100$ mK.

Voor het rechterlid van formule (4-1) geldt voor beide fasen:

$$\vec{\nabla} \cdot \kappa_i \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot \frac{\kappa_{i,0}}{T} \vec{\nabla} T = \kappa_{i,0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (4-3)$$

waarin T_0 een referentietemperatuur is, waarvoor de temperatuur van het geconcentreerde ^3He is genomen voor de expansie. Uit de literatuur volgt, dat voor $T \rightarrow 0$ de warmtegeleidingscoëfficiënt te schrijven is, als $\kappa_i = \frac{\kappa_{i,0}}{T}$. Dit geldt echter alleen voor $T < 20$ mK. In een latere stage is hierin

verbetering aangebracht door de warmtegeleidingscoëfficiënt te fitten met de werkelijke waarde [Kru-91].

Door het invoeren van de parameter $u = 2 \ln(T/T_0)$ (Kirchhoff-transformatie) kunnen we de vergelijkingen voor beide fasen als volgt herschrijven:

$$e^u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_{i,z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\kappa_{i,0} V_{i,m}}{T_0^2 C_{i,0}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4-4)$$

We gaan nu over op de dimensieloze parameters η , τ en \bar{v} :

$$\begin{aligned}
 z &= L_i \eta \\
 t &= \tau_{sch} \tau \\
 v_{i,z} &= \frac{L_i}{\tau_{inj}} \tilde{v}_i
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

Hierin zijn L_1 en L_2 de maximale lengtes van beide fasen en τ_{inj} de injectietijd. τ_{sch} stellen we gelijk aan de diffusietijd in de verdunde fase:

$$\tau_{sch} = \frac{T_0^2 C_{2,0} L_2^2}{\kappa_{2,0} V_2} \tag{4-6}$$

De diffusievergelijking wordt nu:

$$e^u \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + Pe \cdot \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{4-7}$$

voor fase 1 en

$$e^u \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + Pe \cdot \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{4-8}$$

voor fase 2.

Hierin is $\alpha_1 = \frac{\kappa_{1,0} C_{2,0} V_2}{\kappa_{2,0} C_{1,0} V_1}$ en $Pe = \frac{\tau_{sch}}{\tau_{inj}}$ en is $\frac{L_1}{L_2} = \frac{V_1}{V_2}$ gebruikt. Voor beide fasen kunnen de volgende

randvoorwaarden worden opgesteld:

- 1) Aan de grens van een fase met het vacuüm wordt geen warmte uitgewisseld en is derhalve de afgeleide van de temperatuur naar de plaats gelijk aan nul. Wat betekent: $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ voor $z \rightarrow L_1$ en L_2 .
- 2) Aan de fasegrens moet de per tijdseenheid geproduceerde koude gelijk zijn aan de uit beide fasen naar de fasegrens toestromende warmte. De geproduceerde koude is gelijk aan de molaire ^3He -stroom maal het enthalpieverschil van beide fasen. De randvoorwaarde is:

$$-\frac{\kappa_{1,0}}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z \uparrow 0} + \frac{\kappa_{2,0}}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z \downarrow 0} = \frac{Pe \cdot v_2}{V_2} (C_{2,0} - C_{1,0}) T_{fase}^2 \tag{4-9}$$

Als we hierin u substitueren, volgt:

$$-\kappa_{1,0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z \uparrow 0} + \kappa_{2,0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z \downarrow 0} = 2 \frac{Pe \cdot v_2}{V_2} T_0^2 e^u (C_{2,0} - C_{1,0}) \tag{4-10}$$

- 3) Tenslotte eisen we, dat de temperatuur van beide fasen voor $z=0$ gelijk moet zijn.

We hebben in het bovenstaande verondersteld, dat de fasegrens ligt bij $z=0$, de geconcentreerde fase aan de negatieve kant ligt en de verdunde fase aan de positieve kant.

Resumerend kunnen we nu de vergelijkingen en randvoorwaarden voor de beide fasen als volgt opschrijven in de dimensieloze parameters:

1) Geconcentreerde fase.

$$\partial_{\tau} u = \alpha_1 e^{-u} \partial_{\eta_1} u - v \partial_{\eta_1} u \quad (4-11)$$

$$RVW: \quad \partial_{\eta_1} u |_{\eta_1, \downarrow \hat{\eta}_1(\tau)} = 0$$

waarin $\hat{\eta}_1(\tau)$ de van de tijd afhankelijke grens is met het vacuüm en η_1 de coördinaat, die loopt van $-\hat{\eta}_1(\tau)$ tot 0.

2) Verdunde fase.

$$\partial_{\tau} u = e^{-u} \partial_{\eta_2} u - v \partial_{\eta_2} u \quad (4-12)$$

$$RVW: \quad \partial_{\eta_2} u |_{\eta_2, \uparrow \hat{\eta}_2(\tau)} = 0$$

waarin $\hat{\eta}_2(\tau)$ de van de tijd afhankelijke grens is met het vacuüm en η_2 de coördinaat, die loopt van 0 tot $\hat{\eta}_2(\tau)$.

v is in deze uitdrukkingen gelijk aan $v_1 \tau_{sch} / L_1 = v_2 \tau_{sch} / L_2$ (we stellen τ_{inj} dus gelijk aan τ_{sch} , waarmee Pe gelijk aan 1 wordt). Tenslotte schrijven we voor de randvoorwaarde aan de fasegrens:

$$-(1-L) \alpha_1 \partial_{\eta_1} u |_{\eta_1, \uparrow 0} + \partial_{\eta_2} u |_{\eta_2, \downarrow 0} = 2v e^u L \quad (4-13)$$

met

$$L = \frac{C_2 - C_1}{C_2} \quad \text{en} \quad \frac{C_1}{C_2} = 1 - L \quad (4-14)$$

Met de hierboven gedefiniëerde dimensieloze snelheid v , kunnen we de tijdafhankelijke grenzen van beide fasen definiëren als:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1(\tau) &= \eta_{10} - s(\tau) \\ \hat{\eta}_2(\tau) &= \eta_{20} + s(\tau) \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$\text{met } s(\tau) = \int_0^{\tau} v d\tau'$$

Hierin zijn de grootheden η_{10} en η_{20} de grenzen op het tijdstip $\tau=0$. Het blijkt uit de latere numerieke berekeningen, dat het makkelijk is om met een minime hoeveelheid verdund ^3He te beginnen, zodat η_{20} niet nul is.

We hebben in bovenstaand model nog te maken met bewegende randen, wat numeriek lastig is en daarom moet het probleem omgeschreven worden naar een model met vaste grenzen, met behulp van de front fixing methode [Cra-84]. We definiëren nu een nieuwe plaatscoördinaat ξ en wel als volgt:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (\xi_1 - 1)\hat{\eta}_1(\tau) \\ \eta_2 &= \xi_2\hat{\eta}_2(\tau)\end{aligned}\tag{4-16}$$

De afgeleiden naar η moeten nu omschreven worden naar afgeleiden in ξ . Hieronder staan ze weergegeven:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \eta_i} &:= \frac{1}{\hat{\eta}_i(\tau)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta_i^2} &:= \frac{1}{\hat{\eta}_i^2(\tau)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &:= \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{(\xi_1 - 1)}{\hat{\eta}_1} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &:= \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\xi_2}{\hat{\eta}_2} \frac{\partial \hat{\eta}_2}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi_2}\end{aligned}\tag{4-17}$$

Als we deze afgeleiden en de parameters ξ_1 en ξ_2 substitueren in vergelijkingen (4-11) en (4-12) en gebruik maken van de uitdrukkingen (4-15) worden de volgende differentiaalvergelijkingen verkregen:

$$\begin{aligned}(\eta_{10} - s)^2 \partial_\tau u &= \alpha_1 e^{-u} \partial_{\xi_1} u - \dot{s} (\eta_{10} - s) \xi_1 \partial_{\xi_1} u \\ (\eta_{20} + s)^2 \partial_\tau u &= e^{-u} \partial_{\xi_2} u - \dot{s} (\eta_{20} + s) (1 - \xi_2) \partial_{\xi_2} u\end{aligned}\tag{4-18}$$

met $0 \leq \xi_i \leq 1$. Ook moeten we de randvoorwaarden omschrijven naar vergelijkingen met de nieuwe parameter. Deze zijn:

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_1} u|_{\xi_1 \downarrow 0} &= 0 \\ \partial_{\xi_2} u|_{\xi_2 \uparrow 1} &= 0 \\ u|_{\xi_1=1} &= u|_{\xi_2=0}\end{aligned}\tag{4-19}$$

$$\frac{(L-1)\alpha_1 e^{-u}}{L(\eta_{10} - s)} \partial_{\xi_1} u|_{\xi_1 \uparrow 1} + \frac{e^{-u}}{L(\eta_{20} + s)} \partial_{\xi_2} u|_{\xi_2 \downarrow 0} = 2\dot{s}$$

Deze randvoorwaarden gelden op elk tijdstip. Bij het oplossen van het probleem gaan we er van uit, dat vóór de injectie ($\tau \leq 0$) de temperatuur in het expansievat overal gelijk is en wel $T=T_0$, dus $u=0$.

Deze differentiaalvergelijking met zijn rand- en beginvoorwaarden moet nu worden opgelost, om zo meer inzicht te krijgen in de verandering van het temperatuurprofiel in de loop van de expansie. Hieruit kan dan ook de entropie bepaald worden (§ 4.4) en de invloed bekeken worden van de snelheid van de injectie van het ^4He op de eindtemperatuur. Omdat de vergelijking niet lineair is, moeten we

de differentiaalvergelijking numeriek oplossen. Dit doen we voor beide fases afzonderlijk. Ze worden gekoppeld door de randvoorwaarde aan de fasegrens. Het probleem van deze randvoorwaarde is echter, dat we geen eenduidige randvoorwaarde voor één enkele fase kunnen bepalen. We voeren daarom een shooting-parameter in, die we door iteratie moeten bepalen. Deze shootingparameter, voeren we als volgt in:

$$\frac{e^{-u}(L-1)\alpha_1}{L(\eta_{10}-s)} \partial_{\xi_1} u|_{\xi_1 \uparrow 1} = \dot{s} + g(\tau) \quad (4-20)$$

$$\frac{e^{-u}}{L(\eta_{20}+s)} \partial_{\xi_2} u|_{\xi_2 \downarrow 0} = \dot{s} - g(\tau)$$

We zien, dat de som van deze beide randvoorwaarden weer gelijk is aan de gezamenlijke randvoorwaarde, waar ze van afgeleid zijn. We moeten in eerste instantie een $g(\tau)$ dus kiezen en vervolgens itereren totdat het een waarde heeft, waarbij ook voldaan wordt aan de randvoorwaarde, dat de grenzen dezelfde temperatuur hebben. In de volgende paragraaf wordt het probleem uitgewerkt door de vergelijking te discretiseren.

§ 4.3 Discretisatie.

We gaan de vergelijkingen en randvoorwaarden discretiseren naar plaats en tijd en voeren dit als volgt in:

$$\begin{aligned} \tau &= k\Delta\tau \\ \xi &= j\Delta\xi \end{aligned} \quad (4-21)$$

De getallen k en j zijn geheel en positief. In de beide fases loopt j , de plaatscoördinaat, van 0 tot respectievelijk N_1 en N_2 . De tijdas kunnen we in feite oneindig door laten lopen, ook al vindt er geen injectie van ${}^4\text{He}$ meer plaats. De temperaturen middelen door geleiding nog wel uit.

Bij het oplossen van het probleem berekenen we de differentiaalvergelijking op tijdstip $k+\theta$ en bepalen daaruit de vector u^{k+1} (dit is de parameter u op de plaatsen $j=0,1,\dots,N_j$) uit de vector u^k , die weer uit de vector op tijdstip $k-1$ is bepaald. Omdat de vergelijking ook de niet-lineaire term e^{-u} bevat moeten we de vergelijking numeriek oplossen. Omdat we deze term niet kennen op tijdstip $k+\theta$ moeten we deze lineair extrapoleren uit e^{-u} op tijdstip k . Omdat s en \dot{s} bekende functies zijn, kunnen we u^{k+1} berekenen. De afgeleiden worden geschreven als:

$$\begin{aligned} \partial_{\tau} u|_j^{k+\theta} &= \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta\tau} \\ \partial_{\xi} u|_j^{k+\theta} &= (1-\theta)\partial_{\xi} u|_j^k + \theta\partial_{\xi} u|_j^{k+1} \\ \partial_{\xi\xi} u|_j^{k+\theta} &= (1-\theta)\partial_{\xi\xi} u|_j^k + \theta\partial_{\xi\xi} u|_j^{k+1} \\ j &= 0, \dots, N_j \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4-22)$$

De afgeleide naar de tijd is nu goed gedefinieerd met als afbreekfout $(\Delta\tau)^2$, als we $\theta=1/2$ kiezen. Dit

is de methode van Crank-Nicholson, welke veel wordt gebruikt voor het oplossen van 2^o-graads differentiaalvergelijkingen. De afgeleiden naar de plaats op het tijdstip k definiëren we als:

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} u|_j^k &= \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta\xi} \\ \partial_{\xi\xi} u|_j^k &= \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{(\Delta\xi)^2} \\ j &= 1, \dots, N_i - 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{4-23}$$

De afgeleiden zijn zo gedefiniëerd, dat de afbreekfout kwadratisch is in $\Delta\xi$.

Aan de randen kunnen we deze benadering niet toepassen, omdat we dan $j < 0$ of $j > N_i$ krijgen. Daarom stellen we daarvoor andere afgeleiden vast. Aan de fasegrens liggen ze al vast door randvoorwaarde (4-20). De 2^o afgeleide wordt als volgt geschreven:

$$\begin{aligned}\partial_{\xi\xi} u|_{j=N_1}^k &= \frac{2u_{N_1-1}^k - 2u_{N_1}^k}{(\Delta\xi)^2} + \frac{2}{\Delta\xi} \partial_{\xi} u|_{j=N_1}^k \quad \text{voor fase 1} \\ \partial_{\xi\xi} u|_{j=0}^k &= \frac{2u_1^k - 2u_0^k}{(\Delta\xi)^2} - \frac{2}{\Delta\xi} \partial_{\xi} u|_{j=0}^k \quad \text{voor fase 2}\end{aligned}\tag{4-24}$$

De eerste afgeleiden worden in deze formule vervangen door de relaties van formule (4-20). De afgeleiden aan de rand, waar het helium grenst aan het vacuüm, zijn als volgt:

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} u|_{j=0}^k &= 0 \\ \partial_{\xi\xi} u|_{j=0}^k &= \frac{2u_1^k - 2u_0^k}{(\Delta\xi)^2} \quad \text{voor fase 1} \\ \partial_{\xi} u|_{j=N_2}^k &= 0 \\ \partial_{\xi\xi} u|_{j=N_2}^k &= \frac{2u_{N_2-1}^k - 2u_{N_2}^k}{(\Delta\xi)^2} \quad \text{voor fase 2}\end{aligned}\tag{4-25}$$

Voor deze keuze van de afgeleiden is de afbreekfout aan de rand niet kwadratisch, maar lineair in $\Delta\xi$, maar omdat dit ene randpunt op de convergentie van het probleem een gewicht heeft van $1/N = \Delta\xi$, zal de convergentie toch van de tweede orde zijn.

We hebben al gezien, dat we u^{k+1} berekenen uit u^k . We maken echter gebruik van een benadering voor e^{-u} op het tijdstip $k+\theta$. Als we een u^{k+1} hebben berekend, kunnen we een betere schatting doen voor e^{-u} op het tijdstip $k+\theta$ en vervolgens u^{k+1} opnieuw berekenen. Deze iteratie doen we tot u^{k+1} voldoende nauwkeurig is bepaald.

We kunnen nu de differentiaalvergelijking in matrixvorm opschrijven, gebruik makend van een nieuwe parameter r , die als volgt wordt gedefiniëerd:

$$r_i = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi_j)^2} \quad (4-26)$$

De differentiaalvergelijking, voor alle plaatscoördinaten j , ziet er in matrixvorm als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & 0 \\ & a_2 & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & c_{N_i-2} & \\ 0 & & a_{N_i-1} & b_{N_i-1} & c_{N_i-1} & & \\ & & & a_{N_i} & b_{N_i} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N_i-1} \\ u_{N_i} \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N_i-1} \\ d_{N_i} \end{pmatrix}^k \quad (4-27)$$

De afgeleiden aan de rand zijn zodanig gekozen hebben, dat we een tridiagonaalmatrix hebben verkregen hebben, waardoor u^{k+1} vrij eenvoudig bepaald kan worden.

Hieronder zullen voor beide fasen de vectorelementen a_i , b_i , c_i en d_i gegeven worden.

Voor fase 1:

$$\begin{aligned}
 X_j &= \alpha_1 \theta \exp[-u_j^{k+\theta}] r_1 & Y_j &= \frac{\dot{s}}{2} j \Delta \tau \theta (\eta_{10} - s) \\
 b_j &= (\eta_{10} - s)^2 + 2X_j & & \text{voor } j = 0, \dots, N_1 \\
 a_j &= -X_j - Y_j & c_j &= -X_j + Y_j & & \text{voor } j = 1, \dots, N_1 - 1 \\
 a_{N_1} &= -2X_{N_1} & c_0 &= -2X_0
 \end{aligned} \tag{4-28}$$

$$\begin{aligned}
 d_0 &= 2X_0 \frac{1-\theta}{\theta} (u_1^k - u_0^k) + (\eta_{10} - s)^2 u_0^k \\
 d_j &= X_j \frac{1-\theta}{\theta} (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + Y_j \frac{1-\theta}{\theta} (u_{j-1}^k - u_{j+1}^k) \\
 &\quad + (\eta_{10} - s)^2 u_j^k & & \text{voor } j = 1, \dots, N_1 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{N_1} &= 2X_{N_1} \frac{1-\theta}{\theta} (u_{N_1-1}^k - u_{N_1}^k) + (\eta_{10} - s)^2 u_{N_1}^k + \\
 &\quad \Delta \tau (\dot{s} + g(\tau)) \frac{L}{1-L} \left(\exp[u_{N_1}^{k+\theta}] \frac{\dot{s} (\eta_{10} - s)^2}{\alpha_1} - 2(\eta_{10} - s) N_1 \right)
 \end{aligned}$$

En voor fase 2:

$$\begin{aligned}
 X_j &= \theta \exp[-u_j^{k+\theta}] r_2 & Y_j &= \frac{1}{2} \dot{s} (N_2 - j) \Delta \tau \theta (\eta_{20} + s) \\
 b_j &= (\eta_{20} + s)^2 + 2X_j & & \text{voor } j = 0, \dots, N_2 \\
 a_j &= -X_j - Y_j & c_j &= -X_j + Y_j & & \text{voor } j = 1, \dots, N_2 - 1 \\
 a_{N_2} &= -2X_{N_2} & c_0 &= -2X_0
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

$$\begin{aligned}
 d_{N_2} &= 2 \frac{1-\theta}{\theta} X_{N_2} (u_{N_2-1}^k - u_{N_2}^k) + (\eta_{20} + s)^2 u_{N_2}^k \\
 d_j &= \frac{1-\theta}{\theta} X_j (u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) + \frac{1-\theta}{\theta} Y_j (u_{j-1}^k - u_{j+1}^k) \\
 &\quad + (\eta_{20} + s)^2 u_j^k & & \text{voor } j = 1, \dots, N_2 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_0 &= (\eta_{20} + s)^2 u_0^k + 2 \frac{1-\theta}{\theta} X_0 (u_1^k - u_0^k) + \\
 &\quad -L \Delta \tau (\dot{s} - g(\tau)) \left(2N_2 (\eta_{20} + s) + \exp[u_0^{k+\theta}] \dot{s} (\eta_{20} + s)^2 \right)
 \end{aligned}$$

We kunnen de functie \dot{s} vooraf vastleggen. We kiezen hiervoor een functie, waarvan de afgeleide continu is. Daarnaast moeten we de begintemperatuur vaststellen. Ook moeten we in de uitgangssituatie starten met een eindige hoeveelheid verdund ^3He , omdat anders door $\Delta\xi=0$ wordt gedeeld. Vanwege dezelfde reden moeten we ook eindigen met een eindige, doch verwaarloosbare hoeveelheid geconcentreerd ^3He . Na de injectie verwaarlozen we het geconcentreerde deel, waarna het programma verder rekent om de temperatuursveranderingen van de verdunde fase te volgen. Tenslotte wordt $L_1=1$ cm gesteld, wat ongeveer overeen komt met de werkelijke situatie.

§ 4.4 De entropie.

Door het toevoeren van superfluide ^4He wordt in eerste instantie de entropie niet verhoogd, omdat het superfluide ^4He entropieloos is. Doordat er aan de fasegrens koude wordt geproduceerd zullen er temperatuursgradiënten ontstaan. Deze gradiënten veroorzaken irreversibele entropieproductie. We kunnen de entropie op twee manieren berekenen. Ten eerste door de integraal over het volume te berekenen. Voor de entropie per oppervlakteëenheid, σ , van een infinitesimaal volumetje, $A dz$, geldt:

$$\sigma = \frac{1}{A} \frac{S_m}{V_m} A dz = \frac{dz}{V_{i,m}'} \int_0^T \frac{C_{i,0} T'}{T'} dT' = \frac{C_{i,0} T dz}{V_{i,m}}$$

Voor ons systeem is de totale entropie per oppervlakteëenheid:

$$\sigma = \int_A^B \frac{C_{10} T}{V_{10}} dz + \int_B^C \frac{C_{20} T}{V_{20}} dz \quad (4-30)$$

In deze formule zijn de integraalgrenzen A, B en C, de grenzen in ons systeem, te weten de grens met het vacuüm van fase 1, de fasegrens en de grens van fase 2 met het vacuüm.

De tweede manier om de entropie van het systeem te bepalen is door integratie over tijd en plaats van de tijdafgeleide van de entropie van een infinitesimaal klein volume. Omdat in deze berekening van de entropie de differentiaalvergelijking moet worden gebruikt, is dit een test voor de juistheid van de oplossing van de vergelijking. We bekijken nu een 1-dimensionale warmtestroom, als gevolg van temperatuursgradiënten in ons systeem voor een klein volumetje $A \Delta z$ met randtemperaturen T en $T+\Delta T$:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \dot{S} = \frac{\dot{Q}(T)}{T} - \frac{\dot{Q}(T)}{T+\Delta T} = \dot{Q}(T) \Delta \left(\frac{1}{T} \right) = -\dot{Q}(T) \frac{1}{T^2} \Delta T$$

Voor de totale entropie per oppervlakteëenheid geldt dan:

$$\frac{\Delta S}{A} = \int_0^L \int_0^L \frac{-\dot{Q}}{A} \frac{1}{T^2} \left(\frac{dT}{dz} \right) dz dt' = \int_0^L \int_0^L \kappa(T) \frac{1}{T^2} \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 dz dt' \quad (4-31)$$

Met $\kappa(T)$ de van de temperatuur afhankelijke warmtegeleidingscoëfficiënt.

Nu moeten we beide formules nog omschrijven naar de door ons gebruikte parameters η_1 en η_2 . We schrijven ze niet om naar de ξ -ruimte, omdat de formules dan onnodig ingewikkeld worden.

We kunnen namelijk het temperatuurprofiel makkelijk omrekenen naar de η -ruimte en vervolgens gebruiken om de entropie te berekenen. Tenslotte moet nog opgemerkt worden, dat we de entropie per oppervlakteëenheid ook dimensieloos maken, door te delen door $\sigma_{rel} = \frac{T_0 L_2 C_2}{V_2}$. De formules (4-30) en

(4-31) worden vervolgens:

$$\frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{rel}} = (1-L) \int_{-\eta_1}^0 e^{\frac{u}{2}} d\eta + \int_0^{\eta_2} e^{\frac{u}{2}} d\eta \quad (4-32)$$

voor de eerste methode en

$$\frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{rel}} = \frac{\sigma(0)}{\sigma_{rel}} + \frac{1}{4} \int_0^\tau \left\{ \alpha_1 (L-1) \int_{-\eta_1}^0 e^{-\frac{u}{2}} (\partial_{\eta_1} u)^2 d\eta_1 + \int_0^{\eta_2} e^{-\frac{u}{2}} (\partial_{\eta_2} u)^2 d\eta_2 \right\} d\tau' \quad (4-33)$$

voor de tweede methode om de entropie te bepalen.

Voordat we de resultaten van het programma gaan bekijken, bekijken we eerst de invloed van viskeuze opwarming.

§ 4.5 Viskeuze opwarming.

In § 4.2 hebben we verondersteld, dat de viskeuze wrijving geen rol speelt. Dit is inderdaad zo bij hoge temperaturen, omdat de viscositeit van helium omgekeerd evenredig is met de temperatuur in het kwadraat. Bij lage temperaturen zal het dus wel een grote rol gaan spelen. We moeten de geconcentreerde fase dan zien als een viskeuze prop, die omhoog wordt geduwd door de verdunde fase. We gaan er van uit, dat het geïnjecteerde ^4He wrijvingsloos naar de fasegrens stroomt (dit geldt alleen beneden een bepaalde kritische snelheid). Aan de fasegrens zal dan het ^3He oplossen. Er is dus geen stroming van ^3He in de verdunde fase. Door de wrijving met de wand in de geconcentreerde fase zal een poisseuille-profiel ontstaan aan de fasegrens en aan de grens met het vacuüm zal door stroming van binnen naar buiten, door de zwaartekracht toch een horizontale meniscus aanwezig zijn, als we de vorming van een niet-horizontale meniscus door capillaire werking buiten beschouwing laten. We zien, dat het probleem hierdoor veel ingewikkelder wordt en nagenoeg niet te berekenen is. Wel zullen we hieronder een afschatting maken voor de grootte van de term in de diffusievergelijking. De diffusievergelijking (4-1) wordt met viskeuze opwarming:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \kappa \vec{\nabla} T + \Phi \quad (4-34)$$

met Φ de door viscositeit geproduceerde wrijvingswarmte per volumeëenheid per seconde [$\text{J}/\text{m}^3\text{s}$]. Deze kan als volgt worden beschreven:

$$\Phi = 2\eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4-35)$$

Vervolgens stappen we over op cilindercoördinaten en veronderstellen, dat de snelheid alleen een component heeft in de z-richting, die alleen van r afhangt. De uitdrukking voor Φ gaat dan over in:

$$\Phi_i = \eta_i \left(\frac{\partial v_{i,z}}{\partial r} \right)^2 = \frac{\eta_{i,0}}{T^2} \left(\frac{\partial v_{i,z}}{\partial r} \right)^2 \quad (4-36)$$

Met deze viskeuze dissipatie wordt de diffusievergelijking:

$$\frac{C_{1,0} T}{V_{1,m}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{1,z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa_{1,0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + \frac{\eta_{1,0}}{T^2} \left(\frac{\partial v_{1,z}}{\partial r} \right)^2 \quad (4-37)$$

We willen ook nu weer de diffusievergelijking beschrijven met dimensieloze parameters om dan de voorfactoren te kunnen bekijken. Met de invoering van de volgende dimensieloze parameters:

$$T := T_0 \cdot e^{u/2}$$

$$t := \tau \cdot t'$$

$$v_{1,z} := \frac{L_1}{\tau_{inj}} \cdot \bar{v}_1$$

$$z := L_1 \cdot \xi_1$$

$$r := \rho \cdot R$$

wordt de diffusievergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\tau}{\tau_{inj}} \bar{v}_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\kappa_{1,0} V_1 \tau}{L_1^2 C_{1,0} T_0^2} e^{-u} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{2\eta_{1,0} L_1^2 V_1 \tau}{T_0^4 C_{1,0} \tau_{inj}^2 R^2} e^{-2u} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \rho} \right)^2 \quad (4-38)$$

Hierin is T_0 de begintemperatuur, τ een tijdschaal, L_1 de beginlengte van het ^3He , τ_{inj} de injectietijd en R de straal van het expansievat. Voor de verdunde fase geldt dezelfde vergelijking, waarbij de subscript 1 wordt vervangen door een 2 en de viskeuze dissipatieterm vervalt. We kunnen nu zoals in § 4.2 de tijdschaal, τ , gelijk stellen aan de diffusietijd van de verdunde fase, $(L_2^2 C_{2,0} T_0^2) / (\kappa_{2,0} V_2)$. Als we hiermee de diffusievergelijking herschrijven, vinden we:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\tau_{dif}}{\tau_{inj}} \bar{v}_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \alpha_1 e^{-u} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{2\eta_{1,0} \tau_{dif} L_1^2 V_1}{T_0^4 C_{1,0} \tau_{inj}^2 R^2} e^{-2u} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \rho} \right)^2 \quad (4-39)$$

Hierin is α_1 hetzelfde als in § 4.2. Willen we nu de viskeuze dissipatieterm verwaarlozen, dan moet de voorfactor van deze term veel kleiner zijn dan α_1 (=64.13). We vinden voor de injectietijd als functie van de begintemperatuur T_0 het volgende verband:

$$\tau_{inj} > \frac{L_1^2}{T_0 R} \sqrt{\frac{2\eta_{1,0}}{\kappa_{1,0}}} = \frac{0.222}{T_0 [mK]}$$

Het is nu ook mogelijk af te schatten, wanneer de convectieve term te verwaarlozen is ten opzichte van de conductieterm. In dat geval kunnen temperatuursverschillen snel uitgemiddeld worden. We moeten dan eisen dat α_1 veel groter is dan τ_{dif}/τ_{inj} . Deze eis moeten we ook stellen voor de verdunde fase, waar de eis nog strenger is, omdat daar α gelijk is aan 1. Hiermee vinden we voor τ_{inj} als functie van T_0 :

$$\tau_{inj} > \tau_{dif} = 11.14 \cdot (T_0 [mK])^2$$

Als we deze twee gegevens uitzetten in een grafiek verkrijgen we het volgende plaatje:

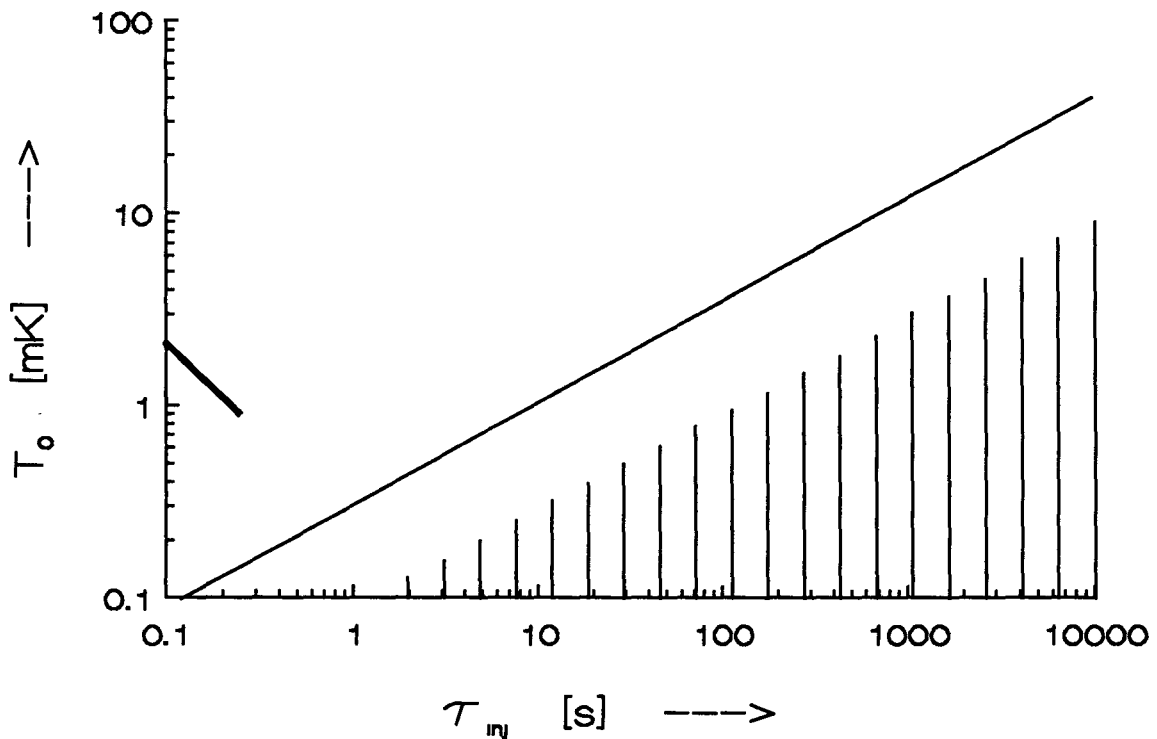


Fig 4.1 Verband tussen begintemperatuur en injectietijd. Het gearceerde gebied geeft aan, waar de injectietijd en begintemperatuur voldoen om nagenoeg geen entropietoename te hebben. De dikke lijn is het verband $\tau_{inj}=0.222/T_0$ en loopt slechts tot 0.97 mK, waar ^3He superfluïde wordt. De dunne lijn, $\tau_{inj}=11.14T_0^2$.

In hoofdstuk 2 hebben we al gezien, dat de injectiesnelheid begrensd is en daarmee, dat de injectietijd ook een minimale waarde heeft. Deze is gelijk aan ongeveer 20 à 30 minuten. We zien uit de figuur, dat de viskeuze dissipatieterm dan volledig te verwaarlozen is bij elke begintemperatuur. Komen we namelijk beneden 1 mK, dan wordt het geconcentreerde ^3He ook superfluïde en wordt de viscositeit

van de fase nul. De enige eis, die we in feite overhouden, willen we reversibel injecteren, is dat we de injectietijd groter moeten kiezen dan de diffusietijd in de verdunde fase. Dit gebied is weergegeven door de arcering.

We zouden ook een afschatting kunnen maken voor de grootte van de invloed van een warmtelek, maar daar is in een later stadium nog aan gerekend door P. Krutzen [Kru-91]. Daarom zal hierop in dit verslag niet verder worden ingegaan.

§ 4.6 Resultaten van de berekeningen.

Met behulp van een in Pascal geschreven programma is het mogelijk de differentiaalvergelijking, die beschreven is in de vorige paragrafen, op te lossen. Hierin wordt het temperatuurprofiel op een bepaald tijdstip berekend, alsmede de entropie (op twee manieren). Om te zien of het programma voldoet, is het noodzakelijk de convergentie van het probleem te beschouwen. Dit is gedaan door staphalving in de plaats en vervolgens de waarden van de entropie (twee maal) en de parameter $u (=2\ln(T/T_0))$ te bekijken. De convergentiefactor bij een n -tal plaatspunten definiëren we als:

$$F_n = \frac{X_n - X_{2n}}{X_{2n} - X_{4n}}$$

F is de convergentiefactor voor n plaatspunten. X is de beschouwde grootheid bij n , $2n$ of $4n$ plaatspunten. Omdat ons probleem volgens de theorie kwadratisch convergent is, zou de convergentiefactor gelijk aan 4 moeten zijn. In de onderstaande tabel is de convergentiefactor van verschillende grootheden naar de plaats weergegeven.

aantal plaatspunten, n	convergentiefactor van de entropie volgens (4-33)	convergentiefactor van de entropie volgens (4-32)	convergentiefactor van parameter u
6	4.04	4.10	3.96
12	4.08	3.85	4.01
24	4.16	4.00	4.00

Tabel 4.1 *Convergentiefactor van de convergentie naar de plaats.*

We kunnen concluderen, dat het probleem inderdaad kwadratisch convergeert. Tevens is de convergentie naar de tijd bekeken, welke ook kwadratisch is gebleken. Verder is uit de berekeningen gebleken, dat de uitkomsten ervan voor de entropie, volgens (4-32) en (4-33) nagenoeg overeenstemmen (binnen 2%).

Nu het programma is getest, kunnen we de resultaten van de berekeningen met het programma aan de differentiaalvergelijking gaan bekijken. Ten eerste bekijken we de entropietoename als functie van de injectietijd. In het onderstaande plaatje is de entropietoename na een volledige expansie en uitmiddeling van temperatuur uitgezet tegen de injectietijd bij 2 verschillende begintemperaturen.

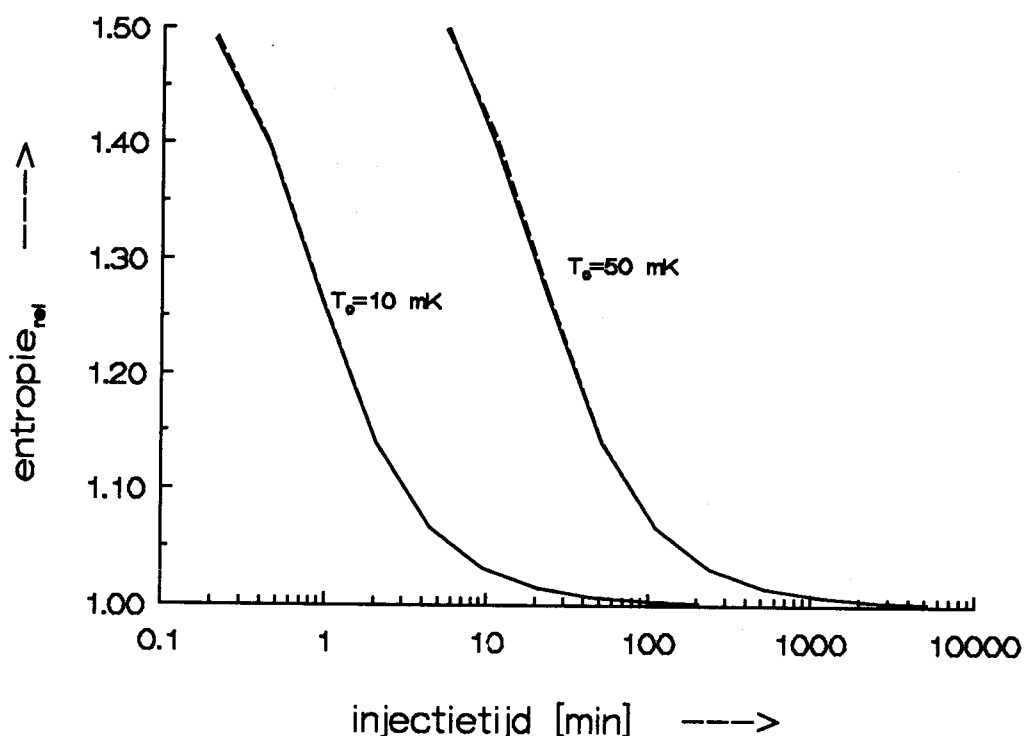


Fig 4.3 *Relatieve entropieproduktie als functie van de totale injectietijd. Entropie is berekend op 2 manieren, vgl. (4-32) en (4-33).*

We zien, dat de entropietoename stijgt bij een snellere injectie (is kortere injectietijd). Dit komt, omdat temperatuurgradiënten ontstaan, dankzij de grotere invloed van de convectie ten opzichte van de conductie in het expansievat.

Verder is de eindtemperatuur bepaald als functie van de injectietijd. Dit verband is in fig 4.4 uitgezet.

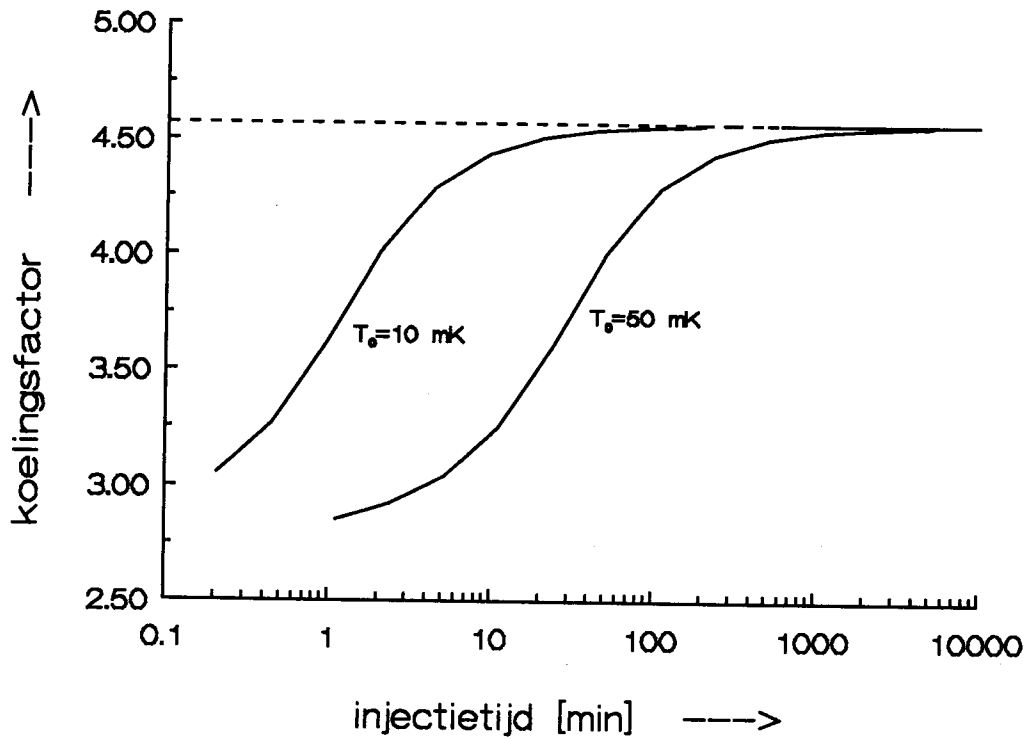


Fig 4.4 Koelingsfactor ($= T_0/T_{\text{eind}}$) als functie van de totale injectietijd zonder warmtelek.

Hieruit zien we dat voor $T_0 = 50 \text{ mK}$ de injectie lang moet duren (>10 uur), willen we geen ineffektieve koeling krijgen. Omdat we hier de invloed van een warmtelek niet mee hebben genomen, moeten we er rekening mee houden, dat bij deze lange injectietijden, opwarming plaatsvindt langs die weg. Hieraan is onderzoek gedaan door P. Krutzen [Kru-91], waarvan hier een figuur is overgenomen (fig. 4.5), waarin de optimale injectietijd uitgezet staat tegen de grootte van het warmtelek.

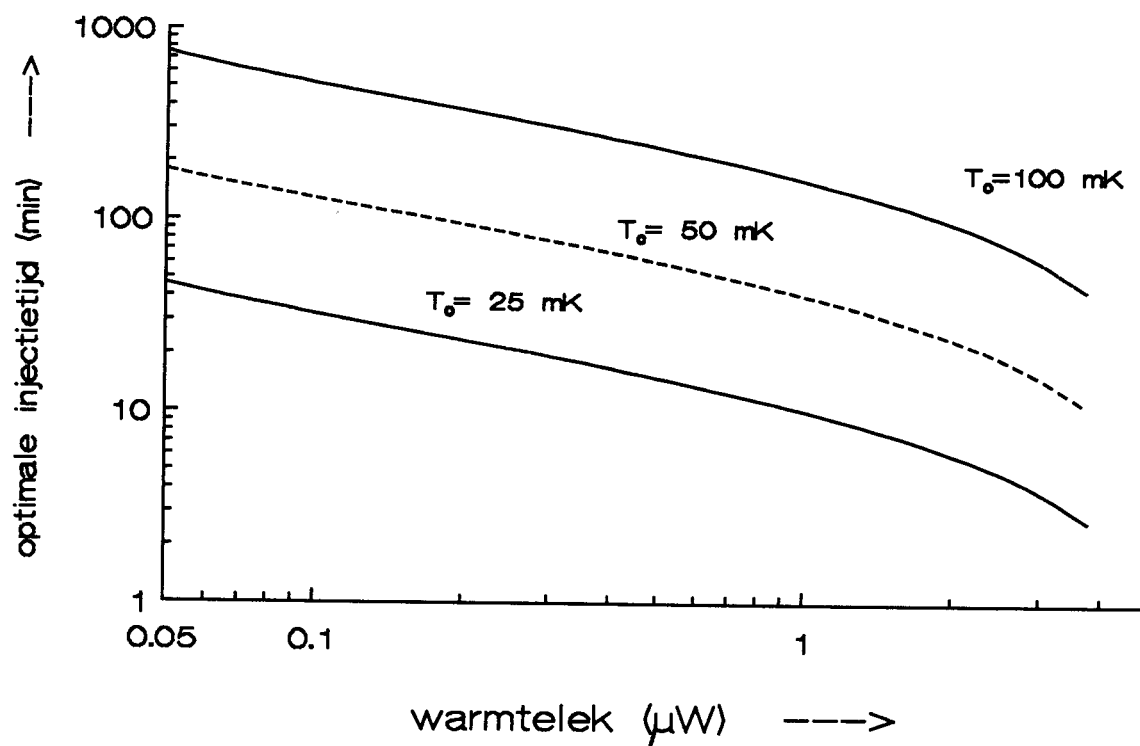


Fig 4.5 Optimale injectietijd als functie van het warmtelek.

Hierin is rekening gehouden met opwarming ontstaan door temperatuursgradiënten én door het warmtelek.

Hoofdstuk 5 Experimenten en Resultaten.

§ 5.1 Inleiding.

In dit hoofdstuk zal uit de doeken worden gedaan, welke experimenten gedaan zijn en wat daarvan de resultaten waren. In totaal zijn gedurende mijn afstudeerperiode 6 'runs' uitgevoerd. Dus 6 periodes, dat de mengkoeler heeft gedraaid. Tijdens de laatste 2 runs zijn echter geen expansies uitgevoerd. De één na laatste run zijn speerweerstand geijkt, terwijl gedurende de laatste run het systeem zoveel problemen gaf, dat geen experimenten gedaan konden worden. Deze problemen bestonden uit een lek, waardoor geen lage temperaturen behaald konden worden.

In dit hoofdstuk zullen in chronologische volgorde de runs besproken worden. Aan bod komen de opstelling, de experimenten en resultaten.

§ 5.2 Run 321.

In deze run is de opstelling gebruikt, zoals die getekend is in fig. 2.4. Op verschillende punten zijn speerweerstand aangebracht, om de temperatuur te meten. Verder zijn in het ^4He -vat en expansievat een tweetal hoogtemeters geplaatst om het He-niveau als functie van de tijd te kunnen meten tijdens een expansie of ontmenging. In het ^4He -vat en op het expansievat was een heater, een stookweerstandje, aanwezig om een warmtestroom op te leggen. Door de temperatuur van het ^4He -vat te variëren is het mogelijk de superfluïde ^4He -flow door het superlek te regelen (beschreven in hoofdstuk 2). Het superlek bestond uit een stalen buisje van ongeveer 12 cm lengte met een buitendiameter van 6 mm en een binnendiameter van 4 mm. In deze run moest de werking van het superlek getest worden; of het überhaupt mogelijk was om via een superlek superfluïde ^4He te injecteren in het expansievat en of de flow controleerbaar was door de temperatuur in het ^4He -vat te variëren. Ook moest natuurlijk nagegaan worden of het superlek geen normale component of ^3He doorliet. Tenslotte zijn ook warmtelekken bekeken en is de werking van de heatswitch getest.

Na het opstarten van de mengkoeler en het afkoelen van het expansievat met behulp van de heatswitch, hebben we met behulp van de heater op het expansievat de warmtestroom door de open heatswitch bekeken. Door de temperaturen op de wand van de mengkamer en het expansievat te meten en de stook op het expansievat te bepalen uit de stroom door en spanning over de stookweerstand, kunnen we de κ_{n0} van het aluminium bepalen. Hieronder is de gestookte warmte uitgezet tegen T^4 van het expansievat (fig 5.1); we verwaarlozen hierbij de temperatuur van de mengkamer (50 mK t.o.v. 130 mK van het expansievat).

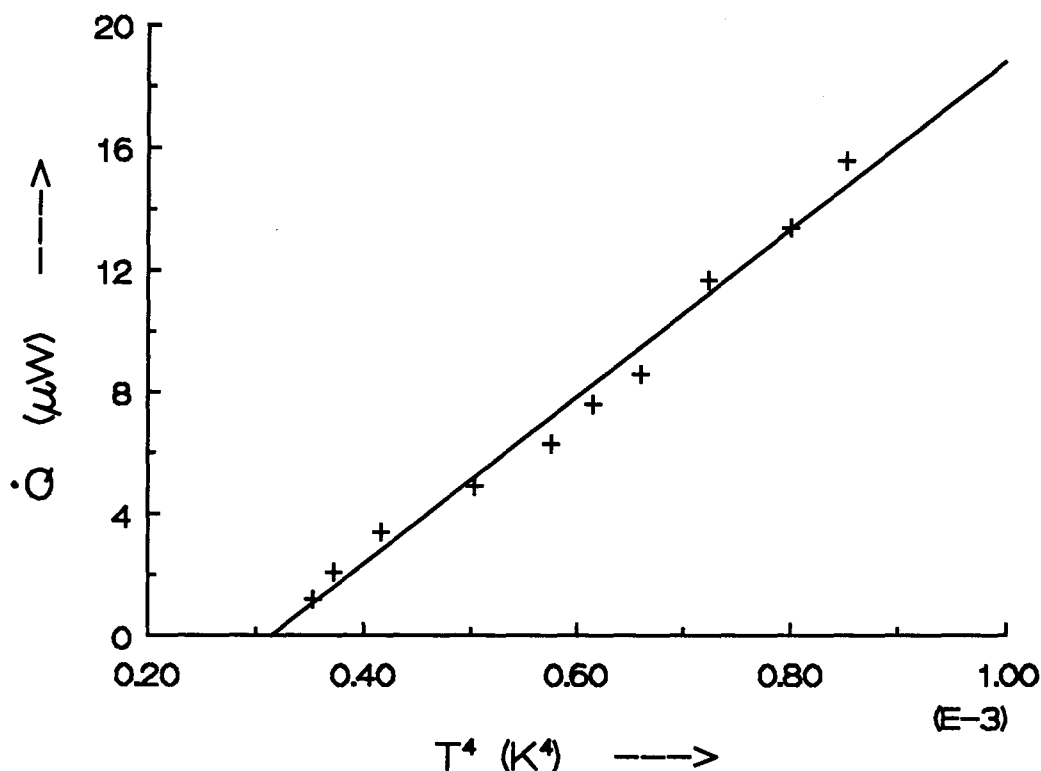


Fig 5.1 De warmtestroom door de heatswitch als functie van $\Delta(T^4)$.

We zien dat bij nulstroom, de temperaturen niet aan elkaar gelijk zijn. Dit is een gevolg van het warmtelek naar het expansievat via bedrading, superlek etc. Dit warmtelek is gelijk aan de afsnijding van de lijn met de y-as ($8.6 \mu W$). De richtingscoëfficiënt is gelijk aan $\kappa A/l$ en is $0.27 [J/K^4s]$. Hieruit volgt een κ_{n0} van $23 [J/Kms]$. Dit stemt niet overeen met de literatuurwaarden ($\kappa_{n0}=6 \cdot 10^2 [W/Km]$), maar het hier toegepaste model houdt dan ook geen rekening met het koper in de heatswitch en tevens niet met het contact tussen heatswitch en de mengkamer en het contact tussen heatswitch en het expansievat. Ook kan een oxidelaagje op het koper, dat het contact maakt met de mengkamer en het expansievat, het model sterk veranderen. Verder is aan de heatswitch weinig gemeten gedurende het afstudeerwerk. Wel is geconstateerd, dat er duidelijk invloed is op de thermische geleiding of het aluminium normaal of supergeleidend is, waardoor de heatswitch goed bruikbaar was. We zijn echter nog niet zo laag in temperatuur gekomen, dat we hoge eisen moesten stellen aan de thermische weerstand van de switch in open toestand. In de toekomst als lagere temperaturen gehaald worden (lager dan de temperatuur van de mengkamerwand), moet hiermee wel rekening gehouden worden en bijvoorbeeld de voorgestelde geometrie (§ 2.3) in overweging worden genomen.

Het is net al vermeld, dat de temperatuur van de mengkamerwand ongeveer gelijk was aan 50 mK . In de mengkamer zelf is de temperatuur ook gemeten en was daar minder dan 20 mK (niet meer betrouwbaar te meten met de speerweerstand). Normaal gesproken is dit niet opvallend, vanwege de Kapitza weerstand tussen het helium en het metaal van het vat, maar in onze situatie was de mengkamer gesinterd en daarmee het contactoppervlak tussen het helium en de mengkamerwand sterk vergroot, waardoor temperatuursverschillen zouden moeten verkleinen. Dit sinteren is gebeurd met Japans zilver, tot dusver het best bekende sintermateriaal. Daarom was het des te vreemder dat

toch forse temperatuursverschillen bleven bestaan. Het grote warmtelek naar de mengkamerwand was dan ook een aanduiding voor het feit, dat we toen al een lek hadden in ons systeem, waardoor superfluïde ^4He als een film over de gehele opstelling aanwezig was. Hierdoor ontstaat een thermisch contact tussen de warme en koudere delen van het systeem en wordt de temperatuur op de vaatjes dus beïnvloed. Door de relatief hoge temperatuur op de mengkamerwand was het niet mogelijk het expansievat beter voor te koelen. Nadat we het warmtelek naar het expansievat hebben onderzocht kunnen we de adiabatische expansie gaan onderzoeken.

We laten een heliummengsel met ongeveer 4,6% ^3He het expansievat in. We koelen de inhoud van het vat verder af met behulp van de heatswitch. Omdat het ^4He -vat nog op een lage temperatuur (thermisch contact met de verdamper) is, zal nog geen superfluïde ^4He mogen gaan stromen. Wanneer we nu door met de heater in het ^4He -vat te stoken, de temperatuur van het vat verhogen moet er een flow van het expansievat naar het ^4He -vat van superfluïde ^4He ontstaan. Door 2.1 mW te stoken in het ^4He -vat bleek inderdaad de temperatuur genoeg op te lopen, om deze flow te bewerkstelligen. Als we vervolgens de heater weer helemaal uit zetten (0 mW), ging het ^4He weer terug naar het expansievat, waar vervolgens een expansie plaatsvindt, waarbij de temperatuur daalt. Een expansie, waarbij we de stook op het ^4He -vat helemaal uit zetten (snelst mogelijke injectie) is in onderstaande figuur te zien (fig 5.2):

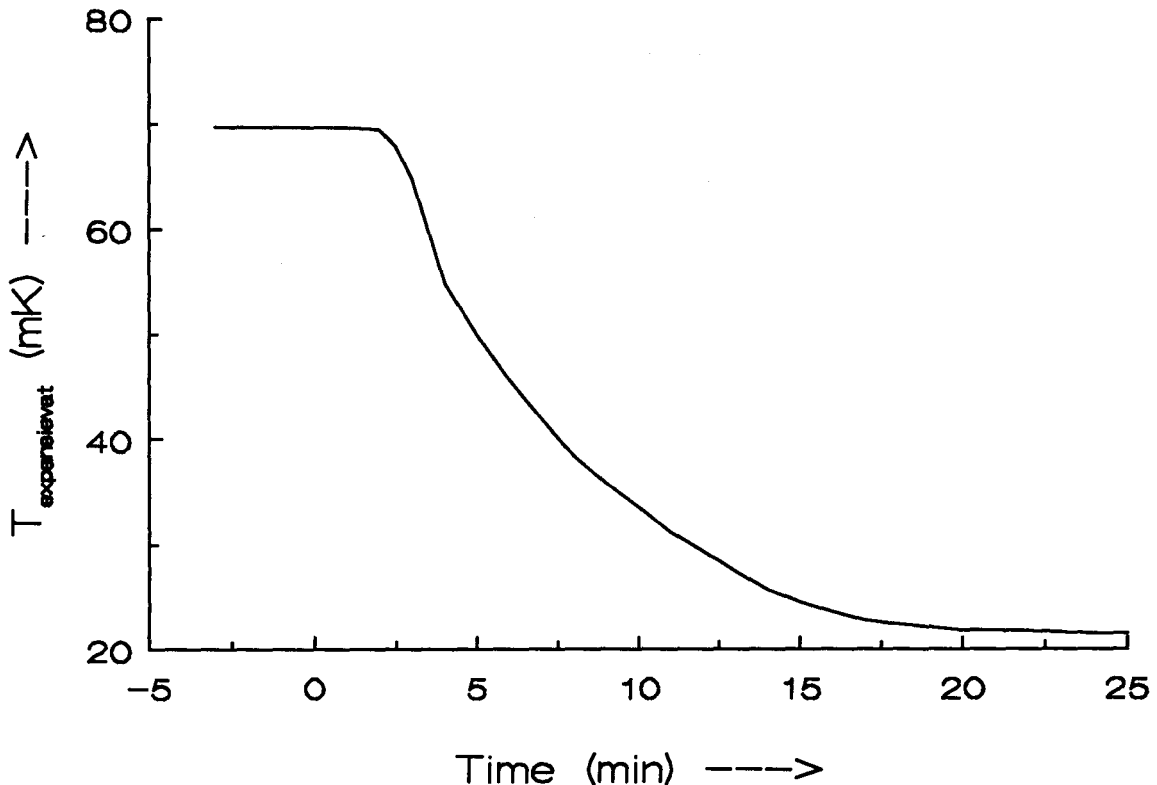


Fig 5.2 *Temperatuur in het expansievat gedurende een expansie.*

We zien, dat de temperatuur een factor $69.7/21.5 = 3.2$ is gezakt, wat heel wat lager is dan de theoretisch haalbare waarde (4.57). Dit betekent dat óf de expansie te snel is uitgevoerd, zodat grote

temperatuursgradiënten zijn ontstaan en daardoor opwarming door entropieproductie, óf we hebben te langzaam geïnjecteerd, zodat het warmtelek een te grote invloed heeft gehad. We zouden nu deze expansie kunnen nabootsen door het programma, beschreven in hoofdstuk 4. We gaan uit van een hoeveelheid van 1.76 mol ingecondenseerd mengsel. Dit komt overeen met een hoogte $L_2=4.77$ cm in het expansievat. Als we er nu van uitgaan, dat tijdens de expansie alleen kou wordt geproduceerd tot het moment waarop al het geconcentreerd ^3He opgelost is, dan is de injectietijd 15.3 minuten (zie fig. 5.3). Deze gegevens gebruiken we voor het programma, waarmee dan een eindtemperatuur berekend wordt van 17.45 mK. Het is dus duidelijk, dat we te maken hebben met een groot warmtelek naar het expansievat. Voor 1.20 mol 6.6% mengsel en een temperatuur van 21.5 mK geeft dit een warmtelek van: $9.0 \mu\text{W}$. Dit komt nagenoeg overeen met het berekende warmtelek naar het expansievat uit de metingen met de heatswitch. Dit lek is natuurlijk veel te groot, als we naar lagere temperaturen toe willen. Er zijn in de volgende runs dan ook al verbeteringen aangebracht, die in principe het warmtelek moeten reduceren.

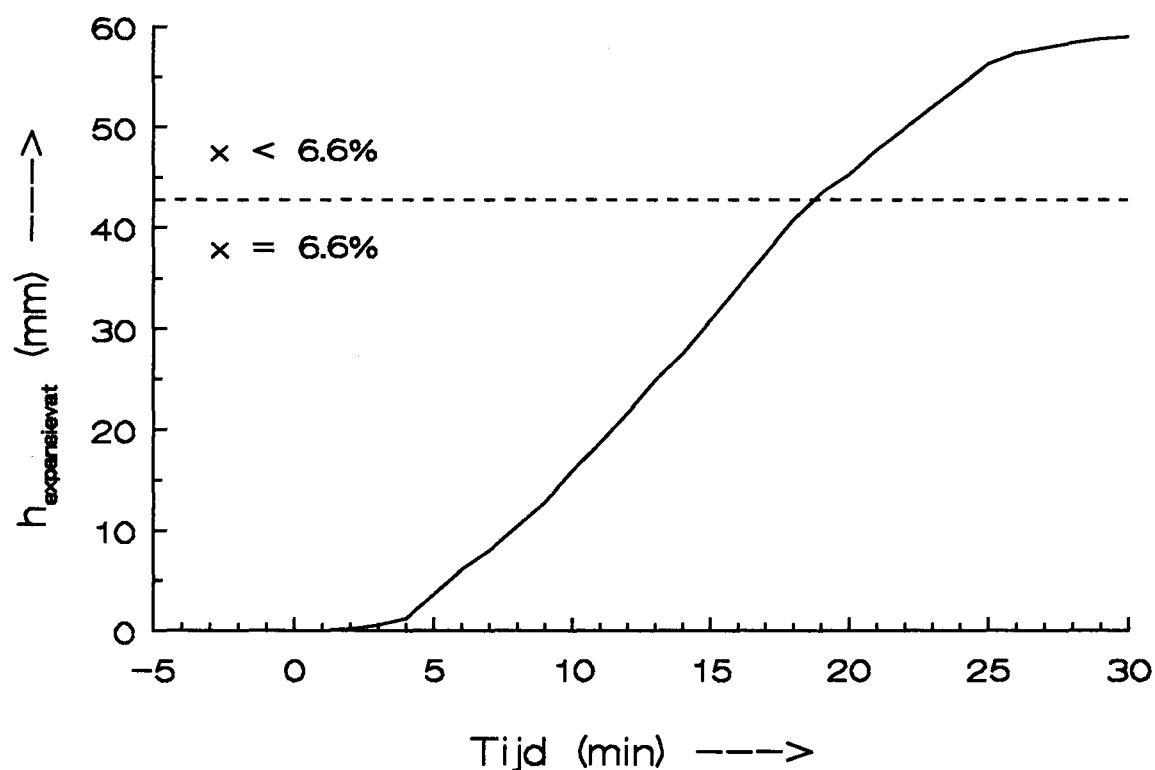


Fig 5.3 Hoogteniveau van het helium tijdens een expansie.

In figuur 5.3 zien we duidelijk een knik in helling van de lijn. Uit de hoogte, waarbij de knik plaatsvindt en de eindhoogte van het mengsel, waar de concentratie ^3He 4.6% is, kunnen we berekenen, dat bij de knik juist de geconcentreerde fase verdwenen is. Deze knik moet het gevolg zijn van het afnemen van de injectiesnelheid, want het kan niet verklaard worden door volumeëffecten. Deze volumeëffecten voorspellen juist een tegengestelde knik. De ware reden zou kunnen zijn, dat wanneer de verdunde fase verder ontmengd wordt en de concentratie dus afneemt, de osmotische druk ook afneemt en daardoor het injecteren van het ^4He langzamer gaan. Dit zou de knik in de helling van

de lijn kunnen verklaren.

De snelheid van de injectie hangt niet alleen af van de concentratie ^3He in de oplossing, maar ook van de temperatuur van het ^4He -vat. Deze kan geregeld worden met behulp van de heater in het vat. We hebben onderzocht bij welke stook de flow door het superlek precies nul was. Tijdens een expansie probeerden we de stook zodanig te variëren, dat de expansie stopte en het superfluïde ^4He niet terug stroomde. Dit bleek het geval te zijn bij een stook van 0.75 mW. Omdat de temperatuur van het vat dan gelijk blijft, betekent dit, dat deze warmte volledig weg stroomt naar de verdamper (en andere onderdelen). Als we dus meer stoken, zal eerst de temperatuur stijgen en vervolgens gaat er ^4He stromen naar het ^4He -vat. Dit superfluïde ^4He moet dan voor een deel worden omgezet naar normaal ^4He . Hiervoor is de volgende hoeveelheid warmte nodig:

$$\dot{Q} = H_m(T) \cdot \dot{n}_4 \quad (5-1)$$

Voor de flow richting ^4He -vat kunnen we nu de volgende uitdrukking opstellen (zie ook (2-17)):

$$\dot{n}_4 = \frac{\dot{Q}_{stook} - 0.75}{H_M(T)} \quad (5-2)$$

Als we dus op maximale snelheid injecteren (geen stook in het ^4He -vat) en vervolgens dubbele kritische stook opleggen (=1.5 mW), zal de flow even groot zijn, maar een tegengestelde richting hebben. In de onderstaande figuur is dit experiment geschetst (fig 5.4).

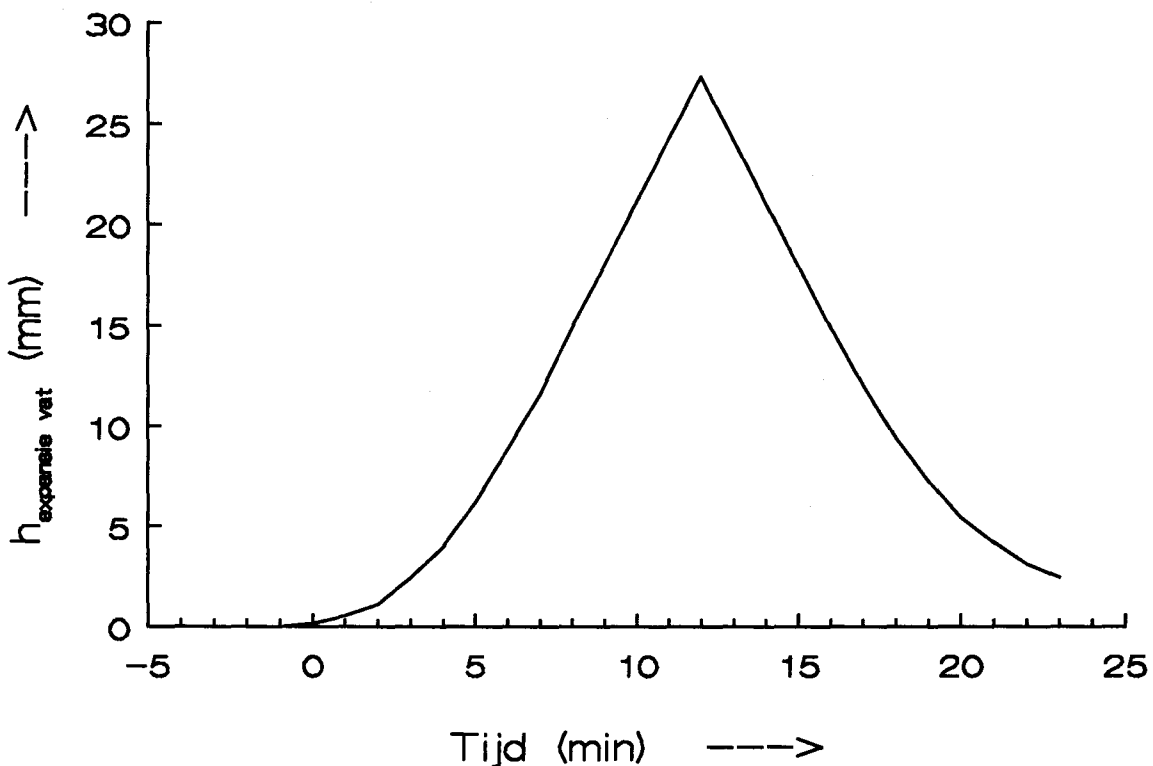


Fig 5.4 Expansie en ontmenging door de dubbele kritische stook op te leggen.

Inderdaad zien we dat de richtingscoëfficiënt van de functie voor en na de top evengroot, maar tegengesteld zijn.

Als we de verschillende gestookte warmtes als functie van de flow uitzetten, vinden we het volgende verband (fig 5.5):

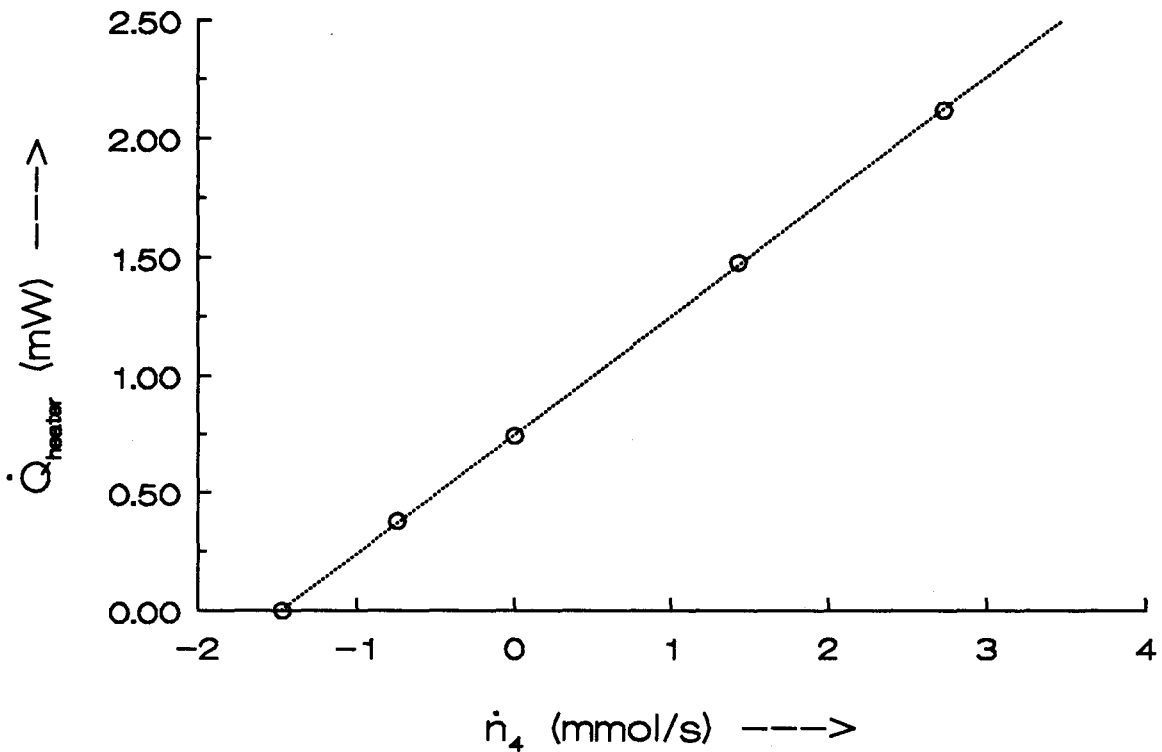


Fig 5.5 Verband tussen de gestookte warmte in het ⁴He vat en de flow door het superlek richting ⁴He vat.

Uit de grafiek volgt, dat er een goed lineair verband is tussen de flow van het superfluide ⁴He en de stook in het ⁴He-vat. We kunnen dus heel nauwkeurig de injectiesnelheid bepalen, door van te voren de stook goed in te stellen. Zoals we hebben kunnen zien uit formule (5-1), is de helling van bovenstaande grafiek (fig 5.5), gelijk aan de molaire enthalpie. Uit de helling volgt dan dat $H_m(T)=0.50$ [J/mol]. Dit komt neer op een temperatuur van 1.35 K [Con-70]. Deze temperatuur komt zeer goed overeen met de metingen en de theoretisch voorspelde temperatuur, waarbij de fonteindruk in het ⁴He-vat gelijk is aan de osmotische druk van een 6.6%-mengsel in het expansievat.

Omdat deze temperatuur elke keer opnieuw gevonden werd als waarde tijdens een expansie, is dit een bewijs voor het feit dat het superlek goed werkte en geen ³He doorliet. Zou dit namelijk wel het geval zijn geweest, dan zou in het ⁴He-vat ook een osmotische druk zijn ontstaan, en daarom een minder grote fonteindruk nodig zijn geweest om het ⁴He van het expansievat naar het ⁴He-vat te verplaatsen. De temperatuur zou dan dus lager kunnen zijn.

Uit de figuur volgt een maximale injectiesnelheid van 1.5 [mmol/s], waardoor de minimale injectietijd komt op 19 minuten.

§ 5.3 Run 322.

Omdat we in run 321 last hadden van storing op de hoogtemeting in het ^4He -vat door de heater, is de heater nu buiten op de flens geplaatst en niet meer in het vat. Het was daarom tijdens deze run wel goed mogelijk het hoogteniveau in dit vat te volgen. Dit keer is 2.73 mol mengsel ingecondenseerd. Voor deze run zijn een aantal speerweerstandjes geijkt in het hoge T-gebied (1 tot 4 K), om de temperatuur van het ^4He -vat beter te kunnen vaststellen. Vervolgens zijn de TDV (hoofdstuk 3) en de condensator voor de concentratiemeting in het expansievat geplaatst. Ook het superlek is veranderd, door nu een dunnere stalen buis (1.9 mm binnen- en 2.5 mm buitendiameter) te gebruiken, waardoor we verwachten, dat het warmtelek van het ^4He -vat naar het expansievat kleiner is.

Tijdens deze run was het ondanks het vernieuwde superlek niet mogelijk om het expansievat beter voor te koelen (laagst behaalde begintemperatuur was 148 mK met eindtemperatuur van ongeveer 60 mK). Het vermoeden bestaat, dat het lek in ons systeem groter is geworden en daardoor het onmogelijk werd vanwege filmkruip goed voor te koelen. Ook in latere runs speelde dit lek ons parten. Vanwege dit lek en de verder bijna identieke metingen zullen hieronder alleen enkele nieuwe resultaten worden vermeld.

We hebben met de switch open de temperatuur van het expansievat gemeten gedurende ongeveer een uur. In de loop van dit uur is de heater op het expansievat aangezet ($3.0 \mu\text{W}$). Als we nu de hoeveelheid geconcentreerd ^3He kennen in het vat ($=0.125 \text{ mol}$), dan kunnen we uit het verschil van de hellingen de warmtecapaciteit van het gehele vat halen en tevens het warmtelek naar het expansievat bepalen.

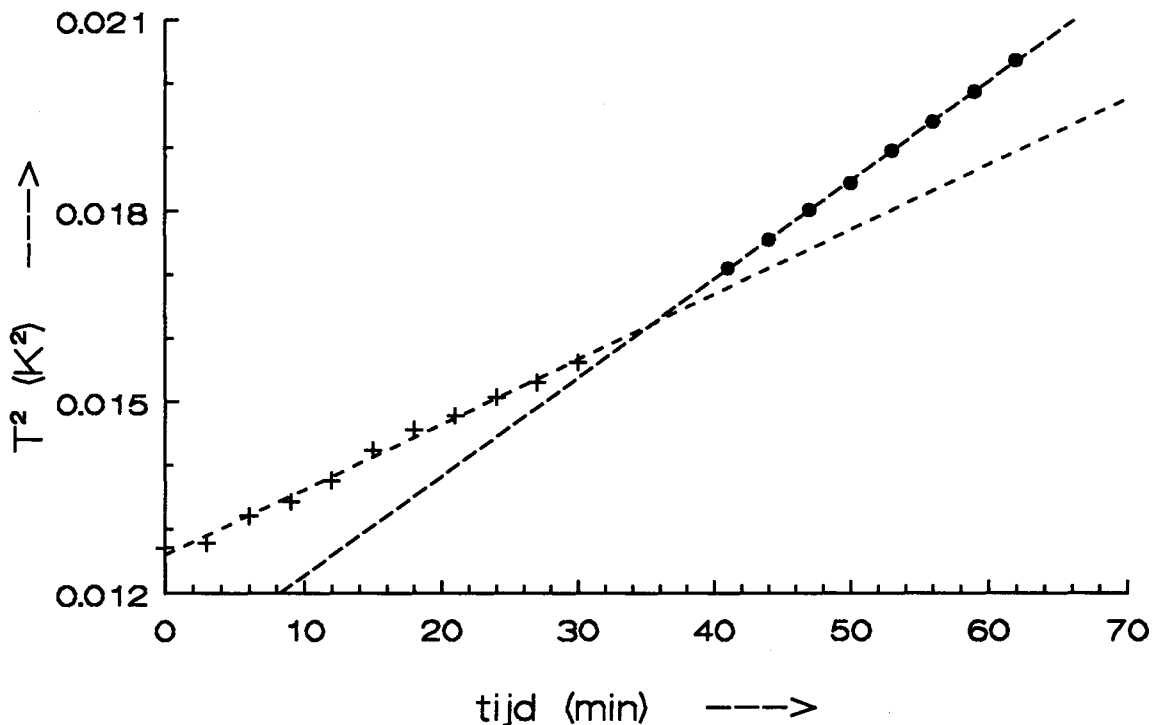


Fig 5.6 De temperatuur in het kwadraat als functie van de tijd. Na 38 minuten stookte de heater $3 \mu\text{W}$.

We veronderstellen, dat de toegestroomde warmte naar het expansievat, de inwendige energie van het systeem (geconcentreerd ^3He en een stalen vat; we verwaarlozen de meetinstrumenten, die vnl. bestaan uit koper) verhoogd. Dit kunnen we als volgt weergeven:

$$\dot{Q} = \dot{U}_{\text{sys}} = \frac{1}{2} C_{\text{sys},0} \frac{\partial(T^2)}{\partial t} \quad (5-3)$$

hierin is $C_{\text{sys},0}$ gelijk aan:

$$C_{\text{sys},0} = m_{\text{staal}} \cdot C_{\text{staal},0} [\text{J/kgK}^2] + n_{\text{He}} \cdot C_{\text{He}} [\text{J/molK}^2] \quad (5-4)$$

en

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{lek}} + \dot{Q}_{\text{stook}} \quad (5-5)$$

Uit de hellingen van de twee lijnen ($1.70 \cdot 10^{-6}$ en $2.58 \cdot 10^{-6}$ [K^2/s]) vinden een warmtelek van 5.8 [μW] en $C_{\text{sys},0} = 6.82$ [J/K^2]. Met $m_{\text{staal}} = 0.30$ [kg], $n_{\text{He}} = 0.125$ [mol] en $C_{\text{He},0} = 22.8$ [J/molK^2] vinden we voor de soortelijke warmtecoëfficiënt van het staal, $C_{\text{staal},0} = 13$ [J/kgK^2]. In [Ree-83] wordt voor AISI310-staal een waarde gegeven van 8.9 [J/kgK^2]. Er bestaan echter vele soorten staal en een kleine verandering in de samenstelling van het staal kan een andere soortelijke warmtecoëfficiënt geven. Daarnaast kunnen we concluderen, dat het warmtelek naar het expansievat kleiner is dan in run 321, wat een aanwijzing is voor het kleinere warmtelek via het nieuwe superlek.

Met de TDV zijn metingen gedaan in vacuüm bij kamertemperatuur en bij lage temperaturen. We konden concluderen uit de metingen, dat het van belang is om goed af te pompen, dus een goed vacuüm te creëren en om de trildraad goed af te koelen, omdat de breedte van de piek daar sterk van afhangt. In een latere run zijn betere metingen gedaan, daarvan nu het resultaat (fig 5.7).

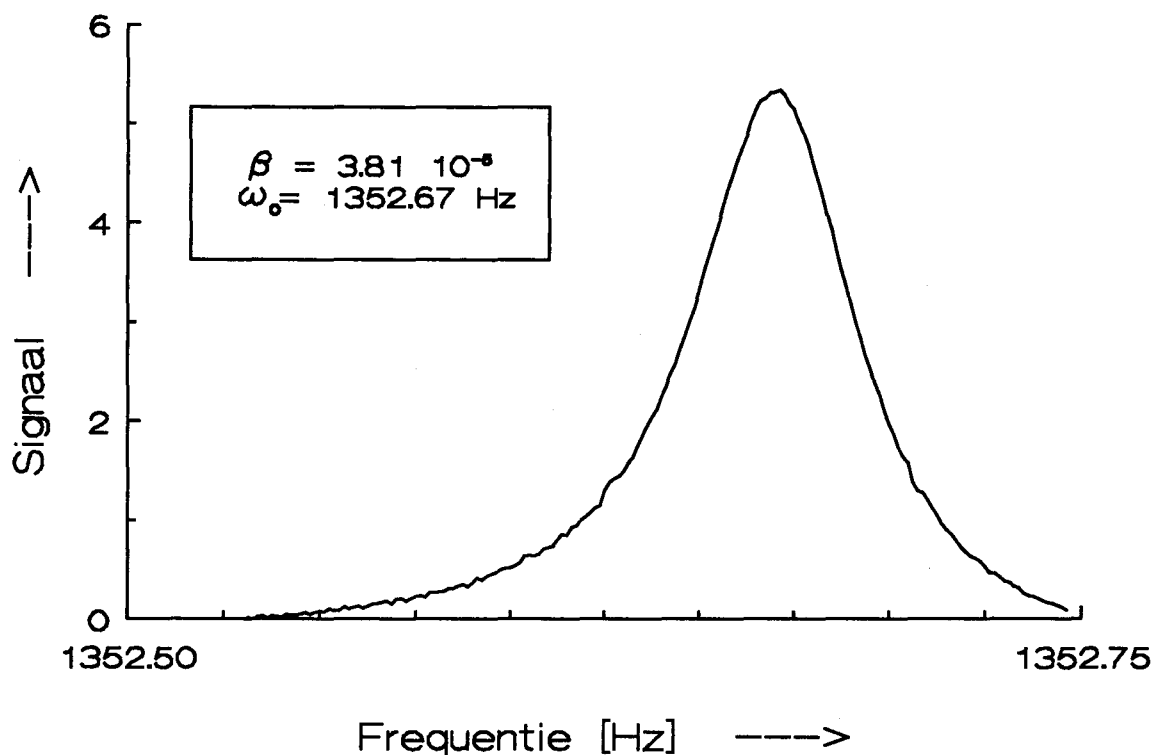


Fig 5.7 *Het tdv-sigitaal als functie van de frequentie. De berekende β en ω_0 zijn in de figuur aangegeven.*

We zien, dat de piek erg smal is (50 mHz), wat een gevolg is van het goed afkoelen van de trildraad. Als we de draad niet goed afkoelen of als het vacuüm niet goed is, kunnen we waarden van 100 mHz verkrijgen. Bij kamertemperatuur en in vacuüm is zelfs een breedte van 2.5 Hz gemeten. We berekenen dan automatisch ook een te grote β (zie formule (3-9)), wat de latere berekening van de viscositeit van het helium beïnvloedt (zie hoofdstuk 3).

Tijdens een expansie is nu de hoogte van heliumniveau in het ^4He -vat gevolgd. Hierin is een minieme knik te ontdekken, zoals dat ook het geval was in het expansievat op het moment dat de geconcentreerde fase verdwijnt (zie § 5.2). We verwachten dat ook, omdat dan namelijk de osmotische druk in het expansievat zakt en daardoor de injectie langzamer zal verlopen. Omdat we tijdens deze run geen hoogtemeter in het expansievat hadden, kunnen we hier verder geen uitspraak over doen.

§ 5.3 De andere runs.

In run 323 en 324 zijn nog expansies gedaan, maar vanwege het niet goed voor te koelen expansievat zijn deze resultaten hier niet interessant. Wel kan hier even gememoreerd worden, dat er veel metingen zijn gedaan met de in § 3.1 beschreven TDV in het heliummengsel. Bij bijvoorbeeld 215 mK zijn metingen gedaan, maar deze bleken bij dezelfde temperatuur een η te leveren, die ruim 15% varieerde. Hieruit blijkt, dat met behulp van de TDV de temperatuur niet goed te bepalen bij hoge temperaturen.

Uit latere metingen moet blijken of dit bij lage temperaturen wél het geval is.

Vóór run 323 is een programma ontwikkeld, waarmee de metingen geautomatiseerd kunnen worden door de PC en te volgen zijn op het beeldscherm. Hiermee worden ook de TDV-scans uitgevoerd, met toe- of afnemende frequentie. In de appendix staat in het kort uitgelegd, wat de mogelijkheden van het programma zijn.

Ook zijn er nog metingen uitgevoerd met een condensator om de concentratie ^3He te bepalen van het mengsel in het expansievat. In hoofdstuk 2 hebben we al gezien, dat de verschillen in de capaciteit uiterst miniem zijn door concentratieverschillen. Verschillen in de capaciteit bleken tijdens de runs goed te meten te zijn, maar echte resultaten zijn met deze condensator nog niet bepaald.

In run 325 zijn weerstanden geijkt (§ 2.5) en in run 326 zijn geen experimenten uitgevoerd, omdat al in het beginstadium van de run bleek, dat we een lek hadden in het systeem. Verdere pogingen zijn daarom niet gedaan.

Hoofdstuk 6 Conclusies en suggesties voor vervolgonderzoek.

§ 6.1 Conclusies.

Met behulp van de beschreven opstelling is het mogelijk een expansie van ^3He in ^4He uit te voeren. Deze expansie vindt niet adiabatisch plaats, vanwege warmtelekken via het superlek, bedradingen, toevoerleidingen en via de heatswitch. Toch is een temperatuursreductie gevonden van 3.2, waarmee 21.5 mK is behaald. Het superlek, waardoor het superfluïde ^4He naar het expansievat stroomt heeft nu een zeer gunstige geometrie, omdat het uit twee delen bestaat. Een gedeelte, waar het ijzeroxidepoeder goed aangestampt is, waardoor het geen normale component doorlaat en een gedeelte, waar de doorsnede van de wand zeer klein is, zodat het warmtelek naar het expansievat klein is.

Met behulp van een computerprogramma is de meting bijna geheel geautomatiseerd en kunnen de temperaturen gemeten worden met behulp van speerweerstand, kan het heliumniveau in de vaatjes worden afgelezen door capaciteitsmetingen en zijn eventuele concentratieverschillen van het ^3He van het mengsel te bepalen. Dit laatste is wel moeilijk, omdat de capaciteitsverschillen gering zijn en ruis de metingen bemoeilijkt.

Het programma, waarmee numeriek de expansie wordt berekend, werkt goed. We hebben gezien, dat de praktisch snelste injectie (20 minuten) bij de temperatuur waar wij mee beginnen (± 70 mK) zo snel is, dat ineffektief gekoeld wordt.

Tenslotte zijn metingen verricht met de TDV, waaruit bleek, dat bij hoge temperaturen de metingen geen betrouwbare viscositeit leverden, omdat hierin bij dezelfde temperatuur variaties optraden van 15%. Opgemerkt moet worden, dat een scan met de TDV zeer langzaam uitgevoerd moet worden, omdat anders het signaal niet correct is. Metingen bij lage temperatuur zijn niet uitgevoerd, omdat we vanwege een lek in het mengkoelersysteem niet meer beneden de 100 mK zijn gekomen. Met behulp van de in hoofdstuk 3 beschreven fitprocedure zijn oude metingen op een nettere manier verwerkt en de conclusie is dat de resultaten afwijken van de theorie. Het verband tussen temperatuur en viscositeit is niet kwadratisch, maar heeft een macht van 1.8. Ook bij een lage temperatuur is er nog een grote scattering gevonden in de viscositeitswaarden.

§ 6.2 Suggesties voor vervolgonderzoek.

De heatswitch, die in de opstelling gebruikt wordt om het thermisch contact tussen het expansievat en de mengkamer te leggen of verbreken, kan verbeterd worden door een andere geometrie te kiezen. Zeker als de temperatuur van het expansievat lager wordt dan van de mengkamer, moet het thermisch contact tussen beide veel slechter zijn bij een switch in de open-stand. Daarom zou de in § 2.3 voorgestelde switch gemaakt en onderzocht kunnen worden.

De TDV is een meetinstrument, dat in de toekomst goed te gebruiken is als 'snelle' thermometer, omdat het instantaan de viscositeit en daarmee de temperatuur van het helium kan volgen. Er moeten in de toekomst nog wel goede ijkingen gedaan worden bij lagere temperaturen door heel langzaam te scannen (>10 minuten) om daaruit de temperatuur vast te kunnen stellen.

In het numerieke programma zijn reeds veranderingen aangebracht, zoals het bekijken van de

invloed van warmtelekken en de fit van de warmtegeleidingscoëfficiënt met de werkelijke waarde. Ook zou nog een fit gemaakt kunnen worden van de soortelijke warmte van het helium.

Door een betere thermische verbinding van het ^4He -vat met de verdamper te realiseren, is het mogelijk het ^4He sneller te injecteren. Hiermee zou de invloed van grote warmtelekken naar het expansievat kunnen worden vermeden. Een nadeel is dan dat door snelle koeling aan de fasegrens de koudeproductie niet optimaal zal zijn en deze verandering is daarom voorlopig nog niet wenselijk.

Literatuurlijst.

- [Bla-71] M. A. Black, The viscosity of liquid helium 3,
J. Phys. C 4, 129, 1971
- [Con-70] R. R. Conté, Eléments de Cryogénie, Masson & C^{ie} Éditeurs,
Paris, 1970
- [Cra-84] J. Crank, Free and moving boundary problems, Clarendon Press,
Oxford, 1984
- [Gij-88] Prof. Gijsman, Colledictaat Kryogene Technieken,
nr. 3315, 1988
- [Goo-68] J. M. Goodwin, proefschrift, University of Washington, 1968
- [Jac-91] M. Jacobs, Stageverslag, Adiabatische expansie van ³He in superfluïde ⁴He,
mei 1991
- [Jen-91] H. Jenniskens, Stageverslag, berekeningen aan de adiabatische
expansie van ³He in superfluïde ⁴He, mei 1991
- [Kru-91] P. Krutzen, Stageverslag, optimalisatie injectietijd voor adiabatische expansie
van ³He in superfluïde ⁴He, juli 1991
- [Kue-87] J. M. G. Kuerten, proefschrift TU Eindhoven, 1987
- [Lou-74] O. V. Lounaasma, Experimental principles and methods below 1 K,
Academic Press Inc, New York, 1974
- [Mue-78] R. M. Mueller, Superconducting aluminium heat switch and plated presscontacts for
use at ultralow temperatures, Rev. Sci. Instrum. 49(4), 1978.
- [Ree-83] R. P. Reed and A. F. Clark, Materials at low temperatures,
National Bureau of Standards, Boulder Colorado, 1983
- [Zee-91] J. Zeegers, proefschrift TU Eindhoven, 1991

Appendix I Automatisering metingen en resultaten.

Met behulp van een in ASYST geschreven programma kan een expansie (of andere experimenten) gevolgd worden op het beeldscherm en kan de meting gestuurd worden. Via een IEEE-bus en een RS232-bus kan met de verschillende apparaten gecommuniceerd worden. Zo kunnen de Speerweerstandjes gemeten worden, waarna automatisch de weerstand via een polynoomfit omgerekend wordt naar een temperatuur. De vloeistofnivo's kunnen worden berekend door de capaciteiten te meten van de condensatoren, die in de potjes zitten. De uitgelezen resultaten kunnen worden opgeslagen en oude resultaten opgevraagd worden. Tenslotte kan ook de viscositeit worden berekend uit een TDV-meting in combinatie met een meting gedaan in vacuüm.

Hieronder zullen de mogelijkheden van het programma kort uit de doeken worden gedaan door de functietoetsen te bespreken:

- [F3] **scan.tdv** Met behulp van deze toets kan één enkele meting met de TDV opgestart worden. Voor de keuze van deze toets kunnen alle parameters voor de meting worden ingesteld met behulp van param.set onder F4.
- [F4] **param.set** Met param.set kunnen alle benodigde parameters voor een meting met de TDV worden ingesteld. Bijvoorbeeld begin- en eindfrequentie van de scan en het aantal meetpunten.
- [F5] **show.scan.tdv** Hiermee kan een meting, die gedaan is in beeld worden gebracht. Het signaal van de lock-in als functie van de frequentie en de gegevens van de scan.
- [F7] **film** Met film wordt een geladen meting op het scherm getoond, zoals het zich in de loop van de tijd heeft afgespeeld. Hierbij kan de afspeeltijd worden ingesteld.
- [F8] **convert.R.to.T** Deze procedure maakt het mogelijk te bekijken welke temperatuur hoort bij een gemeten weerstand. Met behulp van een eerder gedane fit wordt de weerstand omgerekend.
- [F9] **show.results** Hiermee worden de zojuist gemeten grootheden (max. 3) getoond als functie van de meettijd. Hier wordt nu niet bijvoorbeeld de temperatuur afgebeeld, maar de gemeten grootheid, in dit geval de weerstand.
- [F10] **measure.all** Met behulp van deze procedure wordt een meting gestart. Alle aangebrachte weerstandjes en capaciteiten alsmede de TDV kunnen ingesteld worden. Ook is het mogelijk de uitleestijd in te stellen, bijvoorbeeld om de weerstandsbrug de tijd te geven de goede weerstand van een speewerstand aan te geven. Deze Speers hebben namelijk een lange relaxatietijd.
- [^F1] **bereken.eta** Hiermee wordt eerst een 'vacuümmeting' geladen en β en ω_0 bepaald en vervolgens een viscositeitsmeting geladen en de viscositeit bepaald, waaruit de temperatuur wordt berekend.
- [^F3] **save.scan.tdv** Een meting met de TDV (F3) wordt gesaved op schijf.
- [^F4] **load.scan.tdv** Een oude meting met de TDV wordt geladen in het geheugen en getoond op het scherm.
- [^F6] **save.results** Een meting (F10) van de Speers, condensatoren en TDV wordt gesaved op schijf.
- [^F7] **load.results** Een oude meting wordt geladen in het geheugen en kan zichtbaar worden gemaakt met F7 of F9.

Appendix II Viscositeit gemeten door de TDV's.

Hieronder wordt voor de 3 TDV's uit run 316 de gemeten viscositeit als functie van de temperatuur weergegeven (fig A.1-A.3). In hoofdstuk 3, fig 3.4 is de meting gemiddeld over de 3 TDV's. In tabel A.1 worden enkele gegevens van de 3 TDV's vermeld.

TDV	ρ_w [kg/m ³]	d_w [μ m]	r [mm]	B [mT]	f_0 [Hz]
I (fig A1)	22659 (Ir)	101	5.0	80	1353.38
II (fig A2)	16754 (Ta)	249	12.0	17	410.26
III (fig A3)	16754 (Ta)	101	5.0	30	962.54

Tabel A.1 Gegevens van de 3 TDV's. (De dichtheid, diameter van de trildraad, straal van de boog, het magneetveld en de resonantiefrequentie in vacuüm).

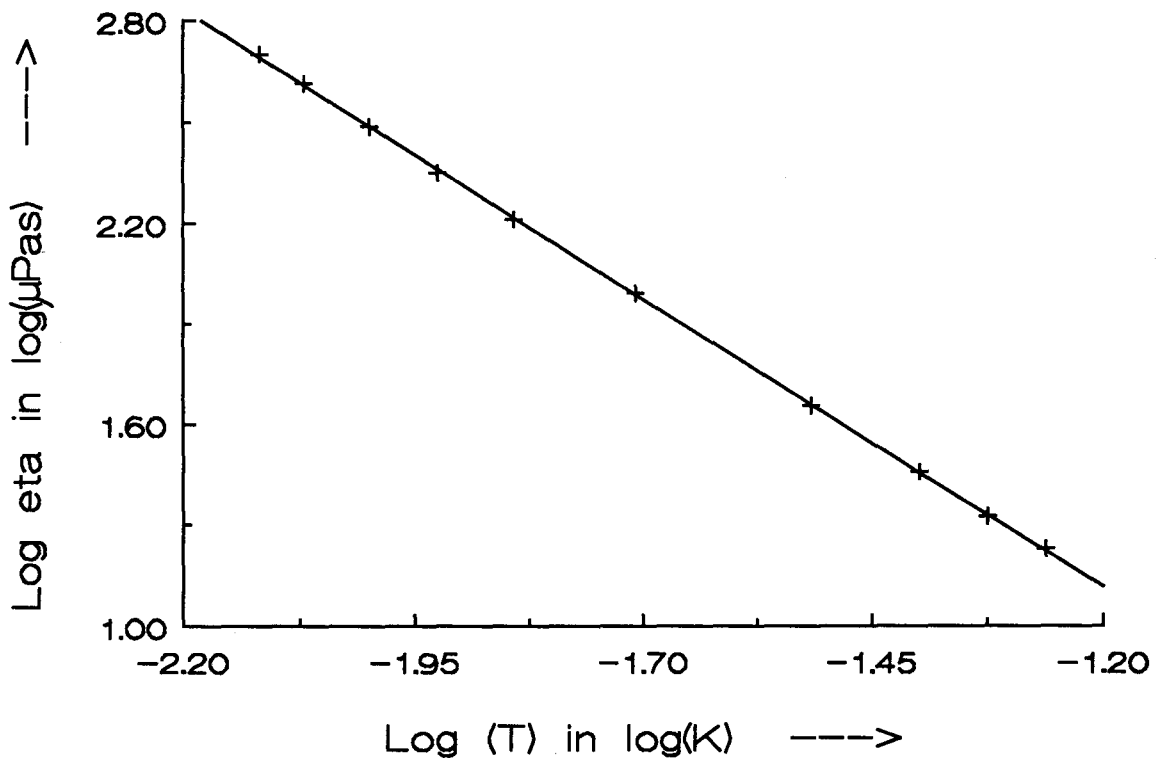


Fig A.1 Verband tussen de viscositeit en de temperatuur voor TDV-I.
 $\eta = 1.13 \cdot 10^{-7} T^{1.72}$.

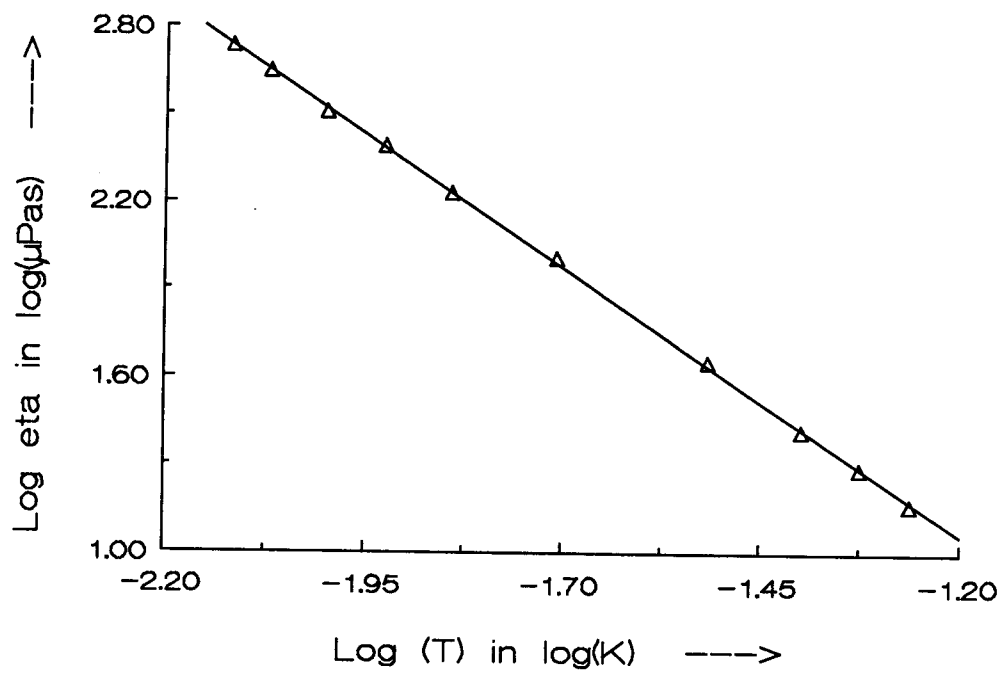


Fig A.2 *Verband tussen de viscositeit en de temperatuur voor TDV-II.*
 $\eta = 7.44 \cdot 10^{-8} / T^{1.83}$.

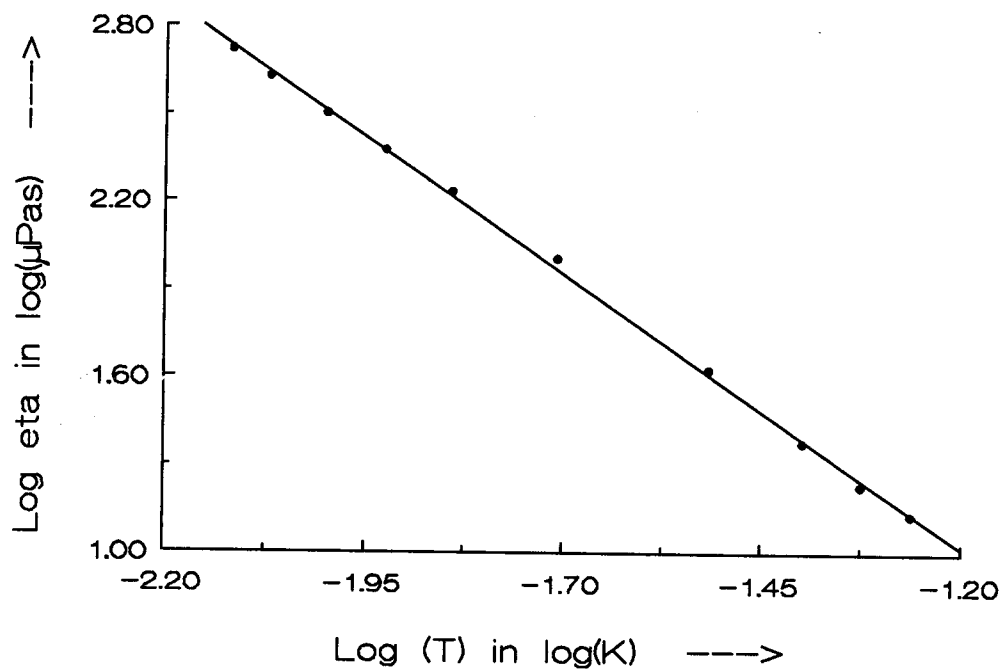


Fig A.3 *Verband tussen de viscositeit en de temperatuur voor TDV-III.*
 $\eta = 6.01 \cdot 10^{-8} / T^{1.87}$.

Appendix III Berekening van een temperatuurprofiel

In de onderstaande figuur is een berekening van het temperatuurprofiel op verschillende tijdstippen gedurende een expansie weergegeven. Er is uitgegaan van een beginsituatie van 1 cm geconcentreerd ^3He en een begintemperatuur van 50 mK. De injectietijd is 20 minuten.

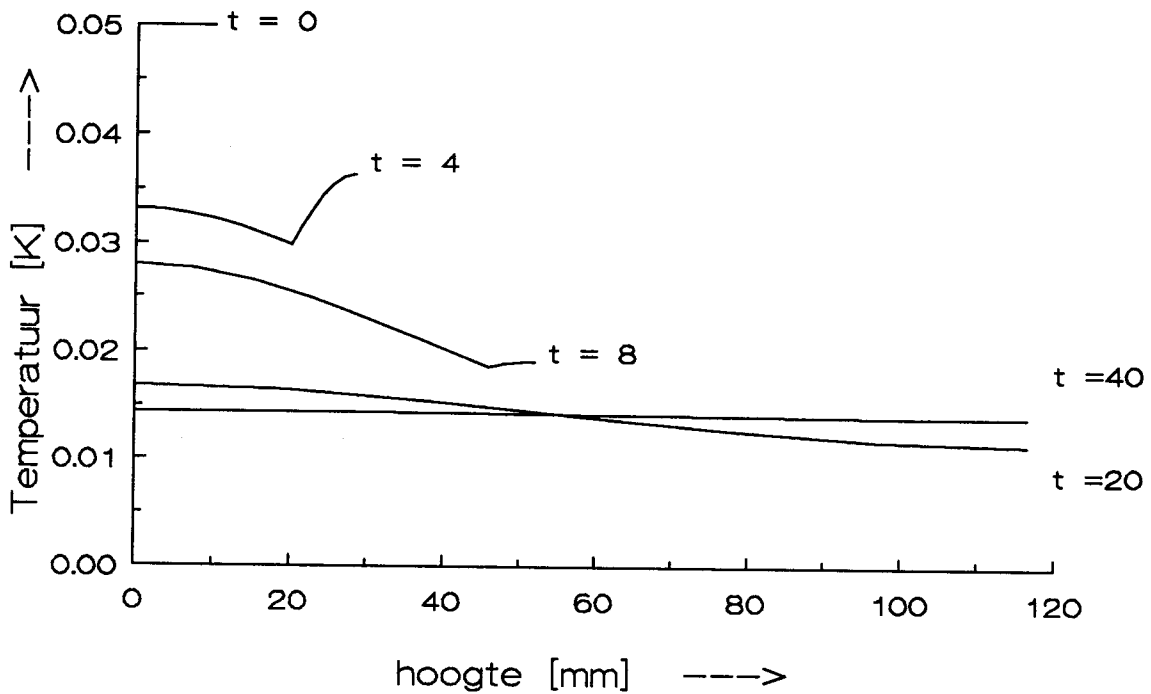


Fig A.4 Temperatuurprofielen op verschillende tijdstippen (in min.) gedurende een injectie.

Ter hoogte nul in het expansievat, hoogte=0 mm, bevindt zich de bodem en links (t.o.v. de knik in het profiel) is de verdunde fase en rechts de geconcentreerde fase aangegeven. Na de injectie is gedurende een zelfde periode de uitmiddeling van de temperatuur berekend.

Nawoord

Op het eind van mijn verslag wil ik van de gelegenheid gebruik maken een aantal mensen nog even te bedanken.

Ten eerste Ton voor de goede begeleiding en de prettige samenwerking. Fons voor de begeleiding en de deskundige adviezen. En verder de andere leden van de vakgroep, Leo en Loek, die zorgden voor de technische hulp en het kryogeen duo Jos en Wil voor het helium en stikstof.

Tot slot wil ik eindigen met een rake uitspraak van Leo, die de problemen met de opstelling goed onder woorden wist te brengen:

'Beter een ons geluk dan een kilo hersens.'